# ALGUNAS ALGEBRAS DE FUNCIONES DIFERENCIABLES

por

J.L. Cerdá

y

J. Cufí

Si I es un intervalo, acotado o no, y si $\lambda$ es un espacio normal de sucesiones de números complejos que contiene a $\varphi$ (espacio de las sucesiones casi nulas), como en [1] vamos a considerar el espacio $\mathcal{E}^{\lambda}(I)$ de funciones $f : I \to \mathbb{C}$ de clase $C^{\infty}$ tales que

$$p_u(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \| f^{(n)} \| \cdot |u_n| < \infty \text{ para toda } u \in \lambda$$

en donde se designa

$$\| f^{(n)} \| = \sup_{t \in I} | f^{(n)}(t) |,$$

y se supone a $\mathcal{E}^{\lambda}(I)$ provisto de la topología definida por las seminormas $p_u$ ( $u \in \lambda$).

Así para $(M_n)$ sucesión de términos positivos y

$$\lambda = (M_n^{-1})\ h(\infty) = \left\{ \left( \frac{u_n}{M_n} \right) : \lim \sqrt[n]{|u_n|} = 0 \right\}$$

se obtienen las clases clásicas

$$\mathcal{E}^{\lambda}(I) = C_I \{ M_n \}$$

(ver [4] ) y en el caso

$$\lambda = (M_n^{-1})\ l^\infty = \left\{ \left( \frac{u_n}{M_n} \right) : \sup |u_n| < \infty \right\}$$

las clases

$$\mathcal{E}^\lambda(I) = D\{M_n\}$$

análogas a las consideradas en [2].

Aquí tratamos de imponer a $\lambda$ condiciones bajo las que $\mathcal{E}^\lambda(I)$ es álgebra topológica.

Es obvio que son equivalentes:

(a) Para toda $u \in \lambda$ existen $u' \in \lambda$ tal que

$$\binom{n}{k} |u_n| \leq |u'_k| \cdot |u'_{n-k}| \quad \text{si } 0 \leq k \leq n$$

(a') Para toda $u \in \lambda$ existen $u', u'' \in \lambda$ y una constante $C > 0$ tales que

$$|u_n| \leq C \frac{|u'_k| |u''_{n-k}|}{\binom{n}{k}} \quad \text{si } 0 \leq k \leq n$$

Proposición 1.- Si $\lambda$ cumple (a) entonces $\mathcal{E}^\lambda(I)$ es álgebra topológica pues la multiplicación de funciones cumple que para toda $u \in \lambda$ existe $v \in \lambda$ tal que

$$p_u(fg) \leq p_v(f)\, p_v(g)$$

Proposición 2.- Si $\lambda$ es estable frente a las transformaciones diagonales del tipo $u \to (k^n) u$ (o sea $(k^n u_n) \in \lambda$ si $(u_n) \in \lambda$) y si para toda $u \in \lambda$ no negativa existe otra $u' \in \lambda$ y una constante $M > 0$ tales que

$$u_n \leq M^n u'_k u'_{n-k} \qquad (0 \leq k \leq n)$$

entonces $\mathcal{E}^\lambda(I)$ es álgebra topológica.

Proposición 3.- Sea $\lambda$ tal que para cada $u \in \lambda$ no negativa existe otra $u' \in \lambda$ tal que

$$u_n \leq u'_k \, u'_{n-k} \qquad (0 \leq k \leq n)$$

Si $(M_n)$ es sucesión de términos positivos y además

(1) $\binom{n}{k} M_k \, M_{n-k} \leq M_n \qquad (0 \leq k \leq n)$

o bien

(2) $M_k \, M_{n-k} \leq K^n M_n \quad (0 \leq k \leq n)$ y $\lambda$ es estable frente a las transformaciones diagonales $u \to (k^n)u$ entonces $\xi^{(M_n^{-1})\lambda}(I)$ es álgebra topológica.

Esta proposición se aplica al espacio de sucesiones $h[0] = \{ u : (|u_n|)$ mayorada por alguna $(k^n)$ con $k > 0 \}$, en el que los $(k^n)$ con $k > 0$ forman una familia cofinal de sucesiones $u \in h[0]$ no negativas tales que

$$u_n = u_k \, u_{n-k} \qquad (0 \leq k \leq n)$$

y es invariante frente a las $u \to (k^n)u$ $(k > 0)$ de modo que, si $M_k \, M_{n-k} \leq K^n M_n$ $(0 \leq k \leq n)$, $\xi^{M_n^{-1}h[0]}(I)$ es álgebra topológica.

Lo mismo sucede con $C_I\{M_n\}$ pues se cumple que $h(\infty)$ es estable frente a las $u \to (k^n)u$ y además

Proposición 4.- En $h(\infty)$ toda sucesión está mayorada por otra $u = (u_n)$ de términos positivos decreciente y para cada $u \in h(\infty)$ de este tipo con $u_0 = 1$ existe otra análoga $u' \in h(\infty)$ tal que

$$u_n \leq u'_k \, u'_{n-k} \qquad (0 \leq k < n)$$

Demostración.- Basta limitarse a $(u_n)$ con $u_n > 0$ y además se puede suponer a $(u_n)$ decreciente con $u_0 = 1$ y definir $u'$ del siguiente modo:

$u'_0 = 1$ y, si $n \geq 1$, por inducción

$$u_n' = \max \left\{ \frac{u_n}{u_0'} , \frac{u_{n+1}}{u_1'} , \ldots , \frac{u_{2n-1}}{u_{n-1}'} , \sqrt{u_{2n}} \right\}$$

La proposición 3 - (1) se aplica también a $D_I\{M_n\}$, que será álgebra topológica si $\binom{n}{k} M_k M_{n-k} \leq M_n \quad (0 \leq k < n)$. En este caso se trata de un álgebra de Banach pues su topología es la definida por la norma $p_u$ con $u = \left( \frac{1}{M_n} \right)$.

