

¿Hay caos en la calculadora?

Rafael Ortega

Si tienes una calculadora científica a mano, puedes hacer el siguiente experimento: escribes un número al azar y después presionas muchas veces la misma tecla. En muchos casos acaba apareciendo un número fijo, por ejemplo

$\boxed{\sin}$	$\boxed{\sin}$	$\boxed{\sin}$	$\boxed{\sin}$...	0
$\boxed{\sqrt{\quad}}$	$\boxed{\sqrt{\quad}}$	$\boxed{\sqrt{\quad}}$	$\boxed{\sqrt{\quad}}$...	1
$\boxed{\ln}$	$\boxed{\ln}$	$\boxed{\ln}$	$\boxed{\ln}$...	E



La tecla más misteriosa es $\boxed{\cos}$. En este caso siem-

pre se acaba en el número 0'7390851... si la calculadora está en radianes. La cantidad en pantalla es un número que va cambiando (sucesión)

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

La tecla que repetimos representa una función

$$f = \sin x, \sqrt{x}, \ln x, \cos x, \dots$$

$$\boxed{x_n} \quad \boxed{f} \quad \longrightarrow \quad \boxed{x_{n+1}}$$

Consideramos

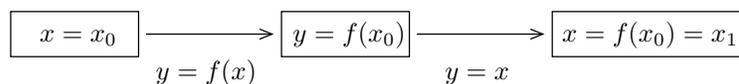
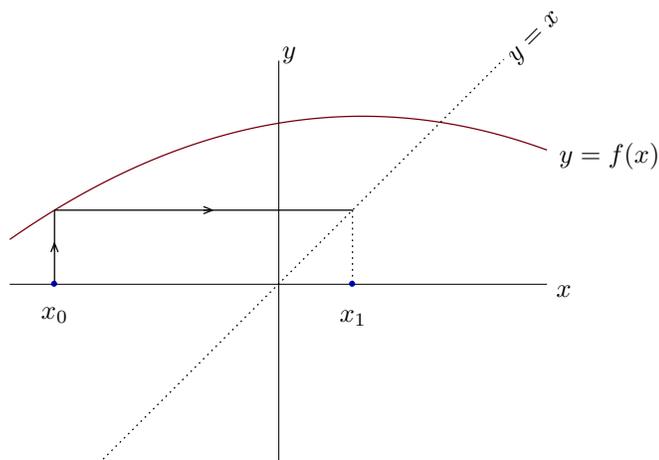
$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

donde $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función dada e I es un intervalo en \mathbb{R} . Puede ocurrir que las soluciones dejen de estar definidas a partir de un cierto n .

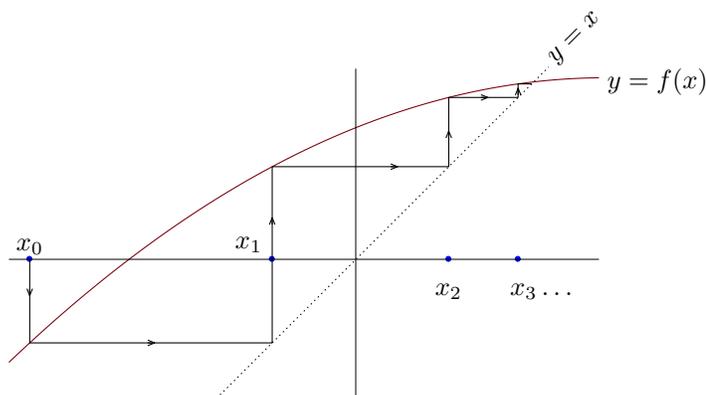
Ejemplo. $x_{n+1} = \ln x_n$, $f(x) = \ln x$, $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 = e$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, x_3 no está definido.

Para evitar estas situaciones supondremos que la función f cumple $f(I) \subseteq I$. En ese caso, y para cada $x_0 \in I$, hay una solución $\{x_n\}_{n \geq 0}$ bien definida.

Hay un método gráfico para resolver ecuaciones en diferencias



Este proceso se puede repetir:



La ecuación logística



Thomas Malthus
(1766-1834)

Pensamos en una población y designamos por x_n el tamaño de esta población después de n periodos. Por ejemplo, se puede considerar un bosque y x_n designa el número de árboles después de n años. Consideramos

α = tasa de fecundidad por habitante y periodo

β = probabilidad de muerte en un periodo.

Si suponemos que α y β son constantes con

$$\alpha > 0, \quad 0 < \beta < 1$$

obtenemos

$$x_{n+1} = x_n + \alpha x_n - \beta x_n$$

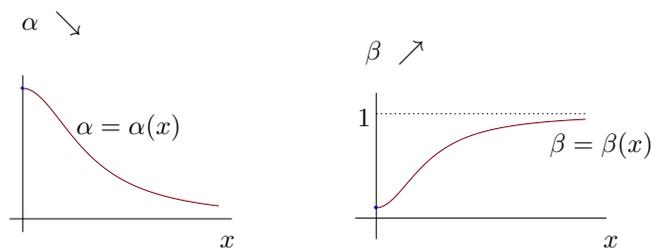
$$\implies x_{n+1} = \lambda x_n, \quad \lambda = 1 + \alpha - \beta.$$

En este caso la población sigue una progresión geométrica (modelo malthusiano).

