Pub. Mat. U.A.B.
nº 10, Desembre 1978

SOBRE LA FÓRMULA DE GAUSS-BONNET EN VARIETATS DE DIMENSIÓ IMPARELLA

Memòria presentada per
Agustí Reventós Tarrida
per aspirar al grau de
Dr. en Ciències, secció
de Matemàtiques (per la
Universitat Autònoma de
Barcelona).

Departament de Geometria i de Topologia.
Secció de Matemàtiques.
Universitat Autònoma de Barcelona.

Aquesta tesi doctoral va ser dirigida pel catedràtic Dr. D. Joan Girbau Badó, i es va llegir el dia 10 d'octubre de 1978 a la Facultat de Ciències de la Universitat Autònoma de Barcelona, devant del següent tribunal:

PRESIDENT

Dr. D. Josep Vaquer Timoner

VOCALS

Dr. D. Joan Girbau Badó

Dr. D. Pedro Luis García Perez

Dr. D. Luis Cordero Rego

VOCAL SECRETARI

Dr. D. Antonio Diaz Miranda

Qualificació

EXCEL.LENT "CUM LAUDE"

RECONEIXEMENTS

Estic en deute amb el professor J.Girbau, director d'aquesta Tesi, que em suggerí aquest problema i m'ajudà en alguns casos particulars.
Voldria també expressar el meu sincer agraïment al professor S.Tanno per la seva invalorable revisió del meu manuscrit i pels seus comentaris al Corol.lari 2.

INDEX

INTRODUCCIÓ

Aquest treball pot ser considerat com una continuació de "A formula on some odd-dimensional Riemannian manifolds related to the Gauss-Bonnet formula" per S.Tanno [7].

Sigui B una varietat de Riemann orientable, compacta de dimensió 2n. La fórmula de Gauss-Bonnet-Chern diu:

$$\int_B Q = 2^{2n}\, \pi^n\, n!\, \chi(B) \tag{1}$$

a on Q denota la forma de Gauss-Bonnet i $\chi(B)$ és la característica d'Euler-Poincaré. En aquesta fórmula, la dimensió parella és essencial. Si B és de dimensió imparella, llavors $\chi(B) = 0$. Malgrat tot, per a varietats de dimensió imparell, podem pensar en la possibilitat de trobar una fórmula anàloga en la que el segon membre sigui certa expressió que contingui els nombres de Betti.

Tot intentant trobar una fórmula semblant a (1) és d'esperar que els camps que no s'anul.lin sobre la varietat hi juguin un paper important.

En aquesta línia, S.Tanno [7] trobà el següent resultat:

<u>TEOREMA:</u> Sigui (E^{2n+1},g) una varietat de Riemann compacta que admeti un camp de vectors de Killing unitari ξ, tal que $R(X,\xi)Y = g(X,Y)\xi - g(Y,\xi)X$, per a tot

X, Y, camps de vectors sobre E^{2n+1} (és a dir, una varietat de Sasaki), (veure apartat 1 del capítol 0). Llavors, si el camp ξ és regular (Palais [5]) tenim:

$$(2) \qquad 1(-1)^n/\ell(\xi)\, 2^{2n}\pi^n n! \int_E F(\Omega,\xi) = \sum_{r=0}^{n} (n+1-r)(-1)^r b_r(E)$$

on $b_i(E)$ és el i-èsim nombre de Betti de E, $F(\Omega,\xi)$ és una expressió que depèn de la curvatura Ω i del camp ξ, $\ell(\xi)$ és la longitud de les òrbites de ξ i per camp regular entenem un camp vectorial sobre E^{2n+1} tal que tot $p \in E^{2n+1}$ té un entorn coordenat cúbic de manera que les corbes integrals de ξ que passen a través d'aquest entorn ho fan només una vegada (veure apartat 3 del capítol 0). Recordem també que un camp ξ sobre E és un camp de Killing (o, una isometria infinitesimal) si el grup uniparamètric de transformacions locals, generat per ξ en un entorn de cada punt de E, consisteix en isometries locals.

Nosaltres volem obtenir una expressió com la (2) per a varietats de Riemann de dimensió imparella, que no siguin necessàriament de Sasaki.

De totes maneres, sembla convenient de continuar suposant que ξ és un camp de vectors de Killing unitari, regular. Concretament, exposem el següent problema.

Sigui E una varietat compacta de dimensió $2n+1$ amb un camp regular ξ sobre E. Sigui g una mètrica riemanniana sobre E per a la que ξ és un camp de vectors de Killing unitari. Volem trobar, sota aquestes hipòtesis, una fórmula anàloga a (2).

L'exemple més senzill d'una varietat que satisfaci les nostres hipòtesis però no les de Tanno és el següent:

Sigui B una varietat de Riemann compacta, orientable de dimensió 2n. Suposem que $b_1(B)$ és parell i que $b_o(B) = 1$. Considerem el producte $B \times S^1$. Un camp tangent unitari a S^1 defineix un camp de vectors de Killing unitari regular sobre $B \times S^1$, relatiu a la mètrica producte. Així, $B \times S^1$ satisfà les nