



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Campus de São José do Rio Preto

Ana Livia Rodero

# Ciclos Limite e suas Configurações em Campos de Vetores Polinomiais Planares

São José do Rio Preto

2017

**Ana Livia Rodero**

Ciclos Limite e suas Configurações em Campos de Vetores Polinomiais  
Planares

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Sistemas Dinâmicos, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof. Dr. Weber Flávio Pereira

São José do Rio Preto

2017

Rodero, Ana Livia.

Ciclos limite e suas configurações em campos de vetores polinomiais planares / Ana Livia Rodero. -- São José do Rio Preto, 2017  
80 f. : il.

Orientador: Weber Flávio Pereira

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Teoria dos sistemas dinâmicos. 3. Geometria.  
4. Topologia. 5. Ciclo limite. 6. Teoria da bifurcação. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE  
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

**Ana Livia Rodero**

Ciclos Limite e suas Configurações em Campos de Vetores Polinomiais  
Planares

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Sistema Dinâmicos, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

**BANCA EXAMINADORA**

Prof. Dr. Weber Flávio Pereira  
Professor Assistente Doutor  
UNESP - São José do Rio Preto  
Orientador

Profa. Dra. Luci Any Francisco Roberto  
Professor Assistente Doutor  
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Maurício Firmino Silva Lima  
Professor Associado 2  
Universidade Federal do ABC

São José do Rio Preto, 23 de fevereiro de 2017.

*Dedico à minha  
família.*

# Agradecimentos

---

---

Agradeço aos meus pais Ana e Pedro e ao meu irmão Gabriel pelo amor e carinho com que fui criada, pela família e base que trago comigo e pelo apoio incondicional.

Ao Luiz Fernando pelo cuidado, amor e paciência e também à sua família.

Ao Caju e à Lori, por não comerem este trabalho.

Aos amigos que fiz na graduação e na pós-graduação, e se fazem presente até hoje, que me proporcionaram momentos de estudo, lazer e descontração além de todas as conversas e conselhos, em especial à Gabriela, Natália, Juliana, Bruna, Helo, Otávio, Eliton, Carol e Bruno e aos que fizeram parte do PET-Matemática entre 2012 e 2014, em especial aos amigos Fred, Wender, Raul e Wesley e aos tutores Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade e Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio pelo carinho e ensinamentos.

Ao Prof. Dr. Weber Flávio Pereira por me orientar durante toda a minha vida acadêmica e, em especial, neste trabalho. Pelos ensinamentos, paciência, dedicação e atenção durante todos esses anos.

À todos os professores que fizeram parte da minha formação: não seria o que sou hoje sem vocês. Em especial ao Prof. Hermes, de Aramina, por me inspirar a ser uma pessoa melhor e aos professores já citados.

À banca examinadora, Profa. Dra. Luci Any Francisco Roberto e Prof. Dr. Maurício Firmino Silva Lima, pela disponibilidade.

À todos que contribuíram, de alguma forma, para que eu concluísse esse trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Por último, e não menos importante, à Deus, pela vida.

*“Você pode sonhar, criar e  
construir o lugar mais  
maravilhoso do mundo... Mas é  
necessário ter pessoas para  
transformar seu sonho em  
realidade.”*

(Walt Disney)

# Resumo

---

---

Estudamos dois critérios sobre a não existência ou existência e unicidade de ciclos limite para campos vetoriais planares. Aplicamos esses critérios em algumas famílias de campos vetoriais quadráticos e cúbicos, além de estudarmos uma fórmula explícita para o número de ciclos limite que bifurcam do centro linear  $\dot{x} = -y$ ,  $\dot{y} = x$ , quando o perturbamos com um campo vetorial polinomial arbitrário de grau  $n$  tendo a origem como um ponto singular, obtendo assim o sistema perturbado  $\dot{x} = -y + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n a_{ij}x^i y^j$ ,  $\dot{y} = x + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n b_{ij}x^i y^j$ . Usando o segundo critério, exibimos a configuração dos ciclos limite que bifurcam deste centro. Por fim, apresentamos uma segunda aplicação do segundo critério, onde mostramos que toda configuração finita de curvas fechadas simples do plano é topologicamente realizável como um conjunto de ciclos limite de um campo vetorial polinomial planar.

**Palavras-chave:** Ciclos limite, Centro linear, Bifurcações.

# *Abstract*

---

---

We study two criteria about the nonexistence or existence and uniqueness of limit cycles of planar vector fields. We apply these criteria to some families of quadratic and cubic polynomial vector fields. In addition to studying an explicit formula for the number of limit cycles which bifurcate out of the linear center  $\dot{x} = -y$ ,  $\dot{y} = x$ , when we perturb it by an arbitrary polynomial vector field of degree  $n$  having the origin as a singular point, getting the perturbed system  $\dot{x} = -y + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n a_{ij}x^i y^j$ ,  $\dot{y} = x + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n b_{ij}x^i y^j$ . By the second criterion, we present the shape of the bifurcated limit cycles of this center. Finally, we present a second application of the second criterion, where we show that every finite configuration of disjoint simple closed curves of the plane is topologically realizable as the set of limit cycles of a planar polynomial vector field.

**Keywords:** Limit cycles, Linear center, Bifurcations.

# Lista de Figuras

---

---

1.1	O Teorema do Fluxo Tubular. . . . .	19
1.2	O Teorema de Grobman-Hartman. . . . .	21
1.3	Aplicação de primeiro retorno de Poincaré para um campo vetorial planar. . . . .	22
1.4	Um conjunto $\omega$ -limite desconexo. . . . .	26
1.5	Sequência monótona dos retornos. . . . .	27
1.6	O que não ocorre em um fluxo que preserva área. . . . .	32
1.7	Um fluxo que preserva área . . . . .	33
2.1	Campo de vetores e ciclo limite $\gamma$ do Exemplo 2.11. . . . .	47
2.2	Campo de vetores e ciclo limite $\gamma$ do Exemplo 2.12. . . . .	48
2.3	Campo de vetores e ciclo limite $\gamma$ do Exemplo 2.13. . . . .	48
3.1	Configuração $C$ do Exemplo 3.12. . . . .	75
3.2	Campo vetorial que realiza a configuração $C$ do Exemplo 3.12. . . . .	75
3.3	Configuração $C$ do Exemplo 3.13. . . . .	77
3.4	Campo vetorial que realiza a configuração $C$ do Exemplo 3.13. . . . .	77

# Sumário

---

---

<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 Resultados Preliminares</b>	<b>15</b>
1.1 Campos Vetoriais e Fluxos . . . . .	15
1.2 Equivalência e conjugação de campos vetoriais e estrutura local de singularidades hiperbólicas . . . . .	17
1.3 Aplicação de Primeiro Retorno de Poincaré e Índice de Estabilidade . . . . .	21
1.4 Conjuntos $\omega$ -limite e $\alpha$ -limite . . . . .	24
1.5 Integral Primeira e Sistemas Hamiltonianos . . . . .	29
1.6 Fator Integrante e Fator Integrante Inverso . . . . .	34
<b>2 Critérios Sobre a Existência de Ciclos Limite</b>	<b>36</b>
2.1 Primeiro Critério . . . . .	36
2.2 Ciclos Limite em Sistemas Quadráticos . . . . .	39
2.3 Ciclos Limite em Sistemas de Vorobev . . . . .	42
2.4 Segundo Critério . . . . .	48
<b>3 Bifurcações e Configurações de Ciclos Limite</b>	<b>54</b>
3.1 Bifurcações de Ciclos Limite a partir de centros . . . . .	54
3.2 Configurações de Ciclos Limite em Campos Vetoriais Planares . . . . .	67
<b>Referências</b>	<b>78</b>

# Introdução

---

---

Numa primeira parte desse trabalho, estudamos dois critérios sobre a não existência ou existência e unicidade de ciclos limite para campos vetoriais planares que é uma parte interessante da pesquisa em teoria qualitativa das equações diferenciais. Poincaré foi quem definiu ciclos limite para campos vetoriais planares em [22], que consiste de uma trajetória fechada e isolada, no conjunto de todas trajetórias fechadas. Dentro da teoria qualitativa de sistemas dinâmicos, a pesquisa por ciclos limite é um problema que gerou e gera muitos trabalhos científicos até hoje.

No final da década de 1920 van der Pol [23], Lienard [18] e Andronov [2] mostraram que uma trajetória fechada de um oscilador auto sustentável ocorrendo em um circuito no vácuo era um ciclo limite como definido por Poincaré. Após essa observação a não existência ou existência e unicidade, entre outras propriedades dos ciclos limite, começaram a ser estudadas extensivamente por matemáticos, físicos e, mais recentemente, por químicos, biólogos e economistas.

O método mais conhecido para provar a não existência de ciclos limite em uma região simplesmente conexa é o método de Bendixson-Dulac e suas variações. Com o método de Dulac também podemos obter um limite superior para o número de trajetórias fechadas em uma região multiplamente conexa, para mais detalhes ver [30]. Outro teorema bem conhecido na área é o de Poincaré Bendixon, com ele podemos mostrar a existência de ciclos limite, dadas algumas condições.

Problemas relacionados a unicidade de um ciclo limite para um dado sistema são, em geral, mais complicados do que problemas sobre existência dos mesmos. Alguns critérios sobre unicidade de ciclos limite utilizam suas estabilidade ou instabilidade. Existem métodos sobre a unicidade de ciclos limite desenvolvidos por Poincaré, Andronov, Cherkas, Levinson, Leontovich, Liénard, Massera, Sansone, Zhang Zhifen e muitos outros autores, ver [30] para

mais detalhes, mas, em geral, as condições para esses métodos são muito restritivas. Além disso, um dos melhores métodos para estudar a não existência ou existência e unicidade de ciclos limite é analisando a aplicação de primeiro retorno de Poincaré definida em uma seção transversal do fluxo planar mas, em geral, tal análise é muito difícil.

Outros problemas surgem quando um sistema planar tem mais do que um ciclo limite e queremos entender sua distribuição no plano. Em 1900, Hilbert (ver [15]), na segunda parte do seu décimo sexto problema, propôs o problema mais famoso sobre ciclos limite: encontrar uma estimativa para o limitante superior do número de ciclos limite que pode ocorrer em um campo vetorial polinomial de grau  $n$  e estudar sua configuração no plano. Em 1986, Bamon (ver [5]) provou que campos vetoriais planares quadráticos tem um número finito de ciclos limite. Posteriormente, Écalle (ver [10]) e Ilyashenko (ver [16]) provaram que qualquer campo vetorial polinomial tem um número finito de ciclos limite, sendo esses os resultados mais significativos em resposta ao décimo sexto problema de Hilbert até então e, dessa forma, tal problema continua em aberto, exceto para campos vetoriais quadráticos.

Um outro problema bastante relevante da área é o de estudar o número de ciclos limite que bifurcam de um ponto singular ou de um centro.

Estruturamos esta dissertação da seguinte forma.

No capítulo 1, apresentamos algumas definições e teoremas clássicos da área, sendo que alguns deles serão importantes para a compreensão dos demais capítulos.

No capítulo 2, apresentamos dois critérios sobre a não existência ou existência e unicidade de ciclos limite para campos vetoriais planares, a saber.

**Teorema 0.1** (Primeiro Critério). *Sejam  $(P, Q)$  um campo vetorial  $C^1$  definido em um subconjunto aberto  $U$  do  $\mathbb{R}^2$ ,  $(u(t), v(t))$  uma solução periódica de  $(P, Q)$  de período  $T$ ,  $R : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação  $C^1$  tal que  $\int_0^T R(u(t), v(t)) dt \neq 0$  e  $V = V(x, y)$  uma solução  $C^1$  da equação diferencial parcial*

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = RV.$$

*Então, a trajetória fechada  $\gamma = \{(u(t), v(t)) \in U; t \in [0, T]\}$  está contida em  $\Sigma = \{(x, y) \in U; V(x, y) = 0\}$ , e não está contida em um anel periódico do campo  $(P, Q)$ . Além disso, se o campo de vetores  $(P, Q)$  é analítico, então  $\gamma$  é um ciclo limite.*

**Teorema 0.2** (Segundo Critério). *Sejam  $(P, Q)$  um campo de vetores  $C^1$  definido em um*

subconjunto aberto  $U$  do  $\mathbb{R}^2$  e  $V$  uma solução  $C^1$  da equação diferencial parcial

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V.$$

Se  $\gamma$  é um ciclo limite de  $(P, Q)$  então  $\gamma$  está contido em  $\Sigma = \{(x, y) \in U; V(x, y) = 0\}$ .

Ainda neste capítulo, aplicamos esses dois critérios para estudar algumas famílias de campos vetoriais quadráticos e cúbicos.

Por fim, no terceiro capítulo, apresentamos duas aplicações do segundo critério.

A primeira aplicação é sobre bifurcações de ciclos limite a partir do centro linear  $\dot{x} = -y$ ,  $\dot{y} = x$  quando o perturbamos com polinômios arbitrários de grau  $n$ , obtendo assim o sistema perturbado

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n a_{ij} x^i y^j, \\ \dot{y} = x + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n b_{ij} x^i y^j. \end{cases} \quad (1)$$

Com o seguinte teorema exibimos uma forma global para os ciclos limite que bifurcam deste centro, em função de  $x$ ,  $y$  e  $\varepsilon$ .

**Teorema 0.3.** *Para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, se  $p(\rho)$  tem  $h$  raízes reais simples, com  $0 \leq h \leq m$ ,  $\rho = r_i^2$ , com  $i = 1, \dots, h$  e  $\rho = 0$  também é uma raiz simples de  $p(\rho)$ , então o sistema (1) tem no máximo  $h$  ciclos limite que são assintóticos aos círculos de raio  $r_i$  centrados na origem, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

Onde  $p(\rho)$  é o polinômio de grau  $m + 1$  definido por:

$$p(\rho) = \sum_{j=0}^m p_j \rho^{j+1},$$

com

$$p_j = \frac{1}{2^j (j+1)!} \sum_{k=0}^j (2j+1-2k)!! (2k-1)!! (a_{2j+1-2k, 2k} + b_{2k, 2j+1-2k}),$$

e  $n = 2m + 1$  se  $n$  é ímpar e  $n = 2m + 2$  se  $n$  é par.

Essa forma global não pode ser obtida pelos métodos usuais aplicados para bifurcações de ciclos limite a partir de centros, como os métodos baseados na aplicação de primeiro retorno de Poincaré, na integral de Poincaré-Melnikov ou nas integrais abelianas.

A segunda aplicação é sobre configurações de ciclos limite para um campo vetorial planar. Estudamos o seguinte resultado.

---

**Teorema 0.4.** *Seja  $C = \{C_1, \dots, C_n\}$  uma configuração de ciclos limite e seja  $r$  o número de curvas primárias dessa configuração. Então:*

- (a) *A configuração  $C$  é realizável por um campo vetorial planar.*
- (b) *A configuração  $C$  é realizável como uma configuração de ciclos limite algébricos por um campo vetorial de grau menor ou igual a  $2(n + r) - 1$ .*

O problema de exibir um campo vetorial que realiza uma dada configuração de ciclos limite foi estudado por muitos autores. O caso foi resolvido, para campos de vetores  $C^r$ , por Al'mukhamedov em [1], Balibrea e Jimenez em [4] e Valeeva em [28]. O item (a) do teorema anterior foi resolvido por Schecter e Singer em [24], mas eles não exibiram um campo vetorial que realizava tal configuração.

---

# Resultados Preliminares

---

Neste capítulo, apresentaremos alguns dos principais resultados da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias (para mais detalhes ver, por exemplo, [8], [9] ou [25]). Esses resultados serão necessários para uma melhor compreensão do restante do texto. Não nos preocuparemos em demonstrar todos eles porém, nesses casos omissos, apresentaremos as referências para tal demonstração.

No decorrer deste capítulo,  $U$  sempre denotará um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^2$ .

## 1.1 Campos Vetoriais e Fluxos

**Definição 1.1.** *Um campo vetorial planar de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , em  $U$ , é uma aplicação  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^r$ . Sua representação gráfica consiste em plotar em cada ponto  $x \in U$ , o vetor  $X(x)$ .*

Associado ao campo de vetores  $X$  temos um sistema de equações diferenciais ordinárias da forma

$$\dot{x} = X(x), \tag{1.1}$$

onde o ponto indica a derivada de  $x$  com relação a variável  $t$ . Dizemos que  $x$  é uma variável dependente enquanto  $t$  é uma variável independente.

As soluções desse sistema são curvas diferenciáveis  $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$  que para cada  $t \in I$  associam  $\phi(t) \in U$  tal que

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = X(\phi(t)). \tag{1.2}$$

**Definição 1.2.** *Seja  $p \in U$ . Se  $X(p) = 0$  dizemos que  $p$  é um ponto singular de  $X$ . Caso contrário, dizemos que  $p$  é um ponto regular de  $X$ .*

Note que, se  $p \in U$  é um ponto singular de  $X$ , então  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow U$  dada por  $\phi(t) = p$ , é uma solução do sistema (1.1), pois

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = 0 = X(\phi(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Definição 1.3.** *Seja  $\phi : I \rightarrow U$  uma solução de (1.1) com  $\phi(0) = p \in U$ . Dizemos que a solução  $\phi$  é maximal se para toda solução  $\psi : J \rightarrow U$ , de (1.1), com  $I \subseteq J$  e  $\psi|_I = \phi$  tivermos  $I = J$  e, conseqüentemente,  $\psi = \phi$ . Nesse caso, escrevemos  $I = I_p$  e chamamos  $I$  de intervalo maximal.*

**Definição 1.4.** *Seja  $\phi : I_p \rightarrow U$  uma solução maximal do sistema (1.1) que pode ser regular ou constante. Sua imagem  $\gamma = \{\phi(t); t \in I_p\} \in U$ , dotada com a orientação induzida de  $\phi$ , no caso em que  $\phi$  é regular, é chamada de trajetória, ou órbita ou curva integral associada a solução maximal  $\phi$ .*

**Teorema 1.5.** *Seja  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^r$ , com  $1 \leq r \leq \infty$  ou  $r = \omega$ , caso em que  $X$  é analítico. Então:*

- (a) *(Existência e unicidade de soluções maximais). Para todo  $x \in U$  existe um intervalo aberto  $I_x$  e uma única solução maximal  $\phi_x : I_x \rightarrow U$  satisfazendo  $\phi_x(0) = x$ .*
- (b) *(Propriedade de grupo). Se  $y = \phi_x(t)$  e  $t \in I_x$  então  $I_y = I_x - t = \{r - t; r \in I_x\}$ . Além disso,  $\phi_y(s) = \phi_x(t + s)$ ,  $\forall s \in I_y$ .*
- (c) *(Diferenciabilidade com relação as condições iniciais). Seja  $\Omega = \{(t, x); t \in I_x \text{ e } x \in U\}$ . Então  $\Omega$  é aberto em  $\mathbb{R}^3$  e  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\phi(t, x) = \phi_t(x)$  é de classe  $C^r$ . Além disso,*

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) \right) = DX_{\phi(t, x)} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) \right), \quad \forall (t, x) \in \Omega, \quad (1.3)$$

onde  $DX_{\phi(t, x)}$  indica o jacobiano de  $X$  em  $\phi(t, x)$ .

Para detalhes sobre a demonstração, ver [25].

**Definição 1.6.** *A aplicação  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida no item (c) do teorema anterior é chamada fluxo associado ao sistema (1.1).*

Quando  $I_x = \mathbb{R}$  para todo  $x$ , o fluxo associado ao campo vetorial  $X$  está definido em  $\Omega = \mathbb{R} \times U$ . Mas, muitas vezes,  $I_x \neq \mathbb{R}$  e, por isso, o fluxo associado a  $X$  também é chamado de fluxo local associado a  $X$ .

Se  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  o item (b) do teorema anterior define um homeomorfismo de grupos  $t \rightarrow \phi_t$  entre  $(\mathbb{R}, +)$  e o grupo dos difeomorfismos  $C^r$  de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ , com a composição, pois para cada  $t$  fixo, a aplicação  $\phi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\phi_t(x) = \phi(t, x)$  é diferenciável e possui inversa  $\phi_{-t} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $\phi_{-t}(x) = \phi(-t, x)$  e  $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ .

**Definição 1.7.** Dizemos que uma órbita é periódica se existe  $T > 0$  tal que  $\phi_x(t + T) = \phi_x(t)$ ,  $\forall t \in I_x$ . Neste caso, o menor  $T$  que satisfaz essa equação é dito o período da órbita.

**Definição 1.8.** Um ciclo limite  $\gamma$  de  $X$  é uma órbita periódica isolada de  $X$ , isto é, existe uma vizinhança  $V$  de  $\gamma$ , tal que  $\gamma$  é a única órbita fechada do campo  $X$  que intersecta  $V$ .

## 1.2 Equivalência e conjugação de campos vetoriais e estrutura local de singularidades hiperbólicas

A fim de compararmos os retratos de fase de dois campos vetoriais planares, introduziremos algumas noções de equivalência.

**Definição 1.9.** Sejam  $X_1$  e  $X_2$  campos definidos nos abertos  $U_1$  e  $U_2$  de  $\mathbb{R}^2$ , respectivamente. Dizemos que  $X_1$  e  $X_2$  são topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo  $h : U_1 \rightarrow U_2$  que leva órbitas de  $X_1$  em órbitas de  $X_2$ , preservando a orientação. O homeomorfismo  $h$  é dito uma equivalência topológica entre  $X_1$  e  $X_2$ . Se  $h$  for um difeomorfismo de classe  $C^r$ , dizemos que  $X_1$  e  $X_2$  são  $C^r$ -equivalentes.

Mais precisamente, se  $p \in U_1$  e  $\gamma(p)$  é a órbita orientada de  $X_1$  que passa por  $p$ , temos  $h(\gamma(p)) = \alpha(h(p))$ , onde  $\alpha$  é a órbita orientada de  $X_2$  que passa por  $h(p)$ .

**Definição 1.10.** Sejam  $\phi_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\phi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  os fluxos associados aos campos de vetores  $X_1$  e  $X_2$ , respectivamente. Dizemos que  $X_1$  e  $X_2$  são topologicamente conjugados se existe um homeomorfismo  $h : U_1 \rightarrow U_2$  tal que  $h(\phi_1(t, x)) = \phi_2(t, h(x))$ , para todo  $(t, x) \in \Omega_1$ . O homeomorfismo  $h$  é dito uma conjugação topológica entre  $X_1$  e  $X_2$ . Se  $h$  for um difeomorfismo de classe  $C^r$ , dizemos que  $X_1$  e  $X_2$  são  $C^r$ -conjugados e, neste caso,  $h$  é dito uma  $C^r$ -conjugação entre  $X_1$  e  $X_2$ .

As duas definições anteriores estabelecem uma relação de equivalência entre os campos  $X_1$  e  $X_2$ . Além disso, no caso da Definição 1.10 temos, necessariamente,  $I_1(x) = I_2(h(x))$ , onde  $I$  denota o intervalo maximal.

**Proposição 1.11.** *Sejam  $X_1$  e  $X_2$  campos vetoriais de classe  $C^r$  definidos nos abertos  $U_1$  e  $U_2$  de  $\mathbb{R}^2$ , respectivamente, e  $h : U_1 \rightarrow U_2$  um difeomorfismo de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Então  $h$  é uma conjugação entre  $X_1$  e  $X_2$  se, e somente se,*

$$Dh_x(X_1(x)) = X_2(h(x)), \quad (1.4)$$

para todo  $x \in U_1$ .

*Demonstração.* Sejam  $\phi_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\phi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  os fluxos associados aos campos vetoriais  $X_1$  e  $X_2$ , respectivamente.

( $\Rightarrow$ ) Como  $h$  é uma conjugação entre  $X_1$  e  $X_2$  e é diferenciável, derivando a expressão  $h(\phi_1(t, x)) = \phi_2(t, h(x))$  e avaliando em  $t = 0$ , temos:

$$\frac{d}{dt}(h(\phi_1(t, x)))|_{t=0} = Dh_{\phi_1(t, x)} \left( \frac{d}{dt}(\phi_1(t, x)) \right)|_{t=0} = Dh_{\phi_1(t, x)}(X_1(\phi_1(t, x)))|_{t=0} = Dh_x(X_1(x)).$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{dt}(\phi_2(t, h(x)))|_{t=0} = X_2(\phi_2(t, h(x)))|_{t=0} = X_2(h(x)).$$

Logo, a equação (1.4) é satisfeita.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $\psi(t) = h(\phi_1(t, x))$ , com  $t \in I_x$ . Como

$$\frac{d\psi}{dt} = Dh_{\phi_1(t, x)} \frac{d}{dt}(\phi_1(t, x)) = Dh_{\phi_1(t, x)} X_1(\phi_1(t, x)) = X_2(h(\phi_1(t, x))) = X_2(\psi(t)),$$

segue que  $\psi$  é uma solução de  $\dot{x} = X_2(x)$ ,  $x(0) = h(x)$  e, portanto,  $h(\phi_1(t, x)) = \phi_2(t, h(x))$ .  $\square$

**Observação 1.12.** *Uma equivalência  $h$  leva ponto singular em ponto singular e órbita periódica em órbita periódica. Além disso, se  $h$  for uma conjugação, o período das órbitas periódicas é preservado. Assim, toda conjugação é uma equivalência, mas o contrário não é válido.*

**Exemplo 1.13.** *Sejam  $X_1 = (y, -x)$  e  $X_2 = (2y, -2x)$ . Temos  $X_1$  e  $X_2$  são  $C^r$ -equivalentes, basta tomar  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função identidade dada por  $h(x) = x$ . Mas  $X_1$  e  $X_2$  não são conjugados, pois o período das órbitas difeomorfas não são iguais.*

**Definição 1.14.** *Seja  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Uma aplicação diferenciável  $f : A \rightarrow U$ , onde  $A$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}$  é uma seção transversal local de  $X$  quando para todo  $a \in A$  o conjunto  $\{f'(a)\alpha, X(f(a))\}$  é linearmente independente, para  $\alpha \neq 0$ . Se  $f$  é um homeomorfismo, dizemos que  $S = f(A)$  é uma seção transversal de  $X$ .*

Note que, em  $\mathbb{R}^2$  uma seção transversal  $S = f(A)$  pode ser vista como um segmento de reta, visto que  $f : A \rightarrow S$  é um homeomorfismo.

**Teorema 1.15** (Teorema do Fluxo Tubular). *Sejam  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^r$ , com  $r \geq 1$ ,  $p$  um ponto regular de  $X$  e  $f : A \rightarrow S$  uma seção transversal local de  $X$  com  $f(0) = p$ . Então existe uma vizinhança  $V_p$  de  $p$  em  $U$  e um difeomorfismo  $h : V_p \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$  de classe  $C^r$ , onde  $\varepsilon > 0$  e  $B$  é um intervalo aberto com centro na origem, tal que:*

(i)  $h(S \cap V_p) = \{0\} \times B$ ,

(ii)  $h$  é uma  $C^r$ -conjugação entre  $X|_{V_p}$  e o campo constante  $Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $Y \equiv (1, 0)$ .

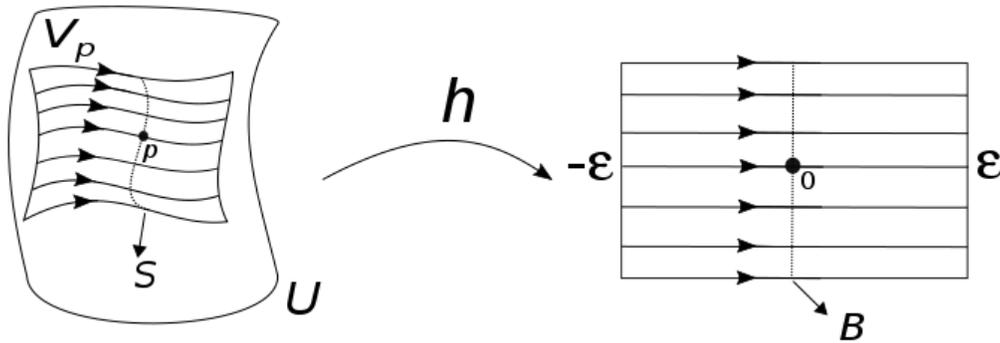


Figura 1.1: O Teorema do Fluxo Tubular.

*Demonstração.* Seja  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  o fluxo associado ao campo  $X$  e considere  $\Omega_A = \{(t, u) \in \mathbb{R}^2; (t, f(u)) \in \Omega\}$ . Defina  $F : \Omega_A \rightarrow U$  por  $F(t, u) = \phi(t, f(u))$ .

Observe que, ao fixar  $u$  a aplicação  $F$  leva retas horizontais em trajetórias de  $X$ . Além disso, temos.

$$\frac{\partial F}{\partial t}(0, 0) = \frac{d}{dt}(\phi(t, f(0)))|_{t=0} = X(p)$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial u}(0, 0) = \frac{d}{du}(F(0, u))|_{u=0} = \frac{d}{du}(f(u))|_{u=0} = f'(0).$$

Logo, como  $f$  é uma seção transversal local em  $f(0) = p$ ,  $\{f'(0), X(p)\}$  é linearmente independente e, portanto,  $DF_{(0,0)}$  é inversível. Assim, pelo Teorema da Função Inversa, existe  $\varepsilon > 0$  e  $B$  tal que  $F_{|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times B}} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow V_p$  é difeomorfismo, com  $p \in V_p$ .

Seja  $h = \left(F_{|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times B}}\right)^{-1}$ . Como  $F(\{0\} \times B) = \phi(0, f(B)) = f(B) = S \cap V_p$  então  $h(S \cap V_p) = \{0\} \times B$  e, portanto, o item (i) está provado.

Agora mostramos que  $h^{-1}$  é uma conjugação entre  $Y = (1, 0)$  e  $X$ , usando a Proposição 1.11. Temos:

$$\begin{aligned} Dh_{(t,u)}^{-1} \circ Y(t, u) &= DF_{(t,u)} \cdot (1, 0) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, u) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi(t, f(u))) = \\ &= X(\phi(t, f(u))) = X(F(t, u)) = X(h^{-1}(t, u)). \end{aligned}$$

Disso segue o item (ii). □

**Corolário 1.16.** *Seja  $S$  uma seção transversal de  $X$ . Para todo ponto  $p \in S$  existem  $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$ , uma vizinhança  $V_p$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^2$  e uma função  $\tau : V_p \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$  tais que  $\tau(V_p \cap S) = 0$  e*

- (a) *Para todo  $q \in V_p$  a curva integral  $\phi_t(q)$  de  $X|_{V_p}$  é definida e bijetora em  $J_q = (-\varepsilon + \tau(q), \varepsilon + \tau(q))$ .*
- (b)  *$\xi(q) = \phi(\tau(q), q) \in S$  é o único ponto onde  $\phi(\cdot, q)|_{J_q}$  intercepta  $S$ . Em particular,  $q \in S \cap V_p \Leftrightarrow \tau(q) = 0$ .*
- (c)  *$\xi : V \rightarrow S$  é de classe  $C^k$  e  $D\xi(q)$  é sobrejetora, para todo  $q \in V_p$ . Mais ainda,  $D\xi(q) \cdot v = 0$  se, e somente se,  $v = \alpha X(q)$ , para algum  $\alpha \in \mathbb{R}$ .*

Para mais detalhes e demonstração ver [25], página 223.

Dado um ponto regular  $p$  de um campo vetorial planar  $X$ , de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , o Teorema do Fluxo Tubular nos dá uma resposta completa sobre o comportamento do campo, em uma vizinhança de  $p$ . No entanto, em geral, este teorema não é válido em torno de um ponto singular. Quando esse ponto singular é hiperbólico o Teorema de Grobman-Hartman nos ajuda a entender o comportamento do campo  $X$  em torno dessa singularidade.

**Definição 1.17.** *Dizemos que um ponto singular  $p$ , de um campo vetorial  $X$ , de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , é hiperbólico se todos os autovalores de  $DX(p)$  tem parte real não nula.*

**Definição 1.18.** Com a notação da definição anterior, o índice de estabilidade de  $X$  em  $p$  é o número de autovalores de  $DX(p)$  que tem parte real negativa.

**Teorema 1.19** (Teorema de Grobman-Hartman). *Sejam  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^1$  e  $p$  um ponto singular hiperbólico de  $X$ . Então  $X$ , em  $p$ , é localmente topologicamente conjugado a  $DX(p) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , em 0.*

Para mais detalhes e demonstração ver [25], página 226.

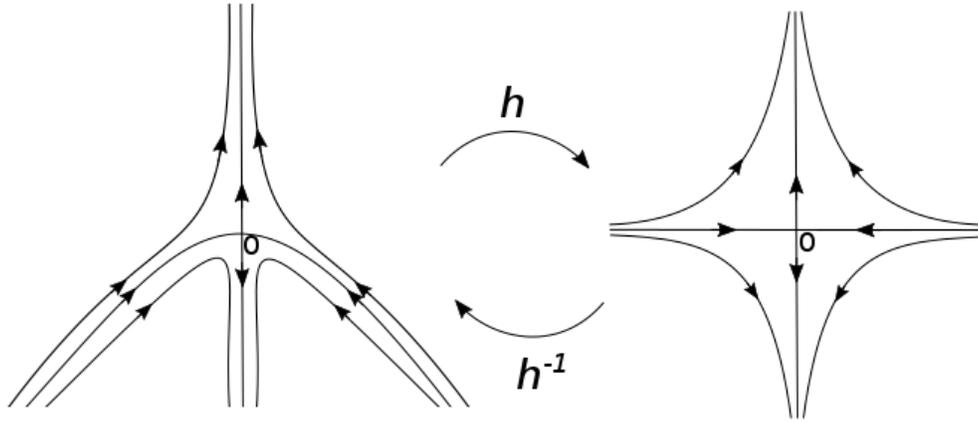


Figura 1.2: O Teorema de Grobman-Hartman.

### 1.3 Aplicação de Primeiro Retorno de Poincaré e Índice de Estabilidade

A transformação de Poincaré associada a uma órbita fechada  $\gamma$  de um campo vetorial é um difeomorfismo  $\pi$  que definiremos a seguir. Essa transformação pode ser usada para auxiliar na compreensão do comportamento do campo em uma vizinhança de  $\gamma$ .

Seja  $\gamma(t) = \{\phi_t(p), t \in [0, t_0]\}$  uma órbita periódica de período  $t_0$  de um campo vetorial  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ , de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , com  $p \in S$ , onde  $S$  é uma seção transversal a  $X$  em  $p$ . Pela continuidade do fluxo  $\phi$ , para todo  $q \in S$  suficientemente próximo de  $p$ , a trajetória  $\phi_t(q)$  permanece próxima a  $\gamma$ , onde  $t$  está em um intervalo pré-fixado. Definimos  $\pi(q)$  como o primeiro ponto onde a órbita  $\phi_t(q)$  intersecta  $S$ . Chamando o domínio de  $\pi$  de  $S_0$ , observamos que  $p \in S_0$  e  $\pi(p) = p$  (ver figura 1.3).

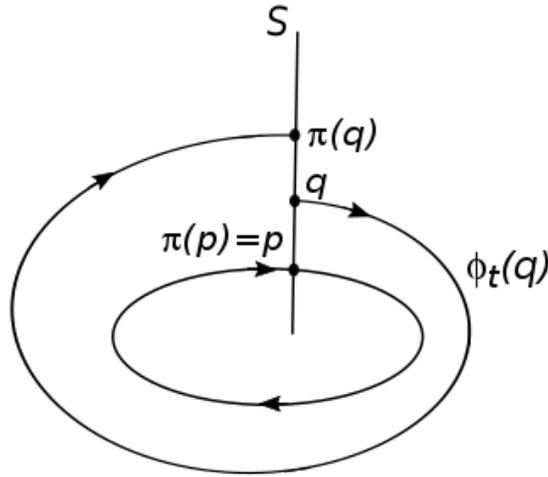


Figura 1.3: Aplicação de primeiro retorno de Poincaré para um campo vetorial planar.

Note que, algumas propriedades do campo  $X$ , próximo a  $\gamma$ , podem ser analisadas através da transformação de Poincaré  $\pi$ . Por exemplo, as órbitas periódicas de  $X$ , em uma vizinhança de  $\gamma$ , são dadas pelos pontos fixos de  $\pi$ , isto é, pelos pontos  $q \in S_0$  tal que  $\pi(q) = q$ . Além disso, o comportamento assintótico das órbitas de  $X$ , próximas a  $\gamma$ , também podem ser analisados através de  $\pi$ , já que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^n(q) = p$  implica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi_t(q), \gamma) = 0$ .

**Definição 1.20.** *Com as notações acima, uma órbita fechada  $\gamma$  é um atrator periódico quando existe uma vizinhança  $V_\gamma$  de  $\gamma$  tal que para todo  $q \in V_\gamma$  temos  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi_t(q), \gamma) = 0$ .*

Usaremos o Teorema 1.15 e o Corolário 1.16 para dar mais precisão a definição da transformação  $\pi$ .

Seja  $V_p$  a vizinhança de  $p$  dada no Corolário 1.16. Como  $\phi_{t_0}(p) = p$ , existe uma vizinhança  $S_0$  de  $p$  em  $S$  tal que  $\phi_{t_0}(q) \in V_p$ , para todo  $q \in S_0$ . Seja  $\xi : V_p \rightarrow S$  a aplicação definida no Corolário 1.16. Definimos  $\pi : S_0 \rightarrow S$  da seguinte forma

$$\pi(q) = \xi(\phi_{t_0}(q)) = \xi(\bar{q}) = \phi(\tau(\bar{q})), \quad \bar{q} \in S,$$

onde  $\bar{q} = \phi_{t_0}(q)$  e a última igualdade segue do item (b) do Corolário 1.16.

Outra expressão para a transformação  $\pi$  é dada por

$$\pi(q) = \phi(t_0 + \tau(\phi(t_0, q)), q),$$

onde  $\tau : V_p \rightarrow \mathbb{R}$  é o tempo  $\tau(x)$  que as órbitas por  $x \in V_p$  levam para retornar a  $S$ . Segue, pelo Teorema das Funções Implícitas, que  $\tau$  é de classe  $C^r$  e disso segue que  $\pi$  é da mesma classe de diferenciabilidade de  $X$ .

Para definirmos a inversa  $\pi^{-1} : S \rightarrow S_0$  de  $\pi$ , basta tomarmos o campo  $-X$ . Assim,  $\pi$  é um difeomorfismo de classe  $C^r$ .

**Definição 1.21.** *Sejam  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^1$ ,  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  o fluxo associado a  $X$  e  $C \subseteq U$ . Dizemos que  $C$  é positivamente invariante pelo fluxo  $\phi$  se  $\phi_t(C) \subseteq C$  para todo  $t \geq 0$  e que  $C$  é negativamente invariante pelo fluxo  $\phi$  se  $\phi_t(C) \subseteq C$  para todo  $t \leq 0$ . Por fim, dizemos que  $C$  é invariante pelo fluxo  $\phi$  se  $C$  é positiva e negativamente invariante.*

**Proposição 1.22.** *Sejam  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^1$ ,  $\gamma$  um ciclo limite para  $X$  e  $V_\gamma$  a vizinhança de  $\gamma$  tal que  $\gamma$  é a única órbita fechada de  $X$  que intercepta  $V_\gamma$ . Então existem apenas os seguintes tipos de ciclos limite (diminuindo  $V_\gamma$ , se necessário):*

- (a) *estável, quando  $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi_t(q), \gamma) = 0, \forall q \in V_\gamma$ ;*
- (b) *instável, quando  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi_t(q), \gamma) = 0, \forall q \in V_\gamma$ ;*
- (c) *semi-estável, quando  $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi_t(q), \gamma) = 0, \forall q \in V_\gamma \cap Ext(\gamma)$  e  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi_t(q), \gamma) = 0, \forall q \in V_\gamma \cap Int(\gamma)$ , ou o contrário, onde  $Ext(\gamma)$  corresponde ao exterior de  $\gamma$  e  $Int(\gamma)$  ao interior.*

Para mais detalhes e demonstração, ver [25], página 228.

**Observação 1.23.** *Com as notações da proposição anterior, segue que  $\gamma$  é um ciclo limite se, e somente se,  $p$  é um ponto fixo isolado de  $\pi$ . Além disso,*

- (a)  *$\gamma$  é estável  $\Leftrightarrow |\pi(x) - p| < |x - p|$ , para todo  $x \neq p$  suficientemente próximo de  $p$ ;*
- (b)  *$\gamma$  é instável  $\Leftrightarrow |\pi(x) - p| > |x - p|$ , para todo  $x \neq p$  suficientemente próximo de  $p$ ;*
- (b)  *$\gamma$  é semi-estável  $\Leftrightarrow |\pi(x) - p| < |x - p|$ , para todo  $x \in S \cap Ext(\gamma)$  suficientemente próximo de  $p$  e  $|\pi(x) - p| > |x - p|$ , para todo  $x \in S \cap Int(\gamma)$  suficientemente próximo de  $p$ , ou ao contrário.*

**Observação 1.24.** *Como  $\pi$  é diferenciável, se  $\pi'(p) < 1$  podemos concluir que  $\gamma$  é estável e se  $\pi'(p) > 1$  que  $\gamma$  é instável.*

**Definição 1.25.** *O divergente do campo  $X = (P, Q)$  é o traço da matriz jacobiana de  $X$ , ou seja,*

$$\operatorname{div}(X(x, y)) = \operatorname{tr}D(X(x, y)) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y).$$

O teorema a seguir nos dá condições sobre a estabilidade de um ciclo limite analisando o divergente do campo.

**Teorema 1.26.** *Sejam  $X = (P, Q) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^1$ ,  $\gamma$  uma órbita periódica de  $X$  de período  $T$  e  $\pi : S_0 \rightarrow S$  a transformação de Poincaré em uma seção transversal  $S$  em  $p \in \gamma$ . Então:*

$$\pi'(p) = \exp\left(\int_0^T \operatorname{div}(X(\gamma(t)))dt\right) = \exp\left(\int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x}(\gamma(t)) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\gamma(t))\right) dt\right). \quad (1.5)$$

*Em particular, fazendo  $I = \int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)(\gamma(t))dt$ , segue que  $\gamma$  é estável se  $I < 0$  e instável se  $I > 0$ .*

Para mais detalhes, ver [25], página 229.

## 1.4 Conjuntos $\omega$ -limite e $\alpha$ -limite

Sejam  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^r$  com,  $r \geq 1$ ,  $\phi(t) = \phi(t, p)$  a trajetória de  $X$  passando por  $p$  em  $t = 0$  e  $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$  o intervalo maximal de  $\phi(t, p)$ .

**Definição 1.27.** (i) *Se  $\omega_+(p) = +\infty$  definimos o conjunto  $\omega$ -limite de  $p$  por  $\omega(p) = \{q \in U; \text{ existe uma sequência } (t_n) \text{ com } t_n \rightarrow +\infty \text{ e } \phi(t_n, p) \rightarrow q\}$ .*

(ii) *Se  $\omega_-(p) = -\infty$  definimos o conjunto  $\alpha$ -limite de  $p$  por  $\alpha(p) = \{q \in U; \text{ existe uma sequência } (t_n) \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \phi(t_n, p) \rightarrow q\}$ .*

**Exemplo 1.28.** *Seja  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $X(x, y) = (x, -y)$ . Assim,  $\phi(t, p) = (c_1 e^t, c_2 e^{-t})$ . Consequentemente,*

- *Se  $p = (0, 0)$ , então  $\alpha(p) = \omega(p) = \{(0, 0)\}$ .*
- *Se  $p \in \{(x, 0); x \neq 0\}$ , então  $\alpha(p) = \{(0, 0)\}$  e  $\omega(p) = \emptyset$ .*
- *Se  $p \in \{(0, y); y \neq 0\}$ , então  $\alpha(p) = \emptyset$  e  $\omega(p) = \{(0, 0)\}$ .*
- *Se  $p \in \{(x, y); xy \neq 0\}$ , então  $\omega(p) = \alpha(p) = \emptyset$ .*

**Exemplo 1.29.** *Seja  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\phi(t, p)$  uma órbita periódica de  $X$  de período  $T$ . Então  $\omega(p) = \alpha(p) = \{\phi(t, p), t \in \mathbb{R}\}$ .*

**Proposição 1.30.** *Sejam  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$  e  $\gamma_p = \phi(t, p)$  a órbita passando por  $p$  em  $t = 0$ , onde  $p \in U$ . Se  $q \in \gamma_p$  então  $\omega(p) = \omega(q)$ .*

*Demonstração.* Como  $q \in \gamma_p$ , existe  $t \in I_p$  tal que  $q = \phi(t, p)$ . Suponha que  $v \in \omega(p)$ . Assim, existe uma sequência  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que  $\phi(t_n, p) \rightarrow v$ . Logo,

$$v = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n - t, \phi_t(p)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n - t, q).$$

Assim, existe sequência  $t_n - t \rightarrow +\infty$  tal que  $\phi(t_n - t, q) \rightarrow v$ . Portanto,  $v \in \omega(q)$  e consequentemente  $\omega(p) \subseteq \omega(q)$ . De forma análoga, mostramos a outra inclusão.  $\square$

Dessa forma, o conjunto  $\omega$ -limite é propriedade da órbita de um ponto e não apenas do ponto. Assim, podemos falar em conjunto  $\omega$ -limite de uma órbita como sendo o conjunto  $\omega$ -limite de qualquer um dos pontos da órbita.

Observe que o mesmo resultado é válido para o conjunto  $\alpha$ -limite.

De modo geral, seja  $\phi(t) = \phi(t, p)$  a trajetória de um campo vetorial  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  pelo ponto  $p \in U$  e seja  $\psi(t) = \psi(t, p)$  a trajetória do campo vetorial  $-X$  pelo ponto  $p$ . Logo  $\psi(t, p) = \phi(-t, p)$  e, consequentemente, o conjunto  $\omega$ -limite de  $\psi(t)$  é igual ao conjunto  $\alpha$ -limite de  $\phi(t)$  e o conjunto  $\alpha$ -limite de  $\psi(t)$  é igual ao conjunto  $\omega$ -limite de  $\phi(t)$ . Assim, podemos estudar as propriedades gerais dos conjuntos  $\alpha$ -limite e  $\omega$ -limite para apenas um dos conjuntos.

**Teorema 1.31.** *Sejam  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^r$ , com  $r \geq 1$  e  $\phi(t) = \phi(t, p) = \gamma_p$  a órbita que passa por  $p$  em  $t = 0$ . Se  $\gamma_p \subseteq K$ , onde  $K$  é um conjunto compacto então:*

(a)  $\omega(p) \neq \emptyset$ .

(b)  $\omega(p)$  é compacto.

(c)  $\omega(p)$  é invariante pelo fluxo, isto é, se  $q \in \omega(p)$  e  $\gamma_q$  é a trajetória que passa por  $q$ , então  $\gamma_q \subseteq \omega(p)$ .

(d)  $\omega(p)$  é conexo.

(e) Seja  $\gamma$  uma trajetória de  $X$ . Se  $\omega(\gamma) \subset \gamma$ , então  $\omega(\gamma) = \gamma$  e  $\gamma$  é um ponto singular ou  $\gamma$  é uma órbita periódica.

Para mais detalhes e demonstração ver [9], página 12.

**Observação 1.32.** Se  $\gamma_p$  não está contida em um conjunto compacto então o conjunto  $\omega$ -limite de  $\gamma$ ,  $\omega(\gamma)$ , pode não ser conexo, como mostra a Figura 1.4.

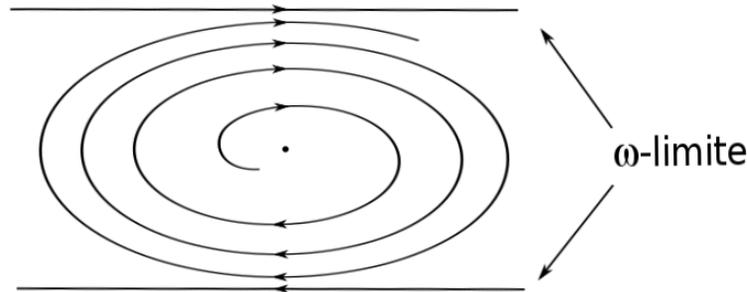


Figura 1.4: Um conjunto  $\omega$ -limite desconexo.

**Teorema 1.33** (de Poincaré-Bendixon). Sejam  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$  e  $p \in U$  tal que  $\gamma_p^+ = \{\phi(t, p); t \geq 0\} \subseteq K$  com  $K$  um conjunto compacto.

- (a) Se  $\omega(p)$  contém somente pontos regulares, então  $\omega(p)$  é uma órbita periódica.
- (b) Se  $\omega(p)$  contém pontos regulares e singulares, então  $\omega(p)$  é formado por um número finito de órbitas regulares que tendem para os pontos singulares quando  $t \rightarrow \pm\infty$ .
- (c) Se  $\omega(p)$  contém apenas singularidades, então  $\omega(p)$  é uma única singularidade.

**Observação 1.34.** Reforçamos que um resultado análogo ao Teorema 1.33 é válido para os conjuntos  $\alpha$ -limites.

**Observação 1.35.** O Teorema 1.33 foi enunciado apenas para campos vetoriais planares e, em geral, não é válido em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 2$ . Isso se deve ao fato do Teorema da Curva de Jordan não ser válido no  $\mathbb{R}^n$ , com  $n > 2$ .

**Teorema 1.36** (da Curva de Jordan). O complementar no plano de uma curva fechada e simples tem duas componentes conexas abertas disjuntas, uma limitada e a outra ilimitada, sendo a curva a fronteira comum das duas.



*Demonstração.* Seja  $D = \{t \in \mathbb{R}^+; \phi(t, p) \in S\}$ . Segue, pelo Teorema do Fluxo Tubular, que  $D$  é um conjunto discreto. Assim, podemos ordenar o conjunto  $D = \{0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots\}$ .

Seja  $p_1 = p$  e defina  $p_2 = \phi(t_1, p), \dots, p_n = \phi(t_{n-1}, p_{n-1})$ . Se  $p_1 = p_2$ , então  $\gamma$  é uma órbita periódica de período  $t_1$  e assim,  $p_n = p$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Se  $p_1 \neq p_2$ , ordenamos  $S$  tomando o sentido positivo de cima para baixo como na Figura 1.5 e consideramos  $p_1 < p_2$ . Provemos que  $p_2 < p_3$ .

Como o campo de vetores sempre cruza  $S$  no mesmo sentido, podemos supor, sem perda de generalidade, que o sentido é da direita para a esquerda. Assim, consideramos a curva de Jordan  $J$  formada pela união do segmento  $\overline{p_1 p_2} \in S$  com o arco  $\widehat{p_1 p_2}$  da órbita  $\gamma$ .

Observe que a trajetória de  $\gamma$  a partir de  $t_2$  permanece no interior de  $J$ , pois pela unicidade das trajetórias ela não pode intersectar o arco  $\widehat{p_1 p_2}$  e como já citamos, a trajetória não pode cruzar  $S$  no sentido oposto o fluxo. Consequentemente,  $p_2 < p_3 = \phi(t_2, p_2)$ .

Repetindo o mesmo argumento concluímos a demonstração para o caso  $p_1 < p_2$ . O caso  $p_2 < p_1$  é análogo.

□

**Lema 1.39.** *Se  $S$  é uma seção transversal a  $X$  em  $p \in U$ , então  $S \cap \omega(p)$  é no máximo um ponto.*

*Demonstração.* Pelo Lema 1.38,  $S \cap \gamma_p^+$  é uma sequência monótona. Logo, tem no máximo um limite. Como pelo Lema 1.37,  $S \cap \omega(p)$  é o limite de uma sequência de pontos  $\phi(t_n) \in S$  com  $t_n \rightarrow +\infty$  segue o resultado.

□

**Lema 1.40.** *Seja  $p \in U$  tal que  $\gamma_p^+$  esteja contida em um conjunto compacto e  $\gamma$  uma órbita de  $X$  tal que  $\gamma \subset \omega(p)$ . Se  $\omega(p)$  contém algum ponto regular, então  $\gamma$  é periódica e  $\omega(p) = \gamma$ .*

*Demonstração.* Seja  $q \in \omega(\gamma)$  um ponto regular e seja  $V_q$  e  $S_q$  o aberto e a seção transversal dados no Corolário 1.16.

Como  $q \in \omega(\gamma) \cap S_q$ , pelo Lema 1.37, existe uma sequência  $t_n \rightarrow \infty$  tal que  $\gamma(t_n) \in S_q$  e  $\gamma(t_n) \rightarrow q$ . Como  $\gamma \subset \omega(p)$  e  $\omega(p)$  é compacto então, pelo Lema 1.39, segue que  $\gamma(t_n)$  é constante e, portanto,  $\gamma$  é uma órbita periódica. Resta mostrar que  $\gamma = \omega(p)$ .

Observe que como  $\omega(p)$  é conexo e  $\emptyset \neq \gamma \subset \omega(p)$  então, basta mostrar que  $\gamma$  é aberto e fechado em  $\omega(p)$ .

Claramente  $\gamma$  é fechado em  $\omega(p)$ .

Seja  $\bar{p} \in \gamma$  e  $V_{\bar{p}}$  e  $S_{\bar{p}}$  o aberto e a seção transversal dados no Corolário 1.16. Para provarmos que  $\gamma$  é aberto em  $\omega(p)$  basta provarmos que  $V_{\bar{p}} \cap \gamma = V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$ , pois como  $\omega(p)$  é conexo, é aberto e fechado em  $\omega(p)$  e  $V_{\bar{p}}$  também é aberto. Como  $\gamma \subset \omega(p)$  então  $V_{\bar{p}} \cap \gamma \subset V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$ . Suponhamos que exista  $\bar{q} \in V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$  tal que  $\bar{q} \notin V_{\bar{p}} \cap \gamma$ , isto é,  $\bar{q} \notin \gamma$ .

Pelo Teorema do Fluxo Tubular, e como  $\omega(p)$  é invariante, existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $\phi(t, \bar{q}) \in \omega(p) \cap S_{\bar{p}}$  e  $\phi(t, \bar{q}) \neq \bar{p}$ , pois  $\bar{p} \in \gamma$  e  $\bar{q} \notin \gamma$ . Portanto,  $\phi(t, \bar{q}) \in S_{\bar{p}} \cap \omega(p)$  e  $\bar{p} \in S_{\bar{p}} \cap \omega(p)$ , com  $\phi(t, \bar{q}) \neq \bar{p}$ , o que é um absurdo, pelo Lema 1.39.

□

*Demonstração do Teorema 1.33.* (a) Suponha que  $\omega(p)$  contenha apenas pontos regulares.

Pelo item (a) do Teorema 1.31,  $\omega(p) \neq \emptyset$ , assim, existe  $q \in \omega(p)$ . Pelo item (c) do mesmo teorema,  $\omega(p)$  é invariante e assim,  $\gamma_q \subseteq \omega(p)$ . Logo, pelo Lema 1.40,  $\gamma_q$  é periódica e  $\omega(p) = \gamma_q$ .

(b) Suponha que  $\omega(p)$  tenha pontos regulares e singulares. Seja  $\gamma \subset \omega(p)$  uma órbita regular. Se  $\omega(\gamma)$  tiver algum ponto regular então, pelo Lema 1.40,  $\omega(p) = \gamma$ , o que não pode ocorrer. Logo  $\omega(\gamma)$  é uma singularidade.

(c) Segue direto da conexidade do conjunto  $\omega$ -limite.

□

## 1.5 Integral Primeira e Sistemas Hamiltonianos

**Definição 1.41.** *Seja  $X$  um campo de vetores  $C^1$  definido em  $U$ . Uma integral primeira para  $X$ , em  $U$ , é uma função  $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , que não é constante mas permanece constante ao longo das trajetórias de  $X$  contidas em  $U$ .*

Dessa forma,  $H$  é tal que  $(H \circ \gamma)'(t) = 0$  para toda solução  $\gamma = \gamma(t)$  do campo  $X$  e, em particular, cada solução do campo permanece em uma única curva de nível  $H_c = \{(x, y) \in U; H(x, y) = c\}$ . Assim, as curvas de níveis  $H_c$ , em  $U$ , são suficientes para descrever o retrato de fase de  $X$  em  $U$ .

**Observação 1.42.** *O conceito de integral primeira depende do campo  $X$  e do domínio  $U$  do campo.*

**Definição 1.43.** *Seja  $H$  uma aplicação  $C^2$ . Um sistema da forma*

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \quad (1.6)$$

com  $(x, y) \in U$  é chamado de sistema Hamiltoniano.

Note que  $H$  é uma integral primeira do sistema Hamiltoniano (1.6) pois dada uma solução  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$  da equação (1.6) temos:

$$(H \circ \gamma)'(t) = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0.$$

Logo,  $H$  é constante ao longo de cada solução de (1.6) mas não é constante, pois se fosse,  $\dot{x} = \dot{y} = 0$ , o que não nos interessa.

Conseqüentemente, para descrever o retrato de fase de um sistema Hamiltoniano em  $\mathbb{R}^2$  basta descrever as curvas de níveis  $H(x, y) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

No que segue, mostraremos que fluxos associados a sistemas Hamiltonianos preservam área, no seguinte sentido.

**Definição 1.44.** *Dizemos que um difeomorfismo  $h : U \rightarrow U$  preserva área se para qualquer aberto limitado  $E \subseteq U$ , temos  $A(E) = A(h(E))$ , onde  $A$  denota a área.*

**Proposição 1.45.** *Um difeomorfismo  $h : E \rightarrow E$ , de classe  $C^1$ , com  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  preserva área se, e somente se, o determinante jacobiano de  $h$  tem valor absoluto constante igual a 1.*

*Demonstração.* Pelo Teorema de Mudança de Variáveis em integrais múltiplas, segue que para todo  $U \subseteq E$  um aberto limitado do plano:

$$A(U) = \int_U 1 dx = \int_{h^{-1}(U)} |\det D(h(x))| dx.$$

Em particular,

$$A(h(U)) = \int_{h(U)} 1 dx = \int_U |\det D(h(x))| dx.$$

Assim:

( $\Rightarrow$ ) Suponhamos, por absurdo, que  $|\det D(h(x))|$  não seja constante igual a 1 em  $E$ . Então, existe  $x \in E$  tal que  $|\det D(h(x))| \neq 1$ . Se  $|\det D(h(x))| > 1$ , como a função determinante é contínua, existe  $\alpha > 1$  e um aberto  $U \in E$  tal que  $|\det D(h(x))| \geq \alpha > 1$ , para todo  $x \in U$ . Logo,  $A(h(U)) > A(U)$ , o que é um absurdo, já que  $h$  preserva área. Concluímos, de forma análoga, quando  $|\det D(h(x))| < 1$ .

( $\Leftarrow$ ) Se  $|Dh(x)| = 1$ , então:

$$A(h(U)) = \int_U |\det Dh(x)| dx = \int_U 1 dx = A(U).$$

Logo,  $h$  preserva área. □

**Definição 1.46.** *Seja  $X : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $X = (P, Q)$ , um campo de vetores de classe  $C^1$  definido num aberto  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  cujo fluxo  $\phi(t, x) = \phi_t(x)$  está definido para todo  $(t, x) \in \mathbb{R} \times E$ . Dizemos que o fluxo do campo  $X$  preserva área se*

$$A(\phi_t(U)) = A(U),$$

para cada  $U \subseteq E$  de área finita e para cada  $t \in \mathbb{R}$ , ou seja, se para cada  $t$  fixado, o difeomorfismo  $\phi_t : E \rightarrow E$  preserva área.

**Proposição 1.47** (Fórmula de Liouville-Ostrogradski). *Se  $X : E \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um campo de classe  $C^r$ ,  $1 \leq r \leq \infty$ , então o fluxo  $\phi_t(x)$  de  $X$  é de classe  $C^r$  e vale:*

$$\det D(\phi_t(x)) = \exp \left( \int_0^t \operatorname{div}(X(\phi_s(x))) ds \right).$$

Para mais detalhes e demonstração ver [8], página 407.

**Teorema 1.48** (Teorema de Liouville). *Se um campo vetorial planar de classe  $C^1$  tem divergente nulo, então seu fluxo preserva área.*

*Demonstração.* Como, por hipótese,  $\operatorname{div}(X(\phi_s(x))) = 0$  segue, pela fórmula de Liouville que  $\det D(\phi_t(x)) = 1$  e, portanto, pela Proposição 1.45,  $\phi_t$  preserva área. □

Note que o Teorema 1.48 nos dá algumas relações entre as trajetórias de um campo vetorial planar, pois considerando um feixe de trajetórias com condições iniciais em um aberto  $U \in \mathbb{R}^2$ ,

com fluxo  $\phi_t(U)$ , como esse fluxo preserva área não é possível que todas essas trajetórias se afastem (respectivamente, aproximem) umas das outras, já que isso causaria uma expansão (respectivamente, compressão) da área inicial. Assim, se existir uma direção em que as trajetórias se afastem (respectivamente, aproximem) uma das outras também deve existir uma outra direção em que elas se aproximem (respectivamente, afastem), o que pode tornar a evolução temporal da região  $U$  ao longo do fluxo muito complexa.

**Proposição 1.49.** *Fluxos associados a sistemas Hamiltonianos preservam área.*

*Demonstração.* Basta mostrarmos que o divergente do campo associado ao sistema (1.6) é nulo.

Seja  $X = \left( \frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right)$  o campo associado ao sistema (1.6). Assim, como  $H \in C^2$ ,

$$\operatorname{div}(X) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial H}{\partial x} \right) = 0.$$

Logo, campos vetoriais planares Hamiltonianos preservam área.  $\square$

**Observação 1.50.** *Tanto as definições, quanto as proposições e os teoremas que foram enunciados, anteriormente, nesta seção são válidos para dimensões maiores. Optamos por enunciar-los no  $\mathbb{R}^2$  tendo em vista o restante do trabalho.*

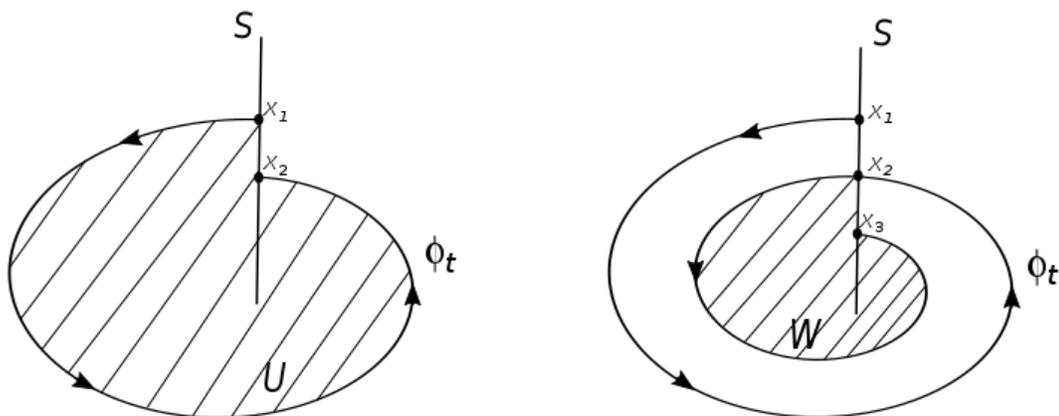


Figura 1.6: O que não ocorre em um fluxo que preserva área.

Seja  $\pi : S \rightarrow S$  uma aplicação de primeiro retorno de Poincaré em uma seção transversal local  $S$  de um campo vetorial  $X$ .

Observe que, se existirem pontos  $x_1, x_2 \in S$  tais que  $x_1 \neq x_2$  e  $\pi(x_1) = x_2$  então o fluxo  $\phi_t$  de  $X$ , no tempo  $t$  do primeiro retorno da trajetória leva  $U$  em  $W = \phi_t(U)$ , como na Figura

1.6. Como  $x_1 \neq x_2$ , segue que  $A(U) \neq A(W)$  e, portanto, o fluxo de  $X$  não preserva área. Consequentemente, se o fluxo de um campo planar preserva área e se  $\pi : S \rightarrow S$  é uma aplicação de primeiro retorno de Poincaré, onde  $S$  é uma seção transversal local do campo então  $\pi$  é a aplicação identidade.

Logo, desta observação e da Proposição 1.22, segue que sistemas Hamiltonianos não tem ciclos limite. Além disso, se  $(x_0, y_0)$  é um ponto singular do sistema (1.6), então o traço da parte linear de (1.6) em  $(x_0, y_0)$  é nula pois o divergente de um sistema Hamiltoniano é nulo.

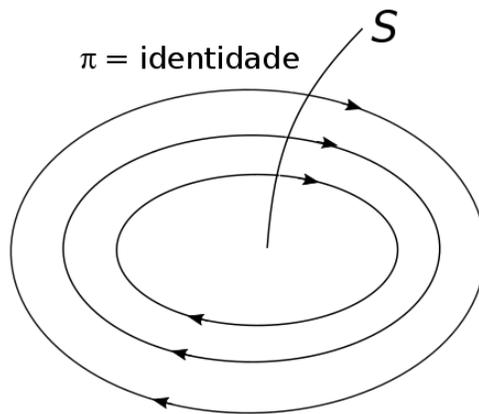


Figura 1.7: Um fluxo que preserva área

**Definição 1.51.** Seja  $X = (P, Q)$  um campo de vetores  $C^1$  em  $U$ . Dizemos que  $X$  é exato em  $U$  se

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y},$$

para todo  $(x, y) \in U$ .

**Observação 1.52.** Se  $U$  é simplesmente conexo e  $X$  é exato, então  $X$  é Hamiltoniano.

De fato, o campo  $\tilde{X} = (-Q, P)$  é  $C^1$ , pois  $X = (P, Q)$  é  $C^1$ . Além disso,  $\frac{\partial}{\partial y}(-Q) = \frac{\partial}{\partial x}P$  e, portanto, o campo  $\tilde{X}$  é conservativo, isto é, existe  $\tilde{H} : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\tilde{X} = \nabla \tilde{H} = \left( \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right)$ .

Assim, considerando  $H = -\tilde{H}$ , temos

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = Q \quad e \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} = -P.$$

Logo,  $X$  é Hamiltoniano.

## 1.6 Fator Integrante e Fator Integrante Inverso

Uma ferramenta importante na teoria qualitativa das equações diferenciais é a existência de um fator integrante para um campo vetorial, pois é possível obter uma integral primeira a partir desse fator integrante. A seguir definiremos o que é um fator integrante.

**Definição 1.53.** *Uma aplicação  $C^1$ ,  $M : U \rightarrow \mathbb{R}$  é um fator integrante do sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.7)$$

em  $U$  se é solução da equação diferencial parcial linear

$$P(x, y) \frac{\partial M}{\partial x}(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = - \left( \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \right) M(x, y), \quad (1.8)$$

para todo  $(x, y) \in U$ .

**Observação 1.54.**  *$M$  é um fator integrante do sistema (1.7) se, e somente se,*

$$\frac{\partial}{\partial x}(MP) = -\frac{\partial}{\partial y}(MQ).$$

**Observação 1.55.** *A partir de um fator integrante  $M$  do campo vetorial (1.7), construímos uma aplicação  $H$  dada por*

$$H(x, y) = \int M(x, y)P(x, y)dy + h(x),$$

onde  $h(x)$  é escolhido de modo que  $\frac{\partial H}{\partial x} = -MQ$ . Dessa forma,  $H$  é uma integral primeira para (1.7).

**Definição 1.56.** *Uma aplicação  $C^1$ ,  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  é um fator integrante inverso do sistema (1.7)*

em  $U$  se é solução da equação diferencial parcial linear

$$P(x, y) \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = \left( \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \right) V(x, y), \quad (1.9)$$

para todo  $(x, y) \in U$ .

**Observação 1.57.** *O fator integrante inverso de um campo vetorial  $C^1$  é uma ferramenta importante no estudo de ciclos limite, pois ele nos fornece a região do plano onde esse ciclo limite está contido.*

**Observação 1.58.**  $V$  é um fator integrante inverso em  $U$  se, e somente se,  $R = \frac{1}{V}$  é um fator integrante em  $U \setminus \{(x, y) \in U; V(x, y) = 0\}$ , pois:

$$R = \frac{1}{V} \text{ satisfaz (1.8) em } U \setminus \{(x, y) \in U; V(x, y) = 0\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P \frac{\partial R}{\partial x} + Q \frac{\partial R}{\partial y} = - \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) R \Leftrightarrow -P \frac{1}{V^2} \frac{\partial V}{\partial x} - Q \frac{1}{V^2} \frac{\partial V}{\partial y} = - \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \frac{1}{V} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{V} \left( P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} \right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \Leftrightarrow P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V \text{ satisfaz (1.9) em } U.$$

---

# Critérios Sobre a Existência de Ciclos Limite

---

Neste capítulo, apresentaremos dois critérios para estudar existência ou não existência e unicidade de ciclos limite em campos vetoriais planares e aplicaremos esses critérios em algumas famílias de campos vetoriais planares quadráticos e cúbicos (ver [12]).

Consideraremos, ao longo desse capítulo,  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}^2$ , campos vetoriais  $X = (P, Q)$  e funções  $V$  ambos de classe  $C^1$  e definidos em  $U$  tal que o conjunto  $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; V(x, y) = 0\}$  seja localmente uma variedade unidimensional exceto, possivelmente, em um número finito de pontos.