Supongamos ahora que α y β dependan del tamaño de la población

$$\alpha = \alpha(x), \quad \beta = \beta(x).$$

Así, si la población aumenta en exceso es lógico pensar que la probabilidad de muerte aumenta mientras la tasa de fecundidad disminuye; es decir



Llegamos al modelo no lineal

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \alpha(x_n) x_n - \beta(x_n) x_n \\ &= (1 + \alpha(x_n) - \beta(x_n)) x_n.\end{aligned}$$

Elegimos las funciones monótonas más simples¹:

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= a - bx, & \beta(x) &= c + dx, \\ a, b, c, d &> 0, & 0 &< c < 1.\end{aligned}$$

Se obtiene

$$x_{n+1} = (1 + a - c - (b + d)x_n) x_n.$$

Reduciendo parámetros:

$$x_{n+1} = (A - Bx_n) x_n; \quad A, B > 0.$$

Todavía es posible eliminar un parámetro si se efectúa el cambio de escala

$$\lambda X = x \quad \text{donde } \lambda > 0 \text{ es un parámetro a determinar.}$$

Sustituyendo en la ecuación,

$$\lambda X_{n+1} = (A - B\lambda X_n) \lambda X_n.$$

Si hacemos $\rho = A$, $\lambda = A/B$ obtenemos

$$X_{n+1} = \rho(1 - X_n) X_n, \quad \rho > 0.$$

Pensemos en una población de organismos microscópicos para la que x_n designa la extensión del cultivo. Lo podemos medir en mm^2 , cm^2 , ... y se tendrán relaciones del tipo $\lambda X_n = x_n$ ¿Cuánto vale λ en cada caso?

Hemos llegado al modelo

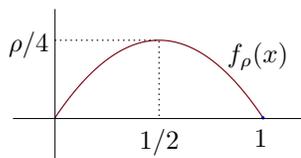
$$x_{n+1} = \rho(1 - x_n) x_n \tag{1}$$

con $\rho > 0$. Como no queremos poblaciones negativas supondremos que hay un tamaño máximo para la población

$$0 \leq x_n \leq 1.$$

Así trabajamos con $I = [0, 1]$, $f_\rho(x) = \rho(1 - x)x$. Para que todo marche exigiremos $f_\rho(I) \subseteq I$.

¹En principio es criticable que β pueda ser > 1 , o $\alpha < 0$.



La función f_ρ alcanza su máximo en $x = \frac{1}{2}$ de manera que

$$f_\rho(I) = \left[0, \frac{1}{4}\rho\right].$$

A partir de ahora supondremos $0 < \rho \leq 4$; de esta manera las soluciones $\{x_n\}$ están bien definidas en el futuro y permanecen en $[0, 1]$ ².



El modelo logístico continuo fue propuesto por Pierre François Verhulst (1804-1849). Se trataba de una ecuación diferencial con la que Verhulst esperaba predecir la evolución de poblaciones humanas. Casi un siglo más tarde el mismo modelo se usó para estudiar poblaciones animales (insectos, micro-organismos...) y también el crecimiento de plantas (girasol...). El modelo discreto que hemos presentado es mucho más reciente. Su estudio se inició a partir de un artículo del biólogo Robert May aparecido en 1976. Vale la pena leer el libro de May [4], que es ya un clásico de la ecología, y también el artículo de Li y Yorke [3] que fue pionero desde el punto de vista matemático.

A pesar de su aparente sencillez la ecuación logística puede tener comportamientos muy complejos. Empezamos estudiando otras ecuaciones cuyo comportamiento es más simple.

Dinámica para f creciente

Suponemos que I es un intervalo cerrado y $f: I \rightarrow I$ es continua y estrictamente creciente. Partimos de $x_0 \in I$. Si $x_1 = x_0$ la condición inicial es un punto fijo de f , $f(x_0) = x_0$, y encontramos una solución constante

$$\{x_0, x_0, x_0, x_0, \dots\}.$$

Si $x_1 \neq x_0$ hay dos posibilidades

²La crítica anterior a la elección de α y β pierde importancia.

a)

$$x_1 > x_0 \implies \begin{array}{c} f(x_1) > f(x_0) \\ \parallel \quad \parallel \\ x_2 \quad x_1 \end{array} \implies \begin{array}{c} f(x_2) > f(x_1) \\ \parallel \quad \parallel \\ x_3 \quad x_2 \end{array} \dots$$

y la sucesión x_n es estrictamente creciente.

b)

$$x_1 < x_0 \implies \begin{array}{c} f(x_1) < f(x_0) \\ \parallel \quad \parallel \\ x_2 \quad x_1 \end{array} \dots$$

y $\{x_n\}$ es estrictamente decreciente.

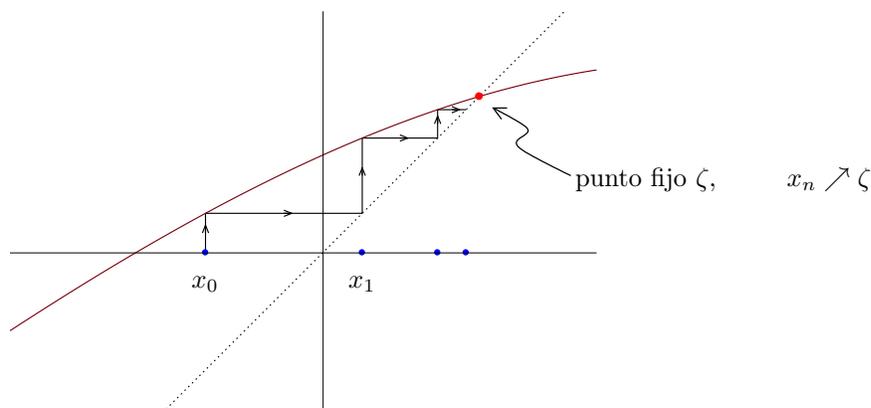
En el caso a) se pueden dar dos posibilidades $x_n \rightarrow +\infty$ o bien $x_n \rightarrow \zeta \in I$ según la sucesión esté acotada o no.

En el caso b) puede ocurrir $x_n \rightarrow -\infty$ o $x_n \rightarrow \zeta \in I$.

En los casos en que hay convergencia a ζ se tiene que este número ha de ser fijo por f . Es una consecuencia de la continuidad de f pues

$$\zeta \longleftarrow x_{n+1} = f(x_n) \longrightarrow f(\zeta).$$

En resumen, para f estrictamente creciente y continua las soluciones son constantes o estrictamente monótonas, y pueden converger a un punto fijo de f o a infinito.

