



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Robson Alexandrino Trevizan Santos

Bifurcações em Sistemas Dinâmicos Suaves por Partes

São José do Rio Preto

2013

Abstract

This work is a study of bifurcations of equilibrium points in piecewise-smooth dynamical systems with a single boundary discontinuity set. The goal of this study is to investigate the scenarios that can arise in the phase portraits, for two special class of systems, when a real parameter acts a perturbation of the unperturbed system. Particularly, we study bifurcations of boundary equilibrium points. We give special attention to planar systems, where it can arise limit cycles. In addition, we dedicate a section studying ‘grazing-sliding’ bifurcations, when it occurs the collision of a limit cycle with the boundary discontinuity set. We try to illustrate the text with applications.

Keywords: *Bifurcations, grazing-sliding, Filippov systems.*

Sumário

Introdução	10
1 Teoria qualitativa de sistemas dinâmicos suaves por partes	13
1.1 Sistemas dinâmicos suaves	13
1.1.1 Estabilidade assintótica e estrutural	16
1.1.2 Bifurcações de sistemas suaves	19
1.2 Sistemas dinâmicos suaves por partes	20
1.2.1 Campos deslizantes	23
1.2.2 Estabilidade e bifurcação de sistemas suaves por partes	26
2 Bifurcações em pontos de equilíbrio de fronteira	28
2.1 Fluxos contínuos suaves por partes	29
2.1.1 Classificação dos cenários mais simples	34
2.1.2 O circuito de Chua	39
2.1.3 Sistemas contínuos suaves por partes no plano	45
2.2 Fluxos de Filippov	49
2.2.1 Classificação dos casos possíveis	54
2.2.2 Sistemas de Filippov planares	57
3 Bifurcações grazing-sliding	67
3.1 Colisão de um ciclo limite com a fronteira	67
3.1.1 Modelo Presa-Predador	71
Referências Bibliográficas	75

Introdução

A teoria dos sistemas dinâmicos é fruto de um longo desenvolvimento científico. Determinar sua origem não é uma tarefa simples. No entanto, podemos identificar rudimentos desta teoria já no século XVI, nos trabalhos de mecânica celeste de Johannes Kepler e na formalização da mecânica clássica de Isaac Newton. Considerados fundadores da teoria moderna dos sistemas dinâmicos, os matemáticos Aleksander Lyapunov e Henri Poincaré introduziram vários conceitos da análise qualitativa das equações diferenciais, tais como estabilidade de soluções, comportamento assintótico, entre outros.

Dentro desta abrangente área, o estudo dos sistemas dinâmicos suaves por partes (ou sistemas não-suaves) é recente e tem ganhado grande destaque no cenário da pesquisa científica. Os trabalhos pioneiros de Andronov [1] sobre bifurcações em sistemas não-suaves, e Filippov [3] sobre movimento deslizante, forneceram a base para o desenvolvimento desta linha de pesquisa.

Assim, motivados pelos crescentes avanços no desenvolvimento desta teoria e pelas questões em aberto ainda existentes, realizamos um estudo de bifurcações em sistemas dinâmicos suaves por partes. Tais sistemas são dados por um conjunto finito de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{x} = F_i(x, \mu), \quad x \in S_i, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

onde S_i é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e cada interseção não vazia $S_i \cap S_j$ é uma variedade $(n - 1)$ -dimensional, chamada fronteira de descontinuidade.

Dentre as aplicações estudadas destacamos o circuito de Chua, cuja dinâmica pode ser dada

por um sistema 3-dimensional do tipo

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha(y - x - h(x)) \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -\beta y \end{cases},$$

onde h representa a característica do resistor não-linear (um dos elementos que compõem o circuito). Este modelo pode ser abordado do ponto de vista de sistemas suaves por partes, onde as fronteiras de descontinuidade são induzidas pela função h .

No intuito de auxiliar a compreensão dos conceitos e resultados desenvolvidos, optamos por inserir diversas figuras nos exemplos, demonstrações e até mesmo em algumas definições.

Estruturamos este trabalho da seguinte maneira:

Capítulo 1: Apresentamos os conceitos que serão utilizados no decorrer do trabalho, entre eles definições formais de sistemas dinâmicos suaves por partes, fronteira de descontinuidade, grau de suavidade, campos deslizantes, e bifurcações induzidas pela descontinuidade. Antes disso, apresentamos uma breve introdução à teoria qualitativa de sistemas dinâmicos suaves.

Capítulo 2: Tratamos de bifurcações de pontos de equilíbrio de fronteira em sistemas com grau de suavidade uniforme. Analisamos os cenários de bifurcação que ocorrem em tais sistemas através da perturbação de um parâmetro real. Dividimos esta análise em duas seções, tratando este estudo para fluxos contínuos suaves por partes e fluxos de Filippov separadamente. Neste capítulo, fornecemos também alguns exemplos de aplicações com abordagem de sistemas não-suaves.

Capítulo 3: Apresentamos uma classe específica de bifurcação global em um sistema de Filippov planar conhecida como bifurcação grazing-sliding, a qual envolve deslize na colisão de um ciclo com a fronteira de descontinuidade. Fornecemos um exemplo deste tipo de bifurcação através de uma bifurcação de Hopf padrão de sistemas suaves. Além disso, estudamos um exemplo de aplicação apresentando esse fenômeno.

A estrutura deste trabalho é baseada no livro [2] e complementada pelas referências [8] e [13]. Além destas, as obras [5], [6] e [11] também foram utilizadas como base para as definições e teoria de sistemas suaves, nas quais constam as demonstrações dos resultados clássicos enunciados. Para as aplicações e exemplos, consultamos alguns trabalhos (veja [7], [9], [10], [13]) com o intuito de aprofundar os exemplos expostos em [2].

Claramente, toda a teoria aqui discutida é apoiada em diversas obras de grande importância para o desenvolvimento da teoria de sistemas dinâmicos não-suaves, dentre as quais destacamos [1], [3] e [4].