Publ. Mat. U.A.B.

nº 7 feb. 1978

SOBRE RADICALES FINITOS Y LINEALIDAD RESIDUAL DE GRUPOS NILPOTENTES

Memoria presentada por
Pere Menal Brufal
para aspirar al grado de
Doctor en Matemáticas
por la
Universidad Autónoma de
Barcelona

Director:

Prof. Dr. D. Manuel Castellet
Agregado de Algebra y Topología
Universidad Autónoma de
Barcelona

INTRODUCCION

Dados un cuerpo K y un grupo G, el anillo de grupo K[G] es la K-álgebra libre del grupo G. El estudio algebraico de estos anillos fue iniciado en 1949 por I. Kaplansky, aunque no adquiere forma hasta que unos diez años más tarde S.A. Amitsur publica un trabajo fundamental en el estudio de anillos de grupo. Alrededor de los años setenta, los libros de Herstein, Lambek y Ribenboin incluyen material sobre anillos de grupo. El primer libro que trata únicamente de anillos de grupo es el de D.S. Passman (1971) y posteriormente los de Mihalev y Zalesskii (1973), y el de Bovdi (1974). En 1977 aparecerá el más completo tratado de anillos de grupo debido a Passman.

Uno de los problemas más interesantes planteados sobre el anillo de grupo es el de determinar su radical de Jacobson y, en particular, conocer cuándo el anillo de grupo es semisimple. El problema sigue en la actualidad sin resolver, aunque recientemente Passman ha calculado el radical de Jacobson en el caso de que el grupo sea localmente resoluble. Es probable que de este resultado pueda derivarse el caso general.

En lo que se refiere a semisimplicidad, es conocido que K[G] es semisimple si el cuerpo es de característica cero y no es algebraico sobre Q ([10], Th. 18.3). Parece posible que en característica cero K[G] sea siempre semisimple; esto último es equivalente a que Q[G] sea semisimple ([10], Chap.III). Es también probable que este resultado sea una consecuencia de una buena generalización del Teorema de los ceros de Hilbert a los anillos no conmutativos.

En 1963, Passman estudia las Q-representaciones irreducibles y finitas de un grupo G finitamente generado; este trabajo constituye una interesante contribución al problema de la semisimplicidad de Q[G]. Se define el radical finito de una K-álgebra como la intersección de los núcleos de todas las representaciones irreducibles de dimensión finita sobre K. Por lo tanto, es evidente que el radical finito contiene al radical de Jacobson y que ambos radicales coinciden si todas las representaciones irreducibles del álgebra son finitas. Passman [8] demuestra que el radical finito de Q[G], donde G es un grupo finitamente generado, es cero si y sólo si el grupo G es residualmente finito. El resultado de Passman es también consecuencia de un teorema de Mal´cev, el cual asegura que los grupos lineales finitamente generados son residualmente finitos.

Esta memoria está distribuida en tres capítulos. En el capítulo I estudio el radical finito de un anillo de grupo $K[G]$, donde K es un cuerpo de generación finita sobre Q, y G es un F.C. grupo (cada elemento de G tiene sólo un número finito de conjugados) o un grupo radicable (para cada entero $n \geq 1$, la ecuación $x^n = a$ tiene solución en G para todo $a \in G$). A continuación el interés se centra en la cuestión de cuándo $K[G]$ tiene "muchas" representaciones finitas. Concretamente, si $R(K[G])$ denota la intersección de los núcleos de todas las representaciones finitas, el problema es conocer cuándo $R(K[G]) = (0)$. El problema queda resuelto para F.C. grupos y cuerpos de generación finita sobre Q. Las demostraciones que doy son directas y, por lo tanto, elementales. El estudio del radical finito depende fuertemente de los grupos lineales irreducibles y, obviamente, estos tienen una estructura más asequible qu los grupos lineales arbitrarios. De ahí que estudiar las representaciones finitas, no necesariamente irreducibles, presenta más dificultad.

El trabajo sigue con un teorema que debo a Passman y en el que se reduce el estudio de R(K[G]) al siguiente problema: dar condiciones sobre G a fin de que sea residualmente K-lineal. Por lo tanto, para obtener la estructura de R(K[G]) hay que resolver, por desgracia, un problema de teoría de grupos. El problema tiene seguramente unas dimensiones descomunales. El capítulo termina con ejemplos de representaciones de grupos nilpotentes; este apartado está muy relacionado con ([13], Chap.5). Parte de los resultados que aparecen en este capítulo fueron obtenidos en [6] .

En el capítulo II paso a estudiar, para grupos nilpotentes, el problema del carácter residualmente lineal del grupo; relacionando éste con el concepto, más conocido, del carácter residualmente finito. En este capítulo se mejoran los resultados de[7] .

En el capítulo III considero grupos nilpotentes que residualmente son grupos lineales libres de torsión. Por último, doy condiciones necesarias y suficientes sobre un anillo R a fin de que los grupos lineal total, triangular y unitriangular, de grado $n \geq 3$ sobre R, sean residualmente finitos. Para el caso $n = 2$, posiblemente el más difícil, los resultados son incompletos. Una parte de estos resultados fueron presentados a las Jornadas Matemáticas Hispano-Lusitanas de 1977.

El material necesario para la lectura de la memoria es mínimo, por lo que no incluyo ningún capítulo de resultados previos. Los resultados debidos a otros autores van acompañados del nombre del autor y su referncia, sin demostración. Para facilitar la lectura no doy las definiciones hasta que van a ser utilizadas.

Deseo expresar mi agradecimiento al Profesor Dr. Manuel Castellet de la Universidad Autónoma de Barcelona, Director de esta tesis, así como al Profesor Dr. Donald S. Passman de la Universidad de Wisconsin, por sus estímulos que me han inspirado buena parte del trabajo. También al Profesor Dr. Brian Hartley de la Universidad de Warwick, por su interesante sugerencia en el capítulo III.

Pere Menal

Barcelona, Julio de 1977

Capítulo I

RADICALES FINITOS

Dados un cuerpo K y un grupo G, $K[G]$ denota el anillo del grupo G sobre el cuerpo K. Precisando, cada elemento $\alpha \in K[G]$ es una suma formal finita $\alpha = \sum a_x . x$, con $x \in G$ y $a_x \in K$. La suma de elementos de $K[G]$ se define componente a componente y la multiplicación se define distributivamente usando la multiplicación del grupo G. Usualmente, se identifica cada $x \in G$ con $1.x \in K[G]$ y así se obtiene una inmersión de G en el anillo $K[G]$. Si H es un subgrupo normal de G, la proyección canónica $G \longrightarrow G/H$ extiende de manera natural a un epimorfismo $\varphi_H : K[G] \longrightarrow K[G/H]$. Si $H = G$, el núcleo de esta aplicación es $\omega(K[G])$, el ideal de aumentación de $K[G]$. En general el núcleo de φ_H es $\omega(K[H])K[G]$, el ideal de aumentación de $K[H]$ en $K[G]$.

Sea A una K-álgebra, una representación $A \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V,V)$ se dice que es finita si V es de dimensión finita como K-espacio vectorial. La intersección de los núcleos de todas las representaciones finitas de A se denota por R(A). El radical finito f^*- R(A), siguiendo la notación de [8], es la intersección de los núcleos de todas las representaciones finitas e irreducibles de A. Es claro que $R(A) \subseteq f^*-R(A)$. En el caso de que todas las representaciones irreducibles sean finitas, el radical de Jacobson J(A) coincide con $f^*-R(A)$.

Sea $\mathcal{P}$ una propiedad de grupo. Un grupo G se llama residualmente $\mathcal{P}$ si para cada $1 \neq x \in G$ existe un subgrupo normal N_x tal que $x \notin N_x$ y G/N_x posee la propiedad $\mathcal{P}$. En otras palabras, G es producto subdirecto de grupos que poseen la propiedad $\mathcal{P}$. En un grupo G, se define el residuo R(G) como la intersección de todos los subgrupos normales de índice finito en G. Así, $R(G) = \langle 1 \rangle$ si y sólo si G es residualmente finito. Para cada entero $m \geq 1$, G^m es el subgrupo $\langle x^m : x \in G \rangle$. Es claro que $\bigcap_{m \geq 1} G^m \subseteq R(G)$. Si G es un grupo abeliano, es conocido que $\bigcap_{m \geq 1} G^m$, el primer subgrupo de Ulm de G, coincide con R(G); si además la p-torsión de G está acotada para cada primo p, entonces R(G) es un grupo divisible. Utilizaré libremente las siguientes propiedades inmediatas de R(G):

1. Si H es un subgrupo de G, entonces $R(G) \supseteq R(H)$.
2. Si G/H es residualmente finito, entonces $R(G) \subseteq H$.
3. Un producto de grupos residualmente finitos es residualmente finito.

I.1. El radical finito de $K[G]$.

Lema 1.1. (Wallace, [12]). Sea G un grupo residualmente finito y K un cuerpo. Entonces

$$\bigcap \omega(K[N])K[G] = (0),$$

donde la intersección se extiende a todos los subgrupos normales N de índice finito en G.

Lema 1.2. Sea K un cuerpo de característica cero. Entonces

$$R(K[G]) \subseteq f^{*}\text{-}R(K[G]) \subseteq \omega(K[R(G)])K[G] \text{ .}$$

Demostración. Supongamos primero que el grupo G es residualmente finito. Para cada subgrupo normal N de índice finito, sea $K[G] \longrightarrow K[G/N]$ la proyección natural. G/N es un grupo finito y puesto que K tiene característica cero, es bien conocido ([5], pag. 538) que $K[G/N]$ es semisimple, así $f^{*}\text{-}R(K[G/N]) = (0)$. Por tanto $f^{*}\text{-}R(K[G]) \leq \bigcap \omega(K[N])K[G]$. Se sigue del Lema 1.1 que $f^{*}\text{-}R(K G) = (0)$. Sea ahora G un grupo arbitrario. Entonces, $G/R(G)$ es residualmente finito y en consecuencia $f^{*}\text{-}R(K[G/R(G)]) = (0)$. Así $f^{*}\text{-}R(K[G]) \leq \omega(K[R(G)])K[G]$; puesto que, la primera inclusión del enunciado es obvia, el lema queda demostrado.

Dado un cuerpo K, se dice que el grupo G es K-lineal si, para algún entero $n \geq 1$, $G \subseteq GL(n,K)$; donde $GL(n,K)$ es el grupo de unidades del anillo de matrices $M(n,K)$ sobre K.

Sean: $\mathcal{G}_K$ la clase de los grupos K-lineales.
$\mathcal{R}_F$ la clase de los grupos residualmente finitos.

Con esta notación se tiene el siguiente

<u>Lema 1.3</u>. Sea K un cuerpo de característica cero. Supongamos que $\mathcal{C}$ es una clase de grupos cerrada por cocientes (si $G \in \mathcal{C}$ y N es un subgrupo normal de G, entonces $G/N \in \mathcal{C}$) tal que $\mathcal{C} \cap \mathcal{G}_K \subseteq \mathcal{R}_F$. Entonces, para cada $G \in \mathcal{C}$, se tiene

$$R(K[G]) = f^{*}\text{-}R(K[G]) = \omega(K[R(G)])K[G] .$$

Demostración. Teniendo en cuenta el Lema 1.2, basta probar una inclusión. Sea $x \in R(G)$ y $0 \neq \varphi : K[G] \longrightarrow M(n,K)$ una representación finita de $K[G]$, $\varphi(G) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{G}_K$ y, por hipótesis, $\varphi(G)$ es residualmente finito. Por tanto $\varphi(x) = 1$. El conjunto $\{ 1-x : x \in R(G)\}$ genera el ideal $\omega(K[R(G)])K[G]$. Así $\omega(K[R(G)])K[G] \subseteq R(K[G])$.

<u>Ejemplos de grupos que satisfacen el Lema 1.3</u>.

1. Los grupos finitamente generados(Mal'cev, [15] , Th.4.2).

2. Los grupos de torsión (si K=Q) ([15], Th. 9.33).

Corolario 1.4.

(1) (Passman [8]). Sea G un grupo finitamente generado y K un cuerpo de característica cero. Entonces, f^*-R(K[G]) = (0) si y sólo si G es residualmente finito.

(2) Sea G un grupo de torsión. Entonces, f^*-R(Q[G]) = (0) si y sólo si G es residualmente finito.

El resultado obtenido en el Lema 1.3 no es cierto para un clase de grupos arbitraria tal como se verá en ejemplos posteriores.

Un grupo G se dice que es un F.C. grupo si cada elemento de G tiene sólo un número finito de conjugados. Algunas propiedades de F.C. grupos pueden verse en ([10], pg. 81).

En el Teorema 1.5 utilizaré ([15], Cor 5.6) que los F.C. grupos K-lineales son extensión finita de su centro.