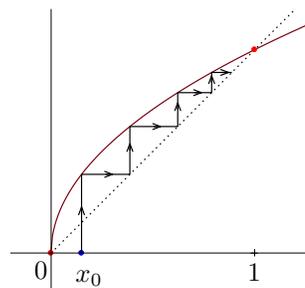


Ejemplo (Algunas teclas de la calculadora).





...
 $x_{n+1} = \sqrt{x_n}, \quad I = [0, \infty[.$

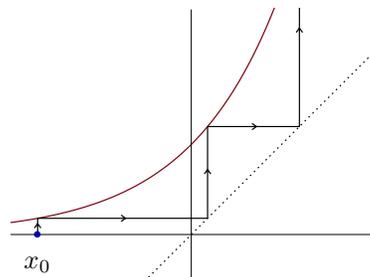


Hay dos puntos fijos $\zeta = 0, 1$. Dado $x_0 \in]0, 1[$ se cumple $x_0 < x_1 < 1$ y por tanto $x_n \nearrow 1$. De modo análogo se discute $x_0 \in]1, \infty[$.





...
 $x_{n+1} = e^{x_n}, \quad I = \mathbb{R}.$



A partir de la fórmula de Taylor se deduce la desigualdad $e^x \geq 1 + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Así no hay puntos fijos y todas las soluciones van a $+\infty$. Observamos que

$$x_1 = e^{x_0} \geq 1 + x_0 > x_0.$$

Dinámica para f decreciente

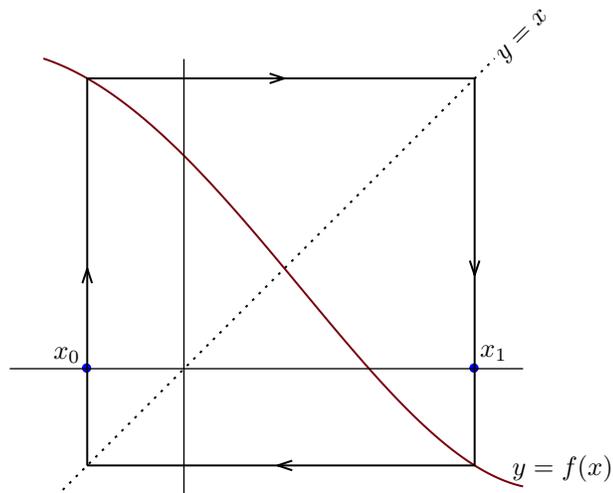
De nuevo I es un intervalo cerrado pero ahora $f: I \rightarrow I$ es continua y estrictamente decreciente.

Hay un nuevo fenómeno: la aparición de 2-ciclos:

$$x_0 \in I, \quad x_1 \neq x_0, \quad x_2 = x_0$$

$$\text{Solución: } \{x_0, x_1, x_0, x_1, \dots\}.$$

Esto ocurre para $f(x) = -x$, $x_{n+1} = -x_n$, $\{1, -1, 1, -1, \dots\}$. El nombre de 2-ciclo se puede asociar a la siguiente gráfica:



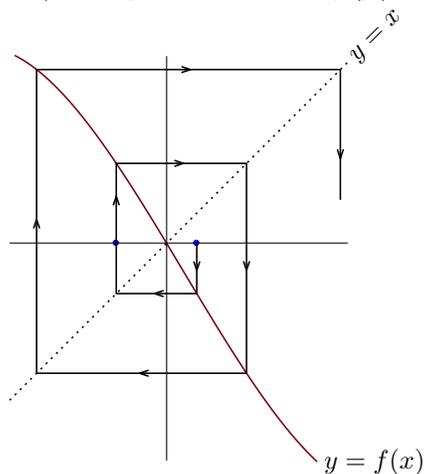
Supongamos ahora que $x_0 \in I$ no corresponde ni a un punto fijo ni a un 2-ciclo. Es decir, $x_0 \neq x_1$, $x_0 \neq x_2$. Supongamos por ejemplo $x_0 < x_2$. Como f es decreciente,

$$x_0 < x_2 \implies x_1 = f(x_0) > f(x_2) = x_3 \implies x_2 < x_4 \dots$$

Observamos que $\{x_{2n}\}$ es estrictamente creciente y $\{x_{2n+1}\}$ es estrictamente decreciente. Distinguimos dos casos:

1) $x_{2n} \rightarrow +\infty$.

Observamos que se cumplirá $x_{2n+1} \rightarrow -\infty$, pues en otro caso $x_{2n+1} \rightarrow \mu \in I$ y de $x_{2n} = f(x_{2n-1})$ se sigue que $x_{2n} \rightarrow f(\mu)$.

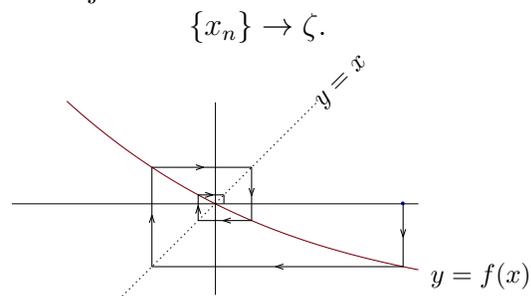


2) $x_{2n} \rightarrow \zeta \in I$ (aquí hemos usado que I es cerrado).

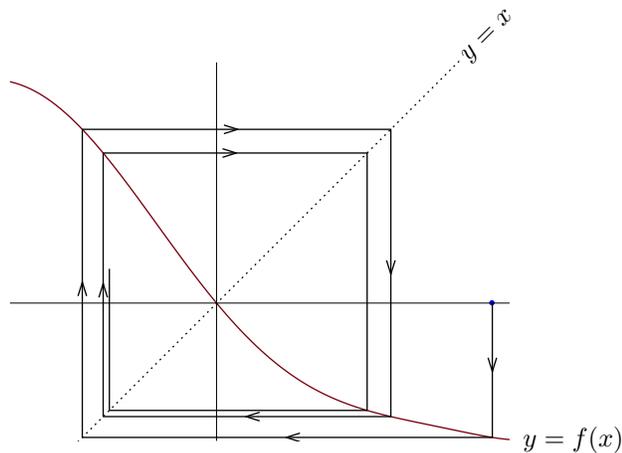
De $x_{2n+1} = f(x_{2n})$ se sigue que también x_{2n+1} es convergente; $x_{2n+1} \rightarrow \mu \in I$. Además $\mu = f(\zeta)$. De la ecuación $x_{2n+2} = f(x_{2n+1})$ se sigue que $\zeta = f(\mu)$.

