



**Universitat  
Autònoma  
de Barcelona**

Clasificación topológica de una familia de  
campos vectoriales lineales a trozos  
simétricos en el plano

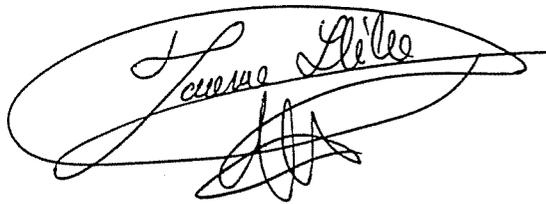
Antonio E. Teruel Aguilar

Memoria presentada para  
aspirar al grado de Doctor en  
Ciencias Matemáticas.

Departament de Matemàtiques  
Universitat Autònoma de Barcelona  
Bellaterra, Abril del 2000.

CERTIFICO que la present memòria  
ha estat realitzada per  
Antonio E. Teruel Aguilar,  
i dirigida per mi, al  
Departament de Matemàtiques de la  
Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, Abril del 2000.

A handwritten signature in black ink, enclosed within a large, horizontal oval. The signature is written in a cursive style and appears to read "Jaume Llibre". Below the main signature, there is a smaller, more stylized mark that looks like a star or a flourish.

Dr. Jaume Llibre i Saló.

# Índice

Introducción	11
<b>1 Preliminares</b>	<b>25</b>
1.1 Ecuaciones diferenciales y soluciones	25
1.1.1 Existencia y unicidad de soluciones	25
1.1.2 Prolongación de soluciones	26
1.1.3 Dependencia de soluciones respecto de condiciones iniciales y parámetros	26
1.1.4 Otras propiedades	27
1.2 Órbitas	28
1.3 Flujo de un sistema	28
1.4 Nociones básicas de la Teoría cualitativa	29
1.5 Sistemas lineales	30
1.5.1 Sistemas lineales no homogéneos	32
1.5.2 Sistemas lineales en $\mathbb{R}^2$	32
1.5.3 Retratos de fases en el plano	34
1.6 Clasificación de flujos	37
1.6.1 Criterios de clasificación	38
1.6.2 Clasificación de flujos de los sistemas lineales	39
1.6.3 Equivalencia topológica	40
1.7 Sistemas no lineales	42
1.7.1 Estudio local de los puntos singulares	42
1.7.2 Estudio local de órbitas periódicas: aplicación de Poincaré	45
1.8 Conjuntos $\alpha$ - y $\omega$ -límite en el plano	47
1.9 Compactificación de flujos	48
1.9.1 Compactificación de Poincaré	49
1.9.2 Comportamiento del flujo en el infinito	51
1.10 Bifurcaciones locales	53
1.10.1 Bifurcaciones de puntos singulares	53
1.10.2 Bifurcaciones de órbitas	55
<b>2 Sistemas fundamentales</b>	<b>57</b>
2.1 Preliminares	57
2.1.1 Forma normal	58
2.1.2 Existencia y unicidad de soluciones	58
2.1.3 Simetría de las soluciones	59
2.1.4 Forma lineal a trozos	60

2.1.5	Matrices fundamentales . . . . .	61
2.1.6	Parámetros fundamentales . . . . .	62
2.2	Conjugación lineal . . . . .	63
2.3	Equivalencia topológica . . . . .	64
2.4	Compactificación del flujo . . . . .	65
2.5	Puntos singulares finitos . . . . .	67
2.6	Puntos singulares en el infinito . . . . .	71
2.7	Órbitas periódicas . . . . .	98
2.8	Resultados auxiliares . . . . .	101
<b>3</b>	<b>Aplicaciones de retorno</b>	<b>105</b>
3.1	Introducción . . . . .	105
3.1.1	Aplicaciones de Poincaré en los sistemas fundamentales . . . . .	107
3.2	Preliminares sobre sistemas lineales . . . . .	108
3.2.1	Transversalidad del flujo lineal . . . . .	108
3.3	Aplicaciones de Poincaré: sistemas lineales homogéneos . . . . .	115
3.3.1	Aplicaciones de Poincaré $\pi_{jk}$ . . . . .	119
3.3.2	Existencia de las aplicaciones de Poincaré . . . . .	122
3.3.3	Ecuaciones implícitas de las aplicaciones $\pi_{jk}$ . . . . .	123
3.4	Comportamiento de las aplicaciones $\pi_{jk}$ . . . . .	124
3.4.1	Nodo diagonal: $d > 0$ y $t^2 - 4d > 0$ . . . . .	124
3.4.2	Nodo no diagonal: $d > 0$ y $t^2 - 4d = 0$ . . . . .	130
3.4.3	Centro y foco: $t^2 - 4d < 0$ . . . . .	134
3.4.4	Silla: $d < 0$ . . . . .	139
3.4.5	Nodo degenerado: $d = 0$ . . . . .	145
3.5	Aplicaciones de Poincaré: sistemas lineales no homogéneos . . . . .	146
3.5.1	Sistemas lineales no homogéneos con $A \in GL(\mathbb{R}^2)$ . . . . .	146
3.5.2	Sistemas lineales no homogéneos con $A \notin GL(\mathbb{R}^2)$ . . . . .	149
3.5.3	Comportamiento de las aplicaciones de Poincaré $\tilde{\pi}_{++}$ . . . . .	152
3.6	Aplicación de retorno: sistemas fundamentales . . . . .	156
3.6.1	Existencia de la aplicación de retorno . . . . .	161
<b>4</b>	<b>Retratos de fases</b>	<b>171</b>
4.1	Introducción . . . . .	171
4.2	El caso $D > 0$ y $T < 0$ . . . . .	173
4.2.1	Sistemas fundamentales propios . . . . .	173
4.2.2	Puntos singulares . . . . .	174
4.2.3	Comportamiento en el infinito . . . . .	174
4.2.4	Órbitas periódicas . . . . .	175
4.2.5	Retratos de fases . . . . .	187
4.2.6	Bifurcaciones . . . . .	195
4.3	El caso $D > 0$ y $T = 0$ . . . . .	198
4.3.1	Puntos singulares . . . . .	198
4.3.2	Comportamiento en el infinito . . . . .	198
4.3.3	Región anular de órbitas periódicas . . . . .	199
4.3.4	Curva de lazos heteroclínicos . . . . .	202

4.3.5	Retratos de fases . . . . .	203
4.3.6	Bifurcaciones . . . . .	207
4.4	El caso $D > 0$ y $T > 0$ . . . . .	209
4.4.1	Bifurcaciones . . . . .	210
4.5	El caso $D < 0$ y $T < 0$ . . . . .	212
4.5.1	Sistemas fundamentales propios . . . . .	212
4.5.2	Puntos singulares . . . . .	213
4.5.3	Comportamiento en el infinito . . . . .	213
4.5.4	Órbitas periódicas . . . . .	216
4.5.5	Retratos de fases . . . . .	232
4.5.6	Bifurcaciones . . . . .	245
4.6	El caso $D < 0$ y $T = 0$ . . . . .	249
4.6.1	Sistemas fundamentales propios . . . . .	249
4.6.2	Puntos singulares: finitos e infinitos . . . . .	249
4.6.3	Órbitas periódicas . . . . .	249
4.6.4	Retratos de fases . . . . .	250
4.6.5	Bifurcaciones . . . . .	251
4.7	El caso $D < 0$ y $T > 0$ . . . . .	252
4.7.1	Bifurcaciones . . . . .	254

**Bibliografía****257**



# Introducción

Gran parte de la ciencia de nuestro tiempo está escrita en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales. Desde que estas aparecieron en los trabajos de G. W. Leibnitz (1646–1716) y de I. Newton (1642–1727), cada vez más parcelas del saber encuentran en ellas un lenguaje apropiado para fijar y desarrollar sus conocimientos. La astronomía, concretamente la mecánica celeste, la física y la química ven en las ecuaciones diferenciales la expresión más natural para sus leyes. La ingeniería, la economía, la ecología, etc ... utilizan el lenguaje de las ecuaciones diferenciales para modelizar fenómenos y simular su comportamiento en experimentos que difícilmente pueden realizarse en los laboratorios. Este hecho ha propiciado que el estudio de las ecuaciones diferenciales sea una de las áreas de mayor aplicación dentro de las matemáticas.

