Pub. Mat. UAB
Nº 9, Setembre 1978

SOBRE EXTENSIONES CENTRALES EN UNA VARIEDAD DE GRUPOS

Memoria presentada por
IRENE LLERENA RODRIGUEZ
para aspirar al grado de
Doctor en Matemáticas
por la
Universidad de Barcelona

Revisada

Prof. Dr D. Rafael Mallol
Catedrático de Algebra
Universidad de Barcelona

Tesis doctoral de la Dra Dña IRENE LLERENA RODRIGUEZ

Tema: "SOBRE EXTENSIONES CENTRALES EN UNA VARIEDAD DE GRUPOS"

Tribunal de Tesis

Presidente: D. JUAN AUGE FARRERAS
Catedrático de Análisis Matemático 3º
Facultad de Matemáticas
Universidad de Barcelona

Vocales: D. JOSE TEIXIDOR BATLLE
Catedrático de Geometría Analítica y Topología
Facultad de Matemáticas
Universidad de Barcelona

D. JOSE VAQUER TIMONER
Catedrático de Geometría 1º (Geometría y Trigonometría) y Geometría 5º (Geometría Diferencial)
Facultad de Matemáticas
Universidad de Barcelona

D. RAFAEL AGUILO FUSTER
Catedrático de Análisis Matemático 4º y 5º
Facultad de Matemáticas
Universidad de Barcelona

Director: D. RAFAEL MALLOL BALMAÑA
Catedrático de Algebra
Facultad de Matemáticas
Universidad de Barcelona

Realizada la presentación y lectura de la tesis en 7 de Diciembre de 1977, obtuvo la calificación de SOBRESALIENTE "cum laude".

Barcelona, 8 de Febrero de 1978

EL DECANO,

INTRODUCCION

El intento de generalizar los funtores de homología y de cohomología, definidos en la categoría $\underline{Gr}$ de los grupos, a otras categorías, data ya de los años sesenta, con definiciones más o menos sofisticadas. Sin embargo, no es hasta 1970 cuando U. Stammbach da en (14) una definición de los funtores V y $\tilde{V}$ como generalización de H_2 y H^2, respectivamente, para el caso concreto de variedades de grupos. La mayor parte de las propiedades de H_2 y H^2 se generalizan sin dificultad a V y $\tilde{V}$, incluyendo el teorema de los coeficientes universales y la sucesión exacta de los cinco términos demostrada, independientemente, en 1966 por J. Stallings y U. Stammbach.

Es un hecho bien conocido que $H^2(Q,A)$ clasifica las extensiones del grupo Q por el Q-módulo por la izquierda A; es decir, existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto $H^2(Q,A)$ y el conjunto de clases de equivalencia de extensiones de Q por A, que es, además, un isomorfismo respecto las correspondientes estructuras de grupo abeliano. Se demuestra, asimismo, que cuando Q es un grupo de una variedad $\underline{V}$, si el producto semidirecto $A \rtimes Q$ está en $\underline{V}$, el grupo $\tilde{V}(Q,A)$ clasifica las extensiones de Q por A contenidas en $\underline{V}$. El caso en que A sea un Q-módulo trivial da lugar a las llamadas extensiones centrales, esto es, extensiones

$$E: \quad A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$$

tales que A está contenido en el centro de G.

Para el caso particular de la variedad $\underline{Ab}$ de los grupos abelianos, si A es un Q-módulo trivial, se tiene

$$\tilde{V}(Q,A) = \mathrm{Ext}^1_Z(Q,A) ,$$

que clasifica las extensiones abelianas del grupo abeliano Q por el Q-módulo trivial A. El teorema de los coeficientes universales

$$\tilde{V}(Q,A) = \mathrm{Ext}^1_Z(Q,A) \rightarrowtail H^2(Q,A) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(H_2Q,A)$$

nos da, entonces, el conúcleo de la inclusión del grupo de las extensiones abelianas de Q por A en el grupo de todas las extensiones centrales de Q por A, y nos dice, además, que $\tilde{V}(Q,A)$ es un sumando directo de $H^2(Q,A)$.

En este trabajo me propongo generalizar la sucesión de los coeficientes universales, interpretada como caracterización del conúcleo

$$\mathrm{Ext}^1_Z(Q,A) \rightarrowtail H^2(Q,A) ,$$

a variedades de grupos $\underline{V}$ de exponente cero (es decir, tales que $\underline{V} \supset \underline{Ab}$). Demuestro, para ello, que si $\underline{V}$ es una variedad de exponente cero, Q un grupo de $\underline{V}$, y A un Q-módulo trivial, la sucesión

$$\tilde{V}(Q,A) \rightarrowtail H^2(Q,A) \longrightarrow Hom(I,A) \longrightarrow Ext(VQ,A) \longrightarrow Ext(H_2Q,A) \twoheadrightarrow Ext(I,A)$$

donde $I = Ker\ (H_2Q \longrightarrow VQ)$, es exacta y natural (teorema 3.2 del capítulo II).

A partir de este resultado estudio en el apartado 4 del capítulo II diferentes casos particulares concretos. Los más interesantes aparecen al considerar la variedad $\underline{N}_c$ de los grupos nilpotentes de clase menor o igual que c. Por ejemplo, si $Q \in \underline{N}_c$ admite una presentación libre $S \rightarrowtail F \twoheadrightarrow Q$ tal que $S \subset F_c$, resulta que la sucesión exacta anterior se reduce a

$$\tilde{V}(Q,A) \rightarrowtail H^2(Q,A) \twoheadrightarrow Hom(I,A)\,.$$

Estos grupos Q resultan ser, entonces, precisamente, las extensiones "stem" de los grupos nilpotentes libres de clase c-1 con tantos generadores como Q.

También para la variedad $\underline{N}_c$ obtengo el siguiente resultado: Si A es abeliano libre, entonces $\tilde{V}(Q,A)$ es un sumando directo de $H^2(Q,A)$ (teorema 4.1. del capítulo II).

Sin embargo, el que $\tilde{V}(Q,A)$ sea un sumando directo de $H^2(Q,A)$ no parece ser cierto en general. Como primer paso para analizar los casos en que esto ocurre, estudio bajo qué condiciones se puede afirmar que $\tilde{V}(Q,A)$ sea un subgrupo puro del grupo $H^2(Q,A)$. El concepto de subgrupo puro, introducido por H. Prüfer en 1923, resulta ser una noción intermedia entre la de subgrupo y la de sumando directo. Un subgrupo puro es bajo determinadas condiciones un sumando directo. Así obtengo algunos resultados que aseguran, en determinados casos, que $\tilde{V}(Q,A)$ es un sumando directo de $H^2(Q,A)$. En particular, esto ocurre si Q es un grupo finito tal que $\mathrm{Ext}(VQ,A) = 0$ (teorema 3.1 del capítulo III), o, también, si VQ es libre de torsión y $H^2(Q,A)$ es suma de grupos cíclicos (teorema 3.3 del capítulo III).

Esta memoria está distribuida en tres capítulos. En el capítulo I se agrupan las definiciones y resultados fundamentales sobre variedades de grupos y sobre (co)-homología de grupos, que necesito a lo largo del trabajo. En el capítulo II desarrollo la teoría de extensiones con núcleo abeliano en una variedad $\underline{V}$, demuestro, para variedades de exponente cero, la generalización del teorema de los coeficientes universales, ya citado, y estudio algunos casos particulares que de él se derivan. En el capítulo III estudio, por último, las condiciones de pureza y descomponibilidad de la inclusión $\tilde{V}(Q,A) \rightarrowtail H^2(Q,A)$, en conexión con los resultados del capítulo II.

En este trabajo aparecen sin demostración todos aquellos resultados contenidos ya en los libros o artículos citados en la bibliografía. En la bibliografía he citado unicamente los libros o artículos que se precisan explícitamente en este trabajo.

Tengo que expresar mi agradecimiento al Profesor Dr D. Rafael Mallol de la Universidad de Barcelona que presenta esta memoria, así como al Profesor Dr Urs Stammbach de la ETH Zürich por los estímulos, sugerencias e indicaciones que de él he recibido. También a la Eidgenössische Technische Hochschule de Zürich y al Consejo Superior de Investigaciones Científicas que, mediante una beca de intercambio, me han prestado su apoyo financiero durante una parte de la redacción de este trabajo.

Irene Llerena

Barcelona, febrero de 1977

Capítulo I

MATERIAL PREVIO

En este primer capitulo incluyo los conceptos y teoremas sobre variedades de grupos que necesito a lo largo del trabajo, así como una breve introducción, sin demostraciones, a la teoría de homología de grupos y su aplicación al estudio de las extensiones de grupos.

Para más detalles sobre variedades puede consultarse el excelente libro de H. Neumann "Varieties of groups" (11). Los resultados de la teoría de homología están todos incluidos en el libro de P.J. Hilton y U. Stammbach "A course in homological algebra" (5), o bien en el de U. Stammbach "Homology in group theory" (15).

I.1. Variedades de grupos

Sea X un conjunto de letras. Designaré por F_∞ el grupo libre engendrado por X.

Una palabra es un elemento de F_∞.

Una sucesión finita de letras $x_1,x_2,\ldots,x_n,x_1^{-1},\ldots,x_n^{-1}$ determina un elemento $v = v(x_1,\ldots,x_n)$ en F_∞ y recíprocamente. Se dice, entonces, que v es una palabra en n variables.

Si, para todo homomorfismo $f\colon F_\infty \longrightarrow G$ de F_∞ en un grupo G, $f(v) = e$, se dice que la palabra v es una ley en G. En general, dado un homomorfismo $f\colon F_\infty \longrightarrow G$ y una palabra $v = v(x_1,\ldots,x_n)$, $f(v)$ se llama valor de v para los valores $a_i = f(x_i)$, $i = 1,\ldots,n$, de las variables, y se escribe

$$f(v) = v(a_1,\ldots,a_n) .$$

Una variedad de grupos $\underline{V}$ es una subcategoría llena de la categoría $\underline{Gr}$ de todos los grupos, cerrada al tomar subobjetos, cocientes y productos cartesianos.

Dado un conjunto de palabras V, los grupos para los que todas las palabras de V son leyes forman una variedad $\underline{V}$; diré que V define $\underline{V}$. Según un resultado de G. Birkhoff (1935), el recíproco también es cierto: Toda variedad $\underline{V}$ puede definirse de esta forma a partir de un conjunto de palabras (véase (11)).

Teorema 1.1.

Dada una variedad $\underline{V}$, sea V el conjunto de todas las leyes verificadas por los grupos de $\underline{V}$. Cualquier grupo para el que todas las palabras de V sean leyes está en $\underline{V}$.

Un conjunto V de palabras define una variedad $\underline{V}$. El conjunto V^* de las leyes comunes a todos los grupos de $\underline{V}$ contiene a V, pero, en general, no coincide con V. V^* se llama "clausura de V". El teorema anterior asegura que V y V^* definen la misma variedad.

Ejemplos

Son variedades de grupos:

a) La categoría $\underline{Gr}$ de todos los grupos. Esta variedad está definida por el conjunto vacío de leyes.

b) Los grupos abelianos: $\underline{Ab}$. Esta variedad está definida por la ley $[x_1,x_2]$, cuya clausura es $[F,F]$.

c) Los grupos nilpotentes de clase menor o igual que c: $\underline{N}_c$. La ley definidora es $[x_1,[x_2,[x_3,\dots,[x_c,x_{c+1}]\dots]]]$, y su clausura es el $(c+1)$-ésimo término F_{c+1} de la serie central descendente de $F = F_\infty$.

d) Los grupos resolubles de longitud $\leq \ell$.

e) Los grupos polinilpotentes de clase $\leq (c_1,\dots,c_n)$.

f) Los grupos de exponente q: $\underline{B}_q$. Su ley es x_1^q .
(Variedad de Burnside de exponente q.)

La intersección de dos variedades es una variedad. En particular,

g) Los grupos abelianos de exponente q forman una variedad $\underline{Ab}_q = \underline{Ab} \cap \underline{B}_q$, definida por la ley $[x_1, x_2]\, x_3^q$.

Sea V un conjunto de palabras que defina la variedad $\underline{V}$, y sea G un grupo arbitrario. Se llama <u>subgrupo verbal</u> del grupo G asociado a V al subgrupo $V(G)$ engendrado por los elementos de la forma

$$f(v) \qquad \text{con} \qquad v \in V \qquad \text{y} \qquad f \in \mathrm{Hom}(F_\infty, G).$$

Del razonamiento que sigue se desprende que $V(G)$ no depende en realidad de V sino únicamente de la variedad $\underline{V}$.

$V(G)$ es invariante por los endomorfismos de G, y, en particular, es un subgrupo normal. Está claro que G/VG es de $\underline{V}$. Aun más, se trata del mayor cociente de G que es de $\underline{V}$. Más preciso: todo homomorfismo f de G en un grupo $Q \in \underline{V}$ factoriza de manera única a través de G/VG:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads] & & Q \\ & G/VG \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

donde $G \twoheadrightarrow G/VG$ es la proyección canónica.

Ejemplos

a) Dado un grupo G, el subgrupo verbal de G asociado a $\underline{Ab}$ es $[G,G]$ y $G_{ab} = G/[G,G]$ es el "mayor" cociente abeliano de G.

b) El subgrupo verbal de un grupo G asociado a la variedad $\underline{N}_c$ es el (c+1)-ésimo término de la serie central descendente G_{c+1}, y G/G_{c+1} es el "mayor" cociente de G nilpotente de clase menor o igual que c.

Un grupo $\hat{F}$ de $\underline{V}$ se llama $\underline{V}$-libre sobre un conjunto $S \subset \hat{F}$ si, para toda función f de S en un grupo G de $\underline{V}$, existe un único morfismo $\hat{f}\colon \hat{F} \longrightarrow G$ que extienda f

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & G \\ \hat{F} \arrow[ur, dashed, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

A los grupos $\underline{Gr}$-libres los llamaré absolutamente libres o simplemente libres si no existe peligro de confusión.

Sea F un grupo absolutamente libre sobre S y $V(F)$ su subgrupo verbal asociado a la variedad $\underline{V}$. Dada una función $f\colon S \longrightarrow G$, existe, por definición, una única extensión f' de f a F que, a su vez, factoriza de manera única a través de $F/V(F)$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & G \\ F \arrow[ur, "f'"] \arrow[d] & \\ F/V(F) \arrow[uur, dashed, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$F/V(F)$ es, pues, un grupo V-libre. Si f' es un epimorfismo, también lo es $\hat{f}$. Por lo tanto, todo grupo G de V puede ponerse como cociente de un grupo V-libre $\hat{F}$. La correspondiente sucesión exacta corta

$$R \rightarrowtail \hat{F} \twoheadrightarrow G$$

se llama una <u>presentación V-libre</u> de G.

En una variedad V existe siempre el coproducto (en la categoría V) de dos grupos G_1 y G_2 de V, que no es otro que

$$G_1 *_V G_2 = \frac{G_1 * G_2}{V(G_1 * G_2)}$$

donde $G_1 * G_2$ designa el coproducto en <u>Gr</u>.

I.2. <u>(Co)-Homología de grupos</u>

Sea G un grupo multiplicativo. Designaré por ZG el <u>anillo entero</u> sobre G, y llamaré <u>G-módulos</u> (por la izquierda o por la derecha) a los ZG-módulos (por la izquierda o derecha, respectivamente).

El <u>n-ésimo grupo de cohomología</u> del grupo G con coeficientes en el G-módulo por la izquierda A es el grupo abeliano

$$H^n(G,A) = \mathrm{Ext}^n_{ZG}(Z,A).$$

El <u>n-ésimo grupo de homología</u> del grupo G con coeficientes en el G-módulo por la derecha B es el grupo abeliano

$$H_n(G,B) = \mathrm{Tor}^{ZG}_n(B,Z).$$

En ambos casos Z está considerado como G-módulo trivial.

Si A (resp. B) es el G-módulo trivial Z, escribiré

$$H_n(G,Z) = H_nG \qquad H^n(G,Z) = H^nG$$

Si G es libre, $H_nG = 0$ y $H^nG = 0$ para $n \geqslant 2$.

De la definición se sigue que las sucesiones exactas cortas de G-módulos dan lugar a sucesiones exactas largas de homología y cohomología. Asimismo, se deducen sin grandes dificultades los primeros grupos de (co)-homología con coeficientes en G-módulos triviales A y B :

$$H^0(G,A) = A \qquad H_0(G,B) = B$$

$$H^1(G,A) = \mathrm{Hom}(G_{ab},A) \qquad H_1(G,B) = G_{ab} \otimes B \,.$$

Más complicada es la demostración del siguiente teorema básico en el estudio de las extensiones centrales de grupos:

Teorema 2.1. (Sucesión exacta de los cinco términos)

Sea $N \rightarrowtail H \twoheadrightarrow G$ una sucesión exacta corta de grupos y sean A y B G-módulos por la izquierda y derecha respectivamente. Las sucesiones

$$0 \longrightarrow H^1(G,A) \longrightarrow H^1(H,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(N_{ab},A) \longrightarrow H^2(G,A) \longrightarrow H^2(H,A)$$

$$H_2(H,B) \longrightarrow H_2(G,B) \longrightarrow B \otimes_G N_{ab} \longrightarrow H_1(H,B) \longrightarrow H_1(G,B) \longrightarrow 0$$

son exactas y naturales. N_{ab} se considera G-módulo via

$$y.(n[N,N]) = xnx^{-1}[N,N]$$

donde $y \in G$, $n \in N$ y $x \in H$ es una antiimagen de y.

Corolario 2.2.

Si $N \rightarrowtail H \twoheadrightarrow G$ es una sucesión exacta de grupos,

$$H_2H \longrightarrow H_2G \longrightarrow N/[H,N] \longrightarrow H_{ab} \longrightarrow G_{ab} \longrightarrow 0$$

es exacta y natural.

Corolario 2.3. (Fórmula de Hopf)

Sea $R \rightarrowtail F \twoheadrightarrow G$ una presentación libre de G. Entonces

$$H_2G \cong \frac{R \cap [F,F]}{[F,R]}.$$

En efecto, aplicando el corolario anterior a la presentación libre de G, se obtiene

$$0 \longrightarrow H_2G \longrightarrow R/[F,R] \longrightarrow F_{ab} \longrightarrow G_{ab} \longrightarrow 0$$

de donde resulta

$$H_2G \cong \operatorname{Ker}\,(R/[F,R] \longrightarrow F_{ab}) \cong \frac{R \cap [F,F]}{[F,R]}\,.$$

Teorema 2.4. (De los coeficientes universales)

Si C es un Q-módulo trivial, las sucesiones

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}(H_{n-1}Q,C) \longrightarrow H^n(Q,C) \xrightarrow{\pi} \operatorname{Hom}(H_nQ,C) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H_nQ \otimes C \longrightarrow H_n(Q,C) \longrightarrow \operatorname{Tor}(H_{n-1}Q,C) \longrightarrow 0$$

son exactas y naturales. Ambas descomponen aunque, en general, no de manera natural.

Observación.- Hay casos, como, por ejemplo, cuando C es unívocamente 2-divisible, en que las sucesiones exactas de los coeficientes universales descomponen de manera natural.

I.3. Extensiones con núcleo abeliano

Una de las primeras y más importantes aplicaciones de la cohomología de grupos es la clasificación de las extensiones de un grupo Q y un Q-módulo A por el segundo grupo de cohomología. De hecho, este grupo es conocido desde bastante antes de que se hiciera un desarrollo completo de la teoría de grupos de homología y cohomología en el contexto del álgebra homológica a partir de los funtores Tor y Ext.

Dados un grupo Q y un Q-módulo A, se llama <u>extensión de Q por A</u> a una sucesión exacta corta

$$E: \quad A \xrightarrow{h} G \xrightarrow{g} Q$$

tal que $$h(y.a) = x.h(a).x^{-1},$$

donde $y \in Q$, $a \in A$, y $x \in G$ con $g(x) = y$.

El que A sea Q-módulo trivial equivale a que $h(A)$ esté contenido en el centro de G, en cuyo caso se dice que la <u>extensión es central</u>.

Dos extensiones

$$E: \quad A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$$

$$E': \quad A \rightarrowtail G' \twoheadrightarrow Q$$

se llaman <u>equivalentes</u> si existe un homomorfismo $f: G \longrightarrow G'$ que haga conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & G \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f"] & Q \arrow[d, equal] \\ A \arrow[r, tail] & G' \arrow[r, two heads] & Q \end{tikzcd}$$

Obsérvese que, en tal caso, f es un isomorfismo.

La primera formulación de la clasificación de las extensiones por $H^2(Q,A)$ se basa en la idea de los sistemas de factores. Consideremos una extensión

$$E: \quad A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$$

y un sistema s de representantes de Q en G, es decir, una función $s: Q \longrightarrow G$ tal que $gs = Id_Q$ y $s(e) = e$. La función

$$\varphi : Q \times Q \longrightarrow A$$

definida por $\varphi(x,y) = s(x).s(y).s(xy)^{-1}$, $x, y \in Q$, se llama un <u>sistema de factores</u> de E.

φ puede ser interpretada como un elemento del grupo de homomorfismos $Hom_Q(B_2', A)$, donde B' designa la resolución standard normalizada no homogénea de Q (ver (5)). Aun más, φ es un cociclo y diferentes sistemas s de representantes de Q dan lugar a cociclos que se diferencian de φ en un coborde (ver (9) pág. 111). La extensión E determina, pues, de manera única una clase de cohomología $[\varphi] \in H^2(Q,A)$. Se establece así una aplicación entre las clases de extensiones equivalentes y $H^2(Q,A)$, que resulta ser una biyección. (Véase (15) pág. 24.)

El teorema 2.1 permite establecer esta biyección de otra forma más útil para este trabajo. La sucesión exacta de los cinco términos en cohomología con coeficientes en A asociada a la extensión $E: A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$, es

$$0 \longrightarrow H^1(Q,A) \longrightarrow H^1(G,A) \longrightarrow Hom_Q(A,A) \xrightarrow{\delta_E} H^2(Q,A) \longrightarrow H^2(G,A) .$$

La imagen por δ_E de la identidad de A es precisamente la clase cohomológica correspondiente a E en la biyección antes establecida ((15) págs 18 y sgts).

A continuación doy sin demostración una serie de proposiciones sobre la naturalidad de esta biyección. Para las demostraciones detalladas ver (15).

<u>Proposición 3.1.</u>

El diagrama

$$\begin{tikzcd} E: & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & G \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Q \arrow[d, equal] \\ E': & A' \arrow[r] & G' \arrow[r] & Q \end{tikzcd}$$

es conmutativo si y sólo si $\alpha_*([\varphi]) = [\varphi']$, donde $\alpha_* : H^2(Q,A) \longrightarrow H^2(Q,A')$ es el homomorfismo inducido por α , y $[\varphi]$, $[\varphi']$ son las clases cohomológicas correspondientes a E y E' respectivamente.

Obsérvese que, en tal caso, G' es el push-out de los homomorfismos $A' \longrightarrow G'$ y α . En adelante designaré por E_α la extensión E' así construida.

<u>Proposición 3.2.</u>

El diagrama

$$\begin{tikzcd} \bar{E}: & A \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & \bar{G} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\bar{f}"] & \bar{Q} \arrow[d, "\beta"] \\ E: & A \arrow[r, tail] & G \arrow[r, two heads] & Q \end{tikzcd}$$

es conmutativo si y sólo si $\beta^*([\varphi]) = [\bar{\varphi}]$, donde $\beta^* : H^2(Q,A) \longrightarrow H^2(\bar{Q},A)$ está inducido por β , y $[\varphi]$, $[\bar{\varphi}]$ son las clases cohomológicas correspondientes a E y $\bar{E}$ respectivamente.

Obsérvese que, en tal caso, $\bar{G}$ es el pull-back de los homomorfismos $G \longrightarrow Q$ y β . En adelante designaré por E^{β} la extensión $\bar{E}$ así construida.

Proposición 3.3.

Dado

$$\begin{tikzcd}
\bar{E}: & A \arrow[r, tail] \arrow[d] & \bar{G} \arrow[r, two heads] & \bar{Q} \arrow[d] \\
E': & A' \arrow[r, tail] & G' \arrow[r, two heads] & Q
\end{tikzcd}$$

existe $f: \bar{G} \longrightarrow G'$ que haga conmutativo el diagrama si y sólo si $\alpha_*([\bar{\varphi}]) = \beta^*([\varphi'])$, donde $\bar{\varphi}$ y φ' son las clases cohomológicas de $\bar{E}$ y E' respectivamente. En este caso, los posibles homomorfismos $f: \bar{G} \longrightarrow G'$ están en correspondencia biyectiva con las derivaciones $d: Q \longrightarrow A$.

La proposición que sigue nos da información sobre el homomorfismo π del teorema 2.4 de los coeficientes universales en el caso $n = 2$, relacionándolo con la sucesión exacta de los cinco términos.

Proposición 3.4.

Sea $E: N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ una extensión central de Q. Sea π como en el teorema de los coeficientes universales y

$$H_2G \longrightarrow H_2Q \xrightarrow{\delta_*} N \longrightarrow G_{ab} \longrightarrow Q_{ab} \longrightarrow 0$$

la sucesión homológica de los cinco términos asociada a E. Si $[\varphi] \in H^2(Q,N)$ es la clase cohomológica de E, se verifica

$$\pi([\varphi]) = \delta_* .$$

Para la demostración ver (15),

Según las propiedades de $\pi([\varphi])$ se definen varias clases de extensiones centrales de Q :

- Si $\pi[\varphi] = 0$, la extensión E se llama una extensión conmutadora.

- Si $\pi[\varphi]$ es un epimorfismo, E se llama una extensión "stem".

- Si $\pi[\varphi]$ es un isomorfismo, E se llama un recubrimiento "stem".

La siguiente proposición es casi inmediata:

Proposición 3.5.

Sea $E: N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ una extensión central de Q. Las siguientes condiciones son equivalentes:

a) E es una extensión "stem",

b) $G_{ab} \cong Q_{ab}$,

c) N está contenido en el conmutador de G.

Para un tratamiento completo de estas extensiones puede consultarse (15) capitulo V .

Capítulo II

EXTENSIONES CON NUCLEO ABELIANO EN UNA VARIEDAD

El intento de definición de los funtores V y $\tilde{V}$ como generalización de H_2 y H^2 a variedades de grupos arbitrarios data de mediados de este siglo. Desde un principio se sabía que las clases de extensiones con núcleo abeliano de un grupo contenidas en una variedad $\underline{V}$ formaban, con la suma de Baer, un grupo abeliano. Las primeras definiciones de los funtores V y $\tilde{V}$ se encuentran en los trabajos de M. Gerstenhaber (3) y J. Knopfmacher (6). Posteriormente, varios autores, J. Beck, M. André, F. Bachmann, M. Barr, G.S. Rinehart, F. Ulmer, han dado definiciones de teorías de homología en categorías muy generales que no sólo dan lugar a funtores V y $\tilde{V}$, sino a funtores correspondientes a los grupos de (co)-homología en dimensiones superiores. Ninguno de estos autores, sin embargo, hace referencia al caso particular de las variedades de grupos. Por primera vez U. Stammbach en (14) da una definición de V y $\tilde{V}$

para variedades de grupos y C. Leedham-Green estudia en (8) con detalle las teorías homológicas categoriales en el caso de variedades de grupos.

II.1. Los grupos $\tilde{V}(Q,A)$ y $V(Q,B)$

Sea $\underline{V}$ una variedad arbitraria, Q un grupo de $\underline{V}$ y A y B Q-módulos por la izquierda y por la derecha respectivamente. Sea $f\colon \hat{F} \twoheadrightarrow Q$ una presentación $\underline{V}$-libre de Q. Se definen

$$\tilde{V}(Q,A) = \operatorname{Ker}\,(f^*\colon H^2(Q,A) \longrightarrow H^2(\hat{F},A))$$

$$V(Q,B) = \operatorname{Coker}\,(f_*\colon H_2(\hat{F},B) \longrightarrow H_2(Q,B))$$

Demostraremos, ante todo, que estos grupos no dependen de la presentación libre $f\colon \hat{F} \longrightarrow Q$ considerada. En efecto, sea $f'\colon \hat{F}' \longrightarrow Q$ otra presentación $\underline{V}$-libre de Q. Existen morfismos h y h' que hacen conmutativo el triángulo

$$\begin{tikzcd} \hat{F} \arrow[rr, shift right, "h'"'] \arrow[dr, "f"'] & & \hat{F}' \arrow[ll, shift right, "h"'] \arrow[dl, "f'"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, obtenemos un diagrama conmutativo de grupos de cohomología

$$\begin{tikzcd}
 & H^2(Q,A) \arrow[dl, "f^*"'] \arrow[dr, "f'^*"] & \\
H^2(\hat{F},A) \arrow[rr, shift left, "h'^*"] & & H^2(\hat{F}',A) \arrow[ll, shift left, "h^*"]
\end{tikzcd}$$

de donde $\operatorname{Ker} f^* = \operatorname{Ker} h^*f'^* \supset \operatorname{Ker} f'^*$ y viceversa $\operatorname{Ker} f'^* \supset \operatorname{Ker} f^*$, lo que demuestra la igualdad.

De la definición resulta inmediatamente que en la variedad Gr de todos los grupos

$$\tilde{V}(Q,A) = H^2(Q,A)$$

$$V(Q,B) = H_2(Q,B).$$

También resulta claro que si $\hat{F}$ es V-libre, entonces

$$\tilde{V}(\hat{F},A) = 0 \quad y \quad V(\hat{F},B) = 0.$$

Veamos, ahora, el comportamiento de V y $\tilde{V}$ respecto de la primera y segunda variables.

Si $\alpha : A \longrightarrow A'$ es un morfismo de Q-módulos, el homomorfismo $\alpha_*: \tilde{V}(Q,A) \longrightarrow \tilde{V}(Q,A')$ está definido por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tilde{V}(Q,A) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\alpha_*"] & H^2(Q,A) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & H^2(\hat{F},A) \arrow[d, "\alpha_*"] \\
0 \arrow[r] & \tilde{V}(Q,A') \arrow[r] & H^2(Q,A') \arrow[r] & H^2(\hat{F},A')
\end{tikzcd}$$

Si $g: Q \longrightarrow Q'$ es un homomorfismo de grupos y $f: \hat{F} \twoheadrightarrow Q$, $f': \hat{F}' \twoheadrightarrow Q'$ son presentaciones V-libres de

Q y Q' respectivamente, existe $h\colon \hat{F} \longrightarrow \hat{F}'$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \hat{F} \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "h"'] & Q \arrow[d, "g"] \\ F' \arrow[r, two heads, "f'"] & Q' \end{tikzcd}$$

es conmutativo. $g^*\colon \tilde{V}(Q',A) \longrightarrow \tilde{V}(Q,A)$ está definido, entonces, por el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \tilde{V}(Q',A) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "g^*"] & H^2(Q',A) \arrow[r] \arrow[d, "g^*"] & H^2(\hat{F}',A) \arrow[d, "h^*"] \\ 0 \arrow[r] & \tilde{V}(Q,A) \arrow[r] & H^2(Q,A) \arrow[r] & H^2(\hat{F},A) \end{tikzcd}$$

(independencia de h!).

$\tilde{V}(-,-)$ es, por tanto, un funtor en dos variables. Razonamientos análogos demuestran que $V(-,-)$ es, asimismo, un funtor en dos variables.

Como en el caso ordinario, la sucesión exacta de los cinco términos para $\tilde{V}$ y V es básica en el estudio de las extensiones de la variedad $\underline{V}$.

Teorema 1.1. (Sucesión exacta de los 5 términos)

Sea $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ una sucesión exacta de grupos con $G \in \underline{V}$. Sean A y B Q-módulos por la izquierda y por la derecha respectivamente. Las sucesiones

$$0 \longrightarrow H^1(Q,A) \longrightarrow H^1(G,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_Q(N_{ab},A) \longrightarrow \tilde{V}(Q,A) \longrightarrow \tilde{V}(G,A)$$

$$V(G,B) \longrightarrow V(Q,B) \longrightarrow B \otimes_Q N_{ab} \longrightarrow H_1(G,B) \longrightarrow H_1(Q,B) \longrightarrow 0$$

son exactas y naturales. N_{ab} está considerado como Q-módulo via la conjugación (ver teorema 2.1 del capítulo I).

Demostración:

Sea $\hat{F} \twoheadrightarrow G$ una presentación $\underline{V}$-libre de G. La sucesión exacta de los cinco términos ordinaria junto con la definición de V da lugar al diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H_2(\hat{F},B) \arrow[r, equal] \arrow[d] & H_2(\hat{F},B) \arrow[d] & & & & \\
H_2(G,B) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & H_2(Q,B) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & B \otimes_Q N_{ab} \arrow[r] & H_1(G,B) \arrow[r] & H_1(Q,B) \arrow[r] & 0 \\
V(G,B) \arrow[r, dash] & V(Q,B) \arrow[ru, dashed] & & & &
\end{tikzcd}$$

A partir de él es clara la existencia de la aplicación $V(Q,B) \longrightarrow B \otimes_Q N_{ab}$ y la exactitud de la segunda sucesión del enunciado.

La demostración de la existencia y exactitud de la primera sucesión del enunciado es totalmente análoga.

En el caso particular en que $\underline{V}$ sea la variedad $\underline{Ab}$ de los grupos abelianos, del teorema anterior se deduce que son exactas las sucesiones

$$0 \longrightarrow V(Q,C) \longrightarrow C \otimes R \longrightarrow C \otimes F \longrightarrow C \otimes Q \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(Q,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R,C) \longrightarrow \tilde{V}(Q,C) \longrightarrow 0$$

donde $Q \in \underline{Ab}$, C es un Q-módulo trivial y $R \rightarrowtail F \twoheadrightarrow Q$ es una presentación $\underline{Ab}$-libre de Q. Por lo tanto, en $\underline{Ab}$, cuando C es trivial, se tiene

$$\tilde{V}(Q,C) = \mathrm{Ext}^1_Z(Q,C)$$

$$V(Q,C) = \mathrm{Tor}^Z_1(Q,C)$$

Demostraremos, por último, la sucesión de los coeficientes universales para una variedad $\underline{V}$ de exponente cero.

Teorema 1.2. (Teorema de los coeficientes universales)

Sea $\underline{V}$ una variedad de exponente cero. Sean $Q \in \underline{V}$ y C un Q-módulo trivial. Las sucesiones

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_Z(Q_{ab},C) \longrightarrow \tilde{V}(Q,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(VQ,C) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow VQ \otimes C \longrightarrow V(Q,C) \longrightarrow \mathrm{Tor}^Z_1(Q_{ab},C) \longrightarrow 0$$

son exactas, naturales y descomponen, aunque, en general, no de manera natural.

Demostración:

Sea $\hat{F} \twoheadrightarrow Q$ una presentación $\underline{V}$-libre de Q. Por la naturalidad del teorema ordinario de los coeficientes universales (2.4. cap. I), el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}(Q_{ab},C) \arrow[r, tail] \arrow[d] & H^2(Q,C) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(H_2Q,C) \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}(\hat{F}_{ab},C) \arrow[r, tail] & H^2(\hat{F},C) \arrow[r, two heads] & \mathrm{Hom}(H_2\hat{F},C)
\end{tikzcd}$$

conmuta. En él, $\mathrm{Ext}(\hat{F}_{ab},C) = 0$, ya que $\hat{F}_{ab}$ es libre en la variedad $\underline{V} \cap \underline{Ab} = \underline{Ab}$. En virtud de la "sucesión exacta de núcleos y conúcleos" ((5) pág. 99), los núcleos forman una sucesión exacta corta que es la primera del enunciado. Que esta sucesión descompone resulta, ahora, de forma inmediata, de la descomposición de las filas del diagrama.

De forma análoga se demuestra la segunda sucesión del enunciado.

II.2. Extensiones en $\underline{V}$

Una extensión $E:\ A \overset{h}{\rightarrowtail} G \overset{g}{\twoheadrightarrow} Q$ de un grupo $Q \in \underline{V}$ por un Q-módulo A se dice que es una extensión de $\underline{V}$ si G es un grupo de la variedad $\underline{V}$.

Observemos que si E es una extensión de $\underline{V}$,

i) toda extensión equivalente a E es, también, de $\underline{V}$,

ii) $A \in \underline{Ab} \cap \underline{V}$.

Sea $[\varphi] \in H^2(Q,A)$ la clase cohomológica correspondiente a la extensión E. Me propongo ver en qué condiciones E es de $\underline{V}$ y clasificar dichas extensiones.

Sea $f: \hat{F} \twoheadrightarrow Q$ una presentación $\underline{V}$-libre de Q, y sea G^f el pull-back

$$\begin{tikzcd}
E^f: & A \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & G^f \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \hat{F} \arrow[d, "f"] \\
E\ : & A \arrow[r, tail, "h"] & G \arrow[r, two heads, "g"] & Q
\end{tikzcd}$$

Si $G \in \underline{V}$, también $G \times \hat{F} \in \underline{V}$, y, por lo tanto pertenece a $\underline{V}$ $G^f = \left\{ (x,y) \in G \times \hat{F};\ g(x) = f(y) \right\}$. Ahora bien, como $\hat{F}$ es $\underline{V}$-libre, la sucesión E^f de $\underline{V}$ descompone; es decir, se tiene $G^f = A \rtimes \hat{F} \in \underline{V}$ ($A \rtimes \hat{F}$ = producto semidirecto de A por $\hat{F}$).

Se verifica, también, el recíproco:

Proposición 2.1.

La extensión $E: A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ con $Q \in \underline{V}$ es de $\underline{V}$ si y sólo si es del núcleo de $f^*: H^2(Q,A) \longrightarrow H^2(\hat{F},A)$ y $A \rtimes \hat{F}$ es de $\underline{V}$.

En efecto, si $G^f = A \rtimes \hat{F}$ es de $\underline{V}$, su imagen epimórfica G también es de $\underline{V}$.

Corolario 2.2.

Si $E: A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ es de $\underline{V}$, $A \rtimes Q$ es de $\underline{V}$.

Basta observar que $A \rtimes Q$ es imagen epimórfica de $A \rtimes \hat{F}$.

Teorema 2.3.

Sea $Q \in \underline{V}$ y A un Q-módulo.

i) Si $A \rtimes Q \notin \underline{V}$, ninguna extensión de Q por A es de $\underline{V}$.

ii) Si $A \rtimes Q \in \underline{V}$, existen extensiones de Q por A en $\underline{V}$ y éstas están clasificadas por $\tilde{V}(Q,A)$.

Demostración:

i) es consecuencia del corolario anterior. Para ii) basta observar que $A \rightarrowtail A \rtimes Q \twoheadrightarrow Q$ es de $\underline{V}$, y que, en virtud de la proposición 2.1., una extensión es de $\underline{V}$ si y sólo si es del grupo $\mathrm{Ker}\ f^* = \tilde{V}(Q,A)$.

Sea $Q \in \underline{V}$. Los Q-módulos A para los que existen extensiones de Q por A en $\underline{V}$, es decir, para los que $A \rtimes Q$ es de $\underline{V}$, forman una categoría llamada la categoría de los núcleos abelianos.

Proposición 2.4.

Los Q-módulos triviales de la categoría de los núcleos abelianos son precisamente los grupos de $\underline{V} \cap \underline{Ab}$.

Demostración:

Si A es núcleo de una extensión central de $\underline{V}$, entonces $A \in \underline{V} \cap \underline{Ab}$. Recíprocamente, si $A \in \underline{V} \cap \underline{Ab}$ y tiene estructura trivial de Q-módulo, $A \rtimes Q = A \times Q$, que, naturalmente, es de $\underline{V}$, y, por lo tanto, en virtud de ii) del teorema 2.3., A es de la categoría de los núcleos abelianos.

II.3. Una sucesión exacta

En este apartado supongo siempre que $\underline{V}$ es una variedad de exponente cero, es decir que $\underline{Ab} \subset \underline{V}$. Resulta, entonces, como consecuencia inmediata del teorema 2.3. y de la proposición 2.4., la siguiente proposición.

Proposición 3.1.

En una variedad $\underline{V}$ de exponente cero existen siempre extensiones centrales de un grupo $G \in \underline{V}$ por un grupo abeliano cualquiera A y dichas extensiones están clasificadas por el grupo $\tilde{V}(G,A)$.

Por ejemplo, en la variedad $\underline{N}_c$ de los grupos nilpotentes de clase menor o igual que c, que es de exponente cero, sabemos que las extensiones centrales

$$A \rightarrowtail E \twoheadrightarrow G$$

de $G \in \underline{N}_c$ por un grupo abeliano A, verifican que E es de la misma clase r que G, o de classe $r+1$. Cuando r es menor (estrictamente) que c todas las extensiones centrales están en $\underline{N}_c$ y podemos asegurar, por tanto, que

$$\tilde{V}(G,A) = H^2(G,A).$$

Si $r = c$, las extensiones de clase $r+1$ no son de $\underline{N}_c$. En tal caso, $\tilde{V}(G,A)$ clasifica las extensiones nilpotentes de clase c del grupo G por A, y

$$\tilde{V}(G,A) \subset H^2(G,A)$$

Afirmaciones análogas se aplican, por ejemplo, a la variedad de los grupos resolubles de longitud $\leq \ell$.

Me propongo estudiar la inclusión

$$\tilde{V}(G,A) \rightarrowtail H^2(G,A).$$

Sea $R \rightarrowtail \hat{F} \twoheadrightarrow G$ una presentación $\underline{V}$-libre del grupo G. Puedo escribir, entonces, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ext}(G_{ab},A) \arrow[r] \arrow[d, tail] & \mathrm{Ext}(\hat{F}_{ab},A) \arrow[d, tail] \\
V(G,A) \arrow[r, tail, "i"] & H^2(G,A) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & H^2(\hat{F},A) \arrow[d, two heads] \\
 & \mathrm{Hom}(H_2G,A) \arrow[r, "g"] & \mathrm{Hom}(H_2\hat{F},A)
\end{tikzcd} \qquad (\&)$$

cuya conmutatividad resulta de la naturalidad del teorema de los coeficientes universales. Ahora bien, por ser $\underline{V}$ de exponente cero, $\hat{F}_{ab}$ es un grupo abeliano libre, por lo que

$Ext(\hat{F}_{ab}, A) = 0$ y, además, $H^2(\hat{F}, A) \cong Hom(H_2\hat{F}, A)$.

Por otra parte, en la sucesión exacta de homología de los cinco términos correspondiente a la presentación $R \rightarrowtail \hat{F} \twoheadrightarrow G$

$$H_2\hat{F} \longrightarrow H_2G \longrightarrow R/[\hat{F}, R] \longrightarrow \hat{F}_{ab} \longrightarrow G_{ab} \longrightarrow 0$$

se tiene que $Coker\ (H_2\hat{F} \longrightarrow H_2G) = VG$ es independiente de la presentación $\underline{V}$-libre de G. Por tanto

$$I = Ker\ (H_2G \longrightarrow R/[\hat{F}, R]) = Ker(H_2G \longrightarrow VG)$$

es, también, independiente de dicha presentación. Se tiene, pues, un diagrama de sucesiones exactas

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
K \arrow[r] & H_2\hat{F} \arrow[r] \arrow[dr, two heads] & & H_2G \arrow[r] \arrow[dr, two heads] & & R/[\hat{F}, R] \arrow[r] & \hat{F}_{ab} \arrow[r] & G_{ab} \arrow[r] & 0 \\
& & I \arrow[ur, tail] & & VG \arrow[ur, tail] & & & &
\end{tikzcd}$$

donde $K = Ker\ (H_2\hat{F} \longrightarrow H_2G)$ depende de la presentación.

Aplicando ahora el funtor $Hom(-, A)$ a las sucesiones exactas cortas

$$K \rightarrowtail H_2\hat{F} \twoheadrightarrow I$$

$$I \rightarrowtail H_2G \twoheadrightarrow VG$$

se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(VG,A) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H_2G,A) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(I,A) \arrow[r] \arrow[d, tail, "j"] & \mathrm{Ext}(VG,A) \arrow[r] & \mathrm{Ext}(H_2G,A) \arrow[r, two heads] & \mathrm{Ext}(I,A) \\
\tilde{V}(G,A) \arrow[u, two heads] \arrow[r, tail, "i"] & H^2(G,A) \arrow[u, two heads] & \mathrm{Hom}(H_2\hat{F},A) \arrow[d] & & & \\
\mathrm{Ext}(G_{ab},A) \arrow[u, tail] \arrow[r, equal] & \mathrm{Ext}(G_{ab},A) \arrow[u, tail] & \mathrm{Hom}(K\ A) \arrow[d] & & & \\
& & \mathrm{Ext}(I,A) \arrow[d] & & & \\
& & \vdots & & &
\end{tikzcd}
\qquad (*)
$$

donde las dos primeras columnas conmutan en virtud de la demostración del teorema de los coeficientes universales para $\underline{V}$ (teorema 1.2.). Por otra parte, la aplicación

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(H_2G,A) \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & \mathrm{Hom}(I,A) \arrow[d, tail] \\
& \mathrm{Hom}(H_2\hat{F},A)
\end{tikzcd}
$$

no es otra que la aplicación g en el diagrama (&). Existe, por tanto, una aplicación de $H^2(G,A)$ en $H^2(\hat{F},A) \cong \mathrm{Hom}(H_2\hat{F},A)$ que hace conmutativo el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(VG,A) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H_2G,A) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(I,A) \arrow[r] \arrow[d, "j"] & \mathrm{Ext}(VG,A) \arrow[r] & \mathrm{Ext}(H_2G,A) \arrow[r, two heads] & \mathrm{Ext}(I,A) \\
\tilde{V}(G,A) \arrow[u, two heads] \arrow[r, tail, "i"] & H^2(G,A) \arrow[u, two heads] \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \mathrm{Hom}(H_2\hat{F},A) & & & \\
\mathrm{Ext}(G_{ab},A) \arrow[u, tail] \arrow[r, equal] & \mathrm{Ext}(G_{ab},A) \arrow[u, tail] & & & &
\end{tikzcd}
$$

Así, pues,

$$\mathrm{Im}\ (H^2(G,A)\longrightarrow \mathrm{Hom}(H_2\hat{F},A)) \subset j\ \mathrm{Hom}(I,A)$$

y existe una aplicación de $H^2(G,A)$ en $\mathrm{Hom}(I,A)$ de forma que la sucesión

$$\tilde{V}(G,A)\rightarrowtail H^2(G,A)\longrightarrow \mathrm{Hom}(I,A)\longrightarrow \mathrm{Ext}(VG,A)\longrightarrow \mathrm{Ext}(H_2G,A)\twoheadrightarrow \mathrm{Ext}(I,A)$$

es exacta.

(Obsérvese que, por ser $H^2(G,A)\longrightarrow \mathrm{Hom}(H_2G,A)$ exhaustiva,

$$\mathrm{Im}\ (H^2(G,A)\longrightarrow \mathrm{Hom}(I,A)) = \mathrm{Im}\ (\mathrm{Hom}(H_2G,A)\longrightarrow \mathrm{Hom}(I,A)) =$$

$$= \mathrm{Ker}\ (\mathrm{Hom}(I,A)\longrightarrow \mathrm{Ext}(VG,A)),$$

y, por ser j injectiva,

$$\mathrm{Im}\ i = \mathrm{Ker}(H^2(G,A)\longrightarrow \mathrm{Hom}(H_2\hat{F},A))=$$

$$= \mathrm{Ker}\ (H^2(G,A)\longrightarrow \mathrm{Hom}(I,A)\xrightarrow{j} \mathrm{Hom}(H_2\hat{F},A))\quad .)$$

He demostrado, así, el

Teorema 3.2.

Sea $\underline{V}$ una variedad de exponente cero, $G\in \underline{V}$ y A un grupo abeliano. La sucesión

$$\tilde{V}(G,A)\overset{i}{\rightarrowtail} H^2(G,A)\longrightarrow \mathrm{Hom}(I,A)\longrightarrow \mathrm{Ext}(VG,A)\longrightarrow \mathrm{Ext}(H_2G,A)\twoheadrightarrow \mathrm{Ext}(I,A)\ ,$$

donde $I = \mathrm{Ker}\ (H_2G\longrightarrow VG)$,

es exacta y natural.