Hay dos posibilidades:

2a) $\zeta = \mu$ es un punto fijo.



2b) $\zeta \neq \mu$ forman un 2-ciclo.

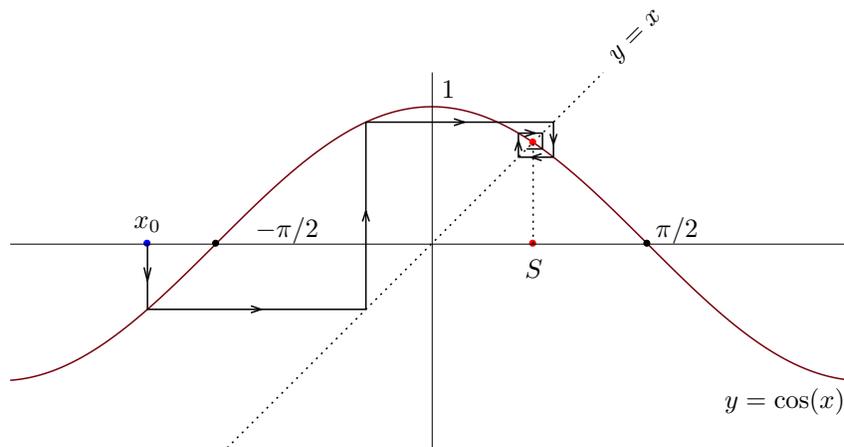


En resumen, las soluciones son oscilantes y si no se escapan a infinito convergerán a un punto fijo o a un 2-ciclo.

Ejemplo. Vamos a justificar una observación hecha al inicio

$$\boxed{\text{COS}} \quad \boxed{\text{COS}} \quad \boxed{\text{COS}} \quad \dots \quad \boxed{\text{COS}} \quad \dots$$

$$x_{n+1} = \text{COS } x_n.$$



Comenzamos observando que $f(x) = \cos x$ tiene un único punto fijo ζ , pues $g(x) = x - \cos x$ es estrictamente creciente y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$. Además $\zeta = 0'7\dots$. Como f no es monótona en \mathbb{R} no podemos aplicar los resultados anteriores con $I = \mathbb{R}$. Observamos que, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_1 \in [-1, 1]$ y $x_2 \in [0, 1]$, pues

$$f(\mathbb{R}) \subset [-1, 1], \quad f([-1, 1]) = [\cos 1, 1] \subset [0, 1].$$

Como $f([0, 1]) \subset [0, 1]$ concluimos que

$$x_n \in [0, 1] \quad \forall n \geq 2.$$

Trabajaremos en $I = [0, 1]$ donde la función f sí es estrictamente decreciente. Aplicando la teoría anterior sabemos que $\{x_n\}$ puede converger a ζ o a un 2-ciclo. Vamos a probar que no hay 2-ciclos por reducción al absurdo. Si $p, q \in I$, $p \neq q$ cumplieren $f(p) = q$, $f(q) = p$ aplicaríamos el teorema del valor medio para llegar a

$$p - q = f(q) - f(p) = f'(r)(q - p) = -\operatorname{sen} r (q - p)$$

donde r es algún número entre p y q ; en particular $r \in]0, 1[$. Entonces $|p - q| = |\operatorname{sen} r||q - p| < |q - p|$ y esto es absurdo.

De las discusiones anteriores concluimos que para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ se cumple $x_n \rightarrow \zeta$.

Puntos periódicos

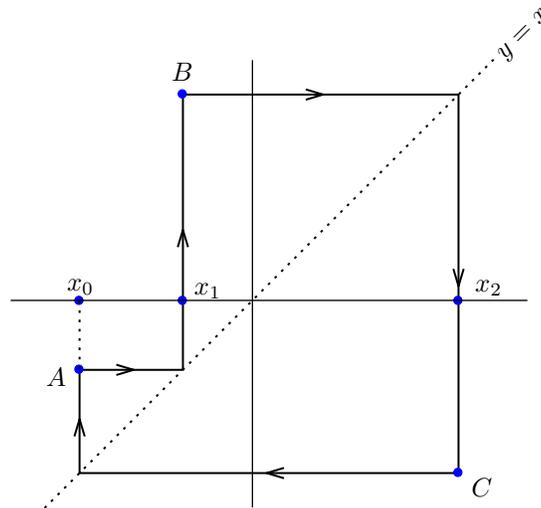
Consideramos un intervalo I y una función continua $f: I \rightarrow I$. Dado $N \geq 1$ un N -ciclo es una solución de

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

que cumple $x_0 \neq x_n$, $1 < n < N$, $x_N = x_0$.

Se dice también que x_0 es un punto periódico con periodo mínimo N .

Observamos que los 1-ciclos son los puntos fijos. De las discusiones anteriores sabemos que no puede haber ciclos con $N \geq 3$ si f es estrictamente monótona. Cuando hay cambios de monotonía es posible encontrarlos. En el dibujo se ha señalado un 3-ciclo



Cualquier función f cuya gráfica pase por A , B y C tendrá el 3-ciclo x_0 , x_1 , x_2 .

Teorema. *Sea $f: I \rightarrow I$ continua y tal que existe un 3-ciclo. Entonces existe un N -ciclo para cada $N \geq 1$.*

(De acuerdo a este resultado no tenemos que esforzarnos para encontrar una función que admita un 17-ciclo.)

