

Solutions homographiques du problème plan des quatre corps (*)

Carles Simó

Secció de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

On considère le problème plan des n corps avec des masses $m_i > 0$. On suppose toujours $\sum_{i=1}^n m_i = 1$. Ainsi les masses peuvent être prises comme les coordonnées barycentriques d'un point d'un $n-1$ -simplexe. On l'appellera triangle, tétraèdre, etc. des masses. Les équations du mouvement rapportées au c.d.m. sont:

$$m_i \ddot{z}_i = -D_{z_i} U, \quad i=1 \div n \quad (1),$$

avec $z_i = (x_i, y_i)^T \in \mathbb{R}^2$, $z_i \neq z_j$ si $i \neq j$, et fonction

potentiel

$$U = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad r_{ij} = |z_i - z_j|.$$

On dit qu'une solution $z(t)$ de (1) est homographique si le passage $z(t_0) \rightarrow z(t)$ est une similitude pour toute valeur de t (pourvu qu'on n'aboutit pas à une collision). Pour une telle solution il faut que

$$m_i \dot{z}_i = \lambda D_{z_i} U \quad (2)$$

avec λ indépendant de i et que l'application $z_i \rightarrow \dot{z}_i$ soit une

(*) Exposé fait au Sém. de Méc. Celeste, Univ. de Paris VI, 8 Mai, 1978

similitude.

114 Si

$$r^2 = I \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=1}^n m_i |z_i|^2 = \sum_{i < j} m_i m_j r_{ij}^2,$$

alors de (2) et de l'homogénéité de U on a

$$I = -\lambda U \implies \lambda = -I/U \stackrel{\Delta}{=} -\omega^2.$$

si $(z_i, \dot{z}_i) = 0$ et $|\dot{z}_i| = \omega |z_i|$, le mouvement $z(t)$ consiste à une rotation autour du c.d.m. comme s'il s'agissait d'un corps rigide, c.à d., $\dot{r}_{ij} = 0$. On dit aussi que les z_i sont des positions d'équilibre relatif (p.e.r.)

On peut considérer les $\{z_i\}$ comme un point d'un ellipsoïde S_K en introduisant $Z_i = z_i/r$. Alors $\sum m_i |Z_i|^2 = 1$ et (2) équivaut à que $U|_{S_K}$ soit stationnaire.

Les solutions homographiques (soit dans le plan ou dans l'espace, mais il y a seulement des p.e.r. dans le cas plan) jouent un rôle fondamental dans le problème des n corps. D'un côté sont les seules solutions qu'on connaît analytiquement. D'autre, elles servent à l'étude des collisions multiples [20], des expansions paraboliques et hyperboliques [7] et pour le classement des "variétés" invariantes [21,17].

Euler en 1767 a été le premier à donner solutions homographiques. Ces sont les solutions sur une droite dans le cas $n=3$. Si x_i est la coordonnée de m_i sur la droite, on peut supposer $x_1 < x_2 < x_3$, $x_3 - x_1 = 1$, $x_2 - x_1 = a$. Alors a est le seul zéro positif d'un polynôme de cinquième degré dont les coefficients sont fonctions des masses [16]. Compte tenu des permutations des masses on trouve 3 solutions. Elles sont linéairement instables.

Quelques ans après, Lagrange a trouvé les solutions en triangle équilatère. Il en y a deux, selon l'ordre cyclique des masses. Hors des solutions d'Euler et Lagrange il n'y a plus de solutions homographiques si $n=3$. Quant à la stabilité linéaire des solutions de Lagrange, il faut que $m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1 < 1/27$ qui n'est que trois petits morceaux du triangle des masses, très près des sommets. On connaît aussi la stabilité nonlinéaire [4].