II.4. Ejemplos y casos particulares

1) Existen algunos casos en que se sabe que $H_2G = 0$. Por ejemplo, cuando todos los p-subgrupos de Sylow de G son cíclicos o (para $p = 2$) cuaterniónicos generalizados, G tiene cohomología periódica y, en particular, $H_2G = 0$ (véase (1), cap. XII). Asimismo, para los grupos de nudos $H_2G = 0$ ((15) pág. 90). En otros casos, aunque $H_2G \neq 0$, se anula $\mathrm{Hom}(H_2G,A)$; por ejemplo, siempre que G es finito de orden m, H_2G es de torsión y $m\,H_2G = 0$ ((5) pág. 227). Por lo tanto, si A es libre de torsión o de torsión prima con m, resulta $\mathrm{Hom}(H_2G,A) = 0$.

En todos estos casos

$$\tilde{V}(G,A) \cong H^2(G,A) \cong \mathrm{Ext}(G_{ab},A)$$

es decir, "las extensiones centrales de G están todas en $\underline{V}$ y proceden todas, mediante pull-back, de extensiones abelianas de G_{ab}".

2) Análogamente, cuando $\mathrm{Hom}(VG,A) = 0$

$$\tilde{V}(G,A) \cong \mathrm{Ext}(G_{ab},A)$$

es decir, "las extensiones centrales de G en $\underline{V}$ proceden todas, mediante pull-back, de extensiones abelianas de G_{ab}".

Este es el caso, por ejemplo, de las extensiones de un grupo G que admita una presentación con $n+r$ generadores y r relaciones, si G_{ab} está generado por n elementos, siempre que la variedad $\underline{V}$ verifique que todos los grupos $\underline{V}$-libres sean residualmente nilpotentes y de exponente finito p, para todo primo p. En efecto, en tal caso $VG = 0$ ((15) pág. 89) y, en particular, $\mathrm{Hom}(VG,A) = 0$.

Ejemplos de tales variedades $\underline{V}$ son $\underline{Gr}$, $\underline{N}_c$, los grupos resolubles y los grupos polinilpotentes.

3) Si A es un grupo divisible (inyectivo!),

$$\tilde{V}(G,A) \rightarrowtail H^2(G,A) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(I,A)$$

es exacta. (Consecuencia inmediata del teorema 3.2.)

4) Consideremos, ahora, la variedad $\underline{N}_c$ de los grupos nilpotentes de clase $\leq c$. Sea

$$S \rightarrowtail F \twoheadrightarrow G$$

una presentación absolutamente libre de G. El que G sea de $\underline{N}_c$ equivale a decir que $S \supset F_{c+1}$. Por otra parte, F/F_{c+1} es nilpotente libre y

$$R = S/F_{c+1} \rightarrowtail F/F_{c+1} \twoheadrightarrow G$$

es una presentación $\underline{N}_c$-libre de G

$$\begin{tikzcd}
F_{c+1} \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & F_{c+1} \arrow[d, tail] & \\
S \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & F \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & G \\
R \arrow[r, tail] & F/F_{c+1} \arrow[r, two heads] & G
\end{tikzcd}$$

De la fórmula de Hopf, $H_2G = \dfrac{S \cap [F,F]}{[F,S]}$, se deduce

$$H_2(F/F_{c+1}) = F_{c+1}/F_{c+2}$$

y este grupo es abeliano libre (ver (10), pág. 342).

De

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
K \arrow[r, tail] & H_2(F/F_{c+1}) \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & H_2G \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & R/[F/F_{c+1},R] \arrow[r] \arrow[dr, equal] & F_{ab} \arrow[r] & G_{ab} \arrow[r] & 0 \\
& & I \arrow[ur, tail] & & VG \arrow[ur, tail] & & S/([F,S].F_{c+1}) & &
\end{tikzcd}$$

resulta, entonces,

$$VG = \operatorname{Im}\left(\frac{S \cap [F,F]}{[F,S]} \longrightarrow \frac{S}{[F,S].F_{c+1}}\right) = \frac{S \cap [F,F]}{[F,S].F_{c+1}}$$

independiente de la presentación,

$$I = \operatorname{Ker}\left(\frac{S \cap [F,F]}{[F,S]} \longrightarrow \frac{S}{[F,S].F_{c+1}}\right) = \frac{[F,S].F_{c+1}}{[F,S]}$$

independiente de la presentación,

$$K = \operatorname{Ker}\left(\frac{F_{c+1}}{F_{c+2}} \longrightarrow \frac{[F,S].F_{c+1}}{[F,S]}\right) = \frac{[F,S] \cap F_{c+1}}{F_{c+2}}$$

abeliano libre.

Como ya observé en el apartado anterior (II.3), $\tilde{V}(G,A)$ coincide con $H^2(G,A)$ siempre que G es de clase $r < c$. Supongo, por tanto, que G es de clase c, es decir que se verifica $F_c \not\subset S$.

Caso $F_{c+1} \subset S \subset F_c$

Entonces $[F,S] \subset F_{c+1}$ y $VG = \dfrac{S}{F_{c+1}} \subset \dfrac{F_c}{F_{c+1}}$ es un grupo abeliano libre. Por tanto, $\operatorname{Ext}(VG,A) = 0$ y del teorema 3.2. resulta que

$$\tilde{V}(G,A) \rightarrowtail H^2(G,A) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}(I,A)$$

es una sucesión exacta corta.

En este caso

$$F_c/S \rightarrowtail F/S = G \twoheadrightarrow F/F_c$$

y $G_{ab} = F_{ab}$. En otras palabras: G es una extensión "stem" de un grupo $\underline{N}_{c-1}$-libre. Por otra parte, puesto que G es imagen epimórfica de F/F_{c+1}, G posee un sistema de generadores con a lo sumo n = rango F elementos. Pero $G_{ab} = F_{ab}$; por tanto, G posee un sistema de generadores con exactamente n elementos.

Recíprocamente: Sea G una extensión "stem" de un grupo $\underline{N}_{c-1}$-libre F/F_c de rango n. Supongamos que G está generado por exactamente n generadores. Entonces, existe $g\colon F \longrightarrow G$ tal que

$$\begin{tikzcd} & & F \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, two heads] \\ A \arrow[r, tail] & G \arrow[r, two heads] & F/F_c \end{tikzcd}$$

conmuta, y $S \rightarrowtail F \twoheadrightarrow G$ es una presentación absolutamente libre de G con $S \subset F_c$.

Con otras palabras: Los grupos incluidos en este caso son precisamente las extensiones "stem" de grupos $\underline{N}_{c-1}$-libres $\hat{F}$ con rango $\hat{F}$ = número de generadores de G.

Observación:

Si $F_{c+1} \supset [F,S]$, $[S/F_{c+1}, F/F_{c+1}] = 0$ y, por tanto, S/F_{c+1} es del centro de F/F_{c+1}. Este centro es, precisamente, F_c/F_{c+1} (ver (10), pág. 347, ejercicio 5); así, pues, resulta $S/F_{c+1} \subset F_c/F_{c+1}$, de donde $S \subset F_c$. Por tanto,

$$S \subset F_c \Longleftrightarrow [F,S] \subset F_{c+1}.$$

Caso $\underline{F_{c+1} \subset [F,S]}$

Este caso ocurre si y sólo si $I = 0$, y también coincide con el caso en que $H_2G = VG$. Entonces,

$$\tilde{V}(G,A) = H^2(G,A)$$

es decir: "todas las extensiones centrales de G quedan dentro de la variedad".

Observación:

Parece lógico suponer que $F_{c+1} \subset [F,S]$ deba implicar $F_c \subset S$ para $c > 0$. Sobre este problema ver (11) pág. 126. En el estudio que hago de los diferentes casos que pueden presentarse, $F_{c+1} \subset [F,S]$ y $F_c \subset S$ tienen para la relación entre $\tilde{V}$ y H^2 las mismas consecuencias.

Caso $[F,S] \cap F_{c+1} = F_{c+2}$

Esta condición equivale a que $K = 0$ y a que $I = H_2(F/F_{c+1})$ (abeliano libre). Entonces, la sucesión exacta del teorema 3.2. se reduce a

$$\tilde{V}(G,A) \rightarrowtail H^2(G,A) \longrightarrow H^2(F/F_{c+1},A) \longrightarrow \mathrm{Ext}(VG,A) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}(H_2G,A).$$

El siguiente teorema es otro caso particularmente interesante

Teorema 4.1.

Sea $\underline{N}_c$ la variedad de los grupos nilpotentes de clase $\leq c$ y A un grupo abeliano libre. Entonces, la sucesión

$$\tilde{V}(G,A) \overset{i}{\rightarrowtail} H^2(G,A) \twoheadrightarrow \mathrm{Coker}\ i$$

descompone.

En efecto, si A es abeliano libre, el grupo abeliano $\mathrm{Hom}(H_2(F/F_{c+1}),A) = \mathrm{Hom}(F_{c+1}/F_{c+2},A)$ es, también, abeliano libre, así como

$$\mathrm{Coker}\; i \subset \mathrm{Hom}(I,A) \subset \mathrm{Hom}(H_2(F/F_{c+1}),A).$$

(Ver diagrama (&) del apartado II.3.)

Capítulo III

PUREZA Y DESCOMPONIBILIDAD

La noción de subgrupo puro es un intermedio entre los conceptos de subgrupo y de sumando directo, y refleja la manera en que el subgrupo está sumergido en el grupo. Introducidos en el año 1923 por H. Prüfer (13), S.M. Yahya demostró en 1962 que toda sucesión exacta $A \rightarrowtail{\alpha} B \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} C$ de grupos abelianos, con $\alpha(A)$ subgrupo puro en B, es límite de sucesiones exactas $A_i \rightarrowtail B_i \twoheadrightarrow C_i$ que descomponen. Los subgrupos puros se han convertido últimamente en un instrumento muy útil en el estudio de los grupos abelianos. Su importancia estriba en el hecho de que, bajo determinadas condiciones, los subgrupos puros son sumandos directos, y de aquí su interés en este trabajo: En el caso de la variedad $\underline{V} = \underline{Ab}$ de los grupos abelianos, la sucesión del teorema 3.2. del capítulo II no es otra que la del teorema de los coeficientes universales

$$Ext(G,A) \rightarrowtail H^2(G,A) \twoheadrightarrow Hom(H_2G,A)$$

en la que $\mathrm{Ext}(G,A)$ es sumando directo de $H^2(G,A)$. Mi objetivo es estudiar, para una variedad de exponente cero, cuándo el monomorfismo

$$\tilde{V}(G,A) \rightarrowtail H^2(G,A)$$

sumerge $\tilde{V}(G,A)$ como subgrupo puro de $H^2(G,A)$ y cuándo como sumando directo.