## 2.1 Primeiro Critério

Nesta seção, exibiremos um critério para determinar a não existência ou existência de ciclos limite em campos vetoriais planares.

**Definição 2.1.** *Quando as funções  $P$  e  $Q$  do sistema (1.7) são polinomiais dizemos que  $X = (P, Q)$  é um campo vetorial polinomial em  $\mathbb{R}^2$  e seu grau é definido como o máximo dos graus de  $P$  e  $Q$ .*

**Definição 2.2.** *Sejam  $\mathbb{R}[x, y]$  o anel de polinômios nas variáveis  $x$  e  $y$  com coeficientes em  $\mathbb{R}$  e  $V \in \mathbb{R}[x, y]$ . Dizemos que a curva  $V(x, y) = 0$  é uma curva algébrica invariante para o sistema (1.7) se existir  $R \in \mathbb{R}[x, y]$  tal que*

$$P(x, y) \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = R(x, y)V(x, y), \quad (2.1)$$

para todo  $(x, y) \in U$ .

Um método para encontrar uma solução de (1.7) é encontrar uma curva algébrica invariante para este campo vetorial, pois assim, em pontos de  $\Sigma$ , temos:

$$(P, Q) \cdot \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right) = RV = 0 \Rightarrow (P, Q) \cdot \nabla V = 0.$$

Conseqüentemente o campo  $(P, Q)$  é tangente a curva  $V(x, y) = 0$  e, portanto, esta é formada por trajetórias desse campo. Logo, a curva  $V(x, y) = 0$  é invariante pelo campo de vetores  $(P, Q)$ .

**Observação 2.3.** Note que, se o sistema (1.7) tem grau  $n$  então a função  $R = R(x, y)$  como na Definição 2.2 tem, no máximo, grau  $n - 1$ .

**Exemplo 2.4.** Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y^2 \end{cases} \quad (2.2)$$

As funções  $V_1(x, y) = x + y$ ,  $V_2(x, y) = x$  e  $V_3(x, y) = -y$  satisfazem a equação (2.1) com  $R_1(x, y) = x - y$ ,  $R_2(x, y) = x$  e  $R_3(x, y) = -y$ , respectivamente. Logo,  $V_1(x, y) = 0$ ,  $V_2(x, y) = 0$  e  $V_3(x, y) = 0$  são curvas algébricas invariantes para o sistema (2.2).

**Observação 2.5.** Observe que, se  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$  é uma trajetória fechada, de período  $T$ , para o campo de vetores  $X = (P, Q)$ , então  $\gamma(t)$  é uma curva de classe  $C^1$  e assim, considerando sua reparametrização por comprimento de arco, temos  $\|\gamma'(t)\| = 1$  para todo  $t \in [0, T]$ . Logo,

$$\int_{\gamma} R((u(s), v(s))) ds = \int_0^T R((u(t), v(t))) \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^T R((u(t), v(t))) dt.$$

**Definição 2.6.** Um anel periódico para o sistema (1.7) consiste de uma vizinhança fechada de uma trajetória fechada de (1.7) e toda preenchida por trajetórias fechadas desse sistema.

No próximo teorema, usamos a equação (2.1) para estudar soluções periódicas do campo vetorial  $(P, Q)$ . Tal resultado foi apresentado em [12].

**Teorema 2.7** (Primeiro Critério). Sejam  $(P, Q)$  um campo vetorial  $C^1$  definido em  $U$ ,  $(u(t), v(t))$  uma solução periódica de  $(P, Q)$  de período  $T$ ,  $R : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação  $C^1$  tal que  $\int_0^T R(u(t), v(t)) dt \neq 0$  e  $V = V(x, y)$  uma solução  $C^1$  da equação (2.1).

Então, a trajetória fechada  $\gamma = \{(u(t), v(t)) \in U; t \in [0, T]\}$  está contida em  $\Sigma = \{(x, y) \in U; V(x, y) = 0\}$ , e não está contida em um anel periódico do campo  $(P, Q)$ . Além disso, se o campo de vetores  $(P, Q)$  é analítico, então  $\gamma$  é um ciclo limite.

*Demonstração.* Sejam  $R(t) = R(u(t), v(t))$  e  $V(t) = V(u(t), v(t))$  onde  $(u(t), v(t))$  é uma solução periódica de  $(P, Q)$  de período  $T$  e  $R(t)$  e  $V(t)$  satisfazem as hipóteses do teorema.

Considere a equação diferencial

$$\dot{z} = R(t)z,$$

cuja solução geral é

$$z(t) = z(0) \exp\left(\int_0^t R(s)ds\right).$$

Como  $V(x, y)$  é uma solução de (2.1), temos:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial V}{\partial v} \frac{dv}{dt} = P \frac{\partial V}{\partial u} + Q \frac{\partial V}{\partial v} = RV.$$

Logo,  $z(t) = V(t)$  é uma solução de  $\dot{z} = R(t)z$ . Então,  $V(t) = V(0) \exp\left(\int_0^t R(s)ds\right)$ .

Como  $(u(t), v(t))$  é uma solução periódica de (1.7) de período  $T$  então  $V(T) = V(0)$  e como, por hipótese,  $\int_0^T R(t)dt \neq 0$ , segue que  $V(0) = 0$  e, conseqüentemente,  $V(t) = V(0) \exp\left(\int_0^t R(s)ds\right) = 0$ , para todo  $t \in [0, T]$ .

Portanto,

$$V(u(t), v(t)) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \Rightarrow \gamma \subset \Sigma.$$

Agora, suponha que  $\gamma$  esteja contida em um anel periódico. Assim, existe uma vizinhança fechada  $A$  de  $\gamma$  preenchida por trajetórias fechadas. Note que  $\gamma$  pode ser a fronteira de  $A$ .

Como  $\int_\gamma R(s)ds = \int_0^T R(t)dt \neq 0$ , se  $A$  é suficientemente pequeno então, como  $R \in C^1$ ,  $\int_{\gamma'} R(s)ds \neq 0$ , para qualquer trajetória fechada  $\gamma' \subset A$ . Dessa forma,  $\gamma' \subset \Sigma$  para toda  $\gamma' \subset A$ , isto é,  $A \subset \Sigma$ , o que é um absurdo pois  $\Sigma$  é localmente uma variedade unidimensional. Portanto,  $\gamma$  não está contida em um anel periódico.

Na teoria de campos vetoriais planares analíticos, é conhecido que uma órbita periódica ou é um ciclo limite ou está contida em um anel periódico (ver [16]). Como a segunda possibilidade não pode ocorrer, segue que  $\gamma$  é um ciclo limite para o campo de vetores  $(P, Q)$ .

□

Observe que o Teorema 2.7 mostra que quando conhecemos explicitamente as trajetórias  $V(x, y) = 0$  do campo de vetores  $(P, Q)$  através da equação (2.1), para uma dada função  $R$  nós, adicionalmente, temos informações sobre as soluções periódicas do campo, já que se  $\gamma$  é uma trajetória fechada do campo, então ou  $\gamma \subset \Sigma$  ou  $\int_0^T R(u(t), v(t))dt = 0$ .

Nas duas seções seguintes, aplicaremos o Teorema 2.7 para determinar a não existência ou existência e unicidade de ciclos limite em algumas famílias de campos vetoriais planares polinomiais quadráticos e cúbicos.

## 2.2 Ciclos Limite em Sistemas Quadráticos

O estudo de ciclos limite em campos vetoriais polinomiais é um problema de extrema dificuldade. Muitos resultados foram obtidos nessa linha e no caso de campos vetoriais quadráticos destacamos o trabalho de Ye Yan-qian ([30]) onde ele classificou os sistemas quadráticos que podem ter ciclos limites nas três seguintes famílias:

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta x - y + lx^2 + mxy + ny^2 \\ \dot{y} = x(1 + ax + by) \end{cases} \quad (2.3)$$

quando  $a = b = 0$  (família I),  $a \neq 0$  e  $b = 0$  (família II) e  $b \neq 0$  (família III).

Usando o Teorema 2.7, estudamos os próximos três resultados, como em [12].

**Proposição 2.8.** *Suponhamos que para o sistema quadrático*

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta x - y + lx^2 + mxy + ny^2 \\ \dot{y} = x + bxy \end{cases} \quad (2.4)$$

com  $ln \geq 0$  e  $l^2 + n^2 > 0$ , existe uma função polinomial  $V(x, y)$  que satisfaz a equação (2.1) para alguma função  $R(x, y) = \alpha x + \beta y$ , com  $\beta \neq 0$ .

Se este sistema quadrático tem trajetórias fechadas, então elas estão contidas em  $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; V(x, y) = 0\}$ .

*Demonstração.* Suponhamos que exista uma trajetória fechada  $\gamma$ , de período  $T$ , do sistema (2.4) tal que  $\gamma$  não esteja contida em  $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; V(x, y) = 0\}$ , então segue do Teorema 2.7 que  $\int_{\gamma} R(s)ds = \int_{\gamma} (\alpha x + \beta y)ds = 0$ .

Primeiro assumimos que  $b = 0$ . Assim, (2.4) se reduz à

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta x - y + lx^2 + mxy + ny^2 \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

Como  $\dot{y} = x$ , então  $\int_{\gamma} xds = \int_0^T xdt = \int_0^T \dot{y}dt = y(t)|_0^T = y(T) - y(0) = 0$ , pois  $\gamma$  é periódica, com período  $T$ . Agora como  $\beta \neq 0$  e  $0 = \int_{\gamma} R(s)ds = \int_{\gamma} (\alpha x + \beta y)ds$ , segue que  $\int_{\gamma} yds = 0$ .

Além disso,  $\int_{\gamma} xy ds = \int_0^T xy dt = \int_0^T y \dot{y} dt = \frac{1}{2} y^2(t) \Big|_0^T = 0$  e  $\int_{\gamma} \dot{x} ds = \int_0^T \dot{x} dt = x(t) \Big|_0^T = 0$ . Assim, da primeira equação do sistema, temos

$$0 = \int_{\gamma} \dot{x} ds = \int_{\gamma} (\delta x - y + lx^2 + mxy + ny^2) ds = l \int_{\gamma} x^2 ds + n \int_{\gamma} y^2 ds,$$

o que é absurdo, pois  $ln \geq 0$ , ou seja, possuem o mesmo sinal, e  $l^2 + n^2 > 0$ . Tal absurdo surgiu do fato de termos suposto que  $\gamma \not\subset \Sigma$ , logo  $\gamma \subset \Sigma$  e, portanto, o caso  $b = 0$  da proposição está provado.

Agora suponhamos  $b \neq 0$ .

**Afirmção:** A reta  $r : 1 + by = 0$  é invariante pelo fluxo do sistema (2.4).

De fato, sobre a reta  $r$  o sistema (2.4) se reduz à

$$\begin{cases} \dot{x} = lx^2 + \left(\delta - \frac{m}{b}\right)x + \frac{1}{b} + \frac{n}{b^2} \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Considere  $M(x, y) = 1 + by$ . Observe que a reta  $r$  consiste do nível zero de  $M$ . Agora,  $\nabla M = (0, b)$  e, assim,  $\nabla M$  é ortogonal ao campo (2.4) nos pontos sobre  $r$ . Logo  $r$  é invariante pelo fluxo de (2.4).

Portanto,  $\gamma$  não intersecta a reta  $M(x, y) = 0$ , ou seja,  $1 + by$  é sempre diferente de zero sobre  $\gamma$ . Logo,

$$\int_{\gamma} x ds = \int_{\gamma} \frac{\dot{y}}{1 + by} ds = \frac{1}{b} \int_0^T \frac{b\dot{y}}{1 + by} dt = \frac{1}{b} \int_0^T \left( \frac{d}{dt} \ln(1 + by) \right) dt = 0.$$

Como  $\int_{\gamma} x ds = 0$ ,  $\int_{\gamma} R(s) ds = 0$  e  $\beta \neq 0$  segue, de modo análogo ao caso anterior, que  $\int_{\gamma} y ds = 0$ . Por fim, como  $\dot{y} = x + bxy$ , temos  $0 = \int_{\gamma} \dot{y} ds = \int_{\gamma} (x + bxy) ds = \int_{\gamma} x ds + b \int_{\gamma} xy ds$  e  $b \neq 0$ , segue que  $\int_{\gamma} xy ds = 0$ .

Concluimos a demonstração de modo análogo ao caso  $b = 0$ .

□

**Corolário 2.9.** *O sistema quadrático*

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta x - y + x^2 + mxy + ny^2 \\ \dot{y} = x + bxy \end{cases} \quad (2.6)$$

com  $b = \frac{(1+n)^2 + \delta(m+mn+\delta n)}{\delta^2 n}$ ,  $\delta n(1+n) \neq 0$  e  $n > 0$  não tem trajetórias fechadas.

*Demonstração.* Note que o sistema (2.6) é obtido do sistema (2.4) fazendo  $l = 1$ .

Verifiquemos se os coeficientes de (2.6) satisfazem as demais hipóteses da Proposição 2.8.

Como  $n > 0$  segue que  $ln \geq 0$  e  $l^2 + n^2 = 1 + n^2 > 0$ .

Agora, considere a função dada por

$$V(x, y) = 1 + \frac{2(1+n)}{\delta}x - 2ny + \left(\frac{1+n}{\delta}x - ny\right)^2.$$

Como  $b = \frac{(1+n)^2 + \delta(m+mn+\delta n)}{\delta^2 n}$ ,  $V(x, y) = 0$  determina uma curva algébrica invariante para o sistema (2.6) com  $R(x, y) = 2\left(x - \frac{1+n}{\delta}y\right)$ .

De fato, como

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2(1+n)}{\delta} + \frac{2\left(\frac{(1+n)x}{\delta} - ny\right)(1+n)}{\delta},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -2n - 2\left(\frac{(1+n)x}{\delta} - ny\right)n,$$

e

$$RV = 2\left(x - \frac{1+n}{\delta}y\right)\left(1 + \frac{2(1+n)x}{\delta} - 2ny + \left(\frac{(1+n)x}{\delta} - ny\right)^2\right),$$

segue que a equação (2.1) é satisfeita.

Como  $R(x, y) = 2\left(x - \frac{1+n}{\delta}y\right)$ , temos  $\alpha = 2$  e  $\beta = \frac{-2(1+n)}{\delta} \neq 0$ . Portanto, o sistema (2.6) satisfaz as hipóteses da Proposição 2.8, logo, se existe uma trajetória fechada  $\gamma$  para esse campo, teremos  $\gamma \subset \Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; V(x, y) = 0\}$ .

Por outro lado,

$$\begin{aligned} V(x, y) = 0 &\Leftrightarrow 1 + \frac{2(1+n)}{\delta}x - 2ny + \left(\frac{1+n}{\delta}x - ny\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(1 + \left(\frac{1+n}{\delta}x - ny\right)\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{1+n}{\delta}x - ny = 0 \Leftrightarrow ny = 1 + \frac{1+n}{\delta}x \Leftrightarrow y = \frac{1+n}{n\delta}x + \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

logo,  $\Sigma$  não é uma elipse e como essas são as únicas cônicas fechadas, segue que o campo dado pelo sistema (2.6) não tem trajetórias fechadas.

□

Como mencionamos, o Teorema 2.7 mostra que quando nós conhecemos explicitamente as trajetórias  $V(x, y) = 0$  do campo de vetores  $(P, Q)$  através da equação (2.1), para uma dada

função  $R$ , nós temos informações adicionais sobre as soluções periódicas de  $(P, Q)$ . Em geral, é difícil conhecer as trajetórias explicitamente, com exceção dos pontos singulares.

A próxima proposição usa os pontos singulares na origem a fim de obter informações sobre soluções periódicas do Teorema 2.7.

**Proposição 2.10.** *Considere o sistema quadrático*

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta x - y + lx^2 + mxy + ny^2 \\ \dot{y} = x(1 + ax + by) \end{cases} \quad (2.7)$$

com  $\delta^2 - 4 < 0$  e seja  $\gamma$  uma trajetória fechada deste sistema. Se

$$R(x, y) = \frac{\delta(x^2 - \delta xy + y^2) + (2l - \delta a)x^3 + (2(m + a) - \delta(b + l))x^2y + (2(n + b) - \delta m)xy^2 - \delta ny^3}{x^2 - \delta xy + y^2}$$

então  $\int_{\gamma} R(s)ds = 0$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $T$  seja o período da trajetória fechada  $\gamma$ .

A função  $V(x, y) = x^2 - \delta xy + y^2$  é uma solução de (2.1) para o campo  $(P, Q)$  associado a este sistema, com a  $R(x, y)$  definida no enunciado.

Como  $\delta^2 - 4 < 0$ ,  $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; V(x, y) = 0\} = \{(0, 0)\}$ , pois supondo  $x \neq 0$  ou  $y \neq 0$ ,  $V(x, y)$  pode ser vista como uma equação do segundo grau em  $y$  ou em  $x$ , cujo discriminante é negativo em ambos os casos.

Além disso,  $(0, 0)$  é um ponto crítico do sistema e, portanto,  $\gamma(t) \neq (0, 0)$  para todo  $t \in [0, T]$ . Logo,  $(R \circ \gamma)(t) = R(t)$  está bem definida.

Assim, pelo Teorema 2.7,  $\int_{\gamma} R(s)ds = \int_0^T R(t)dt = 0$ , para toda trajetória fechada  $\gamma$  do sistema (2.7).

□

Note que, com as notações do teorema anterior,  $(0, 0) \notin \Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; R(x, y) = (0, 0)\}$ , já que  $(0, 0)$  não pertence ao domínio da  $R$ . Além disso, como  $\int_{\gamma} R(s)ds = 0$  para toda trajetória fechada  $\gamma$  e  $R$  é contínua concluímos que  $\gamma \cap \Gamma \neq \emptyset$ . Logo, conhecendo  $\Gamma$  temos informações sobre o tamanho dos ciclos limite em torno da origem, se esses ciclos existirem.

## 2.3 Ciclos Limite em Sistemas de Vorobev

Nesta seção, usaremos o Teorema 2.7 para estabelecer condições para termos ciclos limite em sistemas de Vorobev, que consiste de um tipo de família de campos vetoriais, a dois parâmetros, que é uma perturbação de um centro linear por um polinômio de grau três.

**Definição 2.11.** *Um sistema de Vorobev é um sistema cúbico da forma:*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + ax(x^2 + y^2 - 1) \\ \dot{y} = x + by(x^2 + y^2 - 1) \end{cases} \text{ com } a, b \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Vorobev provou que o sistema (2.8) com  $ab > -1$  e  $(a-b)^2 > 4$  tem o ciclo limite  $x^2 + y^2 = 1$  em torno da origem, ver [29].

Recorde que se  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$  é uma solução periódica do sistema (1.7) de período  $T$  e

$$I = \int_0^T \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (u(t), v(t)) dt \quad (2.9)$$

então, pelo Teorema 1.26,  $\gamma(t)$  é um ciclo limite estável se  $I < 0$  e um ciclo limite instável se  $I > 0$ . Quando  $I \neq 0$  o ciclo limite é chamado hiperbólico.

Observe que a curva  $\gamma$  definida por  $x^2 + y^2 = 1$ , que pode ser parametrizada por  $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t))$ , é uma trajetória fechada para o sistema (2.8), pois chamando de  $(P, Q)$  o campo vetorial associado ao sistema de Vorobev, temos:

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = (-\sin(t), \cos(t)) = (P(\gamma(t)), Q(\gamma(t))).$$

O próximo teorema melhora o resultado de Vorobev sobre ciclos limite para o sistema (2.8) (ver [12]).

**Teorema 2.12.** *Seja  $\gamma$  uma trajetória fechada do sistema (2.8) definida por  $x^2 + y^2 = 1$ . Definimos  $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$  e  $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 1\}$ .*

- (a) *Se  $a + b = 0$  e  $ab \neq 0$ , então  $\gamma$  é o único possível ciclo limite do sistema (2.8).*
- (b) *Se  $a + b \neq 0$ , então  $\gamma$  é um ciclo limite hiperbólico que é estável se  $a + b < 0$  e instável se  $a + b > 0$ .*
- (c) *Se  $a + b \neq 0$  e  $ab \geq 0$ , então  $\gamma$  é o único ciclo limite de (2.8) e a origem é o único ponto singular.*
- (d) *Se  $a + b \neq 0$  e  $-1 \leq ab < 0$ , então o sistema (2.8) não tem trajetórias fechadas em  $R_1$  e se tiver alguma trajetória fechada em  $R_2$ , ela será um ciclo limite hiperbólico com a mesma estabilidade de  $\gamma$ . Além disso, o sistema (2.8) tem cinco pontos singulares, um em  $R_1$  e quatro em  $R_2$ .*

(e) Se que  $a + b \neq 0$  e  $ab < -1$ , então se o sistema (2.8) tem alguma trajetória fechada em  $R_2$  (respectivamente em  $R_1$ ), esta deve ser um ciclo limite hiperbólico com estabilidade igual (respectivamente, oposta) de  $\gamma$ . Além disso, o sistema (2.8) tem nove pontos singulares, cinco em  $R_1$  e quatro em  $R_2$ .

*Demonstração.* Começaremos provando as afirmações sobre os números de pontos singulares que aparecem nos diferentes itens do teorema.

Claramente a origem é sempre um ponto singular do sistema (2.8). Além disso, os outros pontos singulares do sistema são soluções das seguintes equações:

$$ax^2 + by^2 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{-ab}}. \quad (2.10)$$

De fato, primeiro observe que se  $\dot{x} = \dot{y} = 0$  então  $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$ . Dessa forma, nos pontos singulares diferentes da origem temos  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ . Além disso, nos pontos singulares se  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$  então  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ , pois  $a = 0 \Rightarrow y = 0$  o que não é possível, assim como  $b = 0 \Rightarrow x = 0$ .

Agora, de  $\dot{x} = 0$  temos  $x^2 + y^2 - 1 = \frac{y}{ax}$ , conseqüentemente,

$$0 = \dot{y} = x + by(x^2 + y^2 - 1) = x + \frac{by^2}{ax} \Rightarrow \frac{ax^2 + by^2}{ax} = 0 \Rightarrow ax^2 + by^2 = 0.$$

Como  $ax^2 + by^2 = 0$  então  $y = \pm \sqrt{\frac{-ax^2}{b}}$  e assim, como  $x^2 + y^2 - 1 = \frac{y}{ax}$  segue que

$$x^2 + y^2 = 1 + \frac{y}{ax} = 1 + \frac{1}{ax} \left( \pm \sqrt{\frac{-ax^2}{b}} \right) = 1 \pm \sqrt{\frac{-1}{ab}} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{-ab}}.$$

Portanto, se  $ab > 0$  a origem é o único ponto singular do sistema (2.8), pois  $a$  e  $b$  possuem o mesmo sinal e então  $ax^2 + by^2$  é sempre positivo (se  $a > 0$  e  $b > 0$ ) ou sempre negativo (se  $a < 0$  e  $b < 0$ ), já a segunda expressão não está definida pois  $-ab < 0$ . Com isso, mostramos a quantidade de singularidades do item (c).