Haremos la demostración después de tres lemas. Antes observamos que los puntos N -periódicos de f son puntos fijos de $f^N = f \circ \dots \circ f$

$$\left. \begin{array}{l} x_N = f(x_{N-1}) = f^2(x_{N-2}) = \dots = f^N(x_0) \\ x_N = x_0 \end{array} \right] \implies f^N(x_0) = x_0.$$

Lema 1. Sea $x \in I$ un punto periódico con periodo mínimo $N \geq 1$. Supongamos que para algún entero $\hat{N} \geq 1$ se cumple

$$f^{\hat{N}}(x) = x.$$

Entonces N divide a \hat{N} , $N|\hat{N}$.

Demostración. Por definición de periodo mínimo $\hat{N} \geq N$. Suponemos $\hat{N} > N$ y dividimos para obtener $\hat{N} = Nq + r$ donde q y r son enteros, $q \geq 1$, $0 \leq r < N$. Se cumple

$$x = f^{\hat{N}}(x) = f^{r+Nq}(x) = f^r \circ f^{Nq}(x) = f^r \circ (f^N)^q(x) = f^r(x).$$

Como $r < N$ y N es periodo mínimo se ha de cumplir $r = 0$. □

Lema 2. Sea $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que

$$[a, b] \subset g([a, b]).$$

Entonces g tiene un punto fijo.

Demostración. Como a, b están en la imagen de g encontramos $\alpha, \beta \in [a, b]$ tales que $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$. Los puntos fijos de g coinciden con los ceros de $\varphi(x) = x - g(x)$. Supongamos, por ejemplo $\alpha < \beta$, vamos a aplicar el teorema de Bolzano a φ en el intervalo $[\alpha, \beta]$

$$\varphi(\alpha) = \alpha - g(\alpha) = \alpha - a \geq 0, \quad \varphi(\beta) = \beta - g(\beta) = \beta - b \leq 0.$$

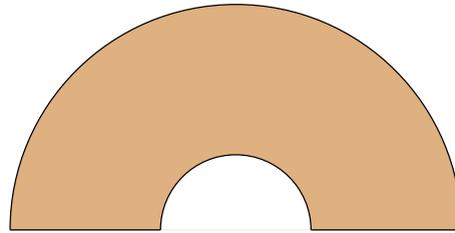
□

Observación. La hipótesis del lema se puede cambiar por

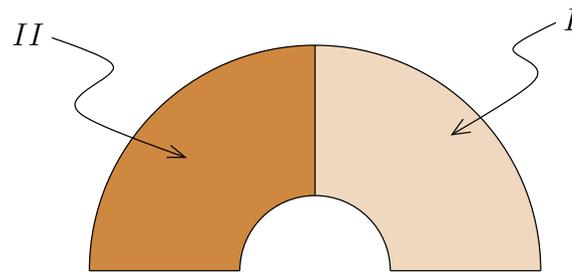
$$g([a, b]) \subset [a, b].$$

Se obtiene así el teorema del punto fijo de Brouwer en una dimensión. Este famoso teorema también es válido en más dimensiones pero esto no ocurre con el lema anterior. Vamos a construir una aplicación continua $g: D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $D \subset g(D)$, D homeomorfo al disco cerrado y que no tiene puntos fijos.

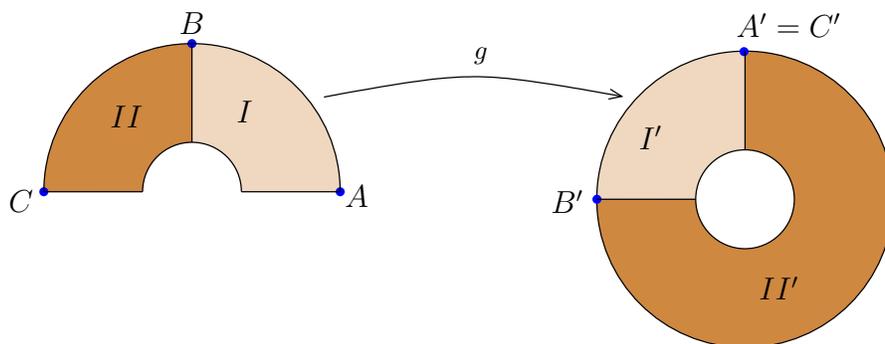
Para ello consideramos el espacio D



y lo dividimos en dos regiones

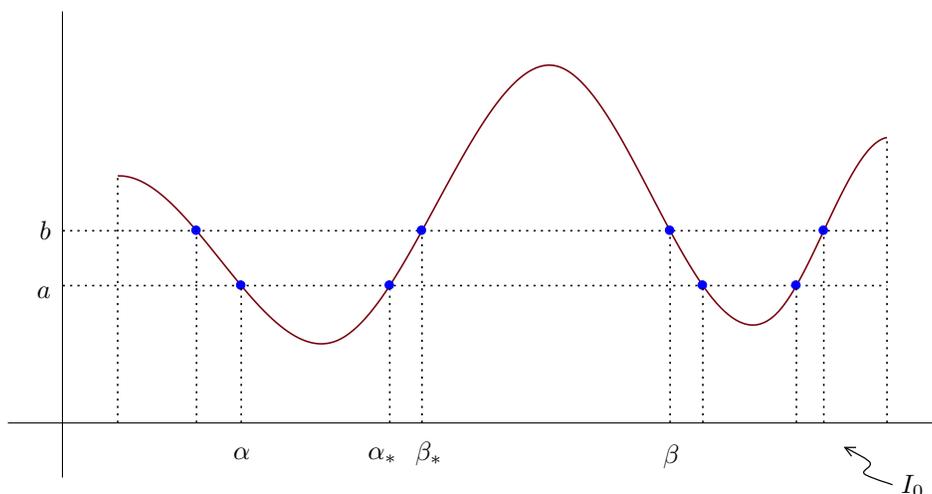


La aplicación $g: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ transforma D en el anillo



Es claro que $g(D) \supset D$. Además no hay puntos fijos si I se rota hasta quedar sobre I' y II se rota y se estira hasta quedar sobre II' . En el proceso hemos pegado dos segmentos pero ésta es una operación continua.