III.1. Subgrupos puros

En este apartado supondré siempre que todos los grupos son abelianos.

Un subgrupo S de G se llama puro si la ecuación $nx = g$ con $g \in S$ tiene solución en S siempre que la tenga en G. Con otras palabras, S es subgrupo puro de G si y sólo si

$$nS = S \cap nG \qquad \text{para todo } n \in Z.$$

Si $p^k S = S \cap p^k G$, para un p primo y todo entero k, se dice que S es p-puro en G. Si S es p-puro en G para todo primo p, entonces S es puro en G ((2) cap. V).

Todo sumando directo de G es puro en G. Asimismo, son puros en G los subgrupos trivial, todo G, la parte de torsión de G y las p-componentes de G.

Si G/S es libre de torsión, S es puro en G.

Si $S_1 \subset \ldots \subset S_i \subset \ldots$ es una cadena de subgrupos puros en G, $\bigcup_i S_i$ es puro en G.

La siguiente proposición es de fácil demostración

Proposición 1.1.

Sean R y S subgrupos de G tales que $R \subset S$. Entonces,

i) si R es puro en S y S es puro en G, R es puro en G,

ii) si S es puro en G, S/R es puro en G/R,

iii) si R es puro en G y S/R es puro en G/R, S es un subgrupo puro de G.

Especial aplicación en este trabajo tienen los siguientes resultados de L.Ya. Kulikov (7), cuya demostración puede consultarse en el libro de L. Fuchs (2):

Teorema 1.2.

Todo subgrupo puro acotado es un sumando directo.

Por subgrupo acotado entiendo un subgrupo S para el que existe un entero n tal que $nS = 0$.

Teorema 1.3.

Si S es puro en G y tal que G/S es suma directa de grupos cíclicos, entonces S es sumando directo de G.

En particular,

Corolario 1.4.

Si S es puro en G y G/S es finitamente generado, entonces S es sumando directo de G.

La siguiente caracterización de pureza es debida a H. Prüfer (13):

Teorema 1.5.

S es puro en G si y sólo si todo elemento $\bar{g}$ de G/S tiene un representante en G del mismo orden que $\bar{g}$.

III.2. Pureza del subgrupo $\tilde{V}(G,A)$ en $H^2(G,A)$

$\underline{V}$ será siempre una variedad de exponente cero.

En este apartado me propongo estudiar cuándo el grupo $\tilde{V}(G,A)$ de las extensiones en una variedad $\underline{V}$ de exponente cero de un grupo G $\underline{V}$ por un grupo abeliano A, es un subgrupo puro del grupo $H^2(G,A)$ de todas las extensiones de G por A:

$$\tilde{V}(G,A) \overset{i}{\rightarrowtail} H^2(G,A) \qquad (*)$$

y, en particular, cuándo es sumando directo.

Un primer criterio de pureza nos lo da el siguiente teorema de P.J. Hilton y A. Deleanu (4):

Teorema 2.1.

Sea $0 \to R \to S \to T \to 0$ una sucesión exacta de funtores aditivos $\underline{C} \longrightarrow \underline{Ab}$, donde $\underline{C}$ es la categoría $\underline{Ab}$ de los grupos abelianos o bien la categoría $\underline{Ab}_2$ de los grupos abelianos sin 2-torsión. Si T es exacto por la izquierda, la sucesión

$$0 \longrightarrow R(A) \longrightarrow S(A) \longrightarrow T(A) \longrightarrow 0$$

es exacta y pura para todo $A \in \underline{C}$.

El teorema se aplica, en particular, a la sucesión de los coeficientes universales para cohomología

$$\mathrm{Ext}(G_{ab}, A) \rightarrowtail H^2(G,A) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(H_2G, A)$$

Por otra parte, sabemos aun más: la sucesión, de hecho, descompone. Este caso incluye el monomorfismo (*) para $\underline{V} = \underline{Ab}$, ya que, entonces, $\tilde{V}(G,A) = \mathrm{Ext}(G,A)$.

En el caso general, la situación es la siguiente: Se tiene una sucesión exacta de funtores

$$\tilde{V}(G,-) \rightarrowtail H^2(G,-) \twoheadrightarrow T(-) = \mathrm{Coker}\ i(-).$$

$H^2(G,-)$ es aditivo, ya que se trata de un funtor derivado de $\mathrm{Hom}_G(Z,-)$.

Veamos que $\tilde{V}(G,-)$ es aditivo.

En efecto, por definición de $\tilde{V}(G,-$

$$\tilde{V}(G,-) \rightarrowtail H^2(G,-) \longrightarrow H^2(\hat{F},-)$$

es una sucesión exacta de funtores, dond $\hat{F} \twoheadrightarrow G$ es una presentación $\underline{V}$-libre de G. Esta presenta ión induce homomorfismos de cohomología

$$\begin{array}{ccc} H^2(G,A \oplus B) & \longrightarrow & H^2(\ ,A \oplus B) \\ \| \wr & & \| \wr \\ H^2(G,A) \oplus H^2(G,B) & \longrightarrow & H^2(\hat{F}, \ ) \oplus H^2(\hat{F},B) \end{array}$$

La conmutatividad de este diagrama se de uce de la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(P_G,A \oplus B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom} \ P_{\hat{F}},A \oplus B) \\ \| \wr & & \| \wr \\ \mathrm{Hom}(P_G,A) \oplus \mathrm{Hom}(P_G,B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(P_{\cdot},A) \oplus \mathrm{Hom}(P_{\hat{F}},B) \end{array} ,$$

donde P_G y $P_{\hat{F}}$ son resoluciones G- $\hat{F}$- proyectivas de Z, respectivamente.

Del primer diagrama resulta, entonc s,

$$\tilde{V}(G,A \oplus B) \cong \tilde{V}(G,A) \oplus \tilde{V}(G,B) .$$

El teorema de Hilton-Deleanu se apl cará, pues, siempre que T sea exacto por la izquierda (lo ue implica la aditividad!). Este no es, desgraciadamente, el caso general, pero sí que T es exacto por la izquierda siempre que

$$\mathrm{Ext}(VG,A) = 0$$

ya que, entonces, el teorema 3.2. del capítulo II nos dice que

$$\tilde{V}(G,A) \rightarrowtail H^2(G,A) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(I,A)$$

es una sucesión exacta y, por tanto, $T = \mathrm{Hom}(I,-)$ es un funtor exacto por la izquierda.

En particular,

Teorema 2.2.

Si G es un grupo nilpotente de clase c que admite una presentación libre $G = F/S$ con $S \subset F_c$, $\tilde{V}(G,A)$ es un subgrupo puro de $H^2(G,A)$, para todo grupo abeliano A.

En efecto, vimos en II.4. que, en tal caso, VG es un grupo abeliano libre; por tanto, $\mathrm{Ext}(VG,A) = 0$ y puede aplicarse el razonamiento anterior.

Otro criterio de pureza es el dado por el

Teorema 2.3.

Si VG es libre de torsión, entonces $\tilde{V}(G,A)$ es un subgrupo puro en $H^2(G,A)$.

La demostración del teorema hace uso de algunos resultados de III.1 y del siguiente lema

Lema 2.4.

Si $A \rightarrowtail^{\alpha} B \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} C$ es una sucesión exacta con A puro en B, entonces en

$$\mathrm{Hom}(C,D) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}(B,D) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}(A,D)$$

$\beta^*(\mathrm{Hom}(C,D))$ es puro en $\mathrm{Hom}(B,D)$.

Demostración del lema:

Sean $\varphi \in \mathrm{Hom}(C,D)$ y $\psi \in \mathrm{Hom}(B,D)$ tales que

$$p^n \psi = \beta^*(\varphi) = \varphi \beta .$$

Obsérvese, en primer lugar, que $\alpha^* \beta^*(\varphi) = 0$, es decir

$$\mathrm{Im}\, \alpha \subset \mathrm{Ker}\, \varphi\beta = \mathrm{Ker}\, p^n \psi \subset \mathrm{Ker}\, \psi ,$$

de donde $p^n \alpha(A) \subset \mathrm{Ker}\, \psi$.

Por otra parte, puesto que αA es puro en B, en virtud de la proposición 1.1.(ii), resulta que $\alpha A / p^n \alpha A$ es puro en $B / p^n \alpha A$ y, por ser $\alpha A / p^n \alpha A$ un subgrupo acotado, es sumando directo (teorema 1.2.) :

$$B / p^n \alpha A = \alpha A / p^n \alpha A \oplus B' / p^n \alpha A .$$

Sean

$\pi : B / p^n \alpha A \longrightarrow B' / p^n \alpha A$ la proyección canónica

y $\psi' : B' / p^n \alpha A \longrightarrow D$ tal que $\psi'(b' + p^n A) = \psi(b')$.

ψ' está bien definida ya que, según he visto anteriormente $p^n \alpha A \subset \mathrm{Ker}\, \psi$.

Defino $\quad \Phi : B \longrightarrow D$

por $\quad \Phi(b) = \psi' \pi (b + p^n \alpha A)$.

Se tiene, entonces

$$p^n \Phi = p^n \psi \qquad \text{y} \qquad \alpha A \subset \operatorname{Ker} \Phi ,$$

lo que implica la existencia de una aplicación

$$\Theta : C \longrightarrow D$$

tal que

$$\beta^* \Theta = \Theta \beta = \Phi .$$

Por tanto

$$p^n(\beta^* \Theta) = p^n \Phi = p^n \psi = \beta^*(\varphi)$$

con lo que queda demostrado el lema.