Determinar una expresión de una solución fue durante mucho tiempo el objetivo de todo el que se acercaba al estudio de las ecuaciones diferenciales, aún cuando no todas las ecuaciones tienen soluciones expresables en términos de funciones elementales (J. Liouville (1809–1882)). Sin embargo, y a pesar de los múltiples intentos por avanzar en esta línea, el número de ecuaciones de las que actualmente conocemos métodos para su resolución es insignificante dentro del conjunto de todas ellas. Incluso cuando es posible encontrar una expresión de la solución esta puede ser tan complicada que su análisis suponga enormes dificultades.

Fue H. Poincaré (1854–1912) quien, a finales del siglo XIX [*Sur les courbes définies par une équation différentielle* (1881–1886)], abrió una nueva vía en el estudio y comprensión de las ecuaciones diferenciales. Con él las soluciones abandonan el terreno del cálculo para pasar a considerarse elementos geométricos (*órbitas*), dando origen a la *Teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales*. A las bases asentadas por Poincaré se unieron los trabajos de A. Liapunov (1857–1918) sobre la estabilidad del movimiento, y las investigaciones desarrolladas por I. O. Bendixson (1861–1935) y por G. D. Birkhoff (1884–1944).

El nuevo enfoque persigue comprender la dinámica de un sistema modelizado por una familia de ecuaciones diferenciales (ordinarias),  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}; \lambda)$ , sin necesidad de calcular una expresión de sus soluciones. Desde el punto de vista de la Teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales esta comprensión pasa por: (1) describir el *retrato de fases* de cada una de las ecuaciones; (2) determinar una relación de equivalencia entre los diferentes retratos de fases y clasificarlos en base a esta relación; (3) describir los cambios en el retrato de fases que ocurren al pasar de una clase de equivalencia a otra. A estos tres apartados nos referimos como el programa de la Teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales.

El retrato de fases de una ecuación diferencial consiste en expresar el dominio de definición de la ecuación, esto es, su *espacio de fases*, como unión de todas sus órbitas. Puesto que las órbitas son variedades de dimensión menor o igual a 1, estas únicamente pueden ser puntos, y en tal caso las denominamos *puntos singulares*; curvas homeomorfas a la circunferencia  $\mathbb{S}^1$ , que denominamos *órbitas periódicas*; o curvas homeomorfas a la recta  $\mathbb{R}$ . Usualmente, sólo un número finito de estas

órbitas determinan el retrato de fases, al conjunto formado por estas órbitas lo denominamos *configuración de separatrices*. Representar gráficamente la configuración de separatrices es lo que denominamos describir el retrato de fases.

La Teoría cualitativa proporciona resultados, y en su defecto técnicas, para el análisis local de los retratos de fases. El Teorema de Hartman–Grobman [18] (1963) describe, bajo hipótesis muy generales, el comportamiento de las órbitas en un entorno de los puntos singulares. Sin embargo, solamente existen resultados que ayudan significativamente a describir el retrato de fases global de una ecuación diferencial en variedades de dimensión 1 o 2. De entre estos destacamos el Teorema de Poincaré–Bendixson que, en condiciones de compacidad, garantiza que los *conjuntos límite* de una órbita son: puntos singulares, órbitas periódicas o *ciclos de separatrices*.

En realidad no se tiene un conocimiento completo, ni siquiera en el plano, del retrato de fases global de cualquier ecuación diferencial. Preguntas importantes como el número de *ciclos límite* (órbitas periódicas aisladas dentro del conjunto de las órbitas periódicas) y su distribución en el plano continúan abiertas en cuanto abandonamos el ámbito de las *ecuaciones diferenciales lineales* [44]. Este problema restringido a las ecuaciones diferenciales polinomiales en el plano se conoce como la *segunda parte del Problema 16 de Hilbert*, y fue propuesto por Hilbert (1862–1943) en 1900.

En cierto sentido, dos ecuaciones pueden tener una descripción equivalente desde el punto de vista de la Teoría cualitativa aún cuando se diferencien en otros aspectos. La relación de equivalencia más utilizada y que conserva la estructura topológica del retrato de fases es la denominada equivalencia topológica. Se dice que dos sistemas son *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo entre sus respectivos retratos de fases que transforma las órbitas de un sistema en las del otro conservando la orientación. Para algunos autores, como por ejemplo M. M. Peixoto, la equivalencia topológica no conserva necesariamente la orientación de las órbitas.

Basándose en el trabajo de L. Markus [32], D. Newman garantiza que, para campos vectoriales sobre variedades de dimensión 2 con todos sus puntos singulares aislados, la configuración de separatrices determina la clase de equivalencia topológica del retrato de fases [34] (1975). Otra caracterización de las clases de equivalencia topológica de ecuaciones diferenciales sobre variedades de dimensión 2 se debe a M. M. Peixoto [36].

Desde que en el año 1937 el físico A. A. Andronov (1901–1952) en unión con el matemático L. S. Portrjagin (1908–1988) introdujo el concepto de *estabilidad estructural*, el análisis de los cambios en la configuración de separatrices ha ocupado un lugar principal en la Teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. Sin entrar en detalles, un campo vectorial es estructuralmente estable si su retrato de fases es equivalente al retrato de fases de cualquier campo vectorial que está “próximo” a él. Una caracterización de los campos vectoriales 2 dimensionales estructuralmente estables se debe a Peixoto [37].

Por otra parte, la configuración de separatrices de un retrato de fases puede cambiar al variar ligeramente el parámetro. Estos cambios se denominan *bifurcaciones* y el valor del parámetro donde suceden *valor de bifurcación*. La representación de los valores de bifurcación y la descripción del cambio en la configuración de separatrices es lo que se denomina *conjunto de bifurcaciones*. Podemos afirmar que, si el retrato de fases contiene la “esencia” del comportamiento dinámico de una ecuación, el conjunto de bifurcaciones representa la “esencia” del comportamiento dinámico de una familia de ecuaciones diferenciales.

En esta memoria aplicamos el programa completo de la Teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales a la familia de los sistemas fundamentales.

Siguiendo el trabajo de J. Llibre y J. Sotomayor [29], llamamos *sistemas fundamentales* a la familia de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{A}\mathbf{x} + \tilde{\varphi}(\tilde{\mathbf{k}}^T \mathbf{x})\tilde{\mathbf{b}}, \quad (0.1)$$

donde  $\tilde{A}$  es una matriz  $2 \times 2$  con coeficientes reales,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$  y  $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la función lineal de tres trozos y simétrica respecto del origen

$$\tilde{\varphi}(\sigma) = \begin{cases} m_1\sigma - (m_0 - m_1)u & \text{si } \sigma < -u, \\ m_0\sigma & \text{si } -u \leq \sigma \leq u, \\ m_1\sigma + (m_0 - m_1)u & \text{si } u < \sigma, \end{cases} \quad (0.2)$$

con  $u > 0$ .