En el estudio de las álgebras es importante conocer a los elementos inversibles.

Si $f \in \mathcal{E}^\lambda(I)$ es inversible en $\mathcal{E}^\lambda(I)$, o sea, si existe $g \in \mathcal{E}^\lambda(I)$ tal que $fg = 1$, necesariamente existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(t)| \geq \delta > 0 \qquad \forall\, t \in I$$

puesto que g está acotada.

Diremos que $\mathcal{E}^\lambda(I)$ es <u>de inversión</u> si se cumple el recíproco, o sea, si

$$f \in \mathcal{E}^\lambda(I),\ |f(t)| \geq \delta > 0 \Rightarrow \frac{1}{f} \in \mathcal{E}^\lambda(I).$$

<u>Proposición 5</u>.- Si $\mathcal{E}^\lambda(I)$ es álgebra de inversión, los elementos de inversión constituyen un entorno uniforme (luego también para la topología normal) de la unidad $1 \in \mathcal{E}^\lambda(I)$ y con ello se cumplen:

(a) Todo carácter $\chi \in Sp\ \mathcal{E}^\lambda(I)$ es continuo.

(b) Todo ideal maximal $M \in \mathfrak{M}\left[\mathcal{E}^\lambda(I)\right]$ es cerrado.

(c) $Sp\ \mathcal{E}^\lambda(I)$ es compacto (para la topología de Gelfand).

<u>Demostración</u>.- Toda $f \in \mathcal{E}^\lambda(I)$ tal que $\|f - 1\| < 1$ será inversible pues si $\|f - 1\| = 1 - \delta$, necesariamente $|f(t)| \geq \delta$, $\forall\, t \in I$. Tales funciones constituyen un entorno uniforme de la unidad. Por lo tanto se cumple (b) y también (a).

En cuanto a (c) basta observar que Sp $\xi^{\lambda}(I)$ es cerrado en $A'_{\sigma}$ para $A = \xi^{\lambda}(I)$ y es relativamente compacto en $A'_{\sigma}$ ya que está contenido en el polar de U si U es entorno absolutamente convexo de cero en A tal que $1 + U$ está constituido por elementos inversibles.

Por lo tanto tienen interés los resultados que aseguran el que un álgebra $\xi^{\lambda}(I)$ sea de inversión y como en [3] y [5] resulta:

Proposición 6.- Consideremos $\lambda$ estable frente a las $u \to (k^n)\, u$. Para que $\xi^{\lambda}(I)$ sea de inversión es suficiente que para cada $\omega \in \lambda'$ (o sea $\Sigma |\omega_n u_n| < \infty \quad \forall u \in \lambda$) exista $v \in \lambda$ tal que $|\omega_n| \leq v_n$ y $A_n = \sqrt[n]{\frac{v_n}{n!}}$ sea casi creciente, o sea

$$A_n \leq K A_{n+1} \qquad \forall n \in N$$

para alguna constante $K \geq 1$

Demostración.-Sea $f \in \xi^{\lambda}(I)$ tal que $|f(t)| \geq 1 \quad \forall t \in I$ y $gf = 1$. Se trata de comprobar que $g \in \xi^{\lambda}(I)$.

Se cumple $\|f^{(n)}\| \leq v_n$ con $A_n = \sqrt[n]{\frac{v_n}{n!}}$ tal que

$$A_s \leq K A_n \qquad \text{si } s \leq n$$

Sean $r_n$ tales que

$$K A_n r_n = \frac{1}{3}$$

de modo que para $1 < s \leq n$ se cumplen, para $t_0 \in I$

$$\frac{f^{(s)}(t_0)}{s!} \leq \frac{v_n}{s!} \leq K^s A_n^s$$

y si se designa

$$Q(z) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!} z + \ldots + \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} z^n$$

se cumple $Q^{(s)}(0) = f^{(s)}(t_0)$ y en $|z| \leq r_n$ es

$$|Q(z)| \geq 1 - \sum_{s=1}^{n} K^s A_n^s r_n^s \geq 1 - \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^s \geq 1 - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

De las integrales de Cauchy resulta

$$|g^{(n)}(t_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{z=r_n} \frac{dz}{z^{n+1} Q(z)} \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{2\pi r_n}{r_n^{n+1} \frac{1}{2}} =$$

$$= 2 \frac{n!}{r_n^n} 2 \cdot n! (3K A_n)^n \quad \text{y con ello}$$

$$\| g^{(n)} \| \leq 2 \cdot n! (3K)^n \frac{v_n}{n!} = 2 (3K)^n v_n$$

lo que demuestra que $g \in \mathcal{E}^{\lambda}(I)$.

BIBLIOGRAFIA


[1] Cerdá, J.L. y Cufí, J. "Algunas clases generales de funciones infinitamente diferenciables" Coll. Math. (en prensa)

[2] Dales, H.G. y Davie, A.M. "Quasianalytic Banach Function Algebras" J. of Funct. An., 13 (1973), 28-50.

[3] Malliavin, P. "Calcul symbolique et sous-algèbres de $L^1(G)$", Bull. Soc. Math. France, 87 (1959), 181-190.

[4] Mandelbrojt, S. "Series adhérentes, régularization des suites, applications" Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[5] Rudin, W. "Division in Algebras of Infinitely Differentiable functions". J. Math. Mech. 11 (1962), 797-809.