En 1910 Moulton prouva que pour n corps il y a toujours $n!/2$ p.e.r. colinéaires. On les appellera dorénavant solutions de Moulton. Elles sont toutes linéairement instables [1]. L'idée de l'existence de ces solutions est instructive: C'est vrai si $n=2$. On suppose vrai pour n et on introduit un corps infinitésimal qui ne change pas l'équilibre relatif des autres. Il faut qu'il soit en équilibre soumis au potentiel gravitatoire des n corps massifs et au potentiel centrifuge. Cette somme a n asymptotes verticales, est toujours positive et tend vers l'infini lorsque la position du petit corps tend vers $\pm\infty$. C'est à dire: il y a $n+1$ points d'équilibre. Il reste à voir que ces points subsistent si on augmente la valeur de m_{n+1} jusqu'à sa valeur actuelle. Mais l'apparition ou disparition de solutions n'est possible que si le jacobien de l'équation $F(x,m)=0$, qui donne les solutions, est nul. Mais ce jacobien est transformé en défini positif par simple multiplication des files et colonnes par des constantes convenables. On trouve à [2] les détails.

Dès maintenant nous nous bornons au cas plan. Une formulation équivalente de (2) est

$$\sum_{i, j \neq k=1}^n m_k (i, j, k) (r_{ik}^{-3} - r_{jk}^{-3}) = 0 \quad (3),$$

où (i, j, k) est l'aire du triangle formé par les masses m_i, m_j, m_k [2].

McMillan et Bartky [6] donnent en 1932 quelques résultats pour $n=4$. Ces résultats sont aussi exposés et complétés par Brumberg en 1958 [1]. Outre l'étude de quelques cas symétriques on considère les régions où on doit placer deux des masses, les autres deux ayant été placées en des points fixés à l'avance, pour avoir une p.e.r. en quadrilatère concave ou convexe. En particulier on montre que quelles que soient les m_i il existe toujours solution convexe.

Le problème restreint des 4 corps, c. à d., avec un corps infinitésimal, a été considéré par Lindow (1922-1928) et Hütterhain (1933-35) si les trois masses non nulles sont égales. Si ces masses sont en triangle équilatère il y a 10 points de libration (fig. 1a) pour le corps infinitésimal, tandis que si elles sont en p.e.r. alignée il y a 2 solutions outre les solutions Moulton (fig. 1b) (cf. [2]).

Mais l'étude la plus importante pour le problème restreint avec les primaires de masse quelconque en triangle équilatère a été faite par Pedersen [14,15]. Il procède, essentiellement, à l'inverse: Ayant donné le point de libration on calcule les masses. De (3) on constate que ça c'est un problème linéaire. Après on examine quelques cas particuliers: Point de libration sur un axe du triangle, sur un côté, près du centre, près d'un sommet, près du symétrique d'un sommet par rapport au côté opposé, près d'un cercle de libration (ces sont les cercles de rayon le côté et avec centre aux sommets). On obtient ainsi les régions admissibles (fig.2). Comme on a fait à [18], il suffit de donner les régions où se trouvent les points de libration si $m_1 \leq m_2 \leq m_3$ ($m_4 =$ masse infinitésimale) (fig. 3).

Le potentiel total est

$$U = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{r_{i4}} + \omega^2 r_4^2, \quad r_4 = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|.$$

La condition de libration est

$$DU = 0 \iff \begin{cases} f(x, y, m_2, m_3) = 0 \\ g(x, y, m_2, m_3) = 0 \end{cases},$$

qui nous dit qu'on peut prolonger la solution si

$$|J| = \left| \frac{D(f, g)}{D(x, y)} \right| \neq 0;$$

la condition $|J|=0$ peut être exprimée comme $\varphi(x, y) = 0$ si on substitue les masses par ses valeurs en fonction de x, y . La courbe $C: \varphi(x, y) = 0$ dans l'espace (x, y) est en correspondance avec la courbe \bar{C} dans le triangle des masses (fig. 3).

Des études pareilles pour les problèmes de 2+2 et 1+3 corps ont été faites par Llibre [5].

Avant de traiter le cas général des 4 corps on donne un aperçu sur les importants résultats de Palmore en une série d'articles [8+13].

Soient $M = \mathbb{R}^{2n} \cap \{z \in (\mathbb{R}^2)^n \mid \sum m_i z_i = 0\}$ et Δ l'ensemble des collisions: $\Delta = \{z \in M \mid \exists i, j, i \neq j \text{ avec } r_{ij} = 0\}$. On prend $M - \Delta$ comme espace de configuration et $T(M - \Delta) = (M - \Delta) \times M$ comme espace des phases. Pour l'étude des p.e.r. on peut prendre $I=1$ et on fait quotient par S^1 . Alors la variété résultante est $P_{n-2}(C) - \bar{\Delta}$ ($\bar{\Delta}$ est la projection de Δ sur l'espace projectif $P_{n-2}(C)$), dont la dimension réelle est $2n-4$. On peut calculer l'homologie de cette variété et on peut faire usage des inégalités

de Morse si U n'est pas dégénérée aux points critiques ($|D^2U| \neq 0$ si $DU=0$). On rappelle que l'index d'un point critique est le nombre de valeurs propres négatives de D^2U . Voici un résumé de quelques résultats de Palmore:

a) $\forall n \geq 3$, \exists p.e.r. avec index compris entre $n-2$ (par exemple les solutions de Moulton) et $2n-4$,

b) Soit $\mu_i(n) \leq$ nombre de p.e.r. d'index $2n-4-i$ si aucune de ces p.e.r. est dégénérée. Alors $\mu_i(n) = \binom{n}{i} (n-1-i)(n-2)!$ et $\sum_i \mu_i(n) = [2^{n-1}(n-2)+1](n-2)!$.

c) Si $n=4$, $m_1=m_2=m_3$ sont aux sommets d'un triangle équilatère et $0 < m_4 < m_1$ est au centre, il y a une et seulement une valeur de m_4 telle que la p.e.r. est dégénérée. Ce résultat généralise à $n > 4$. En outre, si $m_1=m_2=m_3 > m_4 > 0$, il existe seulement une autre valeur de m_4 telle que U aie un point critique dégénéré.

d) Si $n=4$ et les masses sont égales il y a : 12 solutions Moulton, d'index 2; 6 solutions en carré, d'index 4; 8 solutions en triangle équilatère et masse au centre, d'index 2; 24 solutions en triangle isocèle et masse à l'axe de symétrie, d'index 3, et 2 familles de 48 solutions chacune, formées par trois masses aux sommets d'un triangle scalène et la quatrième à l'intérieur du triangle, et avec indexes respectifs 3 et 4.

e) On considère l'ensemble des masses telles que U a points critiques dégénérés, (sans la condition $\sum_{i=1}^n m_i=1$). Sa mesure n -dimensionnelle est zéro, mais la mesure $n-1$ -dimensionnelle est positive.

Une borne supérieure du nombre de p.e.r. a été donnée par Kuz'mina en 1977 [3]. On emploie les estimations de Milnor pour le nombre de composantes d'une variété algébrique réelle. Soit K_n le nombre de p.e.r. du problème des n corps. Pour les masses telles que ce nombre soit fini on a :

$$K_n \leq 2(n-2)(3n+1)(6n+1) \frac{(n^2-n+6)}{2}.$$

En particulier, pour $n=4,5,6$ on a, respectivement: $52 \cdot 25^9$, $96 \cdot 31^{13}$, $152 \cdot 37^{18}$. S'il n'y a pas aucun point critique dégénéré, c. à d. si U est fonction de Morse, alors K_n est fini. La borne inférieure de Palmore donne en ces cas: 34, 294, 3096.

On retourne au cas $n=4$. Les solutions Moulton, carré et triangle équilatère étaient classiques pour masses égales. Notons que le type Moulton appartient à un minimum de $-U$, carré à un maximum et que les valeurs de $-U$ pour les cas triangle équilatère et isoscèle sont -0.1811110924 , -0.1811095060 , respectivement. Cela donne un aperçu sur le fait que les solutions non classiques sont très proches de la solution en triangle équilatère ce qui explique qu'elles aient resté inconnues jusqu'au présent.

En fait, au moins les solutions isoscèles étaient à la portée de Pedersen. Si on fait l'évolution des p.e.r. du cas restreint 3+1 au cas des 4 masses égales on a la fig. 4.

Dans le cas de 4 masses arbitraires (qui seront représentées comme les coordonnées barycentriques d'un point d'un tétraèdre T), qu'est ce qu'on cherche?

- a) Division de T en régions pour lesquelles le nombre de p.e.r. est différent.
- b) Masses pour lesquelles existe dégénération (frontières des régions de a)).
- c) Pour des masses données, obtenir les p.e.r. et "identifier". (Par exemple, l'identification peut se faire reliant par évolution chacune de ces solutions à celle qu'on obtient si les masses sont égales).

On va exposer les principaux résultats de [19] que portent sur les solutions qui par évolution donnent solutions du cas de 4 masses égales qui ont au moins une symétrie. (On notera après quelle est l'importance des autres).

Deux méthodes sont proposées:

1) Évolution : Cette méthode est générale en Analyse Numérique. Connue sous le nom de méthode de Davidenko (entre beaucoup d'autres), peut se résumer disant que pourvu que $F(x,m)=0$ (eq.(3)), soit suffisamment différentiable, si on connaît une solution x^* pour un point $m=m^*$ on peut passer à la solution x^{**} correspondante à $m=m^{**}$. Tout simplement, joignant m^* et m^{**} par une courbe dans l'espace des paramètres m , on progresse soit directement par des petits morceaux sur la courbe, soit en résolvant une équation différentielle associée (ce qui revient aussi à des petits morceaux sur elle).

Il y a des difficultés. Deux ou plusieurs solutions peuvent se joindre et disparaître. Une solution peut donner naissance à plusieurs et même à un certain point sur la courbe peuvent apparaître solutions qui n'existaient pas. C'est, bien sur, le phénomène de bifurcation. L'apparition d'une bifurcation se fait aux p.e.r. dégénérées.

2) Directe: La prolongation d'une solution aux masses 121
 prochaines exige que le jacobien de $F(x,m)$ par rapport à x
 soit non nul. Pour déterminer une p.e.r. on peut fixer les
 masses m_1, m_2 à $(0,0)$, $(1,0)$ et prendre $(x \cos A, x \sin A)$,
 $(y \cos B, y \sin B)$ comme coordonnées de m_3, m_4 . Soit

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^4, X = (x, y, A, B), 0 < x \leq y, 0 < A, B < \pi\}.$$

On peut montrer qu'ayant donné un point X , une condition né-
 cessaire et suffisante pour qu'il soit p.e.r. (pour des mas-
 ses convenables) est

$$G(X) = (r_{12}^{-3} - r_{23}^{-3}) (r_{12}^{-3} - r_{14}^{-3}) (r_{24}^{-3} - r_{34}^{-3}) (r_{13}^{-3} - r_{34}^{-3}) - \\
 - (r_{14}^{-3} - r_{34}^{-3}) (r_{12}^{-3} - r_{24}^{-3}) (r_{23}^{-3} - r_{34}^{-3}) (r_{12}^{-3} - r_{13}^{-3}) = 0.$$

Des 6 équations (2) il en y a 4 indépendantes. Si
 $G(X)=0$ et on vérifie trois des quatre équations indépen-
 dantes de (2) la quatrième est aussi satisfaite. Soient $F = \mathcal{X} \times T \rightarrow$

$$\mathbb{R}^3 \text{ ces trois équations et } J(X) = \begin{vmatrix} D_X F \\ D_X G \end{vmatrix}.$$

Si $G(X)=0$, alors $J(X)=0$ contient les p.e.r. dégénérées.
 A l'aide de F on obtient les masses correspondantes. Du point
 de vue pratique, si on se donne y, B, x tels que $2y \cos B +$
 $4 \sin B \cdot x^2 > y^2 + 1$, il existe une seule A qu'on peut trouver
 par une méthode de Newton qu'on démontre être convergente.
 Fixés y, B on a $J=J(x)$.

Les résultats ont été obtenus par la méthode 1) et véri-
 fiés par 2). La fig. 5 montre une représentation qualitative
 des régions à l'espace des masses. Il suffit de donner $1/24$
 du tétraèdre des masses ($m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq m_4$). La fig. 6 donne les
 disparitions qu'on a entre le point m^0 appartenant à masses

égales et le cas limite restreint 3+1.

On a 5 surfaces S_i . Les masses sur une de ces surfaces sont telles que U perd son caractère de fonction de Morse. Quant aux bifurcations: à S_1 il y a création de 2 couples de p.e.r. qui évoluent à L_0, L_1 (fig. 1 a) lorsque $m_1 = m_2 = m_3$, $m_4 \rightarrow 0$; à $S_{2,3,4,5}$ il y a fusion et disparition des p.e.r. numérotées 2 et 6, 4 et 8, 3 et 7, 1 et 5, respectivement à la fig. 6.

Quantitativement les points les plus représentatifs à la fig. 5 ont les masses suivantes:

$O = (.25, .25, .25, .25)$; $I = (0, 1/3, 1/3, 1/3)$;
 $G = (0, .28827635, .28827635, .42344731)$;
 $J = (0, 0, .5, .5)$; $E = (0, 0, 0, 1)$; $H = (0, .11959987, .44020007, .44020007)$;
 $A = (.24983388, .24983388, .24983388, .25049836)$;
 $B = (.24966130, .24966130, .25033870, .25033870)$;
 $C = (.24846730, .25051090, .25051090, .25051090)$;
 $D = (.24903371, .24903371, .25096629, .25096629)$;
 $F = (.20434680, .26521773, .26521773, .26521773)$.

Les volumes des différentes régions et leurs caractéristiques sont donnés à la table I.

Sur le segment OI on trouve le point C . C'est à ce point qu'on produit la disparition des solutions scalènes (par fusion d'une solution d'index 3 avec une d'index 4). Ainsi la région d'existence des p.e.r. qui par évolution donnent le cas scalène pour masses égales, est très petite et les masses doivent être presque égales.

Palmore montra que le nombre de p.e.r. est exactement le minimum $\sum \mu_i(n) = [2^{n-1}(n-2) + 1] (n-2)!$ (pourvu que U soit fonction de Morse) dans un ensemble ouvert de l'espace des masses. La table I suggère que cet ouvert a une mesure presque totale (97,7% si $n=4$). On peut conjecturer que cela est vrai pour tout n .

Il y a des nombreux cas dégénérés se trouvant sur une des surfaces S_i ou même sur deux ou trois d'elles. Ainsi, au point F il y a 32 p.e.r.

Si on prolonge les S_i aux autres morceaux du tétraèdre on trouve que S_5 devient du type S_2 en traversant OIJ et du type S_4 en traversant OIE. D'une façon pareille S_4 devient du type S_3 si on traverse OEJ.

Dans [19] on fait mention à l'application des p.e.r. obtenues au calcul des ensembles de bifurcation [21] : Valeurs de l'énergie h et du moment c telles que les variétés invariantes I_{hc} (points de l'espace des phases avec cette énergie et moment) changent de structure. En particulier cela dépend de l'ordre des valeurs du potentiel aux p.e.r. le nombre de cas différents à considérer (plusieurs centaines) semble défier une analyse détaillée profitable.

Pour finir disons quelques mots à propos de la stabilité (linéaire) des p.e.r. du problème des 4 corps. On peut écrire les équations dans le système d'axes tournants avec vitesse angulaire ω :

$$\ddot{z}_i - 2\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dot{z}_i - \omega^2 z_i = \sum_{i \neq j=1}^n m_j \frac{z_j - z_i}{r_{ij}^3} .$$

Comme d'habitude on trouve les équations variationnelles, on substitue aux points d'équilibre et on a une équation pour le spectre du problème linéarisé:

$$\Delta(\lambda) = \left| \begin{array}{c|c} M - \lambda^2 I & N + 2\omega \lambda I \\ \hline N - 2\omega \lambda I & P - \lambda^2 I \end{array} \right| = 0,$$

où M, N, P sont des matrices aisément calculables en fonction des coordonnées des p.e.r. (quel que soit n). Si n=4 nous avons

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 (\lambda^2 + \omega^2)^3 (\lambda^8 + a\lambda^6 + b\lambda^4 + c\lambda^2 + d) .$$

Le calcul de a, b, c, d en fonction des mineurs principaux de

$\begin{pmatrix} N \\ P \end{pmatrix}$ est simple. Il faut que $R(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$ aie toutes ses racines négatives.

Les résultats qu'on a obtenu se résument disant que seulement les classes qui par évolution donnent les solutions en carré, si les masses sont égales, peuvent être stables. En plus il faut que m_4 soit près de l'unité: seul le cas planétaire, une grande masse et les autres très petites et toutes presque à la même distance de la masse centrale, peut être stable comme p.e.r. On conjecture la validité de ce résultat pour n quelconque.

Plus exactement, la fig. 7 montre l'évolution pour les solutions pouvant posséder stabilité. Le cas limite 3+1 donne trois régions $\bar{R}_4 \subset \bar{R}_6 \subset \bar{R}_5$ ($\bar{R}_4 = \text{CST}$, $\bar{R}_6 = \text{UTC}$, $\bar{R}_5 = \text{CUVYC}$)

dans lesquelles doit se trouver le point représentatif des masses m_2, m_3, m_4 pour que m_1 soit en libration stable. (Le numéro des régions ici vient du nom du cas limite par analogie avec la fig. 1 a). Observons que la stabilité de la p.e.r. a besoin de stabilité du point de libration et de la configuration Lagrange des trois masses finies. Ainsi la courbe limite de la stabilité du point de libration type L_5 est UVY, et celle du Lagrange est XXY. Cela explique la forme de R_5 . Il faut se rapporter à [19] pour les détails.

Références

- [1] Brumberg, V.A.: "Permanent configurations in the problem of four bodies and their stability", Soviet Astronomy (AJ) 34 (1958), 57-79.
- [2] Hagihara, Y.: "Celestial Mechanics". Vol. 1, MIT Press, 1970.
- [3] Kuz'mina, R.P.: "On an upper estimate for the number of central configurations in the planar n-body problem", Sov. Math. Doklady 18 (1977), 818-821.
- [4] Leontovič, An. M.: "On the stability of the Lagrange periodic solutions for the reduced problem of three bodies", Sov. Math. Doklady 3 (1962), 425-430.
- [5] Llibre, J.: "Posiciones de equilibrio relativo del problema de 4 cuerpos", Pub. Mat. UAB 3 (1976), 73-88.
- [6] Mac Millan, W.D., Bartky, W.: "Permanent configurations in the Problem of four bodies", Trans. Amer. Math. Soc. 34 (1932), 838-875.
- [7] Marchal, Ch.: "Qualitative methods and results in Celestial Mechanics", T.P. 1975-77, O.N.E.R.A.
- [8] Palmore, J.: "Classifying Relative Equilibria.I", Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), 904-908.

- [9] Palmore, J.: "Classifying Relative Equilibria.II", Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), 489-491.
- [10] Palmore, J.: "Classifying Relative Equilibria.III", Letters in Math. Phys. 1 (1975), 71-73.
- [11] Palmore, J.: "New Relative Equilibria of the N-Body Problem", Letters in Math. Phys. 1 (1976), 119-123.
- [12] Palmore, J.: "Measure of degenerate relative equilibria. I", Annals of Math. 104 (1976), 421-429.
- [13] Palmore, J.: "Minimally classifying relative equilibria", Letters in Math, Phys. 1 (1977), 395-399.
- [14] Pedersen, P.: "Librationspunkte im restringierten vierkörperproblem", Dan. Mat. Fys. Medd. 21, n^o 6, (1944).
- [15] Pedersen, P.: "Stabilitätuntersuchungen im restringierten vierkörperproblem", Dan. Mat. Fys. Medd. 26, n^o 16, (1952).
- [16] Siegel, C.L., Moser, J.K.: "Lectures on Celestial Mechanics", Springer, 1971.
- [17] Simó, C.: "Aspects topologiques en Mécanique Céleste", Exposé à l'Institut Poincaré, Paris, 21 Mai 1975.
- [18] Simó, C.: "Posiciones de equilibrio relativo del problema de 3+1 cuerpos y su evolución", Pub. Mat. UAB 3 (1976), 90-101.
- [19] Simó, C.: "Relative equilibrium solutions in the four body problem", à paraître in Cel. Mech.
- [20] Simó, C.: "Sur la variété de collision triple", Pub. Mat. UAB, 8 (1978).
- [21] Smale, S.: "Topology and Mechanics.II", Invent. Math. 11 (1970), 45-64.

Table I

Classes	Sommets	Numéro ν	p.e.r.	Index $i =$			p.e.r. géométrique- ment différentes $g (= \frac{\nu}{2} + 6)$	Volume rela- tif
				2	3	4		
1	OABC	50		20	24	6	31	4 E-9
2	aABC	46		18	22	6	29	2.5 E-9
3	aBCD	42		16	20	6	27	4 E-9
4	abCA	42		16	20	6	27	4.5 E-9
5	aDFbC	38		14	18	6	25	1.7 E-7
6	abAE	38		14	18	6	25	9.5 E-4
7	FGHI	38		12	18	8	25	2.2 E-2
8	EabDFGHJ	34		12	16	6	23	.977

Fig. 1 a

128

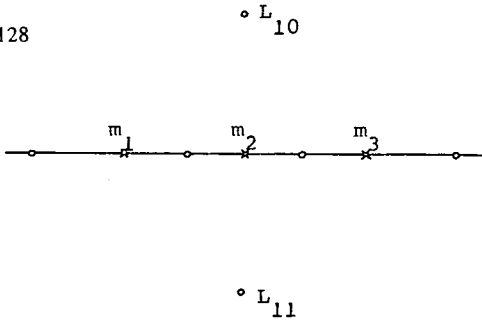


Fig. 1 b

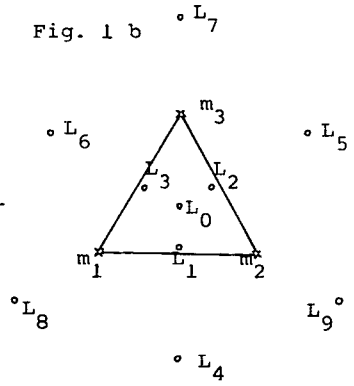
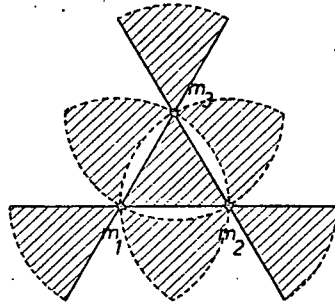
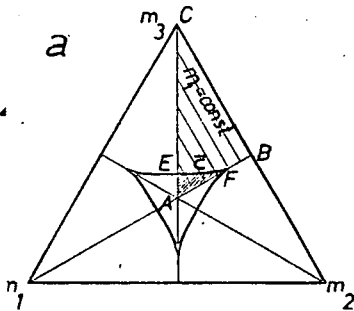