Teorema 1.5. Sea K un cuerpo de característica cero tal que los grupos multiplicativos de sus extensiones finitas son residualmente finitos y sea G un F.C. grupo. Entonces

$$f^*\text{-R}(K[G]) = \omega(K[R(G)])K[G].$$

Demostración. Sea $\varphi : K[G] \longrightarrow A$ una representación irreducible y finita de $K[G]$. $\varphi(G)$ es un F.C. grupo K-lineal y por tanto el centro de $\varphi(G)$, denotado por $Z_1(\varphi(G))$, tiene índice finito en $\varphi(G)$. Sea B la K-subálgebra de A generada por $Z_1(\varphi(G))$. Voy a demostrar que B es semisimple. En efecto, ya que B es central en $\varphi(K[G])$, se puede escribir

$$J(B)\varphi(K[G]) = \varphi(K[G])J(B);$$

puesto que A es una K-álgebra de dimensión finita, B también. Entonces $J(B)$ es un ideal de B nilpotente. Se deduce de la última igualdad que $J(B)\varphi(K[G])$ es un ideal nilpotente de $\varphi(K[G])$. $\varphi(K[G])$ es simple y por tanto, $J(B)\varphi(K[G]) = (0)$, así $J(B) = (0)$. Entonces, B es isomorfo con un producto de cuerpos $K_1 \times \ldots \times K_r$ que, obviamente, son de dimensión finita sobre K. Por hipótesis, los grupos $K_i^* = K_i - \{0\}$ son residualmente finitos. En particular, $Z_1(\varphi(G))$ es residualmente finito, ya que $Z_1(\varphi(G)) \subseteq K_1^* \times \ldots \times K_r^*$. Puesto que $[\varphi(G) : Z_1(\varphi(G))] < \infty$, $\varphi(G)$ es residualmente finito. La representación φ es una representación irreducible finita arbitraria y en consecuencia $\omega(K[R(G)])K[G] \subseteq f^*\text{-}R(K[G])$. La otra inclusión se sigue del Lema 1.2.

Es fácil demostrar que los cuerpos de generación finita sobre Q satisfacen las hipótesis del Teorema 1.5. Así se tiene

Corolario 1.6. Sea K un cuerpo de generación finita sobre Q y sea G un F.C. grupo. Entonces

$$f^{*}\text{-}R(K[G]) = \omega(K[R(G)])K[G].$$

Si se conoce la estructura de f^{*}-R(K[G]), también se conoce, a través del siguiente lema, la de cualquier extensión finita de G.

Lema 1.7. Sea H un subgrupo normal de G de índice finito. Sea K un cuerpo de característica cero. Entonces

$$f^{*}\text{-}R(K[G]) = f^{*}\text{-}R(K[H])K[G].$$

Para probar este lema basta sustituir en la demostración de ([9], Prop. 1.5) el Lema de Nakayama por el siguiente

Lema 1.8. Sea A una K-álgebra y $M \neq (0)$ un A- módulo por la izquierda de dimensión finita sobre K. Entonces

$$f^{*}\text{-}R(A)M \neq M.$$

Demostración. $M \neq (0)$ y M tiene dimensión finita sobre K, así puedo elegir un submódulo S maximal. Entonces $f^{*}\text{-}R(A)M/S = (0)$ y $f^{*}\text{-}R(A)M \subseteq S \neq M$.

Con objeto de eliminar alguna hipótesis en el Teorema 1.5, en [6] se planteó la siguiente cuestión: supongamos que el grupo multiplicativo K^* del cuerpo K es residualmente finito, entonces ¿conservan las extensiones finitas esta propiedad?. Ahora puedo contestar esta pregunta negativamente con el siguiente

Ejemplo 1.9. Sea para cada entero $n \geq 1$ el cuerpo $Q(\cos \pi/2^n)$ que denotaré por K_n. Claramente, se tiene

$$Q = K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n \subset K_{n+1} \subset \ldots$$

defino $K = \bigcup_{n \geq 1} K_n$. Voy a probar primero que K^* es un grupo residualmente finito. Nótese que todas las extensiones finitas de Q contenidas en K tienen grado una potencia de 2. Si K^* no es residualmente finito, existe $1 \neq a \in R(K^*)$. Entonces, para cada entero $m \geq 1$, la ecuación $x^m = a$ tiene solución en K. $a \in K_n$ para un cierto n. K_n es una extensión finita de Q y, por tanto, ([2], Th. 127.2) K_n^* es isomorfo a un producto de un grupo cíclico finito y un grupo libre. Así, el grupo $G = \bigcap_{p>2} (K_n^*)^p$, donde p es primo, es un grupo finito. Supóngamos que $a \in G$, entonces a tiene orden finito m. Si m es una potencia de 2, dado que $a \neq 1$, se tiene que $-1 \in R(K^*)$ y esto es absurdo, ya que la ecuación $x^2 = -1$ no tiene solución en K. Si m no es potencia de 2, sea p un primo > 2 tal que p/m. Elijo

$1 \neq b \in \langle a \rangle$ tal que $b^p = 1$. Como $b \in G$, existe $b_1 \in K_n$ tal que $b_1^p = b$. Así b_1 es una raiz p^2-ésima primitiva de la unidad. La extensión $Q(b_1)/Q$ tiene grado $p(p-1)$ que no es una potencia de 2, pues $p > 2$. Luego he demostrado que $a \notin G$ y por tanto que existe un primo $p > 2$ tal que la ecuación $x^p = a$ no tiene solución en K_n. Sea $a_1 \in K$ una raiz p-ésima de a. Entonces $\left(K_n(a_1) : K_n\right) = p$, lo cual es absurdo pues $p > 2$.

Considero la extensión de K, $L = K(i)$, donde $i^2 = -1$. Si $n = m.2^r$ con $(m,2) = 1$, se tiene

$$i = (\cos \pi/2^{r+1} + i \operatorname{sen} \pi/2^{r+1})^n \quad m = 1,5,9,\ldots$$

$$i = (\cos \pi/2^{r+1} + i \operatorname{sen} \pi/2^{r+1})^n \quad m = 3,7,11,\ldots$$

de la fórmula $2\cos \pi/2^{r+1} \operatorname{sen} \pi/2^{r+1} = \operatorname{sen} \pi/2^r$ se deduce que $\operatorname{sen} \pi/2^{r+1} \in L$ y, en consecuencia, la ecuación $x^n = i$ tiene solución en L para todo entero $n \geq 1$. Así $i \in R(L^*)$.

Realmente el Ejemplo 1.9 no es muy casual. Se tiene

<u>Proposición 1.10</u>. Sea K un cuerpo cuyo grupo multiplicativo es residualmente finito. Sea L/K una extensión de Galois finita y simple. Entonces, si $R_K(L)$ denota $R(L^*) \cap K$, se tiene

(1) si la característica de K es cero, entonces

$R_K(L) \neq \langle 1\rangle$, si y sólo si $L = K(i)$ y L contiene un subcuerpo isomorfo a $\bigcup_{n\geq 1} Q(\cos \pi/2^n)$.

(2) Si la característica de K no es cero, entonces $R_K(L) = \langle 1\rangle$.

Demostración. Supongamos que existe un elemento $a \in R_K(L)$, $a \neq 1$. Sean $x_n \in L$, $n = 1,2,\ldots,$ tales que $a = x_n^n$. Denoto por N la norma de L sobre K. Si $(L:K) = r$, se tiene que $a^r = N(x_n)^n$. Puesto que K^* es residualmente finito, necesariamente $a^r = 1$. Sea p un primo que divide a r y $b \in R_K(L)$ tal que $O(b) = p$. K^* es residualmente finito y por tanto, no contiene, para todo entero n, las raices p^n-ésimas primitivas de la unidad; así, puedo tomar el menor entero $\alpha \geq 1$ tal que $(K^*)^{p^\alpha}$ no posee elementos de orden p. Sea $x \in L$ tal que $b = x^{p^\alpha}$, como $O(b) = p$ se sigue que $x \notin K$. De la elección de α, se deduce que K contiene todas las raices p^α-ésimas de la unidad, así $x^p \in K$. Por tanto, la extensión $K(x)/K$ es cíclica y se tiene que $L = K(x)$, ya que L/K es simple. Además $r = p$. L contiene todas las raices p^n-ésimas de la unidad para todo n, luego $x^p \in R_K(L)$. Razonando igual como he hecho con el elemento a, se tiene que $x^{p^2} = 1$. Así $x^p = b$. Entonces se tiene que $1 = N(x) = (-1)^{p+1}\, b$. Ahora se dan dos casos

(a) si $p \neq 2$ entonces $b = 1$. Contradicción.

(b) Si $p = 2$ entonces $b = -1$, luego $L = K(i)$, con $i^2 = -1$. Como $-1 \in R_K(L)$, L contiene todas las raíces 2^n-ésimas de la unidad para todo n. Se puede probar que la característica de K es cero, el razonamiento es el mismo que ([5], pag. 267). Entonces es claro que L contiene un subgrupo isomorfo con $\bigcup_{n \geq 1} Q(\cos \pi/2^n)$. Reciprocamente, si L contiene un tal subcuerpo es claro que $R_K(L) \neq (1)$.

Ejemplo 1.11. Existen grupos tales que la afirmación del Teorema 1.5 es falsa. En efecto, si $n \geq 1$ basta tomar $G = GL(n,Q)$; la identidad $GL(n,Q) \longrightarrow GL(n,Q)$ induce una representación irreducible $Q[G] \longrightarrow M(n,Q)$. Si la fórmula del Teorema 1.5 fuese aplicable en este caso, se tendría que $R(G) = \langle 1 \rangle$ lo cual es absurdo.

Para terminar este apartado daré una sencilla proposición, módulo resultados de Mal'cev y Zassenhaus.

Proposición 1.12. Sea K un cuerpo de característica cero tal que los grupos multiplicativos de las extensiones finitas de K son residualmente finitos y sea G un grupo localmente resoluble (cada subgrupo finitamente generado es resoluble). Entonces

$$f^{*}\text{-}R(K[G]) = \omega(K[R(G)])K[G] \ .$$

Demostración. Sea G un grupo K-lineal $G \leq GL(n,K)$

localmente resoluble. El Teorema de Zassenhaus (Zassenhaus, [15], Th. 3.8) asegura que G es resoluble. G posee un subgrupo normal T, triangularizable y de índice finito (Mal'cev, [15], Th. 3.6). Si $K\{G\}$, la K-subálgebra de $M(n,K)$ generada por G, es semisimple, también lo es $K\{T\}$; ya que T normal en G. Por el mismo argumento resulta que $K\{T'\}$ es semisimple (T' es el conmutador de T), T' es un subgrupo de G unipotente ($1-x$ es nilpotente para todo $x \in T'$) y en consecuencia $T' = \langle 1 \rangle$. Entonces T es abeliano y, el anillo $K\{T\}$ es isomorfo a un producto de cuerpos L_i, de dimensión finita sobre K. Por hipótesis, cada L_i^* es residualmente finito y por tanto, T también. Puesto que $[G:T] < \infty$, G es residualmente finito. La demostración termina teniendo en cuenta el Lema 1.2.

I.2. R(K[G]).

Sea A un K-álgebra, entonces R(A) es la intersección de los núcleos de todas las representaciones finitas de A.

La estructura del radical finito, para las clases de grupos que se han tratado en I.1, se ha obtenido sin dificultad. Desgraciadamente no ocurre lo mismo con el R(K[G]).

El Teorema 2.2 que daré, respecto a R(K[G]), es una consecuencia sencilla del Teorema 2.3, pero la demostración del Teorema 2.2 es directa y una parte es constructiva.

Lema 2.1. Sean A y B K-álgebras y L una extensión de K. Entonces

(1) $R(L\otimes A) \subseteq L\otimes R(A)$.

(2) Si $R(A) = R(B) = (0)$, entonces $R(A\otimes B) = (0)$.

(Donde el producto tensorial está tomado sobre K).

Demostración.(1) Si $\alpha\in L\otimes A$, α se escribe de manera única como $\alpha = \sum_1^n e_i\otimes a_i$, donde los elementos $e_i\in L$ son K-linealmente independientes y $a_i\in A$. Sea $\varphi: A \longrightarrow M(n,K)$ una representación finita de A. se extiende de manera natural $\varphi^*: L\otimes A \longrightarrow M(n,L)$ en la cual $\alpha \longmapsto \sum_1^n e_i\,\varphi(a_i)$. Supongamos que $\alpha\in R(L\otimes A)$, entonces $0 = \varphi^*(\alpha) = \sum_1^n e_i\varphi(a_i)$. Como los coeficientes de las matrices $\varphi(a_i)$ son de K y los e_i son K-linealmente independientes, se deduce que $0 = \varphi(a_i)$, $1\leq i\leq n$. Dado que φ es una representación finita y arbitraria de A, se tiene que $a_i\in R(A)$ y por tanto $\alpha = \sum_1^n e_i\otimes a_i \in L\otimes R(A)$.

(2) Sea $\alpha = \sum_1^n a_i\otimes b_i$ tal que $0 \neq a_i\in A$ y, $b_i\in B$ son K-linealmente independientes. He de probar que $\alpha\notin R(A\otimes B)$. Para cada B-módulo W (por la izquierda) denoto por An(W) su anulador. Sea $\mathcal{M}$ la familia de todos los B-módulos (i) de dimensión finita sobre K. Por hipótesis, $R(B) = (0)$, que es decir $\bigcap_{W\in\mathcal{M}} An(W) = (0)$.

Entonces, existe un $W \in \mathcal{W}$ tal que $An(W) \cap \langle b_1, \ldots, b_n \rangle = (0)$. Defino $W_0 = Hom_K(W,W)$. W_0 es un B-módulo (i) de dimensión finita sobre K. Sea w_0 la identidad del anillo W_0. Entonces, los elementos $b_1 w_0, \ldots, b_n w_0$ son K-linealmente independientes. En efecto, si $\sum \mu_i b_i w_0 = 0$, se tiene que $(\sum \mu_i b_i w_0)(w) = 0$ para todo $w \in W$ y así $\sum \mu_i b_i w = 0$; es decir $\sum \mu_i b_i \in An(W)$. Se sigue de la elección de W que $\sum \mu_i b_i = 0$ y $\mu_i = 0$. Por otra parte $R(A) = (0)$ y, como $a_1 \neq 0$, existe un A-módulo (i) V, de dimensión finita sobre K, tal que $a_1 V \neq (0)$. Sea $v \in V$, con $a_1 v \neq 0$. $V \otimes W_0$ es un $A \otimes B$ módulo (i) de dimensión finita sobre K. Para demostrar que $\alpha \notin R(A \otimes B)$, basta ver que $\alpha(V \otimes W_0) \neq (0)$. Se tiene que $\alpha(v \otimes w_0) = \sum a_i v \otimes b_i w_0$. Puesto que $a_1 v \neq 0$ y los elementos $b_i w_0$ son K-independientes, necesariamente $\alpha(v \otimes w_0) \neq 0$.

Sea G un grupo. Denotaré por G^+ el conjunto de los elementos de G de orden finito. Si G es un F.C. grupo, es conocido ([10], pag. 81) que G^+ es un subgrupo normal de G y que G/G^+ es un grupo abeliano libre de torsión

Si $f: G \longrightarrow G'$ es un homomorfismo de grupos, $f^*: K[G] \longrightarrow K[G']$ será la extensión de f a los anillos de grupo.

<u>Teorema 2,2</u>. Sea K un cuerpo de generación finita sobre Q y sea G un F.C. grupo. Entonces

$$R(K[G]) = \omega(K[R(G)]^+)K[G].$$

Demostración. Procederé en varias etapas.

(1) Sea $G = Q^+$ (donde Q^+ denota el grupo aditivo de Q). En este caso $R(G)^+ = \langle 1 \rangle$ y por tanto tengo que demostrar que $R(K[G]) = (0)$. Del Lema 2.1 se tiene que $R(K[G]) \subseteq K \otimes R(Q[G])$, luego es suficiente demostrar que $R(Q[G]) = (0)$. Defino a tal efecto la familia de aplicaciones φ_n, $n = 1, 2, \ldots$ del siguiente modo

$$\varphi_n : Q \longrightarrow GL(n, Q)$$

$$x \longmapsto \begin{Vmatrix} 1 & & & & \\ \binom{x}{1} & 1 & & & \\ \binom{x}{2} & \binom{x}{1} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \binom{x}{n-1} & \binom{x}{n-2} \ldots & \binom{x}{n-i} & \ldots & 1 \end{Vmatrix}$$

es un cálculo probar que cada φ_n es un homomorfismo de grupos. Si $0 \neq x \in Q^+$, el polinomio mínimo de la matriz $\varphi_n(x)$ es $(X-1)^n$. Para demostrar que $R(Q[G]) = (0)$ basta ver que $\bigcap \operatorname{Ker} \varphi_n^* = (0)$. Sea $\alpha \in \bigcap \operatorname{Ker} \varphi_n^*$, entonces $\alpha = q_1 . x_1 + \ldots + q_n . x_n$ escrito en la forma usual, $q_i \in Q$ y $x_i \in Q^+$. Puesto que Q^+ es localmente cíclico,

puedo tomar un $x \in Q^{+}$ que genere el subgrupo $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$.
Si $x = 0$, entonces $\alpha = (\sum q_i).0$. Como que $1 \notin \bigcap \mathrm{Ker}\, \varphi_n^{*}$ es claro que $\sum q_i = 0$ y $\alpha = 0$. Supondré pues, que $x \neq 0$.
Para enteros convenientes $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ se tiene que $\alpha = q_1.\lambda_1 x + \ldots + q_n.\lambda_n x$. Considero la fracción racional $q(X) = \sum q_i X^{\lambda_i}$, multiplicando $q(X)$ por un conveniente X^{λ} puedo obtener un polinomio $p(X) = X^{\lambda} q(X)$. Sea m_0 el grado de $p(X)$. Como $\alpha \in \bigcap \mathrm{Ker}\, \varphi_n^{*}$, se tiene que $\varphi_m^{*}(\alpha) = 0$ para todo m y en particular para $m > m_0$. Entonces $0 = \varphi_m^{*}(\alpha) = \sum q_i\ \varphi_m(x)^{\lambda i}$. De ahí que $p(\varphi_m(x)) = 0$, pero el polinomio mínimo de $\varphi_m(x)$ es $(X-1)^m$ y como $m > m_0$ se deduce que $p(X) = 0$. En consecuencia $q_i = 0$ y $\alpha = 0$.
(2) Sea $G = \sum_I Q^{+}$. Como en (1) tengo que ver que $R(Q[G]) = (0)$. Sea $\alpha \in Q[\sum_I Q^{+}]$ y sea $J \subseteq I$ un subconjunto finito , sea por ejemplo $|J| = m$, tal que $\alpha = \sum_1^n q_i.x_i \in R(Q[\sum_J Q^{+}])$. Sea $\pi : \sum_I Q \longrightarrow \sum_J Q$ la proyección natural. Entonces $\pi(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, tiene una expresión del tipo $\pi(x_i) = (x_{i_1},\ldots,x_{i_m})$. Sea $e_{ij} = \pi(x_i) - \pi(x_j)$, para $i \neq j$, $1 \leq i,j \leq n$. Claramente $e_{ij} \neq 0$. Por tanto, existe un hiperplano de Q^m que no contiene ningún e_{ij}.
En otras palabras, existen $\lambda_1,\ldots,\lambda_m \in Q$ tales que los números $\bar{x}_i = \sum_1^m \lambda_j x_{ij}$, $1 \leq i \leq n$, son todos distintos. Defino $\omega : \sum_J Q^{+} \longrightarrow Q^{+}$ por $\omega(y_1,\ldots,y_m) = \sum_1^m \lambda_i y_i$.

Si ahora se supone que $\alpha \in R(Q[\sum_I Q^+])$, se tiene que $(\omega^+\Pi^+)(\alpha) \in R(Q[Q^+])$ y, por (1), $(\omega^+\Pi^+)(\alpha) = (0)$. Entonces $0 = (\omega^+\Pi^+)(\alpha) = q_1.\bar{x}_1 + \dots + q_n.\bar{x}_n$. Por construcción los elementos $\bar{x}_i$ son todos distintos, luego $q_i = 0$ y $\alpha = 0$.

(3) Sea G un F.C. grupo. Supongamos primero que G es libre de torsión. Entonces G es abeliano. Por tanto $G \subseteq \sum_I Q$, para un conjunto conveniente de índices I. Como $R(K[G]) \subseteq R(K[\sum_I Q])$, se sigue de (2) que $R(K[G]) = (0)$. Sea ahora G un F.C. grupo arbitrario. Se tiene

$$K[G/R(G)^+] \hookrightarrow K[G/R(G)\times G/G^+] \cong K[G/R(G)] \otimes K[G/G^+].$$

Del Lema 2.1 (2) se deduce que $R(K[G/R(G)^+]) = (0)$ y así $R(K[G]) \subseteq \omega(K[R(G)^+])K[G]$. Para demostrar la otra inclusión es suficiente probar que el residuo de un F. C. grupo K-lineal es libre de torsión. Supongamos pues, que G es un F.C. grupo K-lineal. Entonces G es extensión finita de su centro $Z_1(G)$. Así

$$R(G) = R(Z_1(G)) = \bigcap_{n\geq 1} Z_1(G)^n$$

y tomando torsiones

$$R(G)^+ = R(Z_1(G))^+ = \Big(\bigcap_{n\geq 1} Z_1(G)^n\Big)^+ = \bigcap_{n\geq 1} (Z_1(G)^+)^n =$$
$$= R(Z_1(G)^+).$$

Es conocido ([15], Th.9.33) que un grupo K-lineal de torsión(K es un cuerpo de generación finita sobre Q) es finito. Entonces $R(Z_1(G)^+) = \langle 1 \rangle$ y en consecuencia,

$R(G)^+ = \langle 1 \rangle$.

El siguiente teorema lo debo a Passman y es fundamental en la teoría del $R(K[G])$.

Necesito un lema que es una modificación del lema ([10], pg. 129).

<u>Lema 2.3</u>. Sean $\varphi_1 : K[G] \longrightarrow A$, $\varphi_2 : K[G] \longrightarrow B$ homomorfismos de K-álgebras y sean n,m dos enteros positivos. Sea C un subconjunto de G. Supongamos que la imagen por φ_1 de cada subconjunto de C de cardinal $\leq$ n es K-linealmente independiente y que cada subconjunto de C de cardinal $\leq m$ tiene la misma propiedad para φ_2. Entonces la imagen por $\varphi_1 \otimes \varphi_2 : K[G] \longrightarrow A \otimes B$ de cada subconjunto de C de cardinal $\leq n + m - 1$ es K-linealmente independiente.

<u>Teorema 2.4</u>. Sea $K[G]$ un anillo de grupo arbitrario. Sea H la intersección de los núcleos de todos los homomorfismos de G en grupos K-lineales. Entonces

$$R(K[G]) = \omega(K[H])K[G].$$

Demostración. Es claro que $\omega(K[H])K[G] \subseteq R(K[G])$. Para demostrar la otra inclusión puedo suponer que $H = \langle 1 \rangle$ y ver que $R(K[G]) = (0)$. Sea $\alpha = \sum c_x . x \in K[G]$, $\alpha \neq 0$. Como que $H = \langle 1 \rangle$, existe un homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow GL(n,K)$ para algún n, con $\varphi(xy^{-1}) \neq 1$, para todo $x,y \in \mathrm{sop}\, \alpha$ (soporte de α) $x \neq y$. Puedo suponer además que para $x \neq y$, $\varphi(xy^{-1})$ no es una homotecia (esto se puede conseguir incluyendo $GL(n,K)$ en $GL(n+1, K)$ a traves del ángulo izquierdo superior). Entonces, si $x \neq y$ el conjunto $\{\varphi(x), \varphi(y)\}$ es K-linealmente independiente en $M(n,K)$. Tomo en el Lema 2.3 $C = \text{sop}\,\alpha$ y $|C| = t$. Así el homomorfismo $\sigma = \varphi^{*} \otimes \overset{t}{\ldots} \otimes \varphi^{*} : K[G] \longrightarrow M(n^t,K)$ es tal que el conjunto $\{\sigma(x) : x \in \text{sop}\,\alpha\}$ es K-linealmente independiente. Entonces si $\alpha \neq 0$ es claro que $\sigma(\alpha) \neq 0$ y $\alpha \notin R(K[G])$.

Recordemos que G es residualmente K-lineal si para cada $1 \neq x \in G$ existe un homomorfismo $\varphi: G \longrightarrow GL(n,K)$ tal que $\varphi(x) \neq 1$.

Corolario 2.5. Sea $K[G]$ un anillo de grupo. Entonces $R(K[G]) = (0)$ si y sólo si G es residualmente K-lineal.

No es conocido cuándo un grupo G es residualmente K-lineal, para un cuerpo K arbitrario. Si G es finitamente generado, es conocido (Mal´cev, [15], Th.4.2) que es lo mismo decir "residualmente lineal" que "residualmente finito". En el capítulo II estudio este problema para grupos nilpotentes.

Un grupo G se dice que es radicable si para cada $a \in G$ y para cada entero $n \geq 1$, la ecuación $x^n = a$ tiene solución en G. B.H. Neumann [4] demostró que un grupo arbitrario puede sumergirse en un grupo radicable.

Teorema 2.6. Sea K una extensión finita de un cuerpo puramente trascendente sobre el cuerpo primo P. Sea G un grupo radicable. Entonces

(1) si G es residualmente K-lineal, necesariamente G es residualmente nilpotente y libre de torsión.

(2) f^*-R(K[G]) = ω(K[G]).

Demostración. (1) Podemos suponer, obviamente, que G es K-lineal, $G \subseteq GL(m,K)$. Sea $g \in G$, denoto por $P_g(X)$ el polinomio característico de la matriz g. En una clausura algebraica $\overline{K}$ de K se tiene que $P_g(X) = \prod_1^m (X-\alpha_i)$. Para cada α_i y para cada entero n fijo un elemento $\beta_{in} \in K$ que cumple

$$(a)\ \beta_{in}^n = \alpha_i \qquad (b)\quad P_{g^{1/n}}(X) = \prod_1^m (X-\beta_{in})$$

es claro, también, que $(K(\beta_{in}): K) \leq m$. Para demostrar que G es nilpotente, basta probar que G es unipotente ([15], Cor. 1.21). Así, he de ver que $\alpha_i = 1$. Procederé en varias etapas.

(i) α_i es algebraico sobre P. Si éste no es el caso, sea por ejemplo α_1 trascendente sobre P. Entonces $(P(\beta_{1n}): P(\alpha_1)) = n$. Sea $L = K(\alpha_1)$. Por hipótesis, podemos tomar una base de trascendencia S con $\alpha_1 \in S$ y tal que $(L: L_t) < \infty$, siendo $L_t = P(S)$. Dado que L_t y $P(\beta_{1n})$, para cada n, son extensiones de $P(\alpha_1)$ linealmente disjuntas sobre $P(\alpha_1)$, se tiene que

$$n \leq (K(\beta_{1n}):L_t) = (K(\beta_{1n}): L)(L:L_t) \leq m(L:L_t)$$

y, para n suficientemente grande, la relación anterior es falsa.

(ii) α_i es raíz de la unidad. Si P es finito el resultado se deduce de (i). Supongamos, pues, que $P = Q$. Sea K_t una extensión trascendente pura de Q tal que $(K:K_t)<\infty$. Sea L la clausura algebraica de Q en K, resulta que $(L:Q)<\infty$, ya que L y K_t son linealmente disjuntos sobre Q y $(K:K_t)<\infty$. Si $x \in G$ es una raíz de la matriz g, se deduce de (i) que $P_x(X) \in L[X]$. Supongamos que α_1 no es una raíz de la unidad. $L(\alpha_1)$ es una extensión finita de Q, luego $\bigcap_{p>m} L(\alpha_1)^p$, para p primo, es un grupo finito; así, existe $p>m$ tal que $\alpha_1 \notin L(\alpha_1)^p$. Entonces $(L(\beta_{1p}):L(\alpha_1))= p$, pero esto es contradictorio, ya que $(L(\beta_{1p}): L) \leq m$.

(iii) $\alpha_i = 1$. Supongamos que $\alpha_1 \neq 1$. Sea L como en (ii). Se tiene

$$m \geq (L(\beta_{1n}): L) \geq (P(\beta_{1n}): P)/ (L: P) ,$$

para n suficientemente grande el segundo miembro no puede ser inferior o igual que m.

Los grupos unipotentes en característica cero son libres de torsión. Si la característica de K es $p>0$, sea $p^n \geq m$. Entonces, para todo $x \in G$, se tiene que $0 = (1- x)^{p^n} = 1- x^{p^n}$. En consecuencia, G es un grupo de torsión acotada y puesto que es radicable, necesariamente $G = \langle 1 \rangle$.

(b) Sea φ una representación irreducible finita de $K[G]$. Entonces $\varphi(\omega(K[G]))$ está generado, como K-espacio vectorial, por los elementos de la forma $1 - \varphi(x)$, $x \in G$. $\varphi(G)$ es unipotente y por tanto $\varphi(\omega(K[G]))$ es un ideal de $\varphi(K[G])$ nilpotente; dado que $\varphi(K[G])$ es simple, se tiene que $\varphi(\omega(K[G])) = (0)$ y así $\omega(K[G]) \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$. Entonces $\omega(K[G]) \subseteq f^{*}\text{-}R(K[G])$; Pero $\omega(K[G])$ es un ideal maximal, por tanto $f^{*}\text{-}R(K[G]) = \omega(K[G])$.

La condición necesaria del Teorema 2.6 (1) no es suficiente; es decir, existen grupos nilpotentes libres de torsión que no son residualmente K-lineales para ningún cuerpo K. Un ejemplo de este fenómeno es el Ejemplo 5.10 de [13] . A continuación voy a dar otro ejemplo cuya idea debo a Passman.

Para cada conjunto de índices $I \neq \emptyset$, sea $G(I)$ el grupo generado por los elementos x_i, y_i, z $(i \in I)$ con las relaciones

$$[x_i, y_i] = z \ , \ [x_i, y_j] = 1 \text{ si } i \neq j \ , \ z \text{ central en } G(I).$$

$G(I)$ es un grupo nilpotente de clase 2, libre de torsión y centro $\langle z \rangle$.

Proposición 2.7. El grupo $G(I)$ es residualmente K-lineal, para algún cuerpo K, si y sólo si I es un conjunto finito.

Demostración. Es conocido (Hirsch, [3]) que un grupo nilpotente finitamente generado es residualmente finito. Entonces, si I es finito, $G(I)$ es residualmente finito y, por tanto, residualmente K-lineal para cualquier cuerpo K. Supongamos que I es infinito y que $G(I)$ es un grupo residualmente K-lineal para un cierto cuerpo K. Sea $\varphi : G(I) \longrightarrow GL(n,K)$ un homomorfismo en el cual $z \longmapsto \bar{z} \neq \bar{1}$. Si $\bar{z}$ tiene orden finito; resulta que $\overline{G(I)}$ es un F.C. grupo K-lineal, entonces $[\overline{G(I)} : Z_1(\overline{G(I)})] < \infty$. Puesto que I es infinito, existen $i, j \in I$ distintos tales que $\bar{y}_j\bar{y}_i^{-1} \in Z_1(\overline{G(I)})$ y así $\bar{1} = [\bar{x}_j, \bar{y}_j\bar{y}_i^{-1}] = \bar{z}$, lo cual es contradictorio. Por tanto $\bar{z}$ no tiene orden finito, en consecuencia $\operatorname{Ker}\varphi \cap Z_1(G(I)) = \langle 1 \rangle$. Un subgrupo normal de un grupo nilpotente que interseca al centro trivialmente es necesariamente el subgrupo trivial ([13]), en consecuencia $\operatorname{Ker}\varphi = \langle 1 \rangle$ y φ es un monomorfismo. G es, pues, K-lineal. Puedo suponer que $G \leq M(n,K)$. Voy a probar que el conjunto $\{x_i : i \in I\}$ es K-linealmente independiente; esto será una contradicción, ya que I es infinito. Si $\sum_{k=1}^{n} f_k x_{i_k} = 0$; $f_k \in K$, $i_k \in I$, entonces

$$0 = \sum f_k (x_{i_k} y_{i_1} - y_{i_1} x_{i_k})$$

y teniendo en cuenta las relaciones de $G(I)$, se obtiene

$$0 = f_1(x_{i_1} y_{i_1} - y_{i_1} x_{i_1})$$

puesto que $x_{i_1} y_{i_1} \neq y_{i_1} x_{i_1}$, se sigue que $f_1 = 0$. Análogamente, $f_i = 0$.

I.3. Ejemplos de representaciones de grupos nilpotentes de clase 2.

En este apartado construiré algunos ejemplos de grupos nilpotentes de clase 2. Es bien conocido [13] que los grupos nilpotentes de clase ≤ 2 son las extensiones centrales de grupos abelianos. En [13] se estudian las extensiones centrales usando formas bilineales alternadas, idea original de Baer. En particular, en [13] se dan resultados, debidos a G. Mislin, sobre extensiones centrales de grupos cíclicos de orden primo por un grupo abeliano libre. Yo consideraré extensiones centrales de Q-espacios vectoriales por Q-espacios vectoriales, es decir grupos nilpotentes de clase ≤ 2 radicables y libres de torsión (grupos 0-locales). Empezaré con algunas definiciones.

El rango de un grupo abeliano es el menor entero r con la propiedad de que cualquier subgrupo finitamente generado puede estar generado por r elementos. Sea G un grupo nilpotente y $\langle 1 \rangle = Z_0(G) \subseteq Z_1(G) \subseteq \ldots \subseteq Z_n(G)$

la serie central superior de G; para cada $1 \leq i \leq n$ sea r_i el rango del grupo abeliano $Z_i(G)/Z_{i-1}(G)$. El rango de G, r(G), es el número $\sum_1^n r_i$.

Sea K un cuerpo y sea E un K-espacio vectorial de dimensión finita. Si E está provisto de m formas bilineales alternadas $f_i : E \times E \longrightarrow K$, escribiré $(E;\ f_1,\ldots,f_m)$. Diré que $(\bar{E};\ \bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_m)$ es una extensión de $(E;\ f_1,\ldots,f_m)$ si $E \hookrightarrow \bar{E}$ y $\bar{f}_i/E \times E = f_i$ para $1 \leq i \leq m$. Si $f : E \times E \longrightarrow K$ es una forma bilineal alternada, denotaré por $r_f(E)$ el radical de E respecto de f, es decir $r_f(E) = \{x \in E : f(x,y) = 0$ para todo $y \in E\}$; f es no degenerada si $r_f(E) = (0)$. Si se tiene $(E;\ f_1,\ldots,f_m)$ tal que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_m$ y $r_{f_i}(E) \supseteq E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus \widehat{E_i} \oplus \ldots \oplus E_m$ para $1 \leq i \leq m$, escribiré

$$(E;\ f_1,\ldots,f_m) = (E_1;\ f_1) \perp \ldots \perp (E_m;\ f_m).$$

Con la notación anterior se tiene

<u>Proposición 3.1</u>. Dado el espacio $(E;\ f_1,\ldots,f_m)$, $f_i \neq 0$ $1 \leq i \leq m$, tal que $\bigcap r_{f_i}(E) = (0)$, existe una extensión $(\bar{E};\ \bar{f}_1\ldots\bar{f}_m)$ tal que

$$(\bar{E};\ \bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_m) = (\bar{E}_1;\ \bar{f}_1) \perp \ldots \perp (\bar{E}_m;\ \bar{f}_m)$$

y cada forma $\bar{f}_i$ es no degenerada sobre $\bar{E}_i$.

Demostración. Por inducción sobre m. Si $m = 1$, el resultado es claro. Supongo, pues, que $m > 1$. Sea $e_1, \dots, e_n$ una base de E. Sea V un K-espacio vectorial de modo que $E \subset V$ y V tiene una base $v_{i1}, \dots, v_{im}$ $1 \leq i \leq n$, tal que $e_i = \sum_1^m v_{ij}$. Defino en V las formas $g_1, \dots, g_m$ del siguiente modo

$$g_i(v_{kj}, v_{st}) = \begin{cases} f_i(e_k, e_s) & \text{si } i = j = t \\ 0 & \text{en caso contrario;} \end{cases}$$

es inmediato verificar que $(V; g_1, \dots, g_m)$ es una extensión de $(E; f_1, \dots, f_m)$. Denotando por V_1 a $\bigcap_2^m r_{g_i}(V)$, resulta que $V = V_1 + r_{g_1}(V)$. Sea $V_o = V_1 \cap r_{g_1}(V)$; entonces, por hipótesis, $V_o \cap E = (0)$. Por lo tanto, $(V/V_o; g_1, \dots, g_m)$ es una extensión de $(E; f_1, \dots f_m)$. Por construcción se tiene que

$$(V/V_o;\ g_1, \dots, g_m) = (V_1/V_o;\ g_1) \perp (r_{g_1}(V)/V_o;\ g_2, \dots, g_m)$$

y, claramente, $\bigcap_2^m r_{g_i}(r_{g_1}(V)/V_o) = (0)$. Por hipótesis de inducción existe una extensión $(W; \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_m)$ de $(r_{g_1}(V)/V_o; g_2, \dots, g_m)$ tal que

$$(W;\ \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_m) = (\bar{E}_2;\ \bar{g}_2) \perp \dots \perp (\bar{E}_m;\ \bar{g}_m)$$

y cada $\bar{g}_i$, $2 \leq i \leq m$, es no degenerada sobre $\bar{E}_i$. Defino

$\bar{E} = \bar{E}_1 \times W$ tomando $\bar{E}_1 = V_1/V_o$ y las formas $\bar{f}_i$ sobre $\bar{E}$ definidas por

$$W \subseteq r_{\bar{f}_1}(\bar{E}) \ , \quad \bar{f}_1/\bar{E}_1 \times \bar{E}_1 = g_1$$

$$\bar{E}_1 \subseteq r_{\bar{f}_i}(E) \ , \quad \bar{f}_i/W \times W = \bar{g}_i \qquad 2 \leq i \leq m \ .$$

$(\bar{E}; \bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_m)$ es una extensión de $(E; f_1,\ldots,f_m)$ que cumple las condiciones de la proposición.

En lo que sigue todos los espacios serán Q -espacios vectoriales de dimensión finita y utilizaré, por comodidad, notación multiplicativa.

A cada espacio $(E; f_1,\ldots,f_m)$ se le puede asociar un grupo $G(E)$ del siguiente modo: Sea F un Q -espacio vectorial de dimensión m y sea $z_1,\ldots,z_m$ una base; entonces, $G(E)$ es una extensión central de F por E

$$\begin{array}{l} 1 \longrightarrow F \longrightarrow G(E) \longrightarrow E \longrightarrow 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x \longmapsto \bar{x} \end{array}$$

tal que $[x,y] = \prod_1^m z_k^{f_k(\bar{x},\bar{y})}$, para todo $x,y \in G(E)$. Al elegir distintas bases de F los grupos $G(E)$ que se obtienen son isomorfos. $G(E)$ es un grupo nilpotente de clase ≤ 2 radicable y libre de torsión. Si $\bigcap_1^m r_{f_i}(E) = (0)$, el centro de $G(E)$ es exactamente F. Si $(\bar{E}; \bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_m)$ es una extensión de $(E; f_1,\ldots,f_m)$, entonces $G(\bar{E})$ es una extensión de $G(E)$.

Ejemplo 3.2. Voy a ver cual es el grupo $G(E)$ asociado al espacio $(E; f)$.

(1) Sea $r_f(E) = (0)$. Entonces, existe una base x_i, y_i de E tal que, en esta base, f tiene una matriz del tipo

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{Vmatrix} .$$

El grupo $G(E)$ es, salvo isomorfismos, la completación radicable (racionalización) del grupo dado por las relaciones

$$[x_i, x_j] = [y_i, y_j] = 1 \ , \ [x_i, y_j] = 1 \text{ si } i \neq j,$$

$$[x_i, y_i] = z \ , \ z \text{ central en } G(E),$$

donde $1 \leq i, j \leq h$, siendo $2h = \dim_Q E$. Denotaré a este grupo $G(E)$ por $G(h)$.