Cuando  $m_0 = m_1$ , la función  $\tilde{\varphi}$  es lineal y el sistema (0.1) es lineal, por lo que en este trabajo consideramos que  $m_0 \neq m_1$ . Si sustituimos la función  $\tilde{\varphi}$  en la ecuación (0.1) y definimos  $A = \tilde{A} + m_1\tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{k}}^T$ ,  $B = \tilde{A} + m_0\tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{k}}^T$ ,  $\mathbf{b} = (m_0 - m_1)u\tilde{\mathbf{b}}$  y  $\mathbf{k} = u^{-1}\tilde{\mathbf{k}}$ , la ecuación (0.1) se reescribe como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} A\mathbf{x} + \mathbf{b} & \text{si } \mathbf{k}^T \mathbf{x} > 1, \\ B\mathbf{x} & \text{si } |\mathbf{k}^T \mathbf{x}| \leq 1, \\ A\mathbf{x} - \mathbf{b} & \text{si } \mathbf{k}^T \mathbf{x} < -1. \end{cases} \quad (0.3)$$

A partir de la expresión (0.3), es frecuente referirse a la ecuación (0.1) como un *sistema lineal de tres trozos y simétrico*.

En cada una de las bandas del plano de fases  $S_+ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{k}^T \mathbf{x} > 1\}$  y  $S_- := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{k}^T \mathbf{x} < -1\}$  el sistema es lineal no homogéneo, y su comportamiento está caracterizado por la traza y el determinante de la matriz  $A$ , que denotamos por  $t$  y  $d$ , respectivamente. Sobre la banda  $S_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{k}^T \mathbf{x}| < 1\}$  el sistema es lineal homogéneo, y su comportamiento está caracterizado por la traza y el determinante de la matriz  $B$ , que denotamos por  $T$  y  $D$ , respectivamente. Las fronteras de estas bandas están formadas por dos rectas distintas y simétricas respecto del origen  $\Gamma_+ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{k}^T \mathbf{x} = 1\}$  y  $\Gamma_- := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{k}^T \mathbf{x} = -1\}$ . A los parámetros  $D$ ,  $T$ ,  $d$  y  $t$  les denominamos *parámetros fundamentales* y son los parámetros respecto a los que describimos las bifurcaciones.

Sobre las rectas  $\Gamma_+$  y  $\Gamma_-$  el campo vectorial es Lipschitz, pero no es diferenciable. Destacamos esto por que gran parte de la Teoría cualitativa, en particular la Teoría de bifurcaciones, está desarrollada bajo condiciones de diferenciabilidad del campo vectorial. Esto impide poder aplicar algunos resultados conocidos al estudio de los sistemas fundamentales. Sin embargo, el comportamiento lineal a trozos de los sistemas fundamentales permite llevar a cabo todo el programa de la Teoría cualitativa, desde la descripción de los retratos de fases hasta el estudio de las bifurcaciones, obteniéndose la riqueza dinámica propia de los sistemas no lineales.

A partir de la expresión (0.3), es sencillo definir la familia de los sistemas lineales en dos trozos y la familia de los sistemas lineales en tres trozos no necesariamente simétricos. Pese a que no consideramos su estudio en esta memoria, estas familias, junto con sus generalizaciones a dimensiones superiores, han sido las más estudiadas en la literatura que se ocupa de los sistemas lineales a trozos, véase por ejemplo el trabajo pionero de Andronov [3]. Para una descripción de los retratos de fases y de los conjuntos de bifurcaciones de los sistemas lineales a trozos en dos zonas véase [16]. Para un estudio sobre el conjunto de bifurcaciones de los sistemas fundamentales

en  $\mathbb{R}^3$  véase [27]. Aspectos sobre los retratos de fases de los sistemas lineales a trozos en tres zonas y no simétricos se encuentran en [39].

## Motivaciones

Partiendo de los sistemas diferenciales lineales, un primer paso natural en el estudio y comprensión de los fenómenos no lineales consiste en considerar campos vectoriales lineales a trozos. Del mismo modo que la linealización local es ampliamente utilizada para el estudio del comportamiento local del flujo, los sistemas lineales a trozos ayudan a entender la riqueza de comportamientos observada en el mundo no lineal.

Sin embargo, las aportaciones más numerosas al estudio de los sistemas lineales a trozos proceden del ámbito de las aplicaciones, como por ejemplo la Teoría de control y el diseño de circuitos eléctricos. La lista de trabajos que actualmente se publican en estas áreas entorno a estos sistemas da una idea de su importancia. Simplemente citar los trabajos de M. Komuro [23], L. O. Chua y A. C. Deng [9], L. O. Chua y R. Lum [31] y [30], Chai Wah y L. O. Chua [42] y J. Alvarez, R. Suárez y J. Alvarez [1].

En el siguiente ejemplo mostramos una aplicación habitual en la que aparecen, de forma natural, los sistemas fundamentales, y que justifica el interés que despiertan estos sistemas en el ámbito de las aplicaciones. Para una introducción a la Teoría de control véase [25], [8] y [33]. También en el diseño de circuitos eléctricos aparecen frecuentemente ejemplos modelizados por sistemas fundamentales, véase por ejemplo [3] y [10].

Con frecuencia las no linealidades de un sistema se modelizan mediante funciones diferenciables, y así se utilizan con provecho las técnicas y resultados de la dinámica diferenciable y de la teoría local de bifurcaciones. En muchos problemas, considerar funciones lineales a trozos es una alternativa cuyos resultados se ajustan mejor cualitativa y cuantitativamente a la observación experimental, [3] y [14]. Típicamente, las funciones lineales a trozos que se utilizan son: la saturación, para modelizar amplificadores y motores, véase la Figura 0.1(a); las zonas muertas, para modelizar válvulas y motores, véase la Figura 0.1(b); la fricción no lineal en el caso de motores, véase la Figura 0.1(c); y el relé de dos estados, véase la Figura 0.1(d).

Un ejemplo clásico en Teoría de control es el llamado problema de control de posición de un motor. Consiste en diseñar un dispositivo movido por un motor, capaz de situarse en una posición predeterminada  $\theta_i$ , posición de referencia. Este problema aparece frecuentemente en la automatización industrial, por ejemplo en robótica al intentar controlar la posición de un brazo mecánico.

En la Figura 0.2 representamos el esquema de un sistema de control de posición de un motor. El mecanismo consta de cuatro elementos: un amplificador operacional de función característica  $f_a(v)$ ; un motor de corriente continua de función característica  $T_M(v)$ , con un tacómetro incorporado; un juego de engranajes, con una relación de velocidades de  $n$  a 1; y un dispositivo de control proporcional de constante  $K$ . Así diseñado, el esquema se corresponde con un dispositivo de control por realimentación del estado.

Si  $\theta_o$ ,  $I_o$  y  $F_o(\dot{\theta}_o)$  (respectivamente,  $\theta_M$ ,  $I_M$  y  $F_M(\dot{\theta}_M)$ ) son la posición, el momento de inercia y la fuerza de rozamiento del eje de salida (respectivamente, del eje del motor), la ecuación del movimiento del dispositivo es

$$(n^2 I_M + I_o) \ddot{\theta}_o = n T_M \left( f_a \left( K (\theta_i - \theta_o) - kn \dot{\theta}_o; \theta_i \right) \right) - n^2 F_M \dot{\theta}_o - F_o \dot{\theta}_o, \quad (0.4)$$

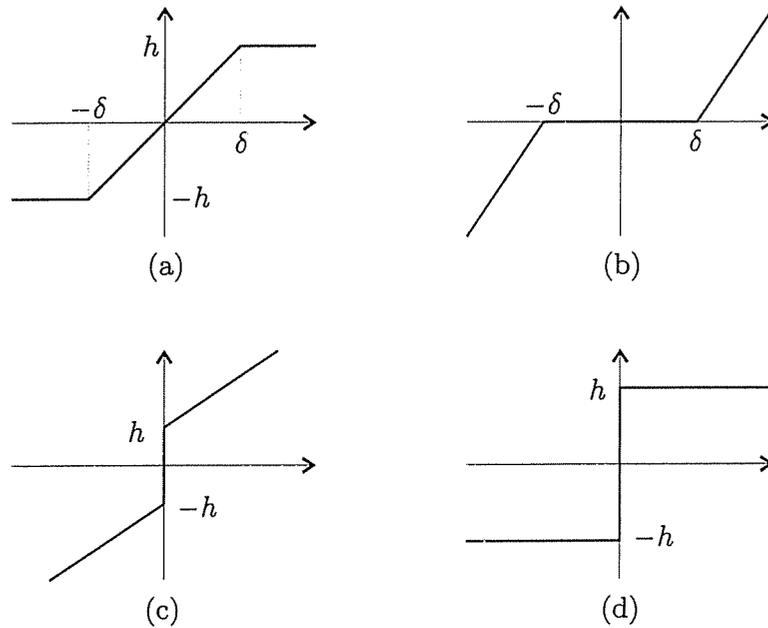


Figura 0.1: No linealidades típicas: (a) saturación; (b) zona muerta; (c) fricción; (d) relé de dos estados.

véase [8]. Nótese que hemos supuesto que las fuerzas de rozamiento son proporcionales a la velocidad angular.