Lema 3. Sea $g: I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $I_1 \subset g(I_0)$, I_0, I_1 intervalos compactos. Entonces existe I_2 intervalo compacto, $I_2 \subset I_0$, tal que $g(I_2) = I_1$.



Demostración. Suponemos $I_1 = [a, b]$ y escogemos $\alpha, \beta \in I_0$ de manera que $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$. Suponemos por ejemplo $\alpha < \beta$. Definimos

$$\alpha_* = \max\{x \in [\alpha, \beta] : g(x) = a\}.$$

Observamos que se trata del máximo de un compacto de \mathbb{R} y por tanto está bien definido. Además, de la definición de α_* , $g(x) \neq a$, $\forall x \in]\alpha_*, \beta]$. Como $g(\beta) = b > a$ y g es continua concluimos que

$$g(x) > a, \quad \forall x \in]\alpha_*, \beta].$$

A continuación definimos

$$\beta_* = \min\{x \in [\alpha_*, \beta] : g(x) = b\}.$$

(Véase la figura.) Se cumple $g(x) < b$, $\forall x \in [\alpha_*, \beta_*$. En consecuencia $g(\alpha_*) = a$, $g(\beta_*) = b$, $a < g(x) < b$, $\forall x \in]\alpha_*, \beta_*$ [implica $g([\alpha_*, \beta_*]) = [a, b]$, pues g es continua. \square

Demostración del Teorema

Paso 1. Podemos suponer que el 3-ciclo cumple $x_0 < x_1 < x_2$. Esto no es obvio. En principio hay 6 posibilidades

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} x_0 < x_1 < x_2 \\ x_1 < x_2 < x_0 \\ x_2 < x_0 < x_1 \end{array} \right. \quad (II) \left\{ \begin{array}{l} x_0 < x_2 < x_1 \\ x_1 < x_0 < x_2 \\ x_2 < x_1 < x_0 \end{array} \right.$$

Las del grupo (I) las reducimos a la primera sin más que cambiar la condición inicial, $x_0 \rightarrow x_1$ o $x_0 \rightarrow x_2$.

Para las del grupo (II) hay que trabajar un poco más. Todas se pueden reducir a

$$x_2 < x_1 < x_0 \implies -x_0 < -x_1 < -x_2.$$

Si hacemos el cambio $y = -x$,

$$x_{n+1} = f(x_n) \implies y_{n+1} = -x_{n+1} = -f(-y_n).$$

Definimos $g(y) = -f(-y)$, $y \in J = \{-x : x \in I\}$. Observamos que x_0 produce un N -ciclo para $x_{n+1} = f(x_n)$ si y sólo si $-x_0$ produce un N -ciclo para $g_{n+1} = g(y_n)$. Si probamos el teorema en el caso (I) y lo aplicamos a g obtenemos el caso (II).

Paso 2. Existe un punto fijo.

Usaremos la notación para el 3-ciclo $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_2 = c$, $a < b < c$, $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$



$$J' = [a, b], \quad J'' = [b, c].$$

Observamos que

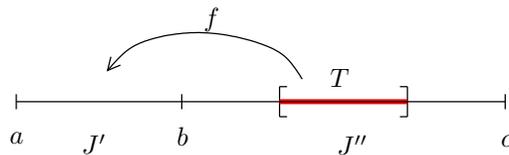
$$\begin{aligned} f(a) = b, f(b) = c &\implies f(J') \supset J'' \\ f(b) = c, f(c) = a &\implies f(J'') \supset J' \cup J''. \end{aligned}$$

En particular $J'' \subset f(J'')$ y el Lema 2 nos dice que hay un punto fijo en J'' .

Paso 3. Existe un 2-ciclo.

Vamos a buscar un punto fijo de $f^2 = f \circ f$, $f^2(x) = x$, que no sea punto fijo de f , $f(x) \neq x$.

Para ello observamos que $J' \subset f(J'')$ y, por el Lema 3, encontramos un intervalo compacto $T \subset J''$ de manera que $f(T) = J'$.



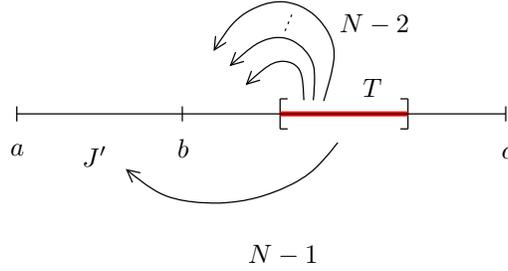
De $f^2(T) = f(J') \supset J'' \supset T$ se sigue que podemos aplicar el Lema 2 a $g = f^2$ definida en T ; encontramos $x \in T$ de manera que $f^2(x) = x$.

Probamos que $f(x) \neq x$. En otro caso

$$J'' \supset T \ni x = f(x) \in f(T) = J'.$$

Así $x \in J' \cap J'' = \{b\}$. Esto es absurdo pues $f^2(x) = x$ mientras que $f^2(b) = a \neq b$.

Paso 4. Dado $N \geq 4$ existe un intervalo compacto $T \subset J''$ tal que $f^k(T) \subset J''$, $k = 1, \dots, N - 2$, $f^{N-1}(T) = J'$.



De $f(J'') \supset J''$ y el Lema 3 se sigue que podemos encontrar I_1 intervalo compacto, $I_1 \subset J''$, $f(I_1) = J''$. Ahora $I_1 \subset J'' = f(I_1)$ nos permite repetir el proceso y encontrar $I_2 \subset I_1$ con $f(I_2) = I_1$. Repetimos el proceso $N - 2$ veces y encontramos un sistema de intervalos encajados

$$I_{N-2} \subset I_{N-3} \subset \dots \subset I_2 \subset I_1 \subset J''$$

de manera que $f(I_k) = I_{k-1}$, $k = 2, \dots, N - 2$, $f(I_1) = J''$. Se cumple

$$f^{N-2}(I_{N-2}) = f^{N-3}(I_{N-3}) = \dots = f^2(I_2) = f(I_1) = J''.$$

Aplicando f , $f^{N-1}(I_{N-2}) = f(J'') \supset J'$ y usamos el Lema 3 con $g = f^{N-1}$. Encontramos $T \subset I_{N-2} : f^{N-1}(T) = J'$.