Agora analisaremos o caso  $a + b \neq 0$  e  $ab < 0$ .

Observe que a equação  $ax^2 + by^2 = 0$  consiste em um par de retas passando pela origem, pois  $ax^2 + by^2 = 0 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{-a}{b}}|x|$ , a equação  $x^2 + y^2 = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{-ab}}$  consiste em um par de circunferências e a solução de (2.10) é a intersecção desses dois conjuntos.

Quando consideramos a equação  $x^2 + y^2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{-ab}}$ , temos uma circunferência de raio maior do que 1. Logo a solução de (2.10), quando consideramos o sinal positivo, é formada por quatro pontos que estão em  $R_2$ .

Agora consideramos a equação  $x^2 + y^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{-ab}}$ . Se  $-1 \leq ab < 0$  então  $1 - \frac{1}{\sqrt{-ab}} < 0$  e, portanto, não existe ponto singular em  $R_1$  diferente da origem, já que não pode ocorrer  $x^2 + y^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{-ab}} < 0$ . Além disso, se  $ab < -1$  então  $0 < \frac{1}{\sqrt{-ab}} < 1$  e, conseqüentemente,  $x^2 + y^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{-ab}}$  consiste em uma circunferência de raio menor do que 1. Logo a solução de (2.10), quando consideramos o sinal negativo e  $ab < -1$  é formada por quatro pontos que estão em  $R_1$ .

Dessa forma, se  $ab < 0$ , então existem quatro pontos singulares em  $R_2$ . Se  $-1 < ab < 0$  não existem pontos singulares em  $R_1$  diferentes da origem, logo o sistema (2.8) tem cinco pontos singulares, um em  $R_1$  e quatro em  $R_2$ . Por fim, se  $ab < -1$ , então o sistema (2.8) tem nove pontos singulares, cinco em  $R_1$  e quatro em  $R_2$ . Com isso mostramos a quantidade de singularidades dos itens (d) e (e).

Mostraremos agora, os demais afirmações do teorema.

- (a) Este item será demonstrado no Lema 2.22, nas próximas seções.
- (b) Observe que a solução periódica  $\gamma$  tem parametrização dada por  $(u(t), v(t)) = (\cos(t), \sin(t))$ , com período  $T = 2\pi$ . Temos:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3ax^2 + ay^2 - a \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 3by^2 + bx^2 - b.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^T \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (u(t), v(t)) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [(3a + b) \cos^2(t) + (3b + a) \sin^2(t) - (a + b)] dt = 2(a + b)\pi. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Portanto, pelo Teorema 1.26, segue o resultado.

- (c) É fácil ver que a função  $V(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  é solução de (2.1) com  $R(x, y) = 2(ax^2 + by^2)$ . Seja  $(u(t), v(t))$  uma solução periódica de período  $T$  do sistema (2.8). Definimos:

$$J = \int_0^T R(t) dt = \int_0^T R(u(t), v(t)) dt = 2 \int_0^T (au^2(t) + bv^2(t)) dt. \quad (2.12)$$

Pelo Teorema 2.7, segue que se  $J \neq 0$  então a trajetória fechada  $\{(u(t), v(t)); t \in [0, T]\} \subset \Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; V(x, y) = 0\}$ , que é o círculo  $x^2 + y^2 = 1$ . Como  $ab \geq 0$  e  $a + b \neq 0$ , segue que  $J \neq 0$  e, portanto, (c) está provado.

De agora em diante, assumiremos  $ab < 0$  e que a solução periódica  $(u(t), v(t))$  do sistema (2.8) é diferente de  $\gamma$ . Logo,  $(u(t), v(t))$  está contido em  $R_1$  ou em  $R_2$ . Faremos, agora, algumas considerações e, em seguida, mostraremos os itens (d) e (e) do teorema.

Seja  $J = \int_0^T R(t)dt$ , com  $R(x, y) = 2(ax^2 + by^2)$  como no item (c).

Como  $V(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  satisfaz (2.1) para tal função  $R$ , segue pelo Teorema 2.7 que  $J = 0$  pois, caso contrário, teríamos  $(u(t), v(t)) = \gamma$ , o que não ocorre. Assim, pelas equações (2.11) e (2.12), temos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^T \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (u(t), v(t)) dt = \\ &= \int_0^T (3au^2(t) + av^2(t) - a + 3bv^2(t) + bu^2(t) - b) dt = \\ &= \int_0^T (a(u^2(t) + v^2(t) - 1) + b(u^2(t) + v^2(t) - 1)) dt + 2 \int_0^T (au^2(t) + bv^2(t)) dt = \\ &= (a + b) \int_0^T (u^2(t) + v^2(t) - 1) dt + J = (a + b) \int_0^T (u^2(t) + v^2(t) - 1) dt. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Como  $a + b \neq 0$  e  $u^2(t) + v^2(t) - 1 \neq 0$ , então  $I \neq 0$  e, portanto,  $(u(t), v(t))$  é um ciclo limite hiperbólico para o sistema (2.8).

(e) Se  $(u(t), v(t)) \subset R_2$  (respectivamente,  $(u(t), v(t)) \subset R_1$ ), então o sinal de  $I$  é o mesmo (respectivamente, oposto ao) de  $(a + b)$ . Logo, de (2.11),  $\gamma$  e  $(u(t), v(t))$  tem estabilidades iguais (respectivamente opostas).

(d) Neste caso,  $-1 \leq ab < 0$  e  $a + b \neq 0$  e já vimos que a origem é o único ponto singular do sistema (2.8) em  $R_1$ . Analisando a parte linear do sistema, concluímos que os autovalores associados à origem são

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4(ab+1)}}{2} = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{(a-b)^2 - 4}}{2}.$$

Logo, se  $(a-b)^2 - 4 < 0$  então  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  e a origem é um foco atrator se  $-(a+b) < 0$ , ou seja, se  $a + b > 0$  ou um foco repulsor se  $a + b < 0$ . Agora se  $(a-b)^2 - 4 > 0$  então  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  e a origem é um nó atrator se  $a + b > 0$  ou um nó repulsor se  $a + b < 0$ . Assim, por (2.11) segue que a estabilidade de  $\gamma$  é contrária a da origem.

Suponha que exista uma trajetória fechada de período  $T$ ,  $\alpha = \{(u(t), v(t)); t \in [0, T]\}$ , em  $R_1$ . Por (2.13) segue que  $I \neq 0$  e, assim,  $\alpha$  é um ciclo limite hiperbólico, o que é um absurdo pois  $\gamma$  e a origem tem estabilidades contrárias.

Portanto, não existe trajetória fechada em  $R_1$  e concluímos a prova de maneira análoga ao item (e).

□

**Exemplo 2.13.** *O sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases} \quad (2.14)$$

é um sistema de Vorobev com  $a = -1$  e  $b = 1$ . Logo, pelo item (a) do Teorema 2.12, o sistema (2.14) tem um único ciclo limite,  $\gamma$  definida por  $x^2 + y^2 = 1$ .

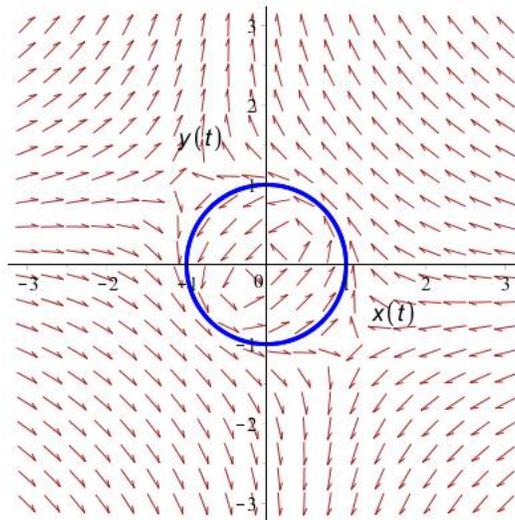


Figura 2.1: Campo de vetores e ciclo limite  $\gamma$  do Exemplo 2.11.

**Exemplo 2.14.** *O sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = x - 2y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases} \quad (2.15)$$

é um sistema de Vorobev com  $a = -1$  e  $b = -2$ . Logo, pelos itens (b) e (c) do Teorema 2.12,  $\gamma$  definida por  $x^2 + y^2 = 1$  é o único ciclo limite de (2.15) e é hiperbólico estável.

**Exemplo 2.15.** *O sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + 3x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = x + 4.5y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases} \quad (2.16)$$

é um sistema de Vorobev com  $a = 3$  e  $b = 4.5$ . Logo, pelos itens (b) e (c) do Teorema 2.12,  $\gamma$  definida por  $x^2 + y^2 = 1$  é o único ciclo limite de (2.16) e é hiperbólico instável.

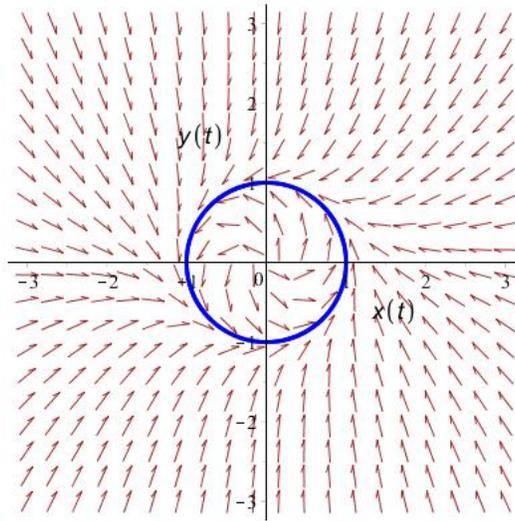


Figura 2.2: Campo de vetores e ciclo limite  $\gamma$  do Exemplo 2.12.

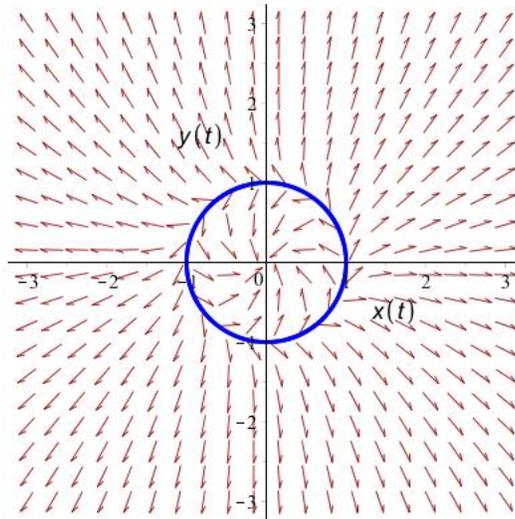


Figura 2.3: Campo de vetores e ciclo limite  $\gamma$  do Exemplo 2.13.

## 2.4 Segundo Critério

Nesta seção, exibiremos um outro critério para determinar a não existência ou existência de ciclos limite em campos vetoriais planares, tal resultado foi apresentado em [12].

Para os próximos resultados, precisaremos de alguns novos conceitos, definidos a seguir.

Podemos associar ao campo de vetores  $(P, Q)$ , em  $U$ , uma um-forma diferenciável  $\omega = Qdx - Pdy$ .

**Definição 2.16.** (i) A um-forma  $\omega = Qdx - Pdy$  é dita exata se  $\omega = dH$ , para alguma aplicação  $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $H \in C^2$ .

(ii) A um-forma  $\omega = Qdx - Pdy$  é dita fechada se  $d\omega = 0$ , ou seja, se  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$ .

**Observação 2.17.** (i) Se  $\omega$  é exata, então o sistema (1.7) associado ao campo  $(P, Q)$  é Hamiltoniano pois, por definição, existe uma aplicação  $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $H \in C^2$ , tal que  $\omega = dH$ . Logo,

$$Qdx - Pdy = \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy \Rightarrow Q = \frac{\partial H}{\partial x} \quad e \quad P = -\frac{\partial H}{\partial y},$$

(ii) Se uma um-forma  $\omega$  é exata, então ela também será fechada, pois

$$\omega = dH \Rightarrow Q = \frac{\partial H}{\partial x} \quad e \quad P = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Assim, como  $H \in C^2$ ,

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \Rightarrow d\omega = 0.$$

A recíproca do item (ii) da observação anterior é válida quando estamos em regiões simplesmente conexas, como afirma o seguinte corolário.

**Corolário 2.18.** Se  $W$  é uma região simplesmente conexa, então toda forma fechada  $\omega$  é exata.

Para mais detalhes, ver [27], página 306.

A partir daqui assumimos que a componente  $W$  de  $U \setminus \Sigma$  é simplesmente conexa.

**Afirmção:** Se  $M$  é um fator integrante do sistema (1.7) segue que

$$\begin{cases} \dot{x} = M(x, y)P(x, y), \\ \dot{y} = M(x, y)Q(x, y). \end{cases} \quad (2.17)$$

com  $(x, y) \in W$  é Hamiltoniano.

De fato, observe que o sistema (2.17) é Hamiltoniano se, e somente se, a equação:

$$\frac{\partial}{\partial x} (M(x, y)P(x, y)) = -\frac{\partial}{\partial y} (M(x, y)Q(x, y)), \quad (2.18)$$

é satisfeita, pois se o sistema (2.17) é Hamiltoniano, então existe  $H$ , de classe pelo menos  $C^2$ , tal que

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MP = \frac{\partial H}{\partial y} \\ MQ = -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(MP) = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y}(MQ) = -\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}, \end{cases}$$

Agora, como  $H$  é de classe  $C^2$ ,  $\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(MP) = -\frac{\partial}{\partial y}(MQ)$  e, portanto, (2.18) é satisfeita.

Por outro lado, se (2.18) é satisfeita, então  $MP = \int \frac{\partial}{\partial x}(MP)dx = -\int \frac{\partial}{\partial y}(MQ)dx$  e pela Regra de Leibniz (ver [19], pag. 143), temos que  $\int \frac{\partial}{\partial y}(MQ)dx = \frac{\partial}{\partial y} \int (MQ)dx$ , logo

$$MP = -\frac{\partial}{\partial y} \int (MQ)dx. \quad (2.19)$$

Chamando  $H = -\int MQdx$ , temos, por (2.19) que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= -MQ = -\dot{y} \Rightarrow \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ &\text{e} \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( -\int MQdx \right) = MP = \dot{x}. \end{aligned}$$

Portanto, (2.17) é Hamiltoniano.

Além disso, (2.18) é equivalente à (1.8), como vimos na Observação 1.54.

**Afirmção:** Os sistemas (1.7) e (2.17) são topologicamente equivalentes em  $U \setminus \Sigma$ .

De fato, consideramos o seguinte reescalonamento de tempo  $\tau = \int_0^t \frac{1}{M(s)} ds$ . Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos  $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{M(t)} = \frac{1}{M(x, y)}$ . Fazendo esse reescalonamento em (1.7), temos:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{d\tau}{dt}} = M(x, y)P(x, y), \\ \frac{dy}{d\tau} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{d\tau}{dt}} = M(x, y)Q(x, y), \end{cases}$$

Dessa forma, o reescalonamento de tempo,  $\tau = \int_0^t \frac{1}{M(s)} ds$ , leva o campo dado por (1.7) no campo dado por (2.17) o que implica que esses campos são topologicamente equivalentes em  $U \setminus \Sigma$ . Logo, como (2.17) é Hamiltoniano em cada componente simplesmente conexa de  $U \setminus \Sigma$  segue que, se o sistema (1.7) tem ciclos limite ou pontos singulares que não anulam o divergente do campo então eles estão contidos em  $\Sigma$  ou em uma componente não simplesmente conexa de  $U \setminus \Sigma$ .

Por fim, note que, um reescalonamento na variável  $t$  não muda o sinal do traço da parte linear do sistema em um ponto singular, pois fazendo o reescalonamento de tempo  $\tau = \alpha t$ ,  $\alpha > 0$ , no campo  $X = (P, Q)$ , segue que

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\alpha} \dot{x} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\alpha} \dot{y}$$

o que implica que a parte linear do sistema obtido após o reescalonamento de tempo nada mais é do que a parte linear do sistema inicial multiplicada por  $\frac{1}{\alpha}$ .

Com isso, provamos a seguinte proposição (ver [12]).

**Proposição 2.19.** *Sejam  $(P, Q)$  um campo de vetores  $C^1$  definido em um subconjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  e  $M$  um fator integrante deste campo definido em  $U \setminus \Sigma$ .*

- (a) *Se  $\gamma$  é um ciclo limite de  $(P, Q)$ , então  $\gamma$  está contida em  $\Sigma$  ou em uma componente não simplesmente conexa de  $U \setminus \Sigma$ .*
- (b) *Se  $p$  é um ponto singular de  $(P, Q)$  tal que o divergente de  $(P, Q)$  é não nulo em  $p$ , então  $p$  está contido em  $\Sigma$  ou em uma componente não simplesmente conexa de  $U \setminus \Sigma$ .*

Como consequência, temos o seguinte corolário (ver [12]).

**Corolário 2.20.** *Sejam  $(P, Q)$  um campo de vetores  $C^1$  definido no subconjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  e  $V = V(x, y)$ ,  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ , um fator integrante inverso para  $(P, Q)$ .*

- (a) *Se  $\gamma$  é um ciclo limite de  $(P, Q)$ , então  $\gamma$  está contida ou em  $\Sigma = \{(x, y) \in U; V(x, y) = 0\}$  ou em uma componente não simplesmente conexa de  $U \setminus \Sigma$ .*
- (b) *Se  $p$  é um ponto singular de  $(P, Q)$  tal que o divergente de  $(P, Q)$  é não nulo em  $p$ , então  $p$  está contido ou em  $\Sigma = \{(x, y) \in U; V(x, y) = 0\}$ , ou em uma componente não simplesmente conexa de  $U \setminus \Sigma$ .*

*Demonstração.* É imediato da Proposição 2.19, pois já vimos que se  $V$  é um fator integrante inverso para o campo  $(P, Q)$  então  $M = \frac{1}{V}$  é um fator integrante para o mesmo campo, em  $U \setminus \Sigma$ .  $\square$

O próximo teorema melhora o item (a) do Corolário 2.20 e nos dá um segundo critério sobre existência de ciclos limite em campos de vetores planares (ver [12]).

**Teorema 2.21** (Segundo Critério). *Sejam  $(P, Q)$  um campo de vetores  $C^1$  definido em um subconjunto aberto  $U$  do  $\mathbb{R}^2$  e  $V$  um fator integrante inverso para este campo, isto é,  $V$  satisfaz a equação (1.9).*

*Se  $\gamma$  é um ciclo limite de  $(P, Q)$ , então  $\gamma$  está contido em  $\Sigma = \{(x, y) \in U; V(x, y) = 0\}$ .*

*Demonstração.* Seja  $\gamma$  um ciclo limite de período  $T$ . Como já vimos,  $V(x, y) = 0$  é formada por trajetórias do campo de vetores  $(P, Q)$ , então se  $V(x, y) = 0$  para algum ponto de  $\gamma$ , segue que  $V(x, y)$  será nula em todos os pontos de  $\gamma$ . Assim, assumimos que  $V$  não se anula em nenhum ponto de  $\gamma$ . Logo, pela continuidade da  $V$ , existe um anel  $\Omega$ , tal que  $\gamma \subset \Omega \subset U$  onde  $V$  é não nula.

Como  $V$  é um fator integrante inverso para  $(P, Q)$  em  $U$  então  $\frac{1}{V}$  é um fator integrante para este campo em  $U \setminus \Sigma$  e, como  $\Omega \subset U \setminus \Sigma$  então, em particular,  $\frac{1}{V}$  é um fator integrante para este campo em  $\Omega$ .

A partir da um-forma diferenciável  $\omega = Qdx - Pdy$ , consideramos a um-forma  $\frac{1}{V}\omega = \left(\frac{1}{V}Q\right) dx - \left(\frac{1}{V}P\right) dy$ . Observe que  $\frac{1}{V}\omega$  é fechada em  $\Omega$ , isto é,  $d\left(\frac{1}{V}\omega\right) = 0$ , pois:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{V}\omega\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{V}P\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{V}Q\right) = -\frac{1}{V^2}\left(P\frac{\partial V}{\partial x} + Q\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{1}{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) = \\ &= -\frac{1}{V^2}\left(P\frac{\partial V}{\partial x} + Q\frac{\partial V}{\partial y}\right)V + \frac{1}{V^2}\left(P\frac{\partial V}{\partial x} + Q\frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0. \end{aligned}$$

Por [27], teorema 9, página 364, a um forma fechada  $\frac{1}{V}\omega$  é exata em  $\Omega$  se  $\int_{\gamma} \frac{1}{V}\omega = 0$ .

Como  $\gamma$  é uma trajetória fechada de período  $T$  para o campo de vetores  $(P, Q)$  então, pelo Teorema de Green,

$$\int_{\gamma} \frac{1}{V}\omega = \int_{\gamma} \left(\frac{1}{V}Q\right) dx - \left(\frac{1}{V}P\right) dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{V}P\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{V}Q\right) dA = \iint_D 0 dA = 0,$$

onde  $D$  é a região limitada por  $\gamma$ .

Isso implica que a um-forma  $\frac{1}{V}\omega$  é exata em  $\Omega$ . Então, existe  $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $H \in C^2$ , tal que  $\frac{1}{V}\omega = dH$  e, além disso, o campo  $\frac{1}{V}(P, Q)$  é Hamiltoniano com integral primeira  $H$ . Conseqüentemente,  $H$  é constante ao longo das trajetórias de  $\frac{1}{V}(P, Q)$  em  $\Omega$ .

Como  $\gamma$  é um ciclo limite em  $\Omega$ , então toda trajetória em uma vizinhança  $N$  de  $\gamma$ , suficientemente pequena, tem  $\gamma$  como um conjunto  $\omega$ -limite ou  $\alpha$ -limite. Então, pela continuidade de  $H$ , segue que  $H$  é constante em  $N$ . Logo,  $H$  é constante no aberto  $N \cap \Omega \subset \Omega$ , o que é absurdo pois  $H$  é uma integral primeira.

Portanto, existe um ponto  $p = (x_0, y_0) \in \gamma$  tal que  $V(p) = 0$ , o que implica que  $V(x, y) = 0$  para todo  $(x, y) \in \gamma$ , ou seja,  $\gamma \subset \Sigma$ .

□

Agora podemos demonstrar o item (a) do Teorema 2.12, no seguinte lema.

**Lema 2.22.** *Seja  $\gamma$  uma trajetória fechada do sistema (2.8) definida por  $x^2 + y^2 = 1$ . Se  $a + b = 0$  e  $ab \neq 0$ , então  $\gamma$  é o único possível ciclo limite do sistema (2.8).*

*Demonstração.* Lembre que, (2.8) é o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) = -y + ax(x^2 + y^2 - 1) \\ \dot{y} = Q(x, y) = x + by(x^2 + y^2 - 1) \end{cases} \quad \text{com } a, b \in \mathbb{R}.$$

Considere  $V(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Temos:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V &= (a(x^2 + y^2 - 1) + 2ax^2 + b(x^2 + y^2 - 1) + 2by^2)(x^2 + y^2 - 1) = \\ &= ((a + b)(x^2 + y^2 - 1) + 2ax^2 + 2by^2)(x^2 + y^2 - 1) = (2ax^2 + 2by^2)(x^2 + y^2 - 1) = \\ &= P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y}. \end{aligned}$$

Logo,  $V$  é um fator integrante inverso para o campo  $(P, Q)$ . Assim, pelo Teorema 2.21 segue que, todo ciclo limite de (2.8) está contido em  $\Sigma$  e, portanto,  $\gamma$  é o único ciclo limite possível do sistema (2.8).