**El caso lineal: primera aproximación**

Algunos componentes electrónicos están diseñados de manera que sus respuestas son proporcionales a las entradas. En consecuencia, suponemos que las funciones características del amplificador operacional y del motor son lineales, esto es,  $f_a(v) = Gv$  y  $T_M(v) = K_T v$ . Considerando que  $\theta_i = 0$ , el sistema está descrito por la ecuación diferencial lineal homogénea

$$(n^2 I_M + I_0) \ddot{\theta}_o + [n^2 (K_T G k + F_M) + F_o] \dot{\theta}_o + (n K_T G k) \theta_o = 0.$$

**Saturación en los componentes**

Pese a que no es restrictivo suponer que la función característica del amplificador es lineal, sí es una idealización pensar que este comportamiento se mantiene para cualquier voltaje de entrada. Un amplificador tiene un rango finito de salida que no puede superar, por muy elevado que sea el voltaje de entrada. Por tanto, un modelo más realista del problema ha de considerar una saturación como función característica del amplificador, véase la Figura 0.1(a).

Tomando

$$f_a(v) = \begin{cases} G \delta_a & \text{si } v > \delta_a, \\ G v & \text{si } |v| \leq \delta_a, \\ -G \delta_a & \text{si } v < -\delta_a, \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -(n^2 F_M + F_o) / (n^2 I_M + I_0) \end{pmatrix},$$

$x_1 = \theta_o$ ,  $x_2 = \dot{\theta}_o$ ,  $\mathbf{k} = (K, nk)^T$ ,  $\mathbf{b} = (0, -nK_T / (n^2 I_M + I_0))^T$  y  $\theta_i = 0$ , la ecuación (0.4) se transforma en  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + f_a(\mathbf{k}^T \mathbf{x}) \mathbf{b}$ , que es un sistema fundamental, véase (0.1).

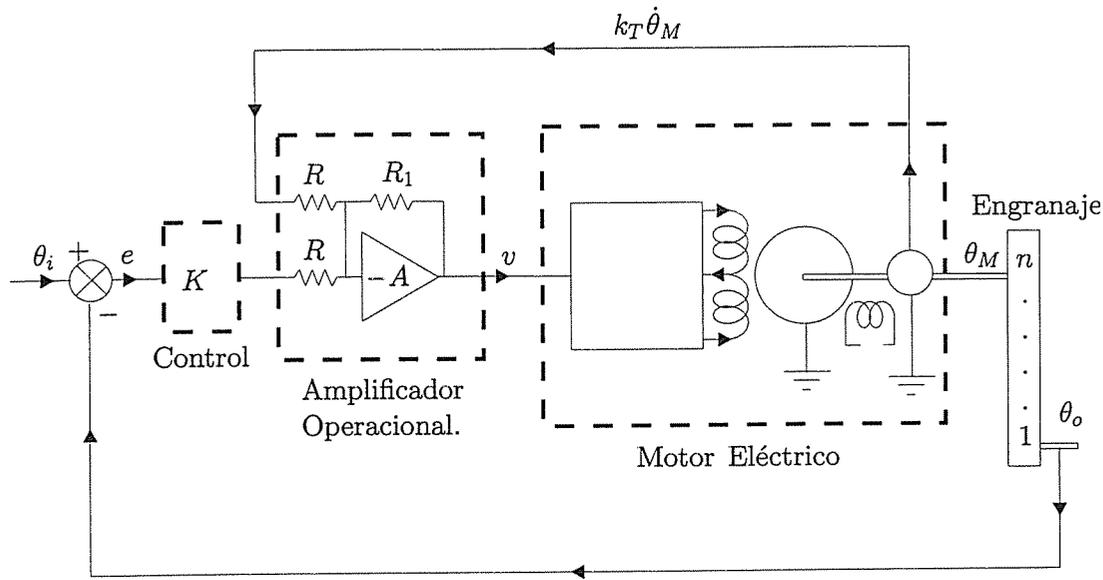


Figura 0.2: Esquema de control de posición de un motor.

Del mismo modo que el amplificador operacional, el motor de corriente continua es operativo en un rango de valores determinado, superado el cual, la respuesta del motor permanece constante. En consecuencia, un modelo más realista incorpora una característica del motor,  $T_M$ , del tipo saturación. Tomando ahora  $\mathbf{k}^T = (-GK, -Gnk)^T$ ,  $\mathbf{b} = (0, n / (n^2 I_M + I_o))^T$ , y  $x_1, x_2, \theta_i$  y  $A$  como en el caso anterior, la ecuación (0.4) se expresa como  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + T_M(\mathbf{k}^T \mathbf{x}) \mathbf{b}$ , que es un sistema fundamental.

### Fricción de Coulomb en el motor

Podemos suponer que el problema de la saturación en el amplificador y en el motor se pueden eliminar simplemente eligiendo componentes con unas prestaciones superiores a las que “supuestamente” requiere nuestro sistema. Sin embargo, todo motor necesita de una tensión mínima para vencer las fricciones internas y comenzar a girar. Para tener en cuenta este fenómeno podemos suponer que la función característica del motor es una zona muerta, véase la Figura 0.1(b). Tomando

$$T_M(v) = \begin{cases} K_T v & \text{si } v > \delta_M, \\ 0 & \text{si } |v| \leq \delta_M, \\ -K_T v & \text{si } v < -\delta_M, \end{cases}$$

y  $A, \mathbf{k}, \mathbf{b}, \mathbf{x}$  y  $\theta_i$  como en el caso anterior, la expresión (0.4) se transforma en  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + T_M(\mathbf{k}^T \mathbf{x}) \mathbf{b}$ .

## Resultados principales

Desde que en, [3], Andronov y sus colaboradores se ocuparon del estudio de los campos vectoriales lineales a trozos, y en concreto de los sistemas fundamentales, distintas partes de sus retratos de fases se han ido describiendo por diferentes autores. El mismo Andronov demuestra la existencia

de ciclos límite para algunos sistemas fundamentales, y propone el estudio de la aplicación de Poincaré entre las rectas  $\Gamma_+$  y  $\Gamma_-$  como herramienta útil en la búsqueda de ciclos límite y en el análisis de su estabilidad.