Se cumple $T \subset I_k \implies f^k(T) \subset f^k(I_k) = J''$ si $k < N - 1$.

Paso 5. Existe un N -ciclo, $N \geq 4$, con condición inicial en T

$$f^{N-1}(T) = J' \implies f^N(T) = f(J') \supset J'' \supset T.$$

Por el Lema 2 aplicado a $g = f^N$, $\exists x \in T$:

$$f^N(x) = x.$$

La demostración no ha concluido. Hemos de probar que $f^k(x) \neq x$ si $1 \leq k < N$.

Supongamos por absurdo que el periodo mínimo de x no es N , digamos $N^* < N$. Por el Lema 1 N^* divide a N , $N = dN^*$, $d > 1$. Así,

$$f^{N-1}(x) = f^{dN^*-1}(x) = f^{N^*-1} \underbrace{f^{(d-1)N^*}(x)}_{=x} = f^{N^*-1}(x).$$

Por otra parte, como $x \in T$, $f^{N^*-1}(x) \in f^{N^*-1}(T) \subset J''$ mientras que $f^{N-1}(x) \in J'$. Así $f^{N-1}(x) \in J' \cap J''$. De $f^{N-1}(x) = b$, $x = f^N(x) = c$. Hemos llegado a una contradicción con la definición de T pues $f(x) \in J''$ pero $f(c) = a \notin J''$.

Hemos acabado la demostración. □

El orden de Šarkovs'kiĭ



O. M. Šarkovs'kiĭ.

Ordenamos los números naturales de la siguiente manera: $3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2n+1 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright 2^p \cdot 3 \triangleright 2^p \cdot 5 \triangleright 2^p \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright 2^{m+1} \triangleright 2^m \triangleright \dots \triangleright 8 \triangleright 4 \triangleright 2 \triangleright 1$.

Enunciamos sin demostración:

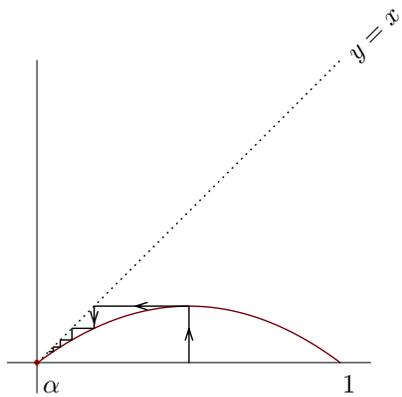
Teorema. $f: I \rightarrow I$ continua, I intervalo. Si f tiene un N -ciclo entonces también tiene un M -ciclo para cada $M \triangleleft N$.

Este resultado apareció por primera vez en el artículo [5] publicado en 1964 en una revista de la antigua Unión Soviética. El caso $N = 3$ fue redescubierto en [3], lo que explica en parte el famoso título “Periodo tres implica caos”. También se puede consultar [1] para más información.

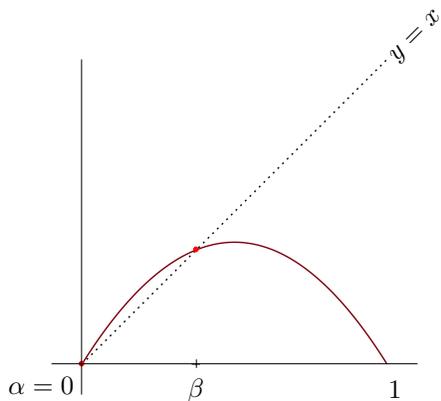
La ecuación logística de nuevo

$$x_{n+1} = \rho x_n (1 - x_n), \quad x_n \in [0, 1], \quad 0 < \rho < 4.$$

Observamos que si $0 < \rho \leq 1$ el único punto fijo es $\alpha = 0$ (extinción).



Para $\rho > 1$ hay un segundo punto fijo $\beta = 1 - \frac{1}{\rho}$ (equilibrio ecológico).



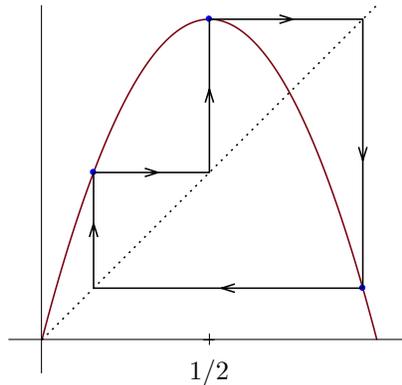
También observamos que si $\rho \leq 2$, $f_\rho([0, 1]) \subset [0, \frac{1}{2}]$ si $f_\rho(x) = \rho x(1-x)$. Nos podemos restringir a $J = [0, \frac{1}{2}]$, pues si $x_0 \in I$, $x_n \in J$ para $n \geq 1$. La función f_ρ es estrictamente creciente en J y por tanto las soluciones $\{x_n\}_{n \geq 1}$ son estrictamente monótonas y han de converger a un punto fijo α o β . Si $\rho \leq 1$, $x_n \rightarrow 0$ y hay extinción de la especie. Si $1 < \rho \leq 2$ observamos que $f_\rho(x) > x$ si $x \in]0, \beta[$, $f_\rho(x) < x$ si $x \in]\beta, \frac{1}{2}]$. De aquí se sigue que si $x_0 > 0$, $x_0 \in]0, 1[$, entonces $x_0 \rightarrow \beta$. La población no se extingue y tiende al equilibrio. Las cosas son mucho más complicadas para $\rho > 2$. Por ejemplo, para algunos valores de ρ aparecen 3-ciclos. Así, si exigimos que $x_0 = \frac{1}{2}$

genere un 3-ciclo,

$$x_0 = \frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{1}{4}\rho, \quad x_2 = \frac{1}{4}\rho^2 \left(1 - \frac{1}{4}\rho\right),$$

$$x_3 = \frac{1}{4}\rho^3 \left(1 - \frac{1}{4}\rho\right) \left(1 - \frac{1}{4}\rho^2 \left(1 - \frac{1}{4}\rho\right)\right).$$