Demostración del teorema 2.3.:

De la sucesión exacta corta

$$I \rightarrowtail^{\alpha} H_2G \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} VG$$

se deduce que si VG es libre de torsión, I es puro en H_2G (III.1.), y, en virtud del lema anterior, $\beta^*\operatorname{Hom}(VG,A)$ es puro en $\operatorname{Hom}(H_2G,A)$.

Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}(VG,A) \arrow[r, tail, "\beta^*"] & \operatorname{Hom}(H_2G,A) \\
\tilde{V}(G,A) \arrow[r, tail, "i"] \arrow[u, two heads] & H^2(G,A) \arrow[u, two heads] \\
\operatorname{Ext}(G_{ab},A) \arrow[r, equal] \arrow[u, tail] & \operatorname{Ext}(G_{ab},A) \arrow[u, tail]
\end{tikzcd}$$

Las sucesiones verticales (teoremas de coeficientes universales para $\tilde{V}$ y H^2) descomponen (teoremas 2.4. y 1.2 de los capítulos I y II respectivamente), y, en particular, $\mathrm{Ext}(VG,A)$ es puro en $\tilde{V}(G,A)$ y en $H^2(G,A)$. La proposición 1.1.(iii) asegura, entonces, que $i\tilde{V}(G,A)$ es puro en $H^2(G,A)$, con lo que el teorema queda demostrado.

III.3. Casos en que $\tilde{V}(G,A)$ es sumando directo de $H^2(G,A)$

Al final del capítulo II, en el teorema 4.1., demostré que, en la variedad $\underline{N}_c$ de los grupos nilpotentes de clase $\leq c$, si A es abeliano libre, la sucesión exacta

$$\tilde{V}(G,A) \xrightarrow{i} H^2(G,A) \twoheadrightarrow \mathrm{Coker}\ i$$

descompone, para todo $G \in \underline{N}_c$.

Me propongo, ahora, dar algunas condiciones sobre G en las que la sucesión exacta anterior descompone.

Teorema 3.1.

Si G es un grupo finito tal que $\mathrm{Ext}(VG,A) = 0$, la sucesión

$$\tilde{V}(G,A) \xrightarrow{i} H^2(G,A) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(I,A)$$

es exacta y descompone.

Demostración:

Sea m el orden de G, Se sabe que, entonces, $mH^2(G,A)$ se anula y, en particular, $i\tilde{V}(G,A)$ es acotado. Por otra parte, en III.2. demostré que $\mathrm{Ext}(VG,A) = 0$ implicaba que $i\tilde{V}(G,A)$ era un subgrupo puro de $H^2(G,A)$ y que la sucesión del enunciado era exacta. Basta, ahora, aplicar el teorema 1.2.

<u>Teorema 3.2.</u>

Si $\mathrm{Ext}(VG,A) = 0$ y $H^2(G,A)$ es suma directa de grupos cíclicos (en particular, si es finitamente generado), entonces la sucesión

$$\tilde{V}(G,A) \rightarrowtail^{i} H^2(G,A) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(I,A)$$

es exacta y descompone.

Demostración:

Como en el teorema anterior, $\mathrm{Ext}(VG,A) = 0$ implica que la sucesión es exacta e $i\tilde{V}(G,A)$ es puro en $H^2(G,A)$. Ahora bien, si $H^2(G,A)$ es suma directa de grupos cíclicos, también lo será $\mathrm{Hom}(I,A)$ (teorema de Kulikov) y, aplicando el teorema 1.3., resulta que la sucesión descompone.

<u>Teorema 3.3.</u>

Si VG es libre de torsión y $H^2(G,A)$ es suma directa de grupos cíclicos (en particular, finitamente generado), entonces la sucesión

$$\tilde{V}(G,A) \xrightarrow{\ i\ } H^2(G,A) \twoheadrightarrow T(A)$$

es exacta y descompone.

III.4. Consideraciones finales

En el análisis de la descomposición de la sucesión exacta

$$\tilde{V}(G,A) \rightarrowtail H^2(G,A) \twoheadrightarrow T(A)$$

he estudiado, como primera aproximación, cuándo $i\tilde{V}(G,A)$ es un subgrupo puro de $H^2(G,A)$. Una de las condiciones suficientes para ello era que el funtor T fuera exacto por la izquierda sobre todos los grupos abelianos o sobre los grupos abelianos sin 2-torsión (teorema de Hilton-Deleanu). He hecho observar que esto no es cierto para cualquier variedad de exponente cero. Un problema interesante a este respecto es estudiar para qué variedades $\underline{V}$ el funtor T es exacto por la izquierda, o bien (lo que "casi" es equivalente), cuándo T es un funtor $Hom(J,-)$ para un cierto J cociente de nuestro I. Por ejemplo, para $\underline{V} = \underline{Ab}$, T es, precisamente, $Hom(H_2G,-)$ con $H_2G = I$. Parece probable que para $\underline{V} = \underline{N}_c$ este resultado pueda generalizarse, pero, hasta el momento, la cuestión sigue abierta.

Un grupo abeliano se llama <u>inyectivo puro</u> (o algebraicamente compacto) si, para todo monomorfismo $A \overset{j}{\rightarrowtail} B$ con $j(A)$ puro en B, todo homomorfismo $A \longrightarrow G$ puede extenderse a B

$$\begin{tikzcd} & G & \\ A \arrow[ur] \arrow[rr, tail] & & B \arrow[ul, dashed] \end{tikzcd}$$

En los casos en que $i\tilde{V}(G,A)$ es puro en $H^2(G,A)$, si $\tilde{V}(G,A)$ es, además, inyectivo puro, la sucesión exacta

$$\tilde{V}(G,A) \rightarrowtail H^2(G,A) \twoheadrightarrow T(A)$$

descompone.

Varios criterios permiten determinar si $\tilde{V}(G,A)$ es inyectivo puro:

a) $\tilde{V}(G,A)$ es inyectivo puro si y sólo si es sumando directo de un producto directo de grupos cocíclicos (Fuchs (2)). Los grupos cocíclicos son los grupos $Z(p^k)$ con p primo y $k = 1,2,\dots$ o ∞.

b) Si $\tilde{V}(G,A)$ es libre de torsión, entonces es inyectivo puro si y sólo si es de cotorsión.

Un grupo abeliano C se dice de cotorsión si y sólo si $\mathrm{Ext}(Q,C) = 0$. En la variedad de los grupos abelianos $\underline{Ab}$ $\tilde{V}(G,A) = \mathrm{Ext}(G,A)$ es siempre de cotorsión. Un problema interesante es estudiar en qué variedades $\tilde{V}(G,A)$ es de cotorsión (parece natural esperarlo para $\underline{V} = \underline{N}_c$). En estas variedades, es decir, cuando $\tilde{V}(G,A)$ es de cotorsión, puede utilizarse el siguiente criterio:

"$\tilde{V}(G,A)$ es inyectivo puro si y sólo si su primer subgrupo de Ulm $\bigcap_n n\,\tilde{V}(G,A)$ es divisible".

En particular, para la variedad $\underline{Ab}$, el primer subgrupo de Ulm de $\tilde{V}(G,A) = \mathrm{Ext}(G,A)$ es, precisamente, el subgrupo $\mathrm{Pext}(G,A)$ de las extensiones puras de G por A (Nunke (12), es decir, de las extensiones

$$A \rightarrowtail{\alpha} E \xrightarrow{\beta} G$$

donde A es un subgrupo puro de E.

El concepto de pureza está definido, únicamente, para subgrupos de grupos abelianos, y, por tanto, no puede hablarse de extensiones puras sino dentro de la variedad $\underline{Ab}$. Sin embargo, una generalización al caso de variedades nilpotentes $\underline{N}_c$ no presenta dificultades formales serias. El hecho de que las extensiones puras en $\underline{N}_c$ coincidan con el primer subgrupo de Ulm de $\tilde{V}(G,A)$ no parece trivial.

BIBLIOGRAFIA

(1) Cartan, H.- Eilenberg, S. "Homological algebra" Princeton (1956).

(2) Fuchs, L. "Infinite abelian groups" Acad. Press. (1970).

(3) Gerstenhaber, M. "A uniform cohomology theory for algebras", Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 51 (1964), 622-629.

(4) Hilton, P.J.- Deleanu, A. "On the splitting of universal coefficients", Pro. Adv. Study, Inst. Alg. Top., vol I, Aarhus (1970), 180-201.

(5) Hilton, P.J.- Stammbach, U. "A course in homological algebra" Graduate texts in Math., 4 Springer (1971).

(6) Knopfmacher, J. "Extensions in varieties of groups and algebras", Acta Math. 115 (1966), 17-50.

(7) Kulikov, L.Ya. "Sobre la teoría de grupos abelianos de cardinalidad arbitraria" (en ruso), Mat. Sb. 9 (1941), 165-182.

(8) Leedham-Green, C. "Homology in varieties of groups" Trans. AMS, 162 (1971), 1-34.

(9) MacLane, S. "Homology" Springer (1964).

(10) Magnus, W.- Karrass, A.- Solitar, D. "Combinatorial group theory" Pure and Applied Math., 13 Interscience Pub. (1966).

(11) Neumann, H. "Varieties of groups" Springer (1967),

(12) Nunke, R.J. "Modules of extensions over Dedekind rings", Illinois J. Math. 3 (1959), 222-241.

(13) Prüfer, H. "Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären abelschen Gruppen", Math. Zeit. 17 (1923), 35-61.

(14) Stammbach, U. "Homological methods in group varieties", Comment. Math. Helv. 45 (1970), 287-298.

(15) Stammbach, U. "Homology in group theory", Lect. Notes in Math., 359, Springer (1973).