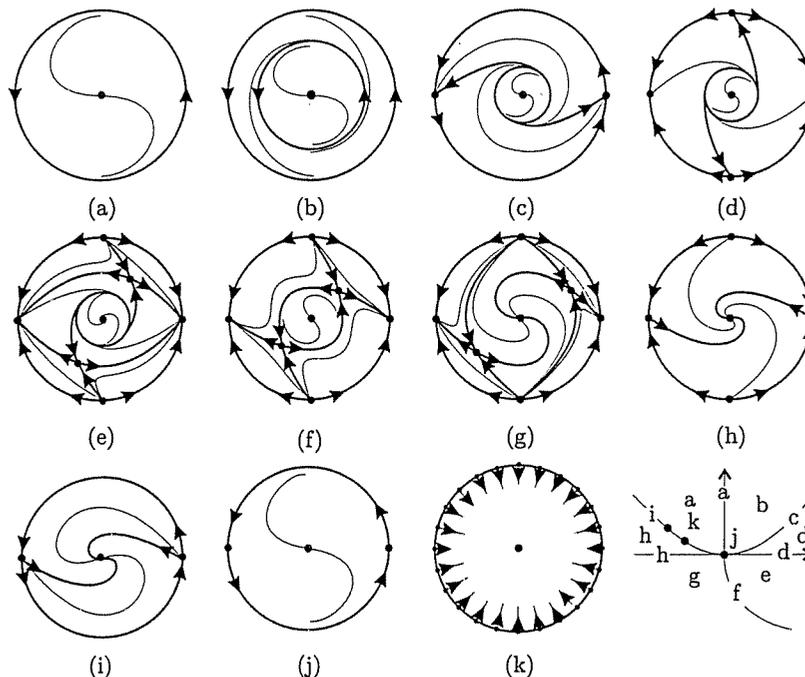


Figura 0.3: Retratos de fases de los sistemas fundamentales con  $D > 0$  y  $T < 0$ .

Algunas cuestiones relativas al retrato de fases local entorno a los puntos singulares de los sistemas fundamentales con parámetro  $D > 0$  se encuentran en [1]. Es en el trabajo de J. Llibre y J. Sotomayor, [29], donde se inicia el estudio de los sistemas fundamentales desde el punto de vista propio de la Teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. En este trabajo se describen los retratos de fases y el conjunto de las bifurcaciones de los sistemas fundamentales con parámetros  $D > 0$  y  $T < 0$ . Destacamos que en [29] no se estudia el comportamiento del sistema entorno al infinito, por este motivo, de las 11 clases de equivalencia que representamos en la Figura 0.3, los autores identifican únicamente 5. Además, las técnicas utilizadas en el estudio de los ciclos límite difieren de las indicadas por Andronov. Una revisión de este trabajo aparece en la Sección 4.2.

Basándose en el estudio de la aplicación de Poincaré, en [30] y [31], L. O. Chua y R. Lum estudian la configuración de ciclos límite de los sistemas lineales con dos y tres trozos, respectivamente. Los dos trabajos están fundamentados en una conjetura que, si en el primero de ellos es cierta, como han probado E. Freire, E. Ponce y F. Torres [14], en el segundo es errónea, como se demuestra en la Sección 4.5 de esta memoria.

El conjunto de las bifurcaciones de los sistemas fundamentales también ha sido motivo de análisis por otros autores. Por ejemplo, Llibre y Ponce caracterizan en [28] los valores del parámetros en los que el sistema tiene una *bifurcación de Hopf en el infinito*.

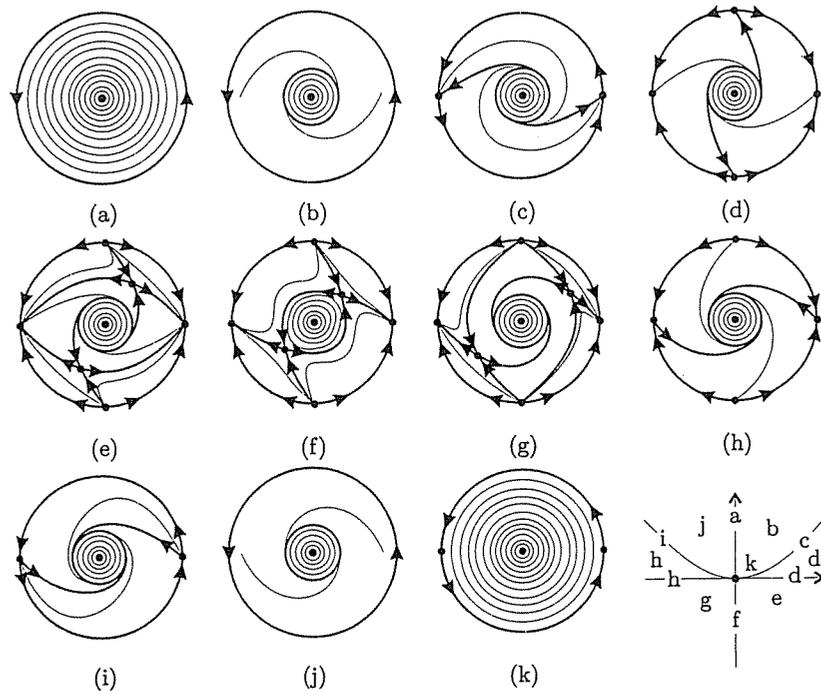


Figura 0.4: Retratos de fases de los sistemas fundamentales con  $D > 0$  y  $T = 0$ .

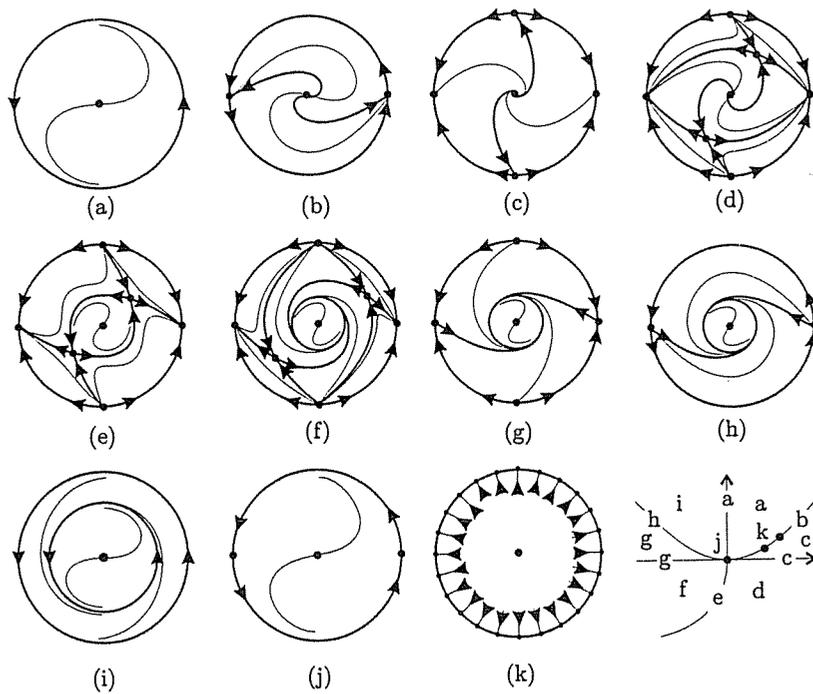


Figura 0.5: Retratos de fases de los sistemas fundamentales con  $D > 0$  y  $T > 0$ .