La ecuación $x_0 = x_3$ conduce a un polinomio de grado 7 que admite la raíz $\rho = 3'832\dots$



Vamos a estudiar con detalle el caso límite $\rho = 4$ porque para este valor del parámetro disponemos de una fórmula explícita para las soluciones. Dado $x_0 \in [0, 1]$ buscamos $\theta \in \mathbb{R}$ de manera que $x_0 = \text{sen}^2(\theta)$. Entonces

$$x_n = \text{sen}^2(2^n \theta)$$

es la solución de

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n).$$

Para comprobarlo usamos la fórmula del ángulo doble

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \text{sen}^2(2 \cdot 2^n \theta) = [2 \text{sen}(2^n \theta) \cos(2^n \theta)]^2 \\ &= 4 \text{sen}^2(2^n \theta) \cos^2(2^n \theta) = 4 \text{sen}^2(2^n \theta) [1 - \text{sen}^2(2^n \theta)] \\ &= 4x_n(1 - x_n). \end{aligned}$$

A partir de esta fórmula vamos a comprobar que se cumplen 3 propiedades:

- 1) **Existen infinitos puntos periódicos** (N -ciclos).

Buscamos θ de manera que $0 < \theta < 2\theta < 4\theta < 8\theta = \theta + \pi \implies \theta = \frac{\pi}{7}$. Es claro que la solución

$$x_n = \text{sen}^2\left(2^n \frac{\pi}{7}\right) \text{ es un 3-ciclo.}$$

En consecuencia sabemos que hay N -ciclos para cada $N \geq 1$. También puedes calcularlos.

2) El efecto mariposa.

Dado $x_0 \in I$ y $\delta > 0$, existe $x_0^* \in I$, $|x_0 - x_0^*| < \delta$ tal que, para algún $n \geq 1$,

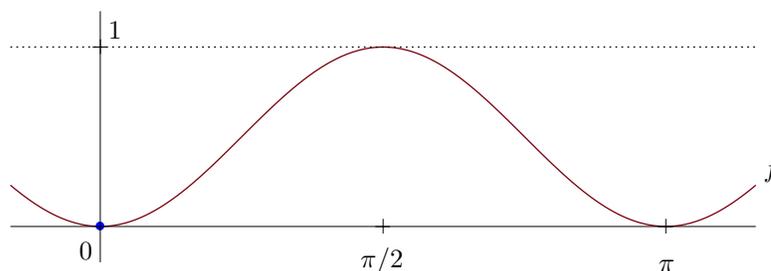
$$|x_n - x_n^*| \geq \frac{1}{2}.$$

[Partimos de la ley logística, que es determinista, pero suponemos que al comenzar el proceso cometemos un pequeño error (se sustituye x_0 por x_0^*). Esto es lo normal, pues usamos un número finito de cifras decimales. A muy largo plazo x_n y x_n^* están muy alejados. Una pequeña perturbación (el vuelo de una mariposa) puede producir un gran efecto a largo plazo (la tormenta).]

La función $f(\theta) = \text{sen}^2 \theta$ es π -periódica y se cumple

$$|f(\theta_1) - f(\theta_2)| \leq |\theta_1 - \theta_2|$$

(usa el Teorema del valor medio).



Escribimos $x_0 = \text{sen}^2(\theta)$ y buscamos $\zeta \in [0, \pi]$ de manera que

$$|\text{sen}^2(2^n\theta + \zeta) - \text{sen}^2(2^n\theta)| > \frac{1}{2}$$

(la gráfica de f prueba que siempre es posible encontrar tal ζ)

$$x_0^* = \text{sen}^2\left(\theta + \frac{\zeta}{2^n}\right), \quad |x_0 - x_0^*| \leq \frac{\pi}{2^n} < \delta \text{ si } n \text{ grande.}$$

Se cumple $|x_n - x_n^*| \geq \frac{1}{2}$.

3) La órbita densa.

Existe $x_0 \in I$ tal que

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ es denso en } [0, 1].$$

Construimos un número $\Gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}$, $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$ de acuerdo a la siguiente ley:

$$\{\varepsilon_n\} = \{ \underbrace{0}, \underbrace{1}, \underbrace{0,0}, \underbrace{0,1}, \underbrace{1,0}, \underbrace{1,1}, \underbrace{0,0,0}, \dots \}.$$

Escribimos todas las “palabras” de una letra 0, 1. A continuación todas las de dos letras 0, 0; 0, 1; 1, 0; 1, 1; todas las de tres... Esta construcción recuerda mucho a un cuento de Borges (La Biblioteca de Babel).

Con un poco de trabajo se puede probar que $x_0 = \text{sen}^2 \theta$, $\theta = \pi\Gamma$ cumple los requisitos.

Algunos matemáticos afirman que estas tres propiedades son una definición de *Caos*. Se puede consultar [2].

Referencias

- [1] ALSÈDÀ, L.; LLIBRE, J.; MISIUREWICZ, M. *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*. Second edition. Advanced Series in Non-linear Dynamics, 5. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2000. xvi+415 pp.
- [2] DEVANEY, R. L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.
- [3] LI, TIEN YIEN; YORKE, J- A. Period three implies chaos. *Amer. Math. Monthly* 82 (1975), no. 10, 985–992.
- [4] MAY, R. *Stability and complexity in model ecosystems*, Princeton University Press, 2001.
- [5] ŠARKOVSKIĬ, O. M. Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself. (Russian) *Ukrain. Mat. Ž.* 16 (1964), 61–71.



Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Granada
rortega@ugr.es

Publicat el 9 de maig de 2013