□

---

## Bifurcações e Configurações de Ciclos Limite

---

Neste capítulo, apresentamos duas aplicações do Teorema 2.21, a primeira delas é sobre bifurcações de ciclos limite a partir de perturbações de um centro linear (ver [12]) e na segunda aplicação estudamos as configurações de ciclos limite no plano, isto é, mostramos que toda configuração de curvas fechadas, simples e disjuntas no plano pode ser realizável como o conjunto de ciclos limite de um campo polinomial (ver [21]).

### 3.1 Bifurcações de Ciclos Limite a partir de centros

Nesta seção, estudamos bifurcações de ciclos limite a partir de um centro linear de campos vetoriais planares. Essa teoria pode ser desenvolvida para campos  $C^r$ , mas aqui consideramos apenas campos analíticos.

Trabalhamos com sistemas planares da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) + \varepsilon p(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = Q(x, y) + \varepsilon q(x, y, \varepsilon) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $P$ ,  $Q$ ,  $p$  e  $q$  dependem analiticamente de suas variáveis,  $\varepsilon$  é um parâmetro pequeno e quando  $\varepsilon = 0$  a origem é um centro do sistema.

Dizemos que o sistema (3.1) com  $\varepsilon = 0$  é o sistema não perturbado. Nosso problema é determinar o número e as posições das famílias de ciclos limite que bifurcam das trajetórias fechadas do sistema não perturbado quando  $\varepsilon$  varia.

Existem três métodos clássicos para analisar este problema. O primeiro é baseado na aplicação de primeiro retorno de Poincaré, o segundo no método integral de Poincaré-Melnikov

e o terceiro no método da integral abeliana (para mais detalhes ver, por exemplo, [7], seção 6 do capítulo 4 de [14] e seção 5 do capítulo 6 de [3], respectivamente). Aqui apresentamos um outro método (ver [12]), baseado no Teorema 2.21. A ideia básica de todos esses métodos é usar as soluções gerais obtidas dos sistemas não perturbados para o cálculo das soluções dos sistemas perturbadas. Como veremos, a partir do método aqui apresentado, também obtemos a forma global dos ciclos limite bifurcados em função de  $x$ ,  $y$  e  $\varepsilon$ . Esta forma global não pode ser obtida pelos métodos clássicos.

Para ilustrar o uso do Teorema 2.21 no estudo de bifurcações de ciclos limite a partir de centros, consideramos o centro linear  $(P(x, y), Q(x, y)) = (-y, x)$  e o perturbamos com um campo de vetores polinomial arbitrário de grau  $n$ , tendo a origem como um ponto singular. Isto é, consideramos o sistema perturbado

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n a_{ij} x^i y^j \\ \dot{y} = x + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n b_{ij} x^i y^j \end{cases} \quad (3.2)$$

e olhamos para as soluções analíticas do fator integrante inverso do sistema,  $V = V(x, y, \varepsilon)$ .

**Observação 3.1.** *O fator integrante inverso  $V$  é analítico nas variáveis  $x$ ,  $y$  e  $\varepsilon$  exceto, possivelmente, nos pontos críticos de (3.2). Para ver isso, basta repetir os argumentos da demonstração padrão de existência e unicidade de soluções de uma equação diferencial parcial linear com boas condições iniciais (ver, por exemplo, [17]). Tal prova se reduz, essencialmente, ao problema de existência e unicidade de soluções de duas equações diferenciais ordinárias. Assim, usando o fato de que as soluções de uma equação diferencial ordinária analítica são localmente analíticas, que composições de funções analíticas são analíticas e a dependência analítica das soluções de um sistema analítico ordinário com condições iniciais e parâmetros temos que  $V$  é analítica nas variáveis  $x$ ,  $y$  e  $\varepsilon$  (ver, por exemplo, [25]).*

**Definição 3.2.** *Seja  $n$  um número natural. Chamamos de duplo fatorial e denotamos por  $n!!$  o número*

$$n!! = \prod_{i=0}^k (n - 2i),$$

onde  $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ .

Seja  $p(\rho)$  o polinômio de grau  $m + 1$  definido por:

$$p(\rho) = \sum_{j=0}^m p_j \rho^{j+1}, \quad (3.3)$$

onde

$$p_j = \frac{1}{2^j(j+1)!} \sum_{k=0}^j (2j+1-2k)!!(2k-1)!!(a_{2j+1-2k,2k} + b_{2k,2j+1-2k}),$$

com  $n = 2m + 1$  se  $n$  é ímpar e  $n = 2m + 2$  se  $n$  é par.

**Teorema 3.3.** *Para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, se  $p(\rho)$  tem  $h$  raízes reais simples, com  $0 \leq h \leq m$ ,  $\rho = r_i^2$ , com  $i = 1, \dots, h$  e  $\rho = 0$  também é uma raiz simples de  $p(\rho)$  então o sistema (3.2) tem no máximo  $h$  ciclos limite que são assintóticos aos círculos de raio  $r_i$  centrados na origem, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

*Demonstração.* Como (3.2) é analítico, já que é um sistema polinomial, pela Observação 3.1, temos que o fator integrante inverso  $V = V(x, y, \varepsilon)$  associado a este sistema é analítico. Logo, expandindo a função em série de Taylor, em torno de  $\varepsilon = 0$ , podemos escrever:

$$V = V(x, y, \varepsilon) = V_0(x, y) + \varepsilon V_1(x, y) + O(\varepsilon^2). \quad (3.4)$$

**Afirmção:** Os termos de ordem zero e um, em  $\varepsilon$ , da equação

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V$$

são, respectivamente:

$$-y \frac{\partial V_0}{\partial x} + x \frac{\partial V_0}{\partial y} = 0 \quad (3.5)$$

e

$$-y \frac{\partial V_1}{\partial x} + x \frac{\partial V_1}{\partial y} = f, \quad (3.6)$$

onde

$$f(x, y) = V_0 \sum_{r+s=0}^{n-1} ((r+1)a_{r+1,s} + (s+1)b_{r,s+1})x^r y^s - V_0' \sum_{r+s=2}^{n+1} 2(a_{r-1,s} + b_{r,s-1})x^r y^s, \quad (3.7)$$

com  $V_0'$  denotando a derivada de  $V_0 = V_0(x, y)$  com relação a variável  $x^2 + y^2$  e onde assumimos que se algum coeficiente  $a_{ij}$  ou  $b_{ij}$ , na expressão de  $f$ , tenha um dos subíndices negativos, então esse coeficiente é nulo.

De fato, temos:

$$\begin{aligned} P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} &= \left( -y + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n a_{ij} x^i y^j \right) \left( \frac{\partial V_0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} O(\varepsilon^2) \right) + \\ &+ \left( x + \varepsilon \sum_{i+j=1}^n b_{ij} x^i y^j \right) \left( \frac{\partial V_0}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} O(\varepsilon^2) \right) = \left( -y \frac{\partial V_0}{\partial x} + x \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) + \\ &+ \varepsilon \left( -y \frac{\partial V_1}{\partial x} + x \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \sum_{i+j=1}^n a_{ij} x^i y^j + \frac{\partial V_0}{\partial y} \sum_{i+j=1}^n b_{ij} x^i y^j \right) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V &= \left( \varepsilon \sum_{r+s=0}^{n-1} (r+1) a_{r+1,s} x^r y^s + \varepsilon \sum_{r+s=0}^{n-1} (s+1) b_{r,s+1} x^r y^s \right) (V_0 + \varepsilon V_1 + O(\varepsilon^2)) = \\ &= \varepsilon V_0 \sum_{r+s=0}^{n-1} ((r+1) a_{r+1,s} x^r y^s + (s+1) b_{r,s+1} x^r y^s) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Disso, segue que o termo de ordem zero é o dado na equação (3.5). Logo,  $V_0 = V_0(x^2 + y^2)$ , pois:

$$-y \frac{\partial V_0}{\partial x} + x \frac{\partial V_0}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow (-y, x) \cdot \nabla V_0 = 0.$$

Agora, se  $\gamma(t)$  é um caminho contido em uma curva de nível de  $V_0(x, y)$ , como  $\nabla V_0$  é perpendicular a toda curva de nível  $V_0(x, y) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , temos  $\gamma'(t) \cdot \nabla V_0(\gamma(t)) = 0$ , para todo  $t$ . Logo, podemos parametrizar  $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (a \cos(t), a \sin(t))$ .

Portanto, toda curva de nível  $V_0 = c$  é formada por circunferências e assim, podemos escrever  $V_0 = V_0(x^2 + y^2)$ .

Para o termo de ordem um, em  $\varepsilon$ , observe que a partir do termo de ordem zero supondo, sem perda de generalidade, que  $x \neq 0$  temos:

$$\frac{\partial V_0}{\partial y} = \frac{y}{x} \frac{\partial V_0}{\partial x}. \quad (3.8)$$

Daí,

$$-y \frac{\partial V_1}{\partial x} + x \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \sum_{i+j=1}^n a_{ij} x^i y^j + \frac{\partial V_0}{\partial y} \sum_{i+j=1}^n b_{ij} x^i y^j = V_0 \sum_{r+s=0}^{n-1} ((r+1) a_{r+1,s} + (s+1) b_{r,s+1}) x^r y^s.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
-y \frac{\partial V_1}{\partial x} + x \frac{\partial V_1}{\partial y} &= -\frac{\partial V_0}{\partial x} \sum_{i+j=1}^n a_{ij} x^i y^j - \frac{y}{x} \frac{\partial V_0}{\partial x} \sum_{i+j=1}^n b_{ij} x^i y^j + \\
&\quad + V_0 \sum_{r+s=0}^{n-1} ((r+1)a_{r+1,s} + (s+1)b_{r,s+1}) x^r y^s = \\
&= V_0 \sum_{r+s=0}^{n-1} ((r+1)a_{r+1,s} + (s+1)b_{r,s+1}) x^r y^s - \\
&\quad - \frac{1}{2x} \frac{\partial V_0}{\partial x} \left( \sum_{i+j=1}^n 2a_{ij} x^{i+1} y^j + \sum_{i+j=1}^n 2b_{ij} x^i y^{j+1} \right).
\end{aligned}$$

Fazendo

$$r = i + 1 \text{ e } s = j \text{ em } \sum_{i+j=1}^n 2a_{ij} x^{i+1} y^j$$

e

$$r = i \text{ e } s = j + 1 \text{ em } \sum_{i+j=1}^n 2b_{ij} x^i y^{j+1}$$

segue que:

$$-y \frac{\partial V_1}{\partial x} + x \frac{\partial V_1}{\partial y} = V_0 \sum_{r+s=0}^{n-1} ((r+1)a_{r+1,s} + (s+1)b_{r,s+1}) x^r y^s - \frac{1}{2x} \frac{\partial V_0}{\partial x} \sum_{r+s=2}^{n+1} 2(a_{r-1,s} + b_{r,s-1}) x^r y^s.$$

Logo, para concluirmos a afirmação, resta mostrar que

$$V_0' = \frac{1}{2x} \frac{\partial V_0}{\partial x}.$$

Para isso, chamamos  $u = x^2 + y^2$ . Assim,  $V_0 = V_0(u)$  e

$$\frac{\partial V_0}{\partial x} = \frac{dV_0}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dV_0}{du} 2x \Rightarrow V_0' = \frac{dV_0}{du} = \frac{1}{2x} \frac{\partial V_0}{\partial x}.$$

Para encontrarmos soluções da equação (3.6), vamos resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$-\frac{1}{y} dx = \frac{1}{x} dy = \frac{1}{f} dV_1, \quad (3.9)$$

pois toda solução de (3.9) é solução de (3.6), já que

$$\frac{-1}{y} dx = \frac{1}{f} dV_1 = \frac{1}{f} \left( \frac{\partial V_1}{\partial x} dx + \frac{\partial V_1}{\partial y} dy \right) \Rightarrow \frac{\partial V_1}{\partial x} = -\frac{f}{y} \text{ e } \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0.$$

Assim,

$$-y \frac{\partial V_1}{\partial x} + x \frac{\partial V_1}{\partial y} = -y \left( -\frac{f}{y} \right) + 0 = f.$$

E, portanto, uma função  $V_1$  que satisfaz  $-\frac{1}{y}dx = \frac{1}{f}dV_1$  satisfaz (3.6).

Por outro lado, se

$$\frac{1}{x}dy = \frac{1}{f}dV_1 = \frac{1}{f} \left( \frac{\partial V_1}{\partial x} dx + \frac{\partial V_1}{\partial y} dy \right) \Rightarrow \frac{\partial V_1}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{f}{x}.$$

Assim,

$$-y \frac{\partial V_1}{\partial x} + x \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0 + x \left( \frac{f}{x} \right) = f.$$

E, portanto, uma função  $V_1$  que satisfaz  $\frac{1}{x}dy = \frac{1}{f}dV_1$  satisfaz (3.6).

Logo, toda função que satisfaz (3.9) satisfaz (3.6) e, assim, podemos encontrar soluções de (3.6) resolvendo (3.9).

Agora,

$$-\frac{1}{y}dx = \frac{1}{x}dy \Rightarrow xdx = -ydy \Rightarrow x^2 + y^2 = c = a^2, \quad (3.10)$$

e

$$\frac{1}{x}dy = \frac{1}{f}dV_1 \Rightarrow \frac{f}{x}dy = dV_1 = \frac{\partial V_1}{\partial x}dx + \frac{\partial V_1}{\partial y}dy \Rightarrow \frac{\partial V_1}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{f}{x} \Rightarrow V_1 = \int \frac{f}{x}dy.$$

Da equação (3.10), definimos

$$g(a^2, y) = \int \frac{f(x, y)}{x} dy = \int \frac{f(\sqrt{a^2 - y^2}, y)}{\sqrt{a^2 - y^2}} dy. \quad (3.11)$$

Assim,

$$V_1(x, y) = \int \frac{f(x, y)}{x} dy = g(a^2, y) = g(x^2 + y^2, y)$$

é uma solução de (3.6), já que é solução de (3.9).

Observamos que, nos pontos  $(\sqrt{a^2 - y^2}, y)$  as funções  $V_0$  e  $V'_0$  são constantes, pois:

$$V_0(\sqrt{a^2 - y^2}, y) = V_0(a^2 - y^2 + y^2) = V_0(a^2)$$

e

$$V'_0(\sqrt{a^2 - y^2}, y) = V'_0(a^2 - y^2 + y^2) = V'_0(a^2).$$

Para simplificar os cálculos de  $g(a^2, y)$ , levamos em conta a simetria circular do nosso problema e passamos para coordenadas polares fazendo  $x = a \cos \theta$  e  $y = a \sin \theta$ . Assim,

$$g(a^2, a \sin \theta) = \int \frac{f(a \cos \theta, a \sin \theta)}{a \cos \theta} a \cos \theta d\theta = \int f(a \cos \theta, a \sin \theta) d\theta.$$

Logo, o cálculo de  $g(a^2, a \sin \theta)$  se reduz ao cálculo de integrais da forma  $\int \sin^s \theta \cos^r \theta d\theta$ .

Pela seção 2.51 de [13], temos:

$$\begin{aligned} \int \sin^s \theta \cos^r \theta d\theta &= \frac{\sin^{s-1} \theta \cos^{r-1} \theta}{s+r} \left( \sin^2 \theta - \frac{r-1}{s+r-2} \right) + \\ &\quad + \frac{(s-1)(r-1)}{(s+r)(s+r-2)} \int \sin^{s-2} \theta \cos^{r-2} \theta d\theta, \\ \int \sin \theta \cos^r \theta d\theta &= -\frac{\cos^{r+1} \theta}{r+1}, \\ \int \sin^s \theta \cos \theta d\theta &= \frac{\sin^{s+1} \theta}{s+1}. \end{aligned}$$

Disso, e usando as integrais trigonométricas mais conhecidas, segue que as primitivas de tais integrais são polinômios nas variáveis  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$  além de, eventualmente, um termo linear em  $\theta$  que aparece apenas quando  $r$  e  $s$  são pares.

Usando as fórmulas para integrais dadas em 2.512 e 2.512.2 de [13], concluímos que o termo linear da integral  $\int \sin^{2k} \theta \cos^{2l} \theta d\theta$  é

$$\begin{aligned} \frac{(2l-1)!!}{(2l+2k)(2l+2k-2) \cdot \dots \cdot (2l+2)} \frac{(2k-1)!!}{2^l l!} &= \frac{(2l-1)!!(2k-1)!!}{2^{l+k}(k+l)(k+l-1) \cdot \dots \cdot (l+1)l!} = \\ &= \frac{(2k-1)!!(2l-1)!!}{2^{k+l}(k+l)!}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Devemos anular o coeficiente do termo linear  $\theta$ , pois como  $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ , a função  $g(x^2 + y^2, y)$  pode não estar bem definida.

**Afirmção:** Se juntarmos todos os monômios onde  $x^r y^s$  aparecem com  $r$  e  $s$  pares em  $f(x, y)$  e se os integramos, então obteremos que o coeficiente de  $\theta$  em  $\int f(a \cos \theta, a \sin \theta) d\theta$  é

$$p'(\rho)V_0(\rho) - p(\rho)V_0'(\rho), \quad (3.13)$$

onde  $p(\rho)$  é o polinômio definido em (3.3) e  $\rho = a^2$ .

De fato, observe que, quando passamos de  $n$  ímpar para  $n+1$  par, não aparece novos monômios  $x^r y^s$  com  $r$  e  $s$  pares em  $f(x, y)$ , pois na expressão de  $f(x, y)$ , da equação (3.7), temos  $r+s=n$ . Logo, para provarmos a afirmação, usamos indução sobre  $n=2m+1$  ímpar. Lembre que, por definição  $a_{ij}=0$  e  $b_{ij}=0$  quando  $i<0$  ou  $j<0$ .

Se  $n=1$ , então

$$f(x, y) = V_0(\rho)(a_{1,0} + b_{0,1}) - V_0'(\rho)(2a_{1,0}x^2 + 2(a_{0,1} + b_{1,0})xy + 2b_{0,1}y^2), \quad (3.14)$$

e assim, os únicos termos de  $f(x, y)$  com  $r$  e  $s$  pares são

$$V_0(\rho)(a_{1,0} + b_{0,1}) - (2a_{1,0}x^2 + 2b_{0,1}y^2)V_0'(\rho). \quad (3.15)$$

Fazendo  $x = a \cos \theta$ ,  $y = a \sin \theta$  e integrando (3.15) com relação a  $\theta$ , obtemos:

$$\begin{aligned} & \int (V_0(\rho)(a_{1,0} + b_{0,1}) - 2\rho(a_{1,0} \cos^2 \theta + b_{0,1} \sin^2 \theta)V_0'(\rho))d\theta = \\ & = ((a_{1,0} + b_{0,1})V_0(\rho) - \rho(a_{1,0} + b_{0,1})V_0'(\rho))\theta - \rho(a_{1,0} - b_{0,1})V_0'(\rho) \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por outro lado, como  $1 = n = 2m + 1$ , então  $m = 0$ . Daí, da equação (3.3), obtemos

$$p(\rho) = \sum_{j=0}^m p_j \rho^{j+1} = p_0 \rho = (a_{1,0} + b_{0,1})\rho \Rightarrow p'(\rho) = (a_{1,0} + b_{0,1}),$$

e, portanto, de (3.13), temos

$$p'(\rho)V_0(\rho) - p(\rho)V_0'(\rho) = (a_{1,0} + b_{0,1})V_0(\rho) - (a_{1,0} + b_{0,1})V_0'(\rho),$$

que é o coeficiente de  $\theta$ , da equação (3.16).

Agora, na hipótese de indução, assumimos que a afirmação é válida para  $n = 2m - 1$ , isto é, para

$$f(x, y) = V_0 \sum_{r+s=0}^{2m-2} ((r+1)a_{r+1,s} + (s+1)b_{r,s+1})x^r y^s - V_0' \sum_{r+s=2}^{2m} 2(a_{r-1,s} + b_{r,s-1})x^r y^s,$$

o coeficiente de  $\theta$  é dado pela equação (3.13).

Para  $n = 2m + 1 = 2(m + 1) - 1$ , acrescentamos os seguintes termos a  $f(x, y)$  dada na hipótese de indução:

$$V_0 \sum_{r+s=2m-1}^{2m} ((r+1)a_{r+1,s} + (s+1)b_{r,s+1})x^r y^s - V_0' \sum_{r+s=2m+1}^{2m+2} 2(a_{r-1,s} + b_{r,s-1})x^r y^s.$$

Observe que, se  $m = k + 1$  então:

$$p(\rho) = \sum_{j=0}^k p_j \rho^{j+1} + p_m \rho^{m+1} \quad \text{e} \quad p'(\rho) = \sum_{j=0}^k (j+1)p_j \rho^j + (m+1)p_m \rho^m.$$

Logo, para mostrarmos (3.13), precisamos provar que os monômios de  $f(x, y)$  tais que  $x^r y^s$  tem grau  $r + s = 2m$ , com  $r$  e  $s$  pares, multiplicados por  $V_0(\rho)$  e os monômios que tem grau  $r + s = 2m + 2$ , com  $r$  e  $s$  pares, multiplicados por  $V_0'(\rho)$  contribuem com a equação (3.13) com:

$$(m+1)p_m \rho^m V_0(\rho) - p_m \rho^{m+1} V_0'(\rho). \quad (3.17)$$

Os monômios  $x^r y^s$  de  $f(x, y)$ , da equação (3.7), com grau  $r + s = 2m$  com  $r$  e  $s$  pares, somados são:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m ((2m+1-2k)a_{2m+1-2k,2k}x^{2m-2k}y^{2k})V_0(\rho) + \sum_{k=0}^m ((2k+1)b_{2m-2k,2k+1}x^{2m-2k}y^{2k})V_0(\rho) - \\ & - \sum_{k=0}^m (2a_{2m+1-2k,2k}x^{2m+2-2k}y^{2k})V_0'(\rho) - \sum_{k=0}^m (2b_{2m+2-2k,2k-1}x^{2m+2-2k}y^{2k})V_0'(\rho). \end{aligned}$$

Fazendo  $k = m - k$  no segundo somatório e  $k = m + 1 - k$  no quarto somatório, obtemos que a equação anterior é equivalente à:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m (2m+1-2k)(a_{2m+1-2k,2k}x^{2m-2k}y^{2k} + b_{2k,2m+1-2k}x^{2k}y^{2m-2k})V_0(\rho) - \\ & - \sum_{k=0}^m 2(a_{2m+1-2k,2k}x^{2m+2-2k}y^{2k} + b_{2k,2m+1-2k}x^{2k}y^{2m+2-2k})V_0'(\rho). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Pela definição de  $p_m$  e pela equação (3.12), temos:

- (i) O monômio  $(2m+1-2k)a_{2m+1-2k,2k}V_0(\rho)x^{2m-2k}y^{2k}$  contribui com o coeficiente de  $\theta$  na integral  $\int f(a \cos \theta, a \sin \theta)d\theta$  com

$$\frac{(2k-1)!!(2m-2k+1)!!}{2^m m!} a^{2m}, \quad (3.19)$$

pois:

$$(2m+1-2k) \int ((a \cos \theta)^{2m-2k} (a \sin \theta)^{2k}) d\theta = (2m+1-2k)a^{2m} \int \sin^{2k} \theta \cos^{2(m-k)} \theta d\theta.$$

Logo, usando a equação (3.12), segue que o monômio em questão é o seguinte:

$$(2m+1-2k)a^{2m} \frac{(2k-1)!!(2m-2k-1)!!}{2^m m!} = \frac{(2k-1)!!(2m-2k+1)!!}{2^m m!} a^{2m}.$$

Analogamente,

- (ii) O monômio  $2a_{2m+1-2k,2k}V_0'(\rho)x^{2m+2-2k}y^{2k}$  contribui com

$$\frac{(2k-1)!!(2m-2k+1)!!}{2^m (m+1)!} a^{2m+2}. \quad (3.20)$$

- (iii) O monômio  $(2m+1-2k)b_{2k,2m+1-2k}V_0(\rho)x^{2k}y^{2m-2k}$  contribui com

$$\frac{(2k-1)!!(2m-2k+1)!!}{2^m m!} a^{2m}. \quad (3.21)$$

(iv) O monômio  $2b_{2k,2m+1-2k}V_0'(\rho)x^{2k}y^{2m+2-2k}$  contribui com

$$\frac{(2k-1)!!(2m-2k+1)!!}{2^m(m+1)!}a^{2m+2}. \quad (3.22)$$

Assim, (3.18) contribui para o coeficiente de  $\theta$  com:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m \frac{(2m+1-2k)!!(2k-1)!!}{2^m m!} (a_{2m+1-2k,2k} + b_{2k,2m+1-2k}) \rho^m V_0(\rho) - \\ & \sum_{k=0}^m \frac{(2m+1-2k)!!(2k-1)!!}{2^m(m+1)!} (a_{2m+1-2k,2k} + b_{2k,2m+1-2k}) \rho^{m+1} V_0'(\rho) = \\ & = (m+1)p_m \rho^m V_0(\rho) - p_m \rho^{m+1} V_0'(\rho). \end{aligned}$$

Logo, a afirmação está provada.