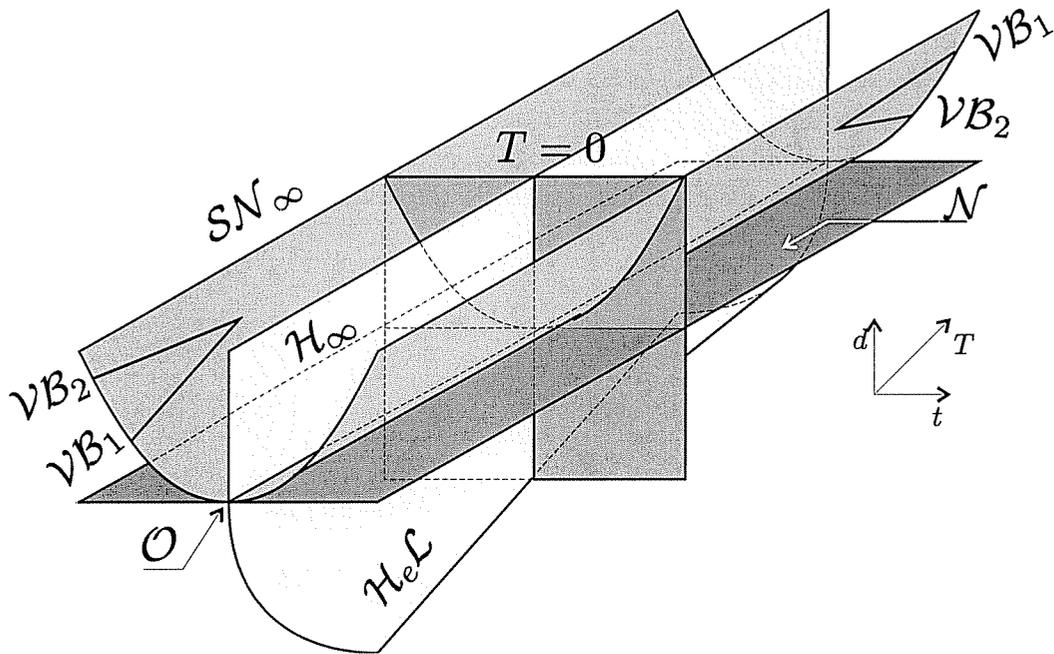


Figura 0.6: Conjunto de bifurcaciones cuando  $D$  es constante y positivo.

Siguiendo el punto de vista de la Teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, en esta memoria clasificamos topológicamente la familia de los sistemas fundamentales con  $D \neq 0$ ; proporcionamos el retrato de fases global correspondiente a cada una de las 56 clases de equivalencia; y definimos las variedades de bifurcación en el espacio de parámetros fundamentales,  $(D, T, d, t)$ .

Los resultados principales que probamos en esta memoria se resumen en los siguientes cuatro teoremas.

**Teorema A.** *El retrato de fases de un sistema fundamental con parámetro  $D > 0$  es topológicamente equivalente al correspondiente en la Figura 0.3 si  $T < 0$ ; en la Figura 0.4 si  $T = 0$ ; o en la Figura 0.5 si  $T > 0$ .*

**Teorema B.** *La Figura 0.6 representa la intersección del conjunto de bifurcaciones de los sistemas fundamentales con el espacio  $D$  igual a una constante positiva.*

**Teorema C.** *El retrato de fases de un sistema fundamental con parámetro  $D < 0$  es topológicamente equivalente al correspondiente en la Figura 0.7 si  $T \leq 0$ , o si  $T > 0$  y  $t^2 - 4d \geq 0$ ; y en la Figura 0.8 si  $T > 0$  y  $t^2 - 4d < 0$ .*

**Teorema D.** *La Figura 0.9 representa la intersección del conjunto de bifurcaciones de los sistemas fundamentales con el espacio  $D$  igual a una constante negativa.*

El último dibujo de cada una de las Figuras 0.3, 0.4, 0.5, 0.7 y 0.8 representa las intersecciones de las variedades de bifurcación con el plano  $D$  y  $T$  constantes. Para poder seguir fácilmente la evolución de los retratos de fases al variar los parámetros  $(t, d)$ , y comprender así la naturaleza

de las bifurcaciones, hemos ordenado los retratos de fases colocándolos según el giro de las agujas del reloj.

Los conjuntos de bifurcación cuando  $D > 0$  son las variedades 3 dimensionales  $\mathcal{H}_\infty$ ,  $\mathcal{SN}_\infty$ ,  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{H}_e\mathcal{L}$ ,  $\{T = 0\}$  y las superficies  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{VB}_1$  y  $\mathcal{VB}_2$ , véase la Figura 0.6. Destacamos que en la Figura 0.6 estamos considerando el valor del parámetro  $D$  fijo y positivo. Por este motivo las variedades de bifurcación 3 dimensionales están representadas por superficies y las superficies de bifurcación están representadas por curvas.

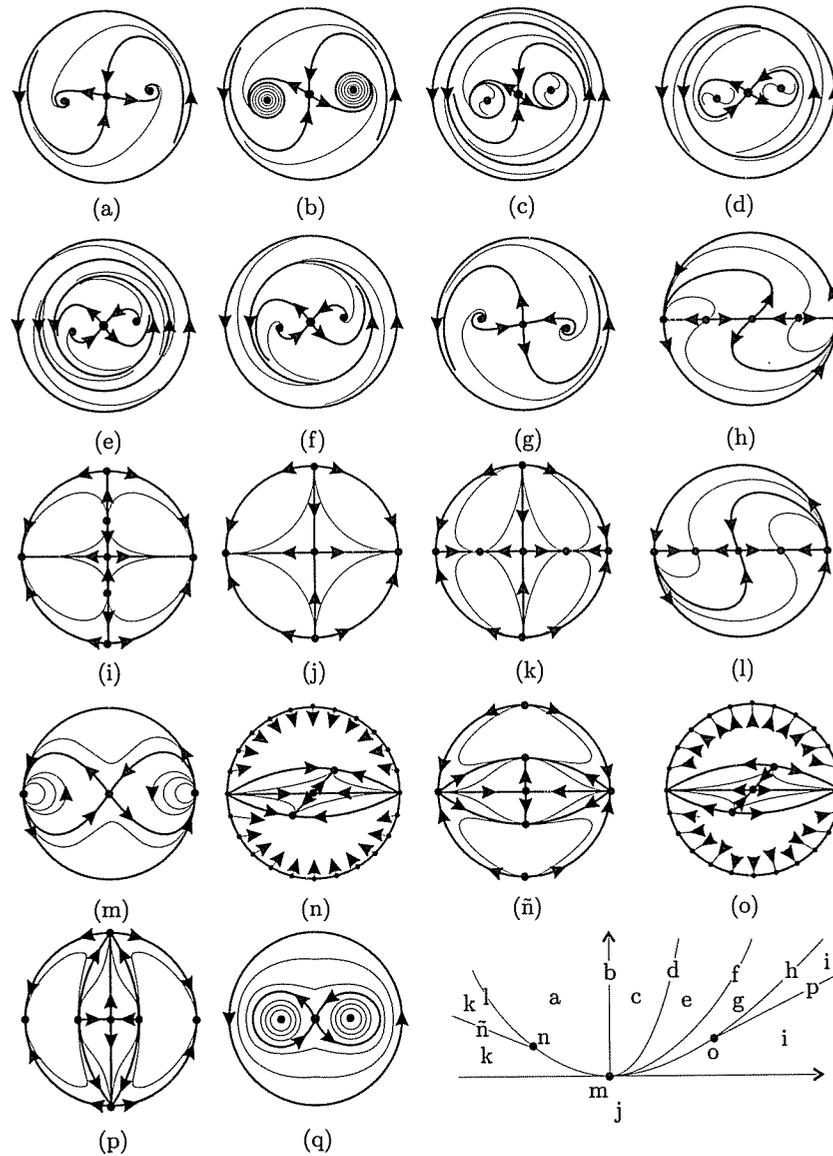


Figura 0.7: Retratos de fases de los sistemas fundamentales con  $D < 0$  y  $T \leq 0$ ; o con  $D < 0$ ,  $T > 0$  y  $t^2 - 4d \geq 0$ .