(2) Sea $r_f(E) = E_0$. E descompone en suma directa ortogonal $E = E_0 \perp E_1$. Si $\dim E_0 = n$ y $\dim E_1 = 2h$, entonces

$$G(E) \cong Q^n \times G(h).$$

Sea ahora G un grupo nilpotente de clase 2 0-local y de rango finito tal que $Z_1(G) = \Gamma_2(G)$. Sea $z_1,\ldots,z_m$ una Q-base de $\Gamma_2(G)$. Si E denota a $G/Z_1(G)$, E es un Q-espacio vectorial. Sea $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$ una base de E y $x_1,\ldots,x_n$ representantes en G, se tiene que

$$[x_i,x_j] = \prod_1^m z_k^{f_k(\bar{x}_i,\bar{x}_j)}$$

donde las funciones $f_k: E \times E \longrightarrow Q$ son formas bilineales alternadas sobre E. El grupo $G(E)$ asociado al espacio $(E;\ f_1,\ldots,f_m)$ es el grupo G. Puesto que $Z_1(G) = \Gamma_2(G)$, se tiene que $\bigcap_1^m r_{f_i}(E) = (0)$ y $f_i \neq 0$. Se sigue de la Proposición 3.1 que existe una extensión $(\bar{E};\ \bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_m)$ de $(E;\ f_1,\ldots,f_m)$, tal que

$$(\bar{E};\ \bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_m) = (\bar{E}_1;\ \bar{f}_1)\perp \ldots \perp(\bar{E}_m;\ \bar{f}_m)$$

y cada $\bar{f}_i$ es no degenerada sobre $\bar{E}_i$. Entonces

$$G(\bar{E}) \cong G(\bar{E}_1) \times \ldots \times G(\bar{E}_m).$$

Sea π_i la proyección de $G(E)$ sobre cada $G(\bar{E}_i)$. Se deduce del Ejemplo 3.2 que $\pi_i(G(E))$ es un producto directo de un grupo abeliano y un grupo del tipo $G(h_i)$. Sea $\varepsilon_i: \pi_i(G(E)) \longrightarrow G(h_i)$ la proyección canónica. Entonces se tiene un homomorfismo

$$\varepsilon = \prod \varepsilon_i \pi_i : G(E) \longrightarrow \prod_1^m G(h_i)$$

y puesto que $\operatorname{Ker}\varepsilon \cap Z_1(G(E)) = \langle 1\rangle$, resulta que

$\mathrm{Ker}\ \varepsilon = \langle 1 \rangle$ y ε es un monomorfismo; es más, $G(E)$ es un producto subdirecto de grupos $G(h_i)$. Obsérvese que $m = r(\Gamma_2(G(E)))$.

Ahora puedo probar fácilmente la siguiente

<u>Proposición 3.3</u>. Sea G un grupo nilpotente de clase ≤ 2 libre de torsión y de rango finito. Entonces G_0, la racionalización de G, es un producto subdirecto de $A \times \prod_1^m G(h_i)$, donde A es un grupo abeliano divisible y $m = r(\Gamma_2(G))$.

Demostración. Puesto que $r(\Gamma_2(G)) = r(\Gamma_2(G_0))$, puedo tomar $G = G_0$ para la demostración. Sea $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$ una base de $G/Z_1(G)$ y $x_1,\ldots,x_n$ representantes en G. Defino $G_1 = \langle x_1,\ldots,x_n, \Gamma_2(G)\rangle_0$. Si A es un complementario de $\Gamma_2(G)$ en $Z_1(G)$, se tiene que $G = A \times G_1$. Entonces $Z_1(G_1) = \Gamma_2(G)$, y por tanto G_1 es un producto subdirecto $\prod_1^m G(h_i)$.

Es bien conocido ([15], pg.25) que un grupo nilpotente de rango finito y libre de torsión es Q-lineal. El siguiente corolario da una cota del grado de dicha representación en el caso de grupos nilpotentes de clase ≤ 2.

Observaré, primero, que un grupo del tipo $G(h)$ tiene una Q-representación fiel de grado $h+2$.

Sean $e_{ij} \in GL(2+h, Q)$ las matrices con 1 en la diagonal y ceros en las demás componentes salvo la (i,j) que vale 1. Sea G el grupo

$$G = \langle e_{i+1,1}, e_{h+2,i+1}, e_{h+2,1} \; ; 1 \leq i \leq h \rangle ;$$

entonces $G_o = G(h) \subset Tr_1(h+2, Q)$.

<u>Corolario 3.4</u>. Sea G un grupo nilpotente de clase ≤ 2 y libre de torsión. Sean $n = r(G)$, $m = r(\Gamma_2(G))$ y $m+p = r(Z_1(G))$. Entonces G es un grupo Q -lineal de grado $\leq m([n-(p+m)/2]+2)+2p$. ($[\;\;]$ indica la parte entera.

Demostración. Es bien conocido que $\Gamma_2(G_o) = \Gamma_2(G)_o$ y puesto que G es libre de torsión, también $Z_1(G_o) = Z_1(G)_o$, así pues, al racionalizar G no cambian los rangos considerados en las hipótesis. Puedo suponer, por tanto, que $G = G_o$. Teniendo en cuenta la Proposición 3.3 $G = A \times G_1$ donde A es un grupo abeliano divisible de rango p. A es isomorfo al grupo

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & & & \\ Q & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & Q & 1 \end{matrix} \right\| \subset GL(2p, Q).$$

Por otra parte G_1 es un producto subdirecto $\prod_1^m G(h_i)$ y $\Gamma_2(G_1) = \Gamma_2(G)$. La proyección natural $\Pi_i : G_1 \longrightarrow G(h_i)$

induce $G_1/\Gamma_2(G_1) \longrightarrow G(h_i)/\Gamma_2(G(h_i)) \cong Q^{2h_i}$. En consecuencia $(n-p)-m \geq 2h_i$. $G(h_i)$ posee una representación fiel en $GL(h_i+2,Q)$ y, por tanto, G_1 tiene una representación Q-lineal fiel de grado
$\leq m([n-(p+m)/2] + 2) + 2p$.

Finalmente, daré algunos ejemplos de grupos nilpotentes de clase 2 que son residualmente finitos.

Sea V un Z-módulo libre y $f: V \times V \longrightarrow Z$ una forma Z-bilineal alternada. Supongamos que existe una Z-base $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} = \{x_i : i \in I\}$, de V tal que si $x_i, x_j \in \mathcal{B}$ entonces $|f(x_i,x_j)| \leq n$, para un entero n fijo. Sea G el grupo nilpotente de clase ≤ 2 asociado a la terna (Z, V, f). Es decir, G está generado por los elementos de $\mathcal{B}$ y z; con las relaciones $[x_i,x_j] = z^{f(x_i,x_j)}$, z central en G.

<u>Proposición 3.5</u>. Con la notación anterior, G es residualmente finito si y sólo si $G \hookrightarrow A \times N$; donde A es un grupo abeliano residualmente finito y N es finitamente generado.

Demostración. Sea H un grupo residualmente finito y F un subgrupo normal finito. Entonces H/F es también residualmente finito; en efecto, sea $\mathcal{N}$ la familia de todos los subgrupos normales de H de índice finito. Por hipótesis $\bigcap_{\mathcal{N}} N = \langle 1 \rangle$. Para demostrar que H/F es residualmente finito es suficiente ver que $\bigcap NF = F$.

Trivialmente $F \subseteq \bigcap NF$. Recíprocamente, si $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ y $a \notin F$, existen subgrupos $N_i \in \mathcal{N}$ tales que $af_i^{-1} \notin N_i$ para $1 \leq i \leq m$. Si N_0 denota a $\bigcap N_i$, $N_0 \in \mathcal{N}$ y $a \notin N_0F$. Por tanto $a \notin \bigcap NF$.

Voy ahora a demostrar la proposición. Primero supondré que $\langle z \rangle$ es finito. $\Gamma_2(G) \subseteq \langle z \rangle$, luego $\Gamma_2(G)$ es finito. Puesto que G es residualmente finito, podemos tomar un subgrupo normal N_0 de índice finito tal que $N_0 \cap \Gamma_2(G) = \langle 1 \rangle$. Entonces $G \hookrightarrow G/\Gamma_2(G) \times G/N_0$. El resultado se sigue, teniendo en cuenta lo demostrado en el párrafo anterior. Si $\langle z \rangle$ es infinito, considero $Z^{\beta} = \prod_{\beta \ni x_i} Z_i$ donde $Z_i = \langle z \rangle \cong Z$. Defino la aplicación

$$F: \beta \longrightarrow Z^{\beta}$$
$$x \longmapsto (f(x,x_i))_{x_i \in \beta}$$

y voy a probar que el conjunto $F(\beta)$ es finito. Por contradicción, sea $y_1, y_2, \ldots$ una sucesión de elementos de β tales que $F(y_1), F(y_2), \ldots$ son todos distintos. Sea N un subgrupo normal de índice finito en G tal que $N \cap \langle z \rangle = \langle z^s \rangle$, con $s > 2n$; esto es posible por ser G residualmente finito. Puesto que G/N es finito, existen elementos y_i, y_j $i \neq j$ tales que $y_j \in Ny_i$. Dado que $F(y_i) \neq F(y_j)$, existe $x_t \in \beta$ verificando $f(y_i,x_t) \neq f(y_j,x_t)$. Entonces, se tiene que

$$[x_t, y_i y_j^{-1}] = z^{f(x_t,y_i)-f(x_t,y_j)},$$

puesto que $[x_t, y_i y_j^{-1}] \in N$ y $|f(x_t,y_i) - f(x_t,y_j)| \leq 2n < s$, se tiene que z es de torsión. Sea, pues, $F(\beta) = \{F(x_1),\ldots,F(x_u)\}$ con $|F(\beta)| = u < \infty$. Para cada $x_i \in \beta$ sea $1 \leq h_i \leq u$ tal que $F(x_i) = F(x_{h_i})$. Defino A como el Z-módulo de V generado por el conjunto $\{ x_i x_{h_i}^{-1} : x_i \in \beta\}$, es claro que $V = A \times \langle x_1,\ldots,x_u\rangle$. Puesto que $A \leq r_f(V)$, se obtiene un isomorfismo $G \cong A \times N$, donde $N = \langle x_1,\ldots,x_u, z\rangle$. lo que termina la demostración.

Obsérvese que, si G satisface las condiciones de la Proposición 3.5, y además su centro es cíclico, entonces G es finitamente generado y, en particular, numerable. En general, si G es nilpotente y su centro es numerable, el hecho que G sea residualmente finito implica que $|G| \leq \aleph_1$. El siguiente ejemplo demuestra que el caso $|G| = \aleph_1$ puede darse.

<u>Ejemplo 3.6</u>. Sean $H = \prod_1^\infty \langle x_i\rangle$ $(\langle x_i\rangle \cong Z)$ y L el grupo abeliano libre generado por $z, y_1, y_2, \ldots$. Defino $G = L \times_\sigma H$ (producto semidirecto) por las relaciones $[\prod_1^\infty x_i^{\,i}, y_k] = z^{2^k \alpha_k}$ $(k = 1,2,\ldots)$, z central. Se comprueba que $Z_1(G) = \langle z\rangle$. Para cada $n \geq 1$, R_n denota el subgrupo $\langle \prod_1^\infty x_i^{\,i}, \alpha_i = 0$ si $1 \leq i \leq n$, $y_{n+1}, y_{n+2},\ldots\rangle$. Entonces, $R_n \cap \langle z\rangle = \langle z\rangle^{2^{n+1}}$ y $\bigcap R_n = \langle 1\rangle$. Dado que R_n es normal, G/R_n es finitamente generado y así residualmente finito. G es residualmente finito, ya que $G \hookrightarrow G/R_n$.

Capítulo II

CARACTER RESIDUALMENTE LINEAL DE GRUPOS NILPOTENTES

En [7] se estudian las relaciones que existen entre el carácter residualmente lineal y residualmente finito. En este capítulo generalizo los resultados de [7] .

Empezaré dando notación. Los símbolos $\Gamma_n(G)$ y $Z_n(G)$ designan los términos de la serie central inferior y superior de G. Si X es un subconjunto de G se denota por $C_G(X)$, su centralizador, que es $x \in C_G(X)$ si $xy = yx$ para todo $y \in X$. Un grupo abeliano es $\mathcal{R}$ si es un producto subdirecto de grupos cíclicos C_i tales que $C_i \cong Z$ ó $|C_i| \leq n$ para un entero n fijo.

Un grupo G se dice que es residualmente lineal si para cada $1 \neq x \in G$ existe un cuerpo K y un homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow GL(n,K)$ tal que $\varphi(x) \neq 1$.

Sea G un grupo lineal, $G \leq GL(n,K)$. Si $\hat{G}$ es la K-subálgebra de M(n,K) generada por G, sea $X \subseteq G$ una K-base para $\hat{G}$. Entonces X es un conjunto finito y claramente $Z_1(G) = C_G(X)$.

Un grupo G diré que es un C-grupo si existe un conjunto finito X tal que $Z_1(G) = C_G(X)$. Cualquier grupo lineal es un C-grupo. Más en general, un grupo que satisface la condición minimal sobre centralizadores es un C-grupo. Un grupo G es un C_o-grupo si $G/Z_i(G)$ es un C-grupo para todo $i \geq 0$.

II.1. Grupos nilpotentes que son residualmente C-grupos.

Lema 1.1. Sea G un C_o-grupo nilpotente y sea H un subgrupo normal de G tal que $H \cap Z_1(G)$ es finitamente generado. Entonces H es finitamente generado.

Demostración. Procederé por inducción sobre la clase c de G. El caso c = 1 es obvio. Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ tal que $Z_1(G) = C_G(X)$. Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} H \cap Z_2(G) &\longrightarrow (H \cap Z_1(G)) \times \ldots \times (H \cap Z_1(G)) \\ x &\longmapsto ([x,x_1], \ldots, [x,x_n]) \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos con núcleo $H \cap Z_1(G)$. Así $(H \cap Z_2(G))/(H \cap Z_1(G)$ es finitamente generado. Dado que G es un C_o-grupo, $G/Z_1(G)$ es un C_o-grupo. Entonces

$$(HZ_1(G)/Z_1(G)) \cap Z_1(G/Z_1(G) \cong H \cap Z_2(G)/H \cap Z_1(G)$$

y, por tanto, se sigue por inducción que $HZ_1(G)/Z_1(G) \cong H/H \cap Z_1(G)$ es finitamente generado y el resultado es claro.

Necesito el siguiente

Lema 1.2.(P. Hall [13]). Sean H, K, L subgrupos de un grupo G y supóngase que N es normal en G. Si dos de los subgrupos $[H, K, L]$, $[K, L, H]$ y $[L, H, K]$ están contenidos en N, entonces el tercero también.

Lema 1.3. Sea G un C-grupo nilpotente. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes.