Para anular o coeficiente de  $\theta$ , por (3.13) temos:

$$p'(\rho)V_0(\rho) - p(\rho)V_0'(\rho) = 0. \quad (3.23)$$

Como  $p(\rho)$  só tem raízes simples segue, de (3.23), que  $p(\rho) = 0$  implica  $V_0(\rho) = 0$ . Além disso, supondo  $p(\rho) \neq 0$ , obtemos, de (3.23), pela regra do quociente, que

$$\left( \frac{V_0(\rho)}{p(\rho)} \right)' p^2(\rho) = 0 \Rightarrow \left( \frac{V_0(\rho)}{p(\rho)} \right)' = 0 \Rightarrow \frac{V_0(\rho)}{p(\rho)} = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

E, portanto,  $V_0(\rho) = cp(\rho)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , onde podemos escolher  $c = 1$ .

Pelo Teorema 2.21, segue que os ciclos limite de (3.1) estão contidos no conjunto  $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; V(x, y) = V_0(x^2 + y^2) + \varepsilon V_1(x, y) + O(\varepsilon^2) = 0\}$ .

Como, por hipótese,  $p(\rho)$  tem  $0 \leq h \leq m$  raízes simples, positivas, com  $\rho = r_i^2$ , para  $i = 1, \dots, h$ , e  $\rho = 0$  é também uma raiz simples de  $p(\rho)$ , fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  segue, pelo Teorema da Função Implícita, que o sistema (3.2) tem no máximo  $h$  ciclos limite, que são assintóticos aos círculos de raio  $r_i$ , como queríamos.

□

**Definição 3.4.** Chamamos de sistema de Lienard, um sistema da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + F(x, y) \\ \dot{y} = x \end{cases} \quad (3.24)$$

O próximo resultado é devido a Blows e Perko [6] e melhora um resultado anterior de Lins, de Melo e Pugh [20]. Podemos obtê-lo como um caso particular do Teorema 3.3, como em [12].

**Corolário 3.5.** Para  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeno, o sistema de Lienard (3.24) com  $F(x) = \varepsilon \sum_{i=1}^{2m+1} a_i x^i$  tem no máximo  $m$  ciclos limite centrados na origem quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , se a equação de grau  $m$  em  $\rho = r_j^2$ ,

$$q(\rho) = \frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{8}a_3\rho + \frac{5}{16}a_5\rho^2 + \frac{35}{128}a_7\rho^3 + \dots + \frac{1}{2^{2m+2}} \binom{2m+2}{m+1} a_{2m+1} \rho^m, \quad (3.25)$$

tem  $m$  raízes reais positivas  $\rho = r_j^2$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

*Demonstração.* Se no sistema (3.2) tomarmos  $n = 2m + 1$ ,  $a_{i0} = a_i$  para  $i = 1, \dots, n$  e todos os outros coeficientes  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$  nulos, obtemos o sistema (3.24) com  $F(x) = \varepsilon \sum_{i=1}^{2m+1} a_i x^i$ . Neste caso,

$$\sum_{k=0}^j (2j+1-2k)!!(2k-1)!!(a_{2j+1-2k,2k} + b_{2k,2j+1-2k}) = (2j+1)!!a_{2j+1},$$

pois se  $k \neq 0$ , os coeficientes  $a_{2j-1-2k,2k} + b_{2k,2j+1-2k}$  são todos nulos, assim segue que

$$p_j = \frac{1}{2^j(j+1)!} (2j+1)!! a_{2j+1}.$$

E, portanto,

$$p(\rho) = \sum_{j=0}^m p_j \rho^{j+1} = \sum_{j=0}^m \frac{(2j+1)!!}{2^j(j+1)!} a_{2j+1} \rho^{j+1}.$$

Por indução sobre  $j$ , segue que:

$$(2j+1)!! = \frac{1}{2^{j+1}} (2j+2)(2j+1) \dots (j+2), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.26)$$

De fato, para  $j = 0$  a expressão (3.26) é facilmente verificada.

Na hipótese de indução, assumimos que (3.26) seja válida para  $j = k$ .

Assim, para  $j = k + 1$ , temos:

$$(2(k+1)+1)!! = (2k+3)(2k+1)!! = \frac{1}{2^{k+1}} (2k+3)(2k+2)(2k+1) \dots (k+2).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{(k+1)+1}} (2(k+1)+2)(2(k+1)+1) \dots ((k+1)+2) &= \frac{1}{2^{k+2}} 2(k+2)(2k+3) \dots (k+3) = \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} (2k+3)(2k+2)(2k+1) \dots (k+2). \end{aligned}$$

Logo, segue o desejado e, conseqüentemente,

$$\frac{(2j+1)!!}{2^j(j+1)!} = \frac{1}{2^j(j+1)!} \cdot \frac{1}{2^{j+1}} (2j+2)(2j+1) \dots (j+2) = \frac{1}{2^{2j+1}} \cdot \frac{(2j+2)(2j+1) \dots (j+2)}{(j+1)!} =$$

$$= \frac{1}{2^{2j+1}} \binom{2j+2}{j+1}.$$

Agora,

$$p(\rho) = \sum_{j=0}^m \frac{(2j+1)!!}{2^j(j+1)!} a_{2j+1} \rho^{j+1} = \sum_{j=0}^m \frac{1}{2^{2j+1}} \binom{2j+2}{j+1} a_{2j+1} \rho^{j+1} = 2\rho q(\rho),$$

e, como por hipótese,  $q(\rho)$  tem  $m$  raízes reais, simples, positivas,  $\rho = r_j^2$ ,  $j = 1, \dots, m$  segue que  $p(\rho)$  satisfaz as hipóteses do Teorema 3.3 e disso, segue o resultado.  $\square$

A próxima proposição mostra como usar o Teorema 2.21 para obter a forma dos ciclos limite que bifurcam de um centro. Tal resultado foi apresentado em [12].

**Proposição 3.6.** *Para  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeno, o sistema de Lienard*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) \\ \dot{y} = x \end{cases} \quad (3.27)$$

tem no máximo um ciclo limite se  $a_1a_3 < 0$ . Além disso, este ciclo limite é assintótico ao círculo de raio  $\sqrt{-\frac{4a_1}{3a_3}}$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  e a sua forma é dada pela curva

$$V_0 + \varepsilon V_1 + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (3.28)$$

onde,

$$V_0 = (a_1 + \frac{3}{4}a_3(x^2 + y^2))(x^2 + y^2)$$

$$V_1 = -\frac{1}{12} [12a_1^2x - 8a_1a_2y^2 + 3a_1a_3(5x^3 + 3xy^2) + 6a_2a_3(3x^4 + 4x^2y^2 + y^4) + 9a_3^2(x^5 + x^3y^2)] y.$$

*Demonstração.* O sistema (3.27) é um sistema de Lienard com  $F(x) = \varepsilon(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \varepsilon \sum_{i=1}^3 a_i x^i$  e, seguindo a notação do corolário anterior, temos  $n = 3$  e  $m = 1$ . Assim,

$$q(\rho) = \frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{8}a_3\rho \Rightarrow q(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho = -\frac{4a_1}{3a_3},$$

e, portanto,  $\rho > 0 \Leftrightarrow a_1a_3 < 0$ .

Logo, pelo Corolário 3.5, segue que para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, o sistema (3.27) tem no máximo um ciclo limite se  $a_1a_3 < 0$ . Além disso, este ciclo limite é assintótico ao círculo de raio  $\sqrt{\bar{\rho}} = \sqrt{-\frac{4a_1}{3a_3}}$ .

Resta mostrar que a forma deste ciclo limite, até os termos de ordem dois, é dada pela curva (3.28), com  $V_0$  e  $V_1$  dadas no enunciado. Para isso, repetimos o método da demonstração do Teorema 3.3.

Como (3.27) é analítico, já que é um sistema polinomial, o fator integrante inverso  $V = V(x, y, \varepsilon)$  associado a este sistema é analítico. Logo, podemos escrever:

$$V = V(x, y, \varepsilon) = V_0(x, y) + \varepsilon V_1(x, y) + O(\varepsilon^2). \quad (3.29)$$

Como vimos na demonstração do Teorema 3.3, o termo de ordem zero, em  $\varepsilon$ , da equação  $P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V$  é dado por  $-y \frac{\partial V_0}{\partial x} + x \frac{\partial V_0}{\partial y} = 0$ , onde  $V_0 = V_0(x^2 + y^2)$ .

Além disso, o termo de ordem um, em  $\varepsilon$ , é dado por  $-y \frac{\partial V_1}{\partial x} + x \frac{\partial V_1}{\partial y} = f$ , com  $f(x, y)$  dada na equação (3.7).

Vamos calcular  $f(x, y)$  para esse caso particular. Temos:

$$\begin{aligned} P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} &= (-y + \varepsilon(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)) \left( \frac{\partial V_0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} O(\varepsilon^2) \right) + \\ &+ x \left( \frac{\partial V_0}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} O(\varepsilon^2) \right) = \left( -y \frac{\partial V_0}{\partial x} + x \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) + \\ &+ \varepsilon \left( -y \frac{\partial V_1}{\partial x} + x \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) \right) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

e,

$$\left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V = \varepsilon(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2)(V_0 + \varepsilon V_1 + O(\varepsilon^2)) = \varepsilon V_0(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2) + O(\varepsilon^2).$$

Logo,

$$f(x, y) = V_0(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2) - 2V_0'(a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4), \quad (3.30)$$

onde  $V_0'$  indica a derivada em relação a  $x^2 + y^2$ .

Para resolvermos

$$-y \frac{\partial V_1}{\partial x} + x \frac{\partial V_1}{\partial y} = f(x, y), \quad (3.31)$$

resolvermos o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$-\frac{1}{y} dx = \frac{1}{x} dx = \frac{1}{f} dV_1,$$

e obtemos

$$V_1 = \int \frac{f}{x} dy.$$

Definindo,

$$g(a^2, y) = \int \frac{f(\sqrt{a^2 - y^2}, y)}{\sqrt{a^2 - y^2}} dy,$$

temos

$$V_1(x, y) = \int \frac{f(x, y)}{x} dy = g(a^2, y) = g(x^2 + y^2, y)$$

é uma solução de (3.31).

Fazendo  $x = a \cos \theta$  e  $y = a \sin \theta$ , segue que,

$$g(a^2, a \sin \theta) = \int \frac{f(a \cos \theta, a \sin \theta)}{a \cos \theta} a \cos \theta d\theta = \int f(a \cos \theta, a \sin \theta) d\theta.$$

Logo, o cálculo de  $g(a^2, a \sin \theta)$  se reduz ao cálculo de integrais da forma  $\int \sin^s \theta \cos^r \theta d\theta$ . Na demonstração do Teorema 3.3, vimos que as primitivas de tais integrais são polinômios nas variáveis  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$  além de, eventualmente, um termo linear em  $\theta$  que só aparece quando  $r$  e  $s$  são pares. Vimos também que devemos anular o coeficiente do termo linear  $\theta$ , e que se juntarmos todos os monômios onde  $x^r y^s$  aparecem com  $r$  e  $s$  pares em  $f(x, y)$  e se os integramos, então obteremos que o coeficiente de  $\theta$  em  $\int f(a \cos \theta, a \sin \theta) d\theta$  é dado pela equação (3.13), onde  $p(\rho)$  é o polinômio definido em (3.3) e  $\rho = a^2$ .

Anulando o coeficiente de  $\theta$ , segue da equação (3.13) que  $p(\rho) = cV_0(\rho)$ ,  $c \in \mathbb{R}$  e escolhemos  $c = 1$ . Neste caso, como  $m = 1$ , temos:

$$p(\rho) = \sum_{j=0}^1 p_j \rho^j = \sum_{j=0}^1 \frac{(2j+1)!!}{2^j (j+1)!!} a_{2j+1} \rho^{j+1} = a_1 \rho + \frac{3}{4} a_3 \rho^2 = \left( a_1 + \frac{3}{4} a_3 \rho \right) \rho.$$

Logo, como  $\rho = x^2 + y^2$ , segue que

$$V_0(x, y) = \left( a_1 + \frac{3}{4} a_3 (x^2 + y^2) \right) (x^2 + y^2).$$

Resta agora obter a expressão de  $V_1(x, y)$ , para isso, substituímos  $V_0(x, y)$  na equação dada por (3.31) e a resolvemos, obtendo, com a ajuda de softwares, a expressão  $V_1(x, y)$  desejada.

□

## 3.2 Configurações de Ciclos Limite em Campos Vetoriais Planares

Nesta seção, mostraremos que toda configuração de curvas fechadas, simples e disjuntas do plano é topologicamente realizável como um conjunto de ciclos limite de um campo vetorial polinomial. Além disso, a configuração pode ser realizável por ciclos limite algébricos. No teorema aqui estudado, forneceremos um campo vetorial polinomial que realiza uma dada configuração.

**Definição 3.7.** (a) Uma configuração de ciclos limite é um conjunto finito  $C = \{C_1, \dots, C_n\}$  de curva fechadas, simples e disjuntas do plano.

(b) Dada uma configuração de ciclos limite  $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ , a curva  $C_i$  é dita primária se não existe curva  $C_j$ , da configuração  $C$ , contida na região limitada por  $C_i$ .

(c) Duas configurações de ciclos limite  $C = \{C_1, \dots, C_n\}$  e  $C' = \{C'_1, \dots, C'_m\}$  são (topologicamente) equivalentes se existir um homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$h \left( \bigcup_{i=1}^n C_i \right) = \bigcup_{i=1}^m C'_i.$$

(d) Um campo vetorial  $X$  realiza a configuração de ciclos limite  $C$  se o conjunto de todos os ciclos limite de  $X$  for equivalente à  $C$ . Neste caso, dizemos que a configuração  $C$  é realizável por  $X$ .

Observe que, se  $C = \{C_1, \dots, C_n\}$  e  $C' = \{C'_1, \dots, C'_m\}$  são (topologicamente) equivalentes, então  $m = n$ .

**Definição 3.8.** Um ciclo limite é dito algébrico se for uma componente de uma curva algébrica.

O objetivo principal dessa seção é demonstrar o seguinte teorema, apresentado em [21].

**Teorema 3.9.** Seja  $C = \{C_1, \dots, C_n\}$  uma configuração de ciclos limite e seja  $r$  o número de curvas primárias dessa configuração. Então:

(a) A configuração  $C$  é realizável por um campo vetorial planar.

(b) A configuração  $C$  é realizável como uma configuração de ciclos limite algébricos por um campo vetorial de grau menor ou igual a  $2(n + r) - 1$ .

Antes da demonstração, introduzimos o conceito de logaritmo complexo que será usado na mesma (para mais detalhes, ver [11]).

**Definição 3.10.** O logaritmo de um número complexo  $z = re^{i\theta} \neq 0$  é definido por

$$\log z = \ln r + i\theta = \ln |z| + i \arg(z).$$

O logaritmo está definido para todo número complexo  $z \neq 0$  e se reduz ao logaritmo real quando  $\theta = 0$ .

Como a fórmula acima permite atribuir ao logaritmo vários valores distintos, dependendo do argumento usado para o número  $z$ , dizemos que ela é uma função multivalente. Esta função é, a rigor, imprópria, mas é usada por conveniência. Por esse motivo, para enfatizar, ou evitar quaisquer dúvidas, às vezes, usamos a expressão função univalente.

Observe que, para que o logaritmo seja uma função univalente basta restringirmos o argumento de  $z$  a um intervalo do tipo  $2k\pi < \theta \leq 2(k+1)\pi$  com  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Quando  $k = 0$  obtemos o que chamamos de valor principal do logaritmo. Além disso, observe que qualquer restrição do argumento a um intervalo de comprimento  $2\pi$ ,  $\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$ , introduz descontinuidades na função  $\log z$  ao longo do raio pela origem e de argumento  $\alpha$ .

Da análise complexa, temos

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z},$$

além disso,

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2 = \ln(r_1 r_2) + i((\theta_1 + \theta_2) + 2(k_1 + k_2)\pi), \quad (3.32)$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são inteiros arbitrários,  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  e  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ .

Observe que, a fórmula (3.32), é válida, com o seguinte significado: o conjunto de valores possíveis de  $\log(z_1 z_2)$  coincide com o conjunto dos valores possíveis de  $\log z_1 + \log z_2$ .

No caso em que  $z_1 = z_2 = z = r e^{i\theta}$  a equação (3.32) se reduz a

$$\log z^2 = 2 \log z = \ln r^2 + i((2\theta) + 2(2k)\pi).$$

**Definição 3.11.** *Dados dois números complexos  $z$  e  $\beta$ , com  $z \neq 0$ , definimos  $z^\beta$  por*

$$z^\beta = e^{\beta \log z}.$$

Assim,  $\beta \log z$  é um dos logaritmos de  $z^\beta$  e

$$\log z^\beta = \beta \log z + 2k\pi i.$$

Observe ainda que, quando consideramos o argumento principal  $0 < \theta < 2\pi$ , temos  $k = 0$  nas fórmulas anteriores.

*Demonstração. (do Teorema 3.9).* Seja  $C = \{C_1, \dots, C_n\}$  a configuração de ciclos limite dada no enunciado do teorema. Para toda curva primária  $C_j$  escolhemos um ponto  $p_j$  no interior da componente limitada por  $C_j$ .

Sem perda de generalidade, podemos assumir que:

(a) Cada curva  $C_i$  é um círculo definido por

$$f_i(x, y) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r_i^2 = 0 \quad (3.33)$$

para  $i = 1, \dots, n$ .

(b) As curvas primárias da configuração  $C$  são as curvas  $C_j$  e os pontos  $p_j$  escolhidos tem coordenadas  $(x_j, y_j)$ , para  $j = 1, \dots, r$ .

Para todo ponto  $p_j$  escolhido, definimos:

$$\begin{aligned} f_{n+2j-1}(x, y) &= (x - x_j) + i(y - y_j), \\ f_{n+2j}(x, y) &= (x - x_j) - i(y - y_j), \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde  $i = \sqrt{-1}$  e  $j = 1, \dots, r$ .

Consideramos a função:

$$F = f_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot f_n^{\lambda_n} \cdot f_{n+1}^{\lambda_{n+1}} \cdot f_{n+2}^{\lambda_{n+2}} \cdot \dots \cdot f_{n+2r-1}^{\lambda_{n+2r-1}} \cdot f_{n+2r}^{\lambda_{n+2r}} = \prod_{k=1}^{n+2r} f_k^{\lambda_k}, \quad (3.35)$$

com  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$ ,  $\lambda_{n+2j-1} = 1 + i$ ,  $\lambda_{n+2j} = 1 - i$ ,  $i = \sqrt{-1}$  e  $j = 1, \dots, r$ .

**Afirmção 1:** A função  $F$  dada em (3.35) pode ser escrita como

$$F(x, y) = A(x, y)B(x, y)C(x, y),$$

onde

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \prod_{i=1}^n ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r_i^2), \\ B(x, y) &= \prod_{j=1}^r ((x - x_j)^2 + (y - y_j)^2), \\ C(x, y) &= \exp \left( -2 \sum_{j=1}^r \arctan \left( \frac{y - y_j}{x - x_j} \right) \right). \end{aligned}$$

Neste caso, a função  $\arctan \left( \frac{y - y_j}{x - x_j} \right)$  deve ser entendida como a função  $\arg(z - z_j)$ , onde  $z = x + iy$  e  $z_j = x_j + iy_j$ .

De fato, a função  $A(x, y)$  nada mais é do que produto dos  $n$  primeiros termos de  $F$ .

Observe que, para todo  $1 \leq j \leq r$ , temos:

$$\begin{aligned} (f_{n+2j-1}^{1+i}) \cdot (f_{n+2j}^{1-i}) &= ((x - x_j) + i(y - y_j))^{1+i} \cdot ((x - x_j) - i(y - y_j))^{1-i} = \\ &= ((x - x_j)^2 + (y - y_j)^2) \cdot \left( ((x - x_j) + i(y - y_j))^i \cdot ((x - x_j) - i(y - y_j))^{-i} \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Para simplificar a notação, chamamos  $(x - x_j) = a$  e  $(y - y_j) = b$ . Assim,

$$\begin{aligned}(a + bi)^i &= \exp(i \log(a + bi)) = \exp(i \ln |a + bi|) \cdot \exp(-\arg(a + bi)), \\ (a - bi)^{-i} &= \exp(-i \log(a - bi)) = \exp(-i \ln |a - bi|) \cdot \exp(\arg(a - bi)).\end{aligned}$$

Logo, como  $|a + bi| = |a - bi|$  e  $\arg(a + bi) = -\arg(a - bi)$ , temos:

$$(a + bi)^i \cdot (a - bi)^{-i} = \exp(-2 \arg(a + bi)).$$

Voltando à notação inicial, temos:

$$\begin{aligned}((x - x_j) + i(y - y_j))^i \cdot ((x - x_j) - i(y - y_j))^{-i} &= \exp(-2 \arg((x - x_j) + i(y - y_j))) = \\ &= \exp\left(-2 \arctan\left(\frac{y - y_j}{x - x_j}\right)\right).\end{aligned}\quad (3.37)$$

Assim, quando fazemos o produto, para todo  $j = 1, \dots, r$  obtemos, a partir das equações (3.36) e (3.37), os termos  $B(x, y)$  e  $C(x, y)$  definidos acima.