La variedad  $\mathcal{H}_\infty$  se corresponde con una bifurcación de Hopf del punto del infinito, véanse las Figuras 0.3(a) y (b). La variedad  $\mathcal{SN}_\infty$  se corresponde con una *bifurcación silla-nodo* de dos puntos situados sobre la variedad del infinito, véanse las Figuras 0.3(b), (c) y (d) para el caso

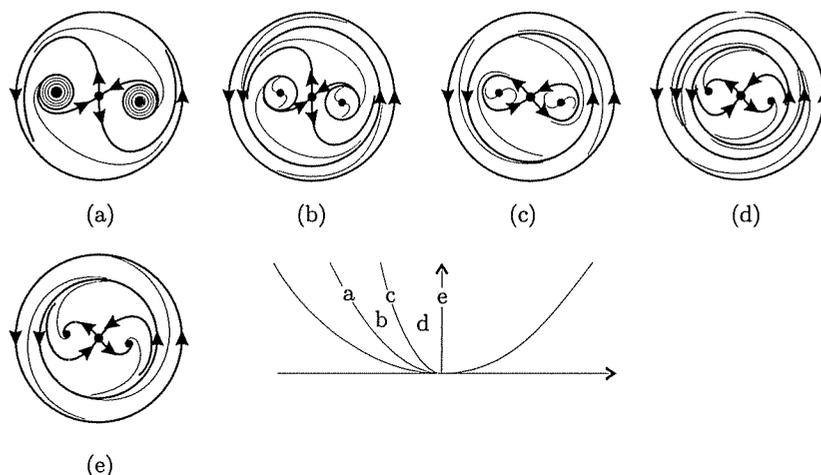


Figura 0.8: Retratos de fases cuando  $D < 0$ ,  $T > 0$  y  $t^2 - 4d < 0$ .

supercrítico, y las Figuras 0.3(h), (i) y (a) para el caso subcrítico. La variedad  $\mathcal{N}$  se corresponde con una *bifurcación pitchfork* en el infinito, véase las Figuras 0.3(d) y (e) en el caso supercrítico, y las Figuras 0.3(g) y (h) en el caso subcrítico. Finalmente, la variedad  $\mathcal{H}_e\mathcal{L}$  se corresponde con una *bifurcación heteroclínica*, véase la Figura 0.3(f). Resulta particularmente interesante observar cómo sobre la superficie de bifurcación  $\mathcal{O}$ , donde intersectan las cuatro variedades anteriores, se producen las cuatro bifurcaciones simultáneamente. Las superficies de bifurcación  $\mathcal{VB}_1$  y  $\mathcal{VB}_2$  no corresponden a ninguna bifurcación dinámica y se debe a que los parámetros fundamentales no determinan unívocamente la forma canónica real de Jordan de las matrices fundamentales.

Por otra parte, la variedad  $\{T = 0\}$  se corresponde con una *bifurcación de Hopf-vertical*. Esta bifurcación, en la que una órbita periódica bifurca de un centro, ha sido motivo de estudio por Freire, Ponce y Torres [14].

Los conjuntos de bifurcación cuando  $D < 0$  son las variedades 3 dimensionales  $\mathcal{H}_\infty$ ,  $\mathcal{H}_o\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{NH}_{lc}$ ,  $\mathcal{SN}_\infty$ ,  $W_1^*$ ,  $W_2^*$ ,  $\mathcal{N}$  y las superficies  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{VB}_1$ ,  $\mathcal{VB}_2$  y  $\{T = 0\}$ , véase la Figura 0.9. De nuevo, en la Figura 0.9 suponemos que  $D$  es un valor fijo y negativo, por lo que las variedades de bifurcación 3 dimensionales las representamos por superficies, y las superficies de bifurcación por curvas.

La variedad  $\mathcal{H}_\infty$  se corresponde con una bifurcación de Hopf del punto del infinito junto con una bifurcación Hopf-vertical de dos puntos singulares finitos, véanse las Figuras 0.7(a), (b) y (c). La variedad  $\mathcal{H}_o\mathcal{L}$  se corresponde con una bifurcación homoclínica, véase la Figura 0.7(d). La variedad  $\mathcal{NH}_{lc}$  se corresponde con una bifurcación silla-nodo de ciclos límite, véase la Figura 0.7(f).

Al igual que sucede en el caso  $D > 0$ , las variedades  $\mathcal{SN}_\infty$  y  $\mathcal{N}$  se corresponden con bifurcaciones silla-nodo y pitchfork de puntos singulares contenidos en la variedad del infinito. También las superficies  $\mathcal{VB}_1$  y  $\mathcal{VB}_2$  describen el mismo tipo de bifurcación que en el caso  $D > 0$ .

Las bifurcaciones asociadas a las superficies  $W_1^*$  y  $W_2^*$  no se pueden describir únicamente como bifurcaciones locales, más bien se corresponden con bifurcaciones globales y tienen su origen en el hecho de que un vector propio de la matriz fundamental  $A$  sea paralelo a las rectas  $\Gamma_+$  y  $\Gamma_-$ , véanse las Figuras 0.7(i) y (p) o las Figuras 0.7(k) y (ñ).

Del mismo modo que en el caso  $D > 0$ , la superficie de bifurcación  $\mathcal{O}$ , intersección de las

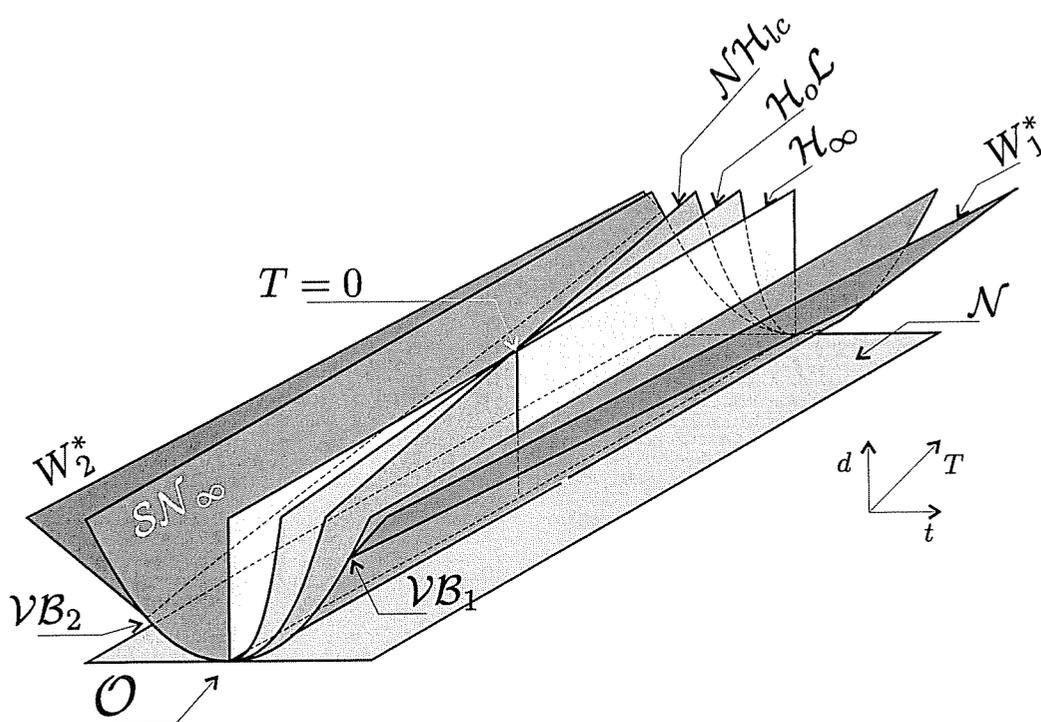


Figura 0.9: Conjunto de bifurcaciones cuando  $D$  es constante y negativo.

variedades de bifurcación  $\mathcal{H}_\infty$ ,  $SN_\infty$ ,  $\mathcal{H}_0\mathcal{L}$  y  $\mathcal{N}$ , realiza las cuatro bifurcaciones simultáneamente. La superficie de bifurcación  $\{T = 0, t = 0\}$ , donde intersectan las variedades de bifurcación  $\mathcal{H}_\infty$  y  $\mathcal{H}_0\mathcal{L}$ , también supone la síntesis de las dos bifurcaciones.