(1) $\Gamma_2(G)$ es finitamente generado.

(2) Si $x \in G$, entonces $\langle x \rangle^G$ (la clausura normal de $\langle x \rangle$ en G) es finitamente generado.

(3) $G/Z_1(G)$ es finitamente generado.

Demostración. (1)$\Longrightarrow$(2) es obvio, ya que $\langle x \rangle^G \leq \Gamma_2(G)\langle x \rangle$ y como es bien sabido, los grupos nilpotentes finitamente generados satisfacen la condición maximal para subgrupos. (2)$\Longrightarrow$(3). Demostraré primero que G es un C_0-grupo. Como los cocientes de G satisfacen (2), es suficiente demostrar que $G/Z_1(G)$ es un C-grupo. Sea X un subgrupo de G finitamente generado tal que $Z_1(G) = C_G(X)$. Entonces, por (2), $[X, G]$ es finitamente generado. Sean $[x_1, g_1], \ldots, [x_n, g_n]$ generadores de $[X, G]$, donde $x_i \in X$ y $g_i \in G$. Defino $H = \langle X, g_1, \ldots, g_n \rangle$. Entonces $[X, G] \subseteq [H, H]$. Sea $N = \{ a \in G : [a, H] \subseteq Z_1(G)\}$. El resultado se sigue si demuestro que $Z_2(G) = N$. Trivialmente $Z_2(G) \subseteq N$.

Es claro que $[H, N, H] = [N, H, H] = \langle 1 \rangle$. Se deduce del Lema 1.2 que $[H, H, N] = \langle 1 \rangle$ y, en particular, se tiene que $[X, G, N] = \langle 1 \rangle$. Como $X \subseteq H$, también $[N, X, G] = \langle 1 \rangle$. De nuevo por el Lema 1.2 se tiene que $[G, N, X] = \langle 1 \rangle$ Por tanto $[G, N] \subseteq Z_1(G)$. Esto demuestra que $N \subseteq Z_2(G)$. El homomorfismo

$$\begin{aligned} Z_2(G) &\longrightarrow X^G \times \dots \times X^G \\ x &\longmapsto ([x,x_1], \dots, [x,x_n]) \end{aligned}$$

(donde $X = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$)

demuestra que $Z_1(G/Z_1(G))$ es finitamente generado. Dado que $G/Z_1(G)$ es un C_o-grupo, el resultado se sigue del Lema 1.2. (3)$\Longrightarrow$(1) Es conocido [13] .

<u>Lema 1.4</u>. Sea G un grupo nilpotente tal que $G/Z_1(G)$ es finitamente generado. Entonces G es residualmente finito si y sólo si lo es $Z_1(G)$.

Demostración. Es suficiente demostrar que $R(Z_1(G)) = R(G)$. Trivialmente $R(Z_1(G)) \subseteq R(G)$. Sea N un subgrupo de $Z_1(G)$ de índice finito. Entonces N es normal en G y G/N es nilpotente finitamente generado y por tanto residualmente finito. Así $R(G) \subseteq N$ y $R(G) \subseteq R(Z_1(G))$.

El Lema 1.4 es una consecuencia trivial de ([14], Prop.1) aunque éste es suficiente para lo voy a necesitar.

Proposición 1.5. Sea G un grupo nilpotente residualmente C que satisface las condiciones siguientes.

(1) Para cada $x \in G$, $\langle x \rangle^G$ es finitamente generado.

(2) $G/\Gamma_2(G)$ es residualmente finito y para cada primo p la p-torsión está acotada.

Entonces G es residualmente finito.

Demostración. Sea $1 \neq x \in G$, demostraré que $x \notin R(G)$. Dado que G es residualmente C, podemos considerar un homomorfismo φ de G en un C-grupo tal que $\varphi(x) \neq 1$. Sea $\bar{G} = G/(\operatorname{Ker}\varphi \cap \Gamma_2(G))$. Puesto que los cocientes de G satisfacen (1), se sigue del Lema 1.3 que $\Gamma_2(G/\operatorname{Ker}\varphi)$ y $(G/\operatorname{Ker}\varphi)/Z_1(G/\operatorname{Ker}\varphi)$ son finitamente generados. Claramente $\bar{G} \hookrightarrow (G/\operatorname{Ker}\varphi) x (G/\Gamma_2(G))$. Entonces se ve fácilmente que $\Gamma_2(\bar{G})$ y $\bar{G}/Z_1(\bar{G})$ son finitamente generados. Además, se tiene $\bar{G}/\Gamma_2(\bar{G}) \cong G/\Gamma_2(G)$. Se deduce de (2) que la p-torsión de $\bar{G}$ está acotada para cada primo p. Por tanto $R(Z_1(\bar{G}))$ es un grupo radicable, pero $\bar{G}/\Gamma_2(\bar{G})$ es residualmente finito y así $R(Z_1(\bar{G})) \subseteq \Gamma_2(\bar{G})$. $\Gamma_2(\bar{G})$ es finitamente generado y, necesariamente, $R(Z_1(\bar{G})) = \langle 1 \rangle$. En estas condiciones el Lema 1.4 implica que $\bar{G}$ es residualmente finito. Se concluye que $x \notin R(G)$; ya que $x \notin \operatorname{Ker} \cap \Gamma_2(G)$.

Lema 1.5. Sea G un $\mathcal{R}$-grupo y sea H un subgrupo finitamente generado. Entonces G/H es un $\mathcal{R}$-grupo.

Demostración. G es un $\mathcal{R}$-grupo, así $G \leq \prod Z \times C$

donde C es un grupo de torsión acotada y en consecuencia ([2], Th. 17.2) suma directa de grupos cíclicos. Dado que los subgrupos de un $\mathcal{R}$-grupo son $\mathcal{R}$-grupos se puede suponer que $G = \prod Z \times C$ a fin de probar el lema. Sea H un subgrupo de G finitamente generado, existen subgrupos finitamente generados $M \leq \prod Z$ y $N \subseteq C$ tales que $H \subseteq M \times N$. Cada subgrupo de $\prod Z$ finitamente generado puede incluirse en un sumando directo de $\prod Z$ ([2], Th.19.2), es claro que C tiene también esta propiedad. Por tanto, se puede suponer además que $M \times M' = \prod Z$ y $N \times N' = C$, para ciertos subgrupos $M' \leq \prod Z$ y $N' \subseteq C$. Ahora se tiene que $G/H \cong (M \times N/H) \times M' \times N'$ y el resultado es claro.

Teorema 1.7. (1) Sea G un grupo nilpotente residualmente C tal que $\Gamma_2(G)$ es finitamente generado y $Z_1(G)$ es un $\mathcal{R}$-grupo, entonces G es residualmente finito.

(2). Existe un grupo nilpotente G de clase 2 con $\Gamma_2(G)$ finitamente generado y $Z_1(G)$ residualmente finito, tal que es residualmente lineal pero no residualmente finito.

(3) Existe un grupo nilpotente G de clase 3 con $Z_1(G)$ cíclico tal que G es residualmente lineal pero no es residualmente finito.

Demostración. (1) Teniendo en cuenta la Proposición 1.4 es suficiente demostrar que $G/\Gamma_2(G)$ es residualmente finito y la torsión de $G/\Gamma_2(G)$ está acotada. Procederé por inducción sobre la clase c de G. Si $c = 1$, el resultado es trivial. Supongamos $c > 1$ y sea $\bar{G} = G/Z_1(G)$. Trivialmente $\Gamma_2(\bar{G})$ es finitamente generado. $Z_1(\bar{G})$ es un $\mathcal{R}$-grupo, ya que está contenido en un producto $\prod Z_1(G)$. Por inducción, se tiene que $\bar{G}/\Gamma_2(\bar{G})$ es residualmente finito y su torsión está acotada. Por hipótesis $Z_1(G)$ es un $\mathcal{R}$-grupo y $\Gamma_2(G)$ es finitamente generado; por tanto se sigue del Lema 1.6 que $Z_1(G)\,\Gamma_2(G)/\Gamma_2(G)$ es un $\mathcal{R}$-grupo. Así, la torsión de $G/\Gamma_2(G)$ está acotada. Entonces, $R(G/\Gamma_2(G))$ es un grupo radicable contenido en $Z_1(G)\,\Gamma_2(G)/\Gamma_2(G)$. Dado que el único subgrupo radicable que contiene un $\mathcal{R}$-grupo es el trivial, se tiene que $G/\Gamma_2(G)$ es residualmente finito.

(2) Sea p un número primo. Defino

$$G = \langle z_i,\ x_i,\ y_i,\ \ i = 0,1,\dots\ :\ z_i^p = z_{i+1},\ [x_i,x_j] = [z_i,z_j] = [y_i,y_j] = [z_i,x_j] = [z_i,y_j] = 1\ ,\ [x_i,y_j] = 1 \text{ si } i \neq j,\ [x_i,y_i] = z_0^{p^i} \rangle .$$

G es un grupo nilpotente de clase 2 con $\Gamma_2(G) = \langle z_0 \rangle$ y $Z_1(G) = \langle z_i,\ i = 0,1,\dots \rangle \cong Q_p$ (donde Q_p es el grupo de los números racionales cuyos denominadores son potencias de p). $Z_1(G)$ es residualmente finito, aunque no es $\mathcal{R}$-grupo. Demostraré que G no es residualmente finito, pero G es residualmente lineal. Supongamos que $x \longrightarrow \bar{x}$ es un homomorfismo de G en un grupo $\bar{G}$ finito. Entonces existen enteros n,m distintos tales que $\bar{x}_n = \bar{x}_m$. Así $\bar{1} = [\bar{x}_m, \bar{y}_n] = [\bar{x}_n, \bar{y}_n] = \bar{z}_o^{p^n}$. Como los cocientes finitos de Q_p no tienen elementos de orden p, se tiene que $\bar{z}_o = \bar{1}$. Por tanto $z_o \in R(G)$, de hecho $Z_1(G) = R(G)$. Sea K un cuerpo que contiene todas las raices p^n-ésimas de la unidad para todo entero n. Probaré que G es residualmente K-lineal, basta probar que el grupo $G_n = G/\langle z_o^{p^n}\rangle$ lo es, ya que $\bigcap \langle z_o^{p^n}\rangle = \langle 1\rangle$. Se deduce de las relaciones de G que $Z_1(G_n)$ es una extensión de $Z(p^\infty)$ por un grupo residualmente finito. Por tanto $Z_1(G_n)$ es residualmente K-lineal. Puesto que $Z_1(G_n)$ tiene índice finito en G_n, G_n es residualmente K-lineal.

(3) Sea p un primo. Sea G el grupo generado por z, t_i, x_i, y_i $(i = 1,2,\ldots)$ con las relaciones

$$[x_i, x_j] = [y_i, y_j] = [t_i, t_j] = [z, x_i] = [z, y_i] = [z, t_i] = 1,$$

$$[x_i, y_i] = t_i^{p^i} z, \quad [x_i, y_j] = 1 \quad \text{si } i \neq j,$$

$$[t_i, x_i] = [t_i, y_i] = z^{p^i}, \quad [t_i, x_j] = [t_i, y_j] = 1 \quad \text{si } i \neq j.$$

G es un grupo nilpotente de clase 3 libre de torsión y con centro $\langle z\rangle$. Sea $x \longrightarrow \bar{x}$ un homomorfismo de G en un grupo finito $\bar{G}$. Entonces, existen enteros n,m distintos tales que $\bar{y}_n = \bar{y}_m$. Así $\bar{1} = [\bar{t}_m, \bar{y}_n] = [\bar{t}_m, \bar{y}_m] = \bar{z}^{p^m}$. Supongamos que $\bar{z} \neq \bar{1}$. Entonces $h_p(\bar{z})$, la p-altura de $\bar{z}$ en $\bar{G}$, es finita. De nuevo, existen enteros distintos

$r,s > h_p(\bar{z})$ con $\bar{1} = [\bar{x}_r,\bar{y}_s] = [\bar{x}_s,\bar{y}_s] = \bar{t}_s^{p^s}\bar{z}$. Luego $\bar{z} = (\bar{t}_s^{-1})^{p^s}$. Así $s \leq h_p(\bar{z})$, una contradicción. Por tanto he demostrado que z pertenece a los núcleos de todos los homomorfismos de G en grupos finitos, es decir $z \in R(G)$. Finalmente demostraré que G es residualmente K-lineal, si K contiene, para cada n, las raices p^n-ésimas de las unidad. Defino, para cada $n \geq 1$, el subgrupo

$$H_n = \langle t_1^{p^n},\ t_2^{p^n},\ \dots\ ,\ t_{n-1}^{p^n},\ z^{p^n},\ t_m^{p^m}z \text{ para } m \geq n \rangle.$$

H_n es un subgrupo normal de G y $H_n \cap \langle z \rangle = \langle z^{p^n} \rangle$. Por tanto $\bigcap H_n = \langle 1 \rangle$. Entonces basta probar que el grupo $\bar{G} = G/H_n$ es residualmente K-lineal. Es claro que

$$\bar{G} = \langle Z_1(\bar{G}),\ \bar{x}_1,\ \dots\ ,\ \bar{x}_{n-1},\ \bar{y}_1,\ \dots\ ,\ \bar{y}_{n-1},$$
$$\bar{t}_1,\ \dots\ ,\bar{t}_{n-1} \rangle .$$

Además, para $i=1,2,\dots,n-1$, se tiene

$$\bar{t}_i^{p^n} = 1 \quad \text{así} \quad [\bar{x}_i^{p^n},\bar{t}_i] = [\bar{y}_i^{p^n},\bar{t}_i] = \bar{1} ,$$

$$[\bar{x}_i^{p^n},\bar{y}_i] = [\bar{x}_i,\bar{y}_i]^{p^n}[\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{x}_i]^{p^n(p^n-1)/2} =$$

$$= \bar{t}_i^{p^{i+n}}\bar{z}^{p^n}\bar{z}^{p^{2i+n}(p^n-1)/2} = \bar{1} ,$$

análogamente se obtiene que $[\bar{y}_i^{p^n},\bar{x}_i] = \bar{1}$.