Fig. 2



a



b

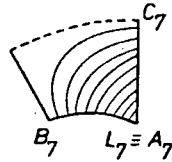
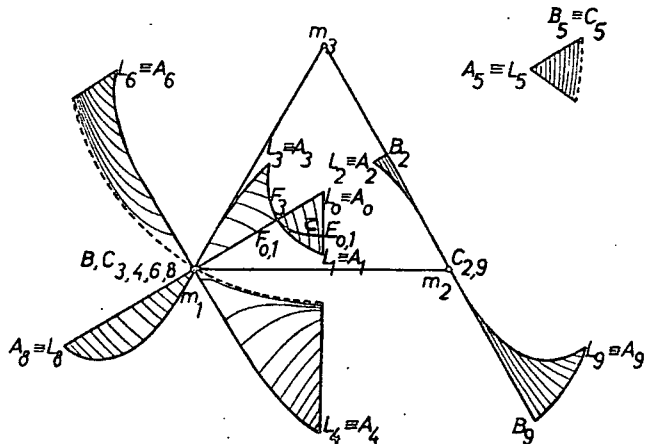


Fig. 3



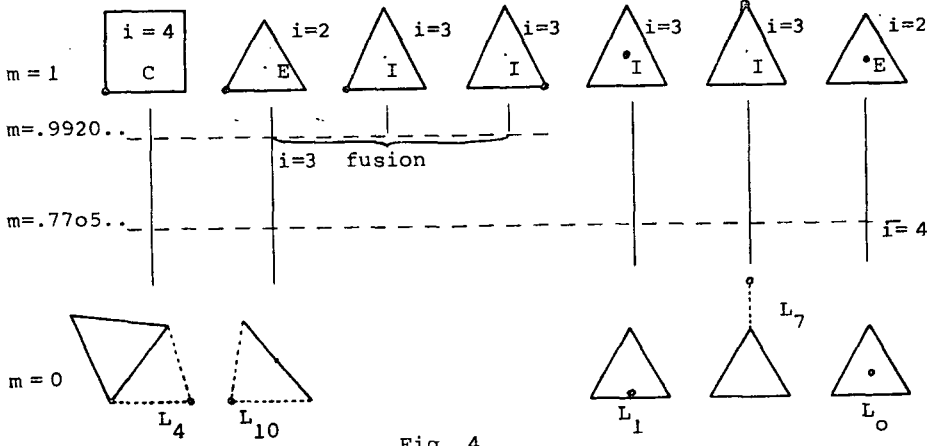


Fig. 4

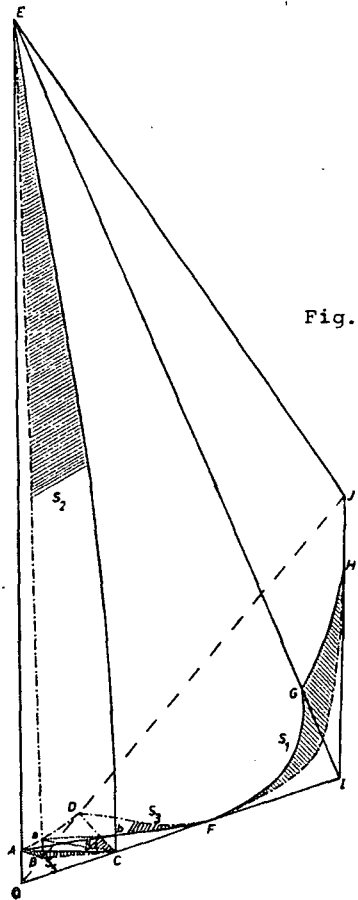


Fig. 5

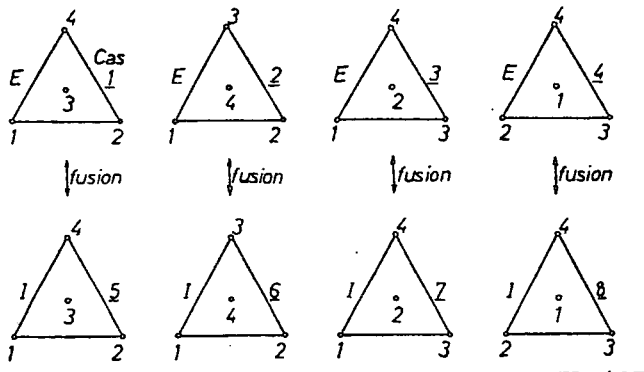


Fig. 6