Observe que a função  $F$  é uma função real, pois  $A$ ,  $B$  e  $C$  são funções reais. Logo,

$$H = \log F = \log \left( \prod_{k=1}^{n+2r} f_k^{\lambda_k} \right) = \sum_{k=1}^{n+2r} \lambda_k \log f_k, \quad (3.38)$$

é também uma função real, onde  $\log$  indica o logaritmo complexo.

Logo,  $H$  está bem definida e seu domínio é

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y) \notin \bigcup_{i=1}^n C_i \cup \{p_1, \dots, p_r\} \right\}.$$

**Afirmção 2:** O campo de vetores

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (3.39)$$

onde,

$$P(x, y) = - \sum_{k=1}^{n+2r} \lambda_k \left( \prod_{l=1, l \neq k}^{n+2r} f_l(x, y) \right) \frac{\partial f_k}{\partial y}(x, y)$$

e

$$Q(x, y) = \sum_{k=1}^{n+2r} \lambda_k \left( \prod_{l=1, l \neq k}^{n+2r} f_l(x, y) \right) \frac{\partial f_k}{\partial x}(x, y)$$

satisfaz o item (b) do Teorema 3.9.

De fato, chamamos  $V = \prod_{k=1}^{n+2r} f_k$ . Primeiro, observamos que

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{Q}{V}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{-P}{V}, \quad (3.40)$$

pois:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial(\log F)}{\partial x} = \frac{1}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n+2r} f_k^{\lambda_k}} \cdot \sum_{k=1}^{n+2r} \lambda_k f_k^{\lambda_k-1} \frac{\partial f_k}{\partial x} \left( \prod_{l=1, l \neq k}^{n+2r} f_l^{\lambda_l} \right) = \sum_{k=1}^{n+2r} \lambda_k \frac{\frac{\partial f_k}{\partial x}}{f_k}$$

e,

$$\frac{Q}{V} = \frac{\sum_{k=1}^{n+2r} \lambda_k \left( \prod_{l=1, l \neq k}^{n+2r} f_l \right) \frac{\partial f_k}{\partial x}}{\prod_{k=1}^{n+2r} f_k} = \sum_{k=1}^{n+2r} \lambda_k \frac{\frac{\partial f_k}{\partial x}}{f_k}.$$

A outra igualdade segue de forma análoga.

Dessa forma, como  $H$  e  $V$  são funções reais, segue que  $P$  e  $Q$  são funções reais e, conseqüentemente, o campo vetorial  $X = (P, Q)$  é real. Além disso, da definição de  $P$  e  $Q$ , segue que  $X$  é um campo vetorial polinomial de grau no máximo  $2n + 2r - 1$ . De (3.40) segue que o campo

$$\frac{1}{V}X = \left( \frac{1}{V}P, \frac{1}{V}Q \right)$$

é Hamiltoniano e

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -V \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = V \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x}.$$

Assim, como  $H \in C^2$ , temos:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V = -\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} V + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} V = P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Logo,  $V$  é um fator integrante inverso para  $X$ .

Note que  $V$  está bem definida em todo o  $\mathbb{R}^2$ , já que é uma função polinomial e que  $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; V(x, y) = 0\} = (\bigcup_{i=1}^n C_i) \cup \{p_1, \dots, p_r\}$ . Dessa forma, pelo Teorema 2.21, se o campo de vetores  $X$  tiver ciclos limite eles estarão contidos em  $\Sigma$ , ou seja, serão os círculos  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Para concluir a demonstração, devemos provar que todos esses círculos,  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , são ciclos limite para o campo de vetores  $X$ .

**Afirmção 3:**  $F$  é uma integral primeira do campo  $X$ .

De fato, seja  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  uma solução qualquer do campo de vetores  $X$ . Para mostrar que  $F$  é uma integral primeira para  $X$  usaremos a equação (3.40) e o fato de  $H = \log F$  implicar  $F = \exp(H)$ . Com isso, temos:

$$(F \circ \gamma)'(t) = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \exp(H) \frac{\partial H}{\partial x} P + \exp(H) \frac{\partial H}{\partial y} Q = \exp(H) \left( \frac{PQ}{V} - \frac{PQ}{V} \right) = 0.$$

Assim,  $(F \circ \gamma)'(t) = 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  e, portanto,  $F$  é uma integral primeira para o campo vetorial  $X$ .

Como  $F$  é uma integral primeira para o campo  $X$ , os círculos  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , são formados por soluções do campo, já que eles estão contidos no nível zero de  $F$ .

Provemos, agora, que todo círculo  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , não tem pontos singulares e, portanto, é uma órbita periódica.

Suponhamos que  $(x_0, y_0) \in C_i$  seja um ponto singular de  $X$ , dessa forma,  $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = f_i(x_0, y_0) = 0$ . Pela definição de  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$  e como  $f_i(x_0, y_0) = 0$ , segue:

$$0 = P(x_0, y_0) = - \sum_{k=1}^{n+2r} \lambda_k \left( \prod_{l=1, l \neq k}^{n+2r} f_l(x_0, y_0) \right) \frac{\partial f_k}{\partial y}(x_0, y_0) = -\lambda_i \left( \prod_{l=1, l \neq i}^{n+2r} f_l(x_0, y_0) \right) \frac{\partial f_i}{\partial y}(x_0, y_0), \quad (3.41)$$

e

$$0 = Q(x_0, y_0) = \sum_{k=1}^{n+2r} \lambda_k \left( \prod_{l=1, l \neq k}^{n+2r} f_l(x_0, y_0) \right) \frac{\partial f_k}{\partial x}(x_0, y_0) = \lambda_i \left( \prod_{l=1, l \neq i}^{n+2r} f_l(x_0, y_0) \right) \frac{\partial f_i}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (3.42)$$

Como  $(x_0, y_0) \in C_i$  segue, das equações (3.33) e (3.34) e do fato que as curvas  $C_i$  são disjuntas, que  $f_j(x_0, y_0) \neq 0$ , para todo  $j = 1, \dots, n$ ,  $j \neq i$ . Além disso, por definição,  $\lambda_k \neq 0$ , para todo  $k = 1, \dots, n + 2r$ . Assim, (3.41) e (3.42) implicam que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 = \frac{\partial f_i}{\partial y}(x_0, y_0) \Rightarrow 2(x_0 - x_i) = 0 = 2(y_0 - y_i) \Rightarrow x_0 = x_i \text{ e } y_0 = y_i,$$

o que é absurdo, pois  $(x_0, y_0) \in C_i$  e  $(x_i, y_i)$  é o centro de  $C_i$ .

Portanto, todo círculo  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  é uma órbita periódica do campo  $X$ .

Por fim, provaremos que  $C_i$  é um ciclo limite, para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Note que todos os círculos  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  e todos os pontos  $p_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  estão no nível zero de  $F$  e que essas são as únicas órbitas de  $X$  contidas nesse nível de  $F$ .

Suponhamos, por absurdo, que  $C_j$  não seja um ciclo limite do campo de vetores  $X$ , com  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Assim, existe uma curva periódica  $\alpha(t) = \{(x(t), y(t)), t \in [0, T]\}$ , diferente de  $C_1, \dots, C_n$  e suficientemente próxima de  $C_j$ , de forma que os pontos de  $\{p_1, \dots, p_r\}$  contidos na componente limitada por  $C_j$ , digamos  $\{p_1, \dots, p_s\}$ , são os mesmos pontos que estão contidos na componente limitada por  $\alpha(t)$ . Observe que, a existência da curva  $\alpha(t)$ , nessas condições, é garantida pois existe apenas um número finito de pontos contidos na componente limitada por  $C_j$  e, como  $C_j$  não é um ciclo limite, existem infinitas trajetórias fechadas, suficientemente próximas de  $C_j$ .

Como  $\alpha(t)$  não pertence ao conjunto  $\{C_1, \dots, C_n\}$ , e  $F$  é uma integral primeira para o campo de vetores  $X$ , existe  $h \neq 0$  tal que

$$F(x(t), y(t)) = A(x(t), y(t))B(x(t), y(t)) \cdot \exp\left(-2 \sum_{m=1}^r \theta_m(t)\right) = h, \quad (3.43)$$

onde  $\theta_m(t) = \arctan\left(\frac{y(t) - y_m}{x(t) - x_m}\right) = \arg((x(t) + iy(t)) - (x_m + iy_m))$ .

Por definição, as funções  $A(x, y)$  e  $B(x, y)$  são limitadas sobre  $\alpha(t)$ . Além disso, quando entendemos  $\theta_m(t)$  como  $\arg((x(t) + iy(t)) - (x_m + iy_m))$ , observamos que, para  $m = 1, \dots, s$ , os ângulos  $\theta_m(t)$  tendem, simultaneamente, para  $+\infty$  ou  $-\infty$ , quando  $t \rightarrow \infty$  enquanto que, para  $m = s + 1, \dots, r$  os ângulos  $\theta_m(t)$  permanecem limitados, quando  $t \rightarrow \infty$ .

Observe que, existe pelo menos um ponto  $p_k$  dentro de cada círculo  $C_i$ , visto que escolhemos esses pontos dentro de cada círculo primário da configuração  $C$  e, ou o círculo é primário ou existirá um círculo primário dentro dele. Disso e da equação (3.43) segue que  $h \rightarrow 0$  ou  $h \rightarrow \infty$ , o que é absurdo.

Portanto,  $C_j$  é um ciclo limite para o campo vetorial  $X$ . Como  $j \in \{1, \dots, n\}$  é arbitrário, o teorema está provado. □

Observe que, na demonstração do teorema fornecemos uma expressão explícita para o campo de vetores polinomial satisfazendo o item (b) do Teorema 3.9. Claramente, o item (a) segue diretamente do item (b).

Apresentamos a seguir, dois exemplos que ilustram o Teorema 3.9.

**Exemplo 3.12.** *Seja  $C = \{C_1, C_2\}$ , onde  $C_i$ ,  $i = 1, 2$  são, respectivamente, os círculos dado por:*

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^2 + y^2 - 1, \\ f_2(x, y) &= x^2 + y^2 - 4. \end{aligned} \tag{3.44}$$

*Escolhendo  $p_1 = (0, 0)$ , temos:*

$$\begin{aligned} f_3(x, y) &= x + iy, \\ f_4(x, y) &= x - iy, \end{aligned} \tag{3.45}$$

*Assim, usando as expressões de  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  dadas em (3.44) e (3.45), o campo vetorial  $(P, Q)$  dado em (3.39) e com o auxílio de softwares computacionais temos que o campo que realiza a configuração  $C$  é o seguinte*

$$P(x, y) = 8x - 8y - 10x^3 + 20x^2y - 10xy^2 + 20y^3 + 2x^5 - 6x^4y + 4x^3y^2 - 12x^2y^3 + 2xy^4 - 6y^5$$

$$Q(x, y) = 8x + 8y - 20x^3 - 10x^2y - 20xy^2 - 10y^3 + 6x^5 + 2x^4y + 12x^3y^2 + 4x^2y^3 + 6xy^4 + 2y^5.$$

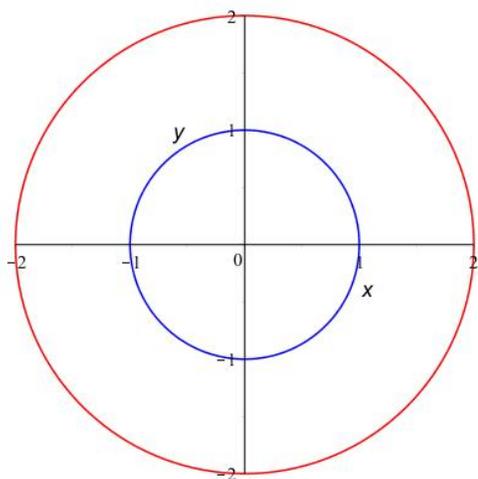


Figura 3.1: Configuração  $C$  do Exemplo 3.12.

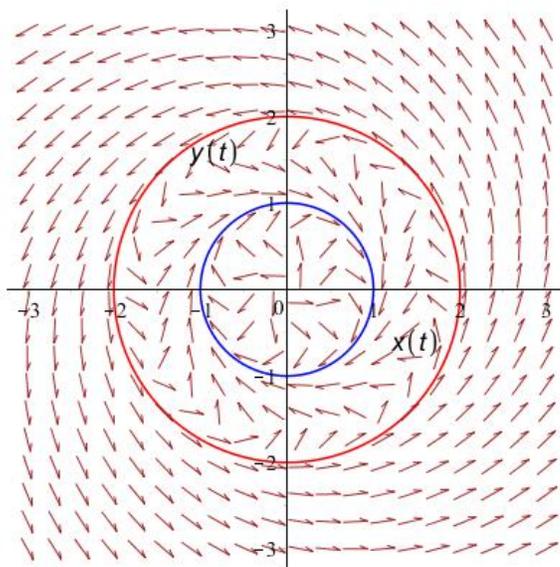


Figura 3.2: Campo vetorial que realiza a configuração  $C$  do Exemplo 3.12.

**Exemplo 3.13.** *Seja  $C = \{C_1, C_2, C_3\}$ , onde  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  são, respectivamente, os círculos dado por:*

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^2 + y^2 - 1, \\ f_2(x, y) &= (x - 4)^2 + (y - 5)^2 - 9 \\ f_3(x, y) &= x^2 + y^2 - 4. \end{aligned} \tag{3.46}$$

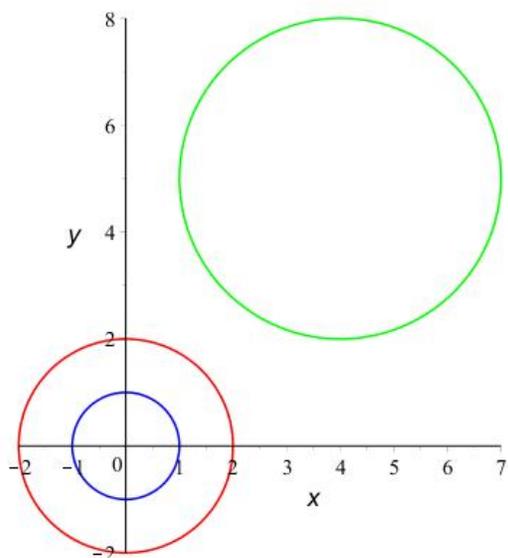
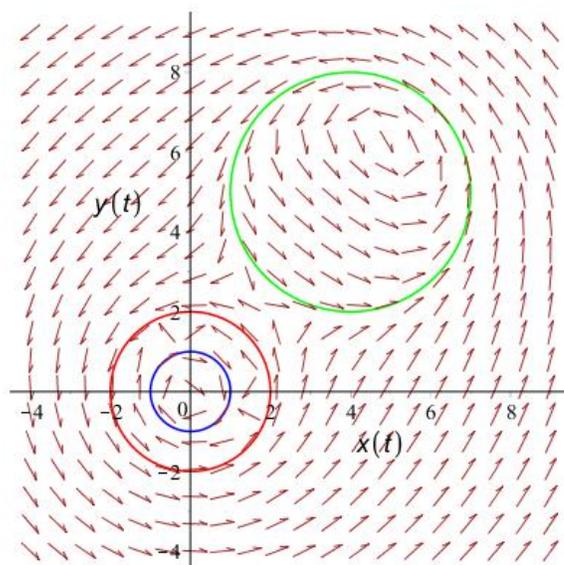
*Escolhendo  $p_1 = (0, 0)$  e  $p_2 = (3, 5)$  temos:*

$$\begin{aligned} f_4(x, y) &= x + iy, \\ f_5(x, y) &= x - iy, \\ f_6(x, y) &= (x - 3) + i(y - 5), \\ f_7(x, y) &= (x - 3) - i(y - 5), \end{aligned} \tag{3.47}$$

*Assim, usando as expressões de  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$  dadas em (3.46) e (3.47), o campo vetorial  $(P, Q)$  dado em (3.39) e com o auxílio de softwares computacionais temos que o campo que realiza a configuração  $C$  é o seguinte*

$$\begin{aligned} P(x, y) &= 4 + 1360x^2 + 1360y^2 - 240x^3 + 10208x^2y - 240xy^2 + 10208y^3 - 1660x^4 - \\ &4592x^3y - 9840x^2y^2 - 4592xy^3 - 8180y^4 + 300x^5 - 2380x^4y + 2000x^3y^2 - 4240x^2y^3 + \\ &1700xy^4 - 1860y^5 + 290x^6 + 1656x^5y + 3210x^4y^2 + 3312x^3y^3 + 5550x^2y^4 + 1656xy^5 + \\ &2630y^6 - 60x^7 - 604x^6y - 740x^5y^2 - 2020x^4y^3 - 1300x^3y^4 - 2228x^2y^5 - 620xy^6 - 812y^7 + \\ &10x^8 + 68x^7y + 140x^6y^2 + 204x^5y^3 + 360x^4y^4 + 204x^3y^5 + 340x^2y^6 + 68xy^7 + 110y^8 - \\ &6x^8y - 24x^6y^3 - 36x^4y^5 - 24x^2y^7 - 6y^9, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= 4 - 1088x^2 - 1088y^2 - 10416x^3 + 320x^2y - 10416xy^2 + 320y^3 + 5920x^4 + \\ &6520x^3y + 7248x^2y^2 + 6520xy^3 + 1328y^4 + 2640x^5 - 1800x^4y + 4760x^3y^2 - 2200x^2y^3 + \\ &2120xy^4 - 400y^5 - 1888x^6 - 2340x^5y - 4008x^4y^2 - 4680x^3y^3 - 2352x^2y^4 - 2340xy^5 - \\ &232y^6 + 552x^7 + 640x^6y + 1864x^5y^2 + 1360x^4y^3 + 2072x^3y^4 + 800x^2y^5 + 760xy^6 + 80y^7 - \\ &76x^8 - 100x^7y - 236x^6y^2 - 300x^5y^3 - 252x^4y^4 - 300x^3y^5 - 100x^2y^6 - 100xy^7 - 8y^8 + \\ &6x^9 + 24x^7y^2 + 36x^5y^4 + 24x^3y^6 + 6xy^8. \end{aligned}$$

Figura 3.3: Configuração  $C$  do Exemplo 3.13.Figura 3.4: Campo vetorial que realiza a configuração  $C$  do Exemplo 3.13.

# Referências

---

---

- [1] AL'MUKHAMEDOV, M. I. *On the construction of a differential equation having given curves as limit cycles*, Izv. Vyss. Uceb. Zaved Matematika 1, **44**, 3-6, 1963 (in Russian).
- [2] ANDRONOV, A. A. *Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues* C. R. Acad. Sci. Paris, **189**, 559-61, 1929.
- [3] ARNOLD, V. I.; ILYASHENKO, Y.S. *Dynamical Systems I, Ordinary Differential Equations* Encyclopedia of Mathematical Sciences, Heidelberg Springer, **1**, 1988.
- [4] BALIBREA, F.; JIMENEZ, V. *A characterization of the  $\omega$ -limite sets of planar continuous dynamical systems*, J. Differential Equations, **145**, 469-88, 1988.
- [5] BAMON, R. *Quadratic vector fields in the plane have a finite number of limit cycles*, Int. Hautes Études Sci. Publ. Math., **64**, 111-42, 1986.
- [6] BLOWS, T. R.; PERKO, L. M. *Bifurcation of limit cycles from centers and separatrix cycles of planar analytic systems* SIAM Rev., **36**, 341-76, 1994.
- [7] CHIACONE, C.; JACOBS, M. *Bifurcation of limite cycles from quadratic isochrones* J. Diff. Eq. **91**, 268-326, 1991.
- [8] DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias*, 5.ed., Rio de Janeiro, IMPA, 2014.
- [9] DUMORTIER, F.; LLIBRE, J.; ARTÉS, J.C. *Qualitative theory of planar differential systems*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [10] ÉCALLE, J. *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Hermann, 1992.

- 
- [11] ÁVILA, G. *Variáveis Complexas e Aplicações*, 3.ed., Rio de Janeiro, LTC, 2008.
- [12] GIACOMINI, H.; LLIBRE, J.; VIANO, M. *On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles*, *Nonlinearity*, **9**, 501-516, 1996.
- [13] GRADSHEYN, I. S.; RYSHIK, I. M. *Table of Integrals, Series, and Products*, San Diego: Academic, 1980.
- [14] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, *Appl. Math. Sci.*, Second Printing, New York: Springer, **42**, 1986.
- [15] HILBERT, D. *Mathematische Problem (lecture)*, Second International Congress on Mathematics, Paris, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math-Phys. Kl.*, 253-97, 1900.
- [16] ILYASHENKO, YU. *Finitness Theorems for Limit Cycles*, *Translations of Mathematical Monographs*, Amer. Math. Soc., **94**, 1991.
- [17] JOHN, F. *Partial differential equations*, *Appl. Math. Sci.* New York: Springer, **1**, 1971.
- [18] LIENARD, A. *Etude des oscillations entretenues*, *Rev. Générale de l'Electricité*, **23**, 901-12, 1928.
- [19] LIMA, E.L. *Curso de Análise, volume 2*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2000.
- [20] LINS, A.; DE MELO, W.; PUGH, C. *On Lienard's equation*, *Lecture Notes in Math.*, New York: Springer, **597**, 335-57, 1977.
- [21] LLIBRE, J.; RODRÍGUEZ, G. *Configurations of limit cycles and planar polynomial vector fields*, *J. Differential Equations*, **198**, 374-80, 2004.
- [22] POINCARÉ, H. *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, I,II* *J. Math. Pures Appl.*, **7**, 375-422, 1886; **8**, 251-96, 1882; *Sur les courbes définies par les équations différentielles III, IV*, *ibid.* **1**, 167-244, 1885; **2**, 155-217, 1886.
- [23] VAN DER POL, V. *On relaxation-oscillations*, *Phil. Mag.*, **2** 978-92, 1926.

- 
- [24] SCHECTER, S.; SINGER, F. *A class of vector fields on  $S^2$  that are topologically equivalent to polynomial vector fields*, J. Differential Equations, **57**, 406-35, 1985.
- [25] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais, Projeto Euclides*, IMPA, Rio de Janeiro, 1978.
- [26] SVERDLOVE, R. *Inverse problems for dynamical systems*, J. Differential Equations, **42**, 72-105, 1981.
- [27] SPIVAK, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol.1, 2nd edn, Houston, TX: Publish or Perish, 1979.
- [28] VALEEVA, R. T. *Construction of a differential equation with given limit cycles and critical points*, Vol z, Math. Sb., **5**, 83-85, 1966 (in Russian).
- [29] VOROBEV, A. P. *Cycles arround a singular point of the nodal type*, Dokl. Akad. Nauk. B.S.S.R. IV, **9** 369-71, 1960 (in Russian).
- [30] YAN-QIAN, YE. *Theory of Limit Cycles*, Translation of Math. Monographs, Providence, RI: Am. Math. Soc., **66**, 1986.

## TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 03/ 03/ 2017

Ana Livia Rodero.

---

Assinatura do autor