De estas relaciones se deduce que $\bar{G}/Z_1(\bar{G})$ es un grupo nilpotente de torsión y por tanto finito, ya que es finitamente generado. El resultado se sigue, ya que $Z_1(\bar{G})$ es residualmente K-lineal.

<u>Corolario 1.8</u>. Sea G un grupo nilpotente de clase 2 cuyo centro es finitamente generado. Entonces son equivalentes

(1) G es residualmente lineal.

(2) G es residualmente finito.

Demostración. Es consecuencia inmediata del Teorema 1.7, ya que $\Gamma_2(G) \leq Z_1(G)$.

Obsérvese que el Teorema 1.7 (2) demuestra que el Corolario anterior no es cierto, en general, si la la clase del grupo G es ≥ 3.

El Teorema 1.7 (3) demuestra que los conceptos " residualmente lineal" y " residualmente finito" son esencialmente distintos, en otras palabras:"mirando el centro del grupo, no se distinguen bien ambos conceptos". Este hecho es un tanto extraño ya que el centro de un grupo nilpotente refleja, casi siempre, las propiedades residuales del grupo.

El Teorema 1.7 (3) hace que el caso Q-lineal sea más interesante, es decir:

Sea G un grupo nilpotente residualmente Q-lineal cuyo centro es finitamente generado. Entonces ¿ es G residualmente finito ?.

Teorema 1.9. ([15], Exc.2.0) Un grupo nilpotente G es Q-lineal si y sólo si G es producto subdirecto de un grupo de rango de Prüfer finito libre de torsión por una extensión finita de un grupo abeliano numerable libre.

El rango de Prüfer de un grupo G es el menor cardinal r tal que cada subgrupo de G finitamente generado está generado por r elementos.

Teorema 1.10.

(1) Sea G un grupo nilpotente residualmente Q-lineal cuyo centro es cíclico. Entonces G es residualmente finito.

(2) Existe un grupo nilpotente G residualmente Q-lineal tal que $Z_1(G) \cong Z \oplus Z$ y G no es residualmente finito.

Demostración. (1) Si G es residualmente Q-lineal se sigue del Teorema 1.9 que $G \leq \prod P_i \times R$, donde cada P_i es un grupo libre de torsión y de rango de Prüfer finito y R es un grupo residualmente finito. Sean $\pi_i : G \longrightarrow P_i$, $\pi_R : G \longrightarrow R$ las proyecciones naturales. Sea z un generador de $Z_1(G)$. Si $\pi_i(z) \neq 1$

para algún i, entonces Π_i es un monomorfismo y en consecuencia G es Q-lineal. Como $Z_1(G)$ es cíclico, se deduce del Lema 1.1 que G es finitamente generado y por tanto residualmente finito. Si $\Pi_i(z) = 1$, para todo i, entonces Π_R es un monomorfismo y G es residualmente finito.

(2) Sea p un número primo. Sea H el grupo generado por los elementos u, x_i, y_i, t_i $(i=1,2,\dots)$ con las relaciones

$$[x_i, x_j] = [y_i, y_j] = [t_i, t_j] = 1,$$

$$[x_i, y_i] = t_i^{\,i} \;, \; [x_i, y_j] = 1 \quad \text{si } i \neq j,$$

$$[t_i, x_i] = [t_i, y_i] = u^{p^i}; \; [t_i, x_j] = [t_i, y_j] = 1 \quad \text{si } i \neq j,$$

u está contenido en $Z_1(H)$.

H es un grupo nilpotente de clase 3 cuyo centro es cíclico generado por u . Demostraré que H es residualmente finito. Defino para cada entero $m \geq 1$ el subgrupo normal

$$H_m = \langle x_n, y_n, t_n, u^{p^m}, \; n > m \rangle \; .$$

Entonces $H_m \cap \langle u \rangle = \langle u^{p^m} \rangle$ y así $\bigcap H_m = \langle 1 \rangle$. Dado que H/H_m es finitamente generado para cada $m \geq 1$, se sigue que H es residualmente finito.

Considero ahora el grupo G generado por los elementos u, z, x_i, y_i, t_i $(i=1,2,\dots)$ con las relaciones

$[x_i,x_j] = [y_i,y_j] = [t_i,t_j] = 1,$

$[x_i,y_i] = t_i^i z,\ [x_i,y_j] = 1$ si $i \neq j,$

$[t_i,x_i] = [t_i,y_i] = u^{p^i},\ [t_i,x_j] = [t_i,y_j] = 1$ si $i \neq j,$

u,z están contenidos en $Z_1(G)$.

G es un grupo nilpotente de clase 3 con $Z_1(G) = \langle u,z\rangle$ y por tanto $Z_1(G) \cong Z \oplus Z$. Demostraré que G es residualmente Q-lineal y, no obstante, no es residualmente finito. Supongamos que $G \longrightarrow \bar{G}$ es un homomorfismo de G en un grupo $\bar{G}$ finito. Si $|\bar{G}| = m$, consideramos el conjunto $\{x_m, x_{2m}, \ldots, x_{nm}, \ldots\}$. Dado que $\bar{G}$ es finito, existen enteros $r \neq s$ tales que $\bar{x}_{rm} = \bar{x}_{sm}$. Entonces, se tiene que

$$\bar{1} = [\bar{x}_{rm},\bar{y}_{sm}] = [\bar{x}_{sm},\bar{y}_{sm}] = \bar{t}_{sm}^{\,sm}\,\bar{z} = \bar{z}.$$

Por tanto $\langle z\rangle \leq R(G)$. Como que $G/\langle z\rangle \cong H$ y, he visto que H es residualmente finito, se tiene que $R(G) \leq \langle z\rangle$. Luego $R(G) = \langle z\rangle$. Falta demostrar que G es residualmente Q-lineal. A tal fin sea $F = \langle x_i, y_i, u\rangle$, F es normal en G y $F \cap R(G) = \langle 1\rangle$. Así $G \hookrightarrow G/F \times G/R(G)$. De las relaciones de G se sigue que $G/F \cong Q$ y, por tanto, G es residualmente Q-lineal.

Finalmente voy a dar un teorema que caracteriza ciertos grupos nilpotentes residualmente lineales.

Necesito un sencillo lema que, seguramente, es bien conocido.

<u>Lema 1.11</u>. Sea G un grupo nilpotente con $\Gamma_2(G)$ finito y $G/Z_1(G)$ finitamente generado. Entonces $G/Z_1(G)$ es finito.

Demostración. Ya que $G/Z_1(G)$ es finitamente generado, $Z_2(G)/Z_1(G)$ es isomorfo con un subgrupo de un producto finito $\prod \Gamma_2(G)$, así $Z_1(G/Z_1(G))$ es finito. Dado que un grupo nilpotente finitamente generado con centro finito es finito, el resultado se sigue.

<u>Teorema 1.12</u>. Sea G un grupo nilpotente tal que $\langle x \rangle^G$ es finitamente generado, para cada $x \in G$. Sea $\mathcal{N}$ la familia de todos los subgrupos normales de índice finito en G. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) $\bigcap_{\mathcal{N}} [N,G] = \langle 1 \rangle$.

(2) $\bigcap_{\mathcal{N}} \Gamma_2(N) = \langle 1 \rangle$.

(3) G es residualmente lineal.

(4) G es residualmente C.

Demostración. Puesto que $\Gamma_2(N) \leq [N,G]$, trivialmente

$(1) \Longrightarrow (2)$. $(2) \Longrightarrow (3)$. Para cada $N \in \mathcal{N}$, el grupo $G/\Gamma_2(N)$ es una extensión finita de un grupo abeliano y, por tanto, $G/\Gamma_2(N)$ es residualmente lineal. Puesto que $\bigcap \Gamma_2(N) = \langle 1 \rangle$, el resultado es claro. Es obvio que $(3) \Longrightarrow (4)$. $(4) \Longrightarrow (1)$. Podemos suponer que G es un C-grupo, sin pérdida de generalidad. Entonces, el Lema 1.3 implica que $\Gamma_2(G)$ y $G/Z_1(G)$ son finitamente generados. Para cada entero $n \geq 1$, defino $G_n = G/\Gamma_2(G)^n$. Entonces, $\Gamma_2(G_n)$ es finito y $G_n/Z_1(G_n)$ es finitamente generado; se sigue del Lema 1.11 que G_n es una extensión finita del centro. Sea H_n la imagen inversa de $Z_1(G_n)$ por la proyección canónica $G \longrightarrow G_n$. H_n tiene índice finito en G y $[H_n, G] \leq \Gamma_2(G)^n$. Dado que $\Gamma_2(G)$ es finitamente generado, se tiene que $\bigcap \Gamma_2(G)^n = \langle 1 \rangle$. Por tanto $\bigcap [H_n, G] = \langle 1 \rangle$, lo que termina la demostración.

Capítulo III

GRUPOS LINEALES RESIDUALMENTE FINITOS

El primer resultado de este capítulo se refiere a grupos nilpotentes que residualmente son unipotentes de característica cero. Si se supone que el conmutador de un tal grupo G tiene rango de Prüfer finito, entonces G es unipotente y su residuo, R(G), es radicable. En general no es cierto que el residuo de un grupo unipotente sea radicable. Motivado por este fenómeno estudio, en la segunda parte del capítulo, la posibilidad de que los grupos unipotente o unitriangular, triangular y lineal total de grado n sobre un anillo R sean residualmente finitos. Si $n \geq 3$, el problema queda resuelto. Si $n = 2$, doy, sólo, resultados parciales.

Sea R un anillo con unidad, no necesariamente conmutativo. Siguiendo la notación de ([15], pag. 13), consideraré los siguientes subgrupos de GL(n, R)

Tr(n, R), el grupo triangular, formado por las matrices de GL(n, R) del tipo

$$\begin{Vmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_n \end{Vmatrix}$$

$Tr_1(n, R)$, el grupo unitriangular, formado por las matrices de $GL(n, R)$ del tipo

$$\begin{Vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{Vmatrix} .$$

Sea K un cuerpo. Un grupo G K-lineal, $G \leq GL(n, K)$, se dice que es unipotente si, para cada $x \in G$, $(1-x)^n = 0$. Es conocido ([15], Cor. 1.21) que si G es unipotente, existe $g \in GL(n, K)$ tal que $g^{-1}Gg \leq Tr_1(n, K)$. Los grupos nilpotentes libres de torsión y de rango de Prüfer finito son Q-unipotentes ([15], pag. 25).

Un anillo R se dice que es residualmente finito si y sólo si está contenido en un producto de anillos finitos. Análogamente, un R-módulo (por la izquierda) es residualmente finito si y sólo si está contenido en un producto de R-módulos (por la izquierda) finitos.

III.1. Grupos unipotentes.

Proposición 1.1. Dado un cuerpo K de característica cero, sea G un grupo residualmente K-unipotente. Supongamos, además, que $\Gamma_2(G)$ tiene rango de Prüfer finito. Entonces

(1) G es producto subdirecto de un grupo de rango de Prüfer finito libre de torsión por un grupo abeliano libre de torsión; en particular, G es unipotente.

(2) R(G) es un grupo radicable.

Demostración. Sea G_o, la racionalización de G. Dado que los grupos unipotentes de característica cero son libres de torsión, se tiene ([13], Th. 8.9) que $G \leq G_o$. G_o es también residualmente unipotente. $\Gamma_2(G)$ tiene rango de Prüfer finito, por tanto G_o también. Así, puedo suponer que $G = G_o$ a fin de probar (1). Como $\Gamma_2(G)$ es numerable, existen subgrupos normales H_i, para $i = 1,2,\ldots$, tales que G/H_i es K-unipotente y

$$H_1 \cap \Gamma_2(G) \supseteq H_2 \cap \Gamma_2(G) \supseteq \ldots \supseteq H_n \cap \Gamma_2(G) \supseteq \ldots$$

de manera que $\bigcap (H_i \cap \Gamma_2(G)) = \langle 1 \rangle$. Los cocientes de la cadena anterior son libres de torsión y, como que $\Gamma_2(G)$ tiene rango de Prüfer finito, se tiene que $\Gamma_2(G) \cap H_n = \langle 1 \rangle$, para un entero n conveniente. Sea $\bar{G} = G/H_n$. Entonces $G/Z_1(G) \cong \bar{G}/Z_1(\bar{G})$. Puesto que $\bar{G}$ es K-lineal, se sigue, cambiando "finitamente generado" por "rango de Prüfer finito" en el Lema II.1.3, que $G/Z_1(G)$ tiene rango de Prüfer finito. Por otra parte, $\Gamma_2(G) \cap Z_1(G)$ es un grupo radicable y, así, existe un subgrupo $N \leq Z_1(G)$ tal que $(\Gamma_2(G) \cap Z_1(G)) \times N =$ $= Z_1(G)$. Entonces, $Z_1(G/N) = Z_1(G)/N$ tiene rango de Prüfer finito y, como es libre de torsión, resulta que $G \hookrightarrow G/\Gamma_2(G) \times G/N$. Así, G/N es Q-unipotente. Ahora, el resultado es claro.