De forma simultánea e independiente con esta memoria, el profesor Francisco Rodrigo ha descrito en su Tesis Doctoral [39] los retratos de fases y el conjunto de bifurcaciones de la familia de los sistemas fundamentales. Sin embargo, existen importantes diferencias entre los dos trabajos que queremos destacar. En primer lugar, el trabajo del profesor Rodrigo está dedicado, exclusivamente, a los sistemas fundamentales que en esta memoria definimos como *sistemas propios*. Sin entrar en detalles, los sistemas propios son los sistemas fundamentales que tienen definida la aplicación de retorno y, por tanto, pueden presentar ciclos límites en su retrato de fases. Por este motivo, en [39] no aparecen identificadas las superficies de bifurcación  $W_1^*$  y  $W_2^*$ .

En [39] el autor no estudia el comportamiento del flujo en el infinito, por tanto, no detecta las variedades de bifurcación  $VB_1$ ,  $VB_2$  y  $SN_\infty$  en el caso  $D > 0$ , ni las variedades  $VB_1$ ,  $VB_2$  y  $SN_\infty$  en el caso  $D < 0$ . Finalmente, a pesar de distinguir el cambio de comportamiento que se da a ambos lados de la variedad  $N\mathcal{H}_{lc}$ , únicamente puede conjeturar la existencia de la variedad de bifurcación  $N\mathcal{H}_{lc}$ , sin llegar a probar que, en efecto, la intersección de  $N\mathcal{H}_{lc}$  con el plano  $D < 0$  y  $T$  constante es una curva.

## Estructura de la memoria

La memoria está organizada en cuatro capítulos. En el Capítulo 1 recopilamos los fundamentos de la Teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales en el plano. Este capítulo contiene únicamente

los resultados básicos que utilizamos en el resto del trabajo y está restringido a las ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas. Para simplificar la exposición de algunos conceptos, por ejemplo el de flujo, nos hemos limitado a las ecuaciones con *flujo completo*, que se corresponde con el tipo de flujo de los sistemas fundamentales. Por esto, las versiones que presentamos de algunos resultados, como por ejemplo el Teorema de Hartman–Grobman, son más restrictivas que las que habitualmente aparecen en la literatura.

Del Capítulo 1 destacamos las Secciones 1.5 y 1.9. La primera por que contiene, de forma compacta, parte de la teoría existente sobre sistemas diferenciales lineales en el plano. A esta sección hacemos referencia frecuentemente a lo largo de este trabajo, muchas veces de forma implícita. En la Sección 1.9 formalizamos algunas ideas sobre la compactificación del flujo, con el fin de aplicar esta a los sistemas lineales a trozos. La compactificación de Poincaré es ampliamente utilizada en los sistemas diferenciales polinomiales para estudiar el comportamiento del flujo cerca del infinito. Sin embargo, pese a que algunas ecuaciones diferenciales pueden ser satisfactoriamente compactificadas, no hemos encontrado una sistematización de su uso fuera de las ecuaciones polinomiales.

En el Capítulo 2 comenzamos el estudio de los sistemas fundamentales,  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{k}^T \mathbf{x}) \mathbf{b}$ , aplicando a estos los teoremas de existencia y unicidad de soluciones y de dependencia respecto de las condiciones iniciales y parámetros. En este capítulo probamos que el comportamiento del sistema está determinado a partir de sus matrices fundamentales  $A$  y  $B = A + \mathbf{b}\mathbf{k}^T$ . Lo que justifica que, salvo en casos muy singulares (sobre las superficies  $\mathcal{VB}_1$  y  $\mathcal{VB}_2$ ), los parámetros fundamentales  $(D, T, d, t)$ , sean los ideales para describir la dinámica de los sistemas fundamentales. Igual que sucede en el caso de los sistemas lineales, esto permite considerar que una de las matrices fundamentales está expresada en su forma canónica real de Jordan.

En este capítulo aparecen también resultados sobre el número y retrato de fases local de los puntos singulares, tanto finitos como infinitos, así como sobre la existencia y configuración de órbitas periódicas. Para abordar el estudio del número de órbitas periódicas y el retrato de fases en un entorno de estas, en el Capítulo 3 estudiamos las aplicaciones de Poincaré.

Las aplicaciones de Poincaré entre las rectas  $\Gamma_+$  y  $\Gamma_-$  (recordamos que  $\Gamma_+$  y  $\Gamma_-$  son las rectas donde el sistema fundamental deja de ser lineal) están determinadas por sistemas lineales, homogéneos o no homogéneos. En consecuencia, en el Capítulo 3 estudiamos de forma sistemática todas las aplicaciones de Poincaré generadas por un flujo lineal y asociadas a dos rectas distintas y simétricas respecto del origen. Para ello parametrizamos las aplicaciones de Poincaré de forma que resultan invariantes por transformaciones lineales.

Los trabajos que se han ocupado del estudio de las aplicaciones de Poincaré generados por flujos lineales, al menos hasta donde conocemos, parametrizan las aplicaciones de Poincaré situando, mediante un giro, las rectas  $\Gamma_+$  y  $\Gamma_-$  en posición vertical. Esto fija definitivamente la forma de las matrices fundamentales. El punto de vista que desarrollamos en esta memoria permite estudiar las aplicaciones de Poincaré eligiendo, en cada caso, la forma de la matriz que resulte más cómoda. Por lo general consideramos que la matriz está expresada en forma canónica real de Jordan.

Aparte de la simplificación que supone en el estudio de las aplicaciones de Poincaré, la parametrización que introducimos permite caracterizar la región del espacio de parámetros fundamentales donde podemos garantizar la existencia de las aplicaciones de Poincaré. Aparece así la variedad algebraica  $W_1 \cup W_2$  que estructura el espacio de parámetros de forma que la ubicación de las variedades de bifurcación resulta más inteligible. Otra consecuencia del uso de esta parametrización permite establecer conexiones entre los sistemas que tienen definidas las

aplicaciones de Poincaré y los sistemas que en Teoría de control se conocen como observables.

En el Capítulo 4 describimos y clasificamos todos los retratos de fases de los sistemas fundamentales con  $D \neq 0$ . Proporcionamos también expresiones de las variedades de bifurcación, y a partir de estas, estudiamos su posición en el espacio de parámetros fundamentales. Finalmente, describimos la evolución de los retratos de fases al variar los parámetros  $(t, d)$ , determinando, de paso, las bifurcaciones que obtenemos.

## Agradecimientos

Quiero hacer explícito mi reconocimiento a la ayuda prestada por todos los que me han acompañado en este largo viaje. A mis padres y a mi familia, por que su única preocupación ha sido que el viaje fuese como yo quisiera. A Carmen, que con su "luz y color" me ha guiado durante todo el camino. A mi familia de Barcelona: Alejandro, Bernardo, Carmelino, Eva, Carmen, Javier, Beatriz, Dani, Juan, Blanca, Yolanda, Omar, Laia, Begoña, Toni, que con su compañía han dado sentido a todos los pasos que he dado, los buenos y los malos. A Asun. A Nito y a su familia, a los que he de agradecer que me enseñasen a beber de las fuentes del camino. A David, Debora, Marcia, Moira, Jordi L., Jordi V. de cuyo caminar he aprendido día a día.

También quiero agradecer a Bigtower el cariño que me tiene. A Armengol el que me preguntase un problema que sabía que podía resolver. A David el que esté siempre dispuesto a compartir. A los compañeros de despacho, principalmente a Ramón y a Josep, el que colaborasen en crear un ambiente tan cómodo como el que me ha rodeado.

Finalmente, quiero agradecer a Jaume el que me haya proporcionado la oportunidad de sentirme agradecido con tanta gente. Usando de su talante personal y profesional, ha conseguido que mire el trabajo como algo propio y que, simultáneamente, vea la huella de su dirección a lo largo de todo el. Gracias maestro!

En estos últimos años he aprendido la importancia que tiene el capítulo dedicado a los agradecimientos, y esto es motivo de agradecimiento.