(2) He demostrado en (1) que $G \subseteq P \times A$, donde P

es un grupo nilpotente de rango de Prüfer finito y A es un grupo abeliano libre de torsión. Sea S el núcleo de la proyección natural de G en P. Entonces, G/G^nS es un grupo nilpotente de torsión acotada y, como tiene rango de Prüfer finito, necesariamente G/G^nS es finito. Entonces $R(G/G^n) = R(G^nS/G^n)$. S es abeliano, pues $S \subseteq A$. Entonces, G^nS/G^n es suma directa de grupos cíclicos y, por tanto, $\langle 1 \rangle = R(G^nS/G^n) = R(G/G^n)$. En consecuencia se tiene que $R(G) \subseteq \bigcap G^n$. Trivialmente $\bigcap G^n \subseteq R(G)$. Entonces $R(G) = \bigcap G^n$. El resultado se sigue del hecho que $\bigcap G^n$ es radicable si G es nilpotente y libre de torsión ([13], Th. 6.6).

En el siguiente ejemplo probaré que existen grupos unipotentes, tales que R(G) no es radicable.

<u>Ejemplo 1.2</u>. Sea $Z[X]$, el anillo de polinomios sobre Z; si $p \in Z[X]$, denoto por $c(p)$ el máximo común divisor de los coeficientes de p. Consideremos

$$R = \{ p/q \ : \ p,q \in Z[X] \ , \ q \neq 0 \text{ y } c(p)/c(q) \in Z \}.$$

R es un subanillo de $Q(X)$. Sea G el grupo $Tr_1(3, R)$. Es claro que $\bigcap mR = (0)$, entonces, un cálculo directo, demuestra que $\bigcap G^m = \langle 1 \rangle$. Si R(G) fuera radicable, tendríamos $R(G) = \bigcap G^m$ y, por tanto, $R(G) = \langle 1 \rangle$. Ahora bien, demostraré que la matriz

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

pertenece a R(G). Sea N un subgrupo de G, normal y de índice finito. Entonces, existen enteros distintos, n, m $\geq$ 1, tales que

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^n-x^m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} \in N.$$

Entonces, se tiene

$$\left[\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^n-x^m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/x^n-x^m & 1 \end{Vmatrix} \right] = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \in N.$$

III.2. Grupos lineales residualmente finitos.

Lema 2.1. Sea R un anillo con unidad. Supongamos que R es residualmente finito como R-módulo. Entonces R es residualmente finito como anillo.

Demostración. Para cada ideal por la izquierda I, sea φ_I: R $\longrightarrow$ $\mathrm{Hom}_Z(R/I, R/I)$ la representación de R/I como R-módulo. Si R/I es finito, también lo es $R/\mathrm{Ker}\varphi_I$. Sea $\alpha \in \bigcap \mathrm{Ker}\varphi_I$ (donde la intersección se extiende a todos los I de índice finito). Entonces $\alpha R \subseteq I$. Por hipótesis $\bigcap I = (0)$, así $\alpha R = (0)$ y $\alpha = 0$.

Teorema 2.2. Sea R un anillo con unidad. Sea S el subanillo de R generado por las unidades. Entonces

(1) Tr(2, R) es residualmente finito si y sólo si R es residualmente finito como (S, S)-módulo.

(2) Sea $n \geq 3$. Condición necesaria y suficiente para que uno cualquiera de los grupos $GL(n, R)$, $Tr(n, R)$, $Tr_1(n, R)$ sea residualmente finito es que R lo sea como anillo.

Demostración. (1) Supongamos que $Tr(2, R)$ es residualmente finito. Defino

$$I(N) = \left\{ \alpha \in R : \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{Vmatrix} \in N \right\} ,$$

para cada subgrupo N de $Tr(n, R)$, normal y de índice finito. $I(N)$ es un subgrupo aditivo de R. Supongamos que $\alpha \in I(N)$ y que β es una unidad. Entonces se tiene

$$\begin{Vmatrix} \beta^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha\beta & 1 \end{Vmatrix} \in N$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \beta\alpha & 1 \end{Vmatrix} \in N \quad .$$

Por tanto $\alpha\beta \in I(N)$ y $\beta\alpha \in I(N)$. De este modo, $I(N)$ es un (S, S)-módulo. Dado que $[Tr(2, R): N] < \infty$, se tiene que $[R: I(N)] = [Tr_1(2, R): Tr_1(2, R) \cap N] < \infty$. El resultado se sigue, ya que $\cap I(N) = (0)$.

Recíprocamente, supongamos que R es un (S, S)-módulo residualmente finito. En particular, el anillo S es residualmente finito y, en consecuencia, el grupo de las unidades de R es residualmente finito. Entonces, a fin de probar que $Tr(2, R)$ es residualmente finito, es suficiente hallar, para cada $1 \neq \alpha = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{Vmatrix}$, un subgrupo normal N_α de índice finito tal que $\alpha \notin N_\alpha$. Puesto que $a \neq 0$, se puede encontrar un (S, S)- módulo

I, de R, tal que $a \notin I$ y $[R: I] < \infty$. Supongamos que $R = \bigcup_1^n (I + x_i)$. Defino

$$N = \left\{ \begin{Vmatrix} x & 0 \\ t & y \end{Vmatrix} : x, y \text{ son unidades y}, t \in I \right\}.$$

Entonces, se comprueba que N es un subgrupo de $Tr(2, R)$ (no necesariamente normal!). Sea, ahora, una matriz cualquiera $\begin{Vmatrix} x & 0 \\ y & z \end{Vmatrix} \in Tr(2, R)$. Eligiendo un x_i conveniente, se tiene que $yx^{-1} - x_i = t \in I$. De donde

$$\begin{Vmatrix} x & 0 \\ y & z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ x_i & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x & 0 \\ tx & z \end{Vmatrix} \in \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ x_i & 1 \end{Vmatrix} N ,$$

Así, se obtiene que $[G: N] < \infty$. Puesto que $\alpha \notin N$, basta definir N_α como el core de N.

(2) Supongamos primero que R es un anillo residualmente finito. Cada homomorfismo de R sobre un anillo finito $\bar{R}$ induce un homomorfismo de $GL(n, R)$ sobre $GL(n, \bar{R})$. Entonces es claro que $GL(n, R)$ es residualmente finito. Para demostrar el recíproco, es suficiente probar que R es residualmente finito si $Tr_1(3, R)$ lo es. Para cada subgrupo N, normal y de índice finito en $Tr_1(3, R)$, sea $C(N)$ el conjunto de los elementos de R que aparecen como componente $(2,1)$ de al menos una matriz de N. Se ve, fácilmente, que $C(N)$ es un subgrupo aditivo de R. Sean $x_1, \dots, x_n$ un sistema de representantes de N en $Tr_1(3, R)$. En-

tonces, se tiene que $R = \bigcup_{1}^{n}(C(N) + x_i(2,1))$; por tanto $R/C(N)$ es finito y, en consecuencia, el módulo $R/RC(N)$ es finito. Sean $x \in R$, $y \in C(N)$. Entonces, existe una matriz del tipo

$$\begin{Vmatrix} 1 & & \\ y & 1 & \\ * & * & 1 \end{Vmatrix} \in N.$$

Un cálculo demuestra que

$$\left[\begin{Vmatrix} 1 & & \\ y & 1 & \\ * & * & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & -x & 1 \end{Vmatrix} \right] = \begin{Vmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ xy & 0 & 1 \end{Vmatrix} \in N,$$

ya que N es normal. Así, se tiene que

$$RC(N) \subseteq \left\{ x \in R : \begin{Vmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ x & 0 & 1 \end{Vmatrix} \in N \right\}.$$ Dado que $\bigcap N = \langle 1 \rangle$,

se obtiene que $\bigcap RC(N) = (0)$. El resultado se sigue del Lema 2.1. .

<u>El caso n = 2</u>.

Como consecuencia inmediata del Teorema 2.2 se tiene

<u>Corolario 2.3</u>. Sea R un anillo generado por sus unidades. Entonces, el grupo $GL(2, R)$ es residualmente finito si y sólo si R es residualmente finito.

Si R es un anillo arbitrario, no es conocido cuándo GL(2, R) es residualmente finito. Para terminar, daré un ejemplo de un anillo que no es residualmente finito y, sín embargo, GL(2, R) es residualmente finito. Necesitaré algunos resultados de P.M. Cohn.

Dado un anillo R, entonces GE(2, R) denota el subgrupo de GL(2, R) generado por las matrices elementales; es decir: $\begin{Vmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$ (donde x,y son unidades de R y $a \in R$).

El grupo de las unidades de R se denota por U(R). $U(R) \cup \{0\}$ se denota por $U_0(R)$. Entonces se tiene

<u>Teorema 2.4</u>. (P.M. Cohn, [1]). Cada matriz A de GE(2, R) puede expresarse en la forma "standard"

$$A = \begin{Vmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_1 & 0 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \cdots \begin{Vmatrix} a_r & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} ,$$

donde $x, y \in U(R)$, $a_i \in R$ y tales que

(a) $a_i \notin U_0(R)$ para $1 < i < r$

(b) a_1, a_2 no son ambos cero si $r = 2$.

Un anillo R se dice que es casi-libre para GE_2, si la única relación en GE(2, R)de la forma W = 1, donde W es una palabra en forma standard, es la relación trivial 1 = 1.

El anillo de polinomios K[X], sobre el cuerpo K, es un ejemplo de anillo casi-libre. Un anillo tal que GE(2, R) = GL(2, R) se dice que es un GE_2-anillo. También K[X] es un GE_2-anillo.

Teorema 2.5. (P.M. Cohn, [1]). Sean R, S K-algebras verificando las siguientes condiciones.

(a) R, S son GE_2-anillos casi-libres para GE_2.

(b) R y S tienen la misma dimensión como K-espacios vectoriales.

(c) $U_0(R) = U_0(S) = K$.

Entonces $GL(2, R) \cong GL(2, S)$.

El Teorema de Cohn es más fuerte que el anterior, pero el Teorema 2.5 es más directo para lo que necesito.

Ejemplo 2.6. Sea K un cuerpo y X una indeterminada. Sea $P = \{ X^a : a \in (Q \geq 0) \}$; P, con la multiplicación usual, es un monoide. Sea $K[P]$ la K-álgebra libre asociada al monoide P. Es claro que $K[P]$ es localmente $K[X]$ (cada subanillo de $K[P]$ finitamente generado se puede incluir en un subanillo isomorfo a $K[X]$). Entonces, obviamente, $K[P]$ es un GE_2-anillo casi-libre para GE_2. El Teorema 2.5 asegura que $GL(2, K[P]) \cong GL(2, K[X])$. Supongamos, ahora, que K es un cuerpo finito. Entonces $K[X]$ es residualmente finito y, en consecuencia, $GL(2, K[P])$ es residualmente finito. Voy a demostrar que el anillo $K[P]$ no es residualmente finito. Si K es infinito es obvio. Sea K un cuerpo finito de característica p. Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de los ideales maximales de $K[P]$ que tienen índice finito. Si $K[P]$ es residualmente finito se deduce, del Teorema de Artin para anillos finitos, que $\bigcap_{M\in\mathcal{M}} (\bigcap_{n\geq 1} M^n) = (0)$. Veamos que éste no es el caso. Consideremos los ideales

$$M_1 = \langle X^a : \underset{a\neq 0}{X^a \in P} \rangle \quad y \quad M_2 = \langle 1-X^a : X^a \in P \rangle .$$

Entonces $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$. Supongamos que $M \in \mathcal{M}$ y $M \neq M_1$. M es maximal y, en particular, primo; así $P \cap M = \phi$. Por tanto, la imagen de P en $K[P]/M$ es un grupo divisible. Dado que $K[P]/M$ es finito, necesariamente $1 - P \subseteq M$. Entonces $M_2 \subseteq M$ y, como M_2 es maximal, $M = M_2$. Con esto hemos probado que $\mathcal{M} = \{M_1, M_2\}$. Es claro que $M_1^n = M_1$, para cualquier entero $n \geq 1$; análogamente se tiene $M_2^n = M_2$, ya que $(1-X^{a/p^n})^{p^n} = 1-X^a$. Puesto que $M_1 \cap M_2 \neq (0)$, tenemos que

$\bigcap_{M\in\mathcal{M}} (\bigcap_{n\geq 1} M^n) = M_1 \cap M_2 \neq (0)$.

BIBLIOGRAFIA

1. P.M. Cohn. On the structure of the GL_2 of a ring. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 30(1966), 5-53.
2. L. Fuchs. Infinite abelian groups. Acad. Press, 1970.
3. K.W. Gruenberg. Residual properties of infinite soluble groups. Proc. London Math. Soc. (3) 7 (1957),29-62.
4. A.G. Kuroš. The theory of groups. Vol II. New York: Chelsea 1956.
5. S. Lang. Algebra. Addison-Wesley, 1965
6. P. Menal. Tesina. Universidad de Barcelona, 1975.
7. ________. Residual linearity for certain nilpotent groups. Aparecerá en Proc. Amer. Math. Soc.
8. D.S. Passman. On groups with enough finite representations. Proc. Amer. Math. Soc. 14(1963), 782-787.
9. ____________. Radicals of twisted group rings. Proc. London Math. Soc. (3) 20 (1970), 409-437.
10. ___________. Infinite group rings. Marcel Dekker. New York, 1971.
11. ___________. The algebraic structure of group rings. (Publicará Wiley-Intersc.).
12. D.A.R. Wallace. The Jacobson radicals of the group algebras of a group and of certain normal subgroups. Math. Zeitschr. 100(1967), 282-294.

13. R.B. Warfield. Nilpotent groups. Lec. Notes in Math, 513, Springer, 1976.

14. B.A.F. Wehrfritz. A note on residual properties of nilpotent groups. J. London Math. Soc. (2) 5 (1972), 1-7.

15. ________________. Infinite Linear groups. Springer-Verlag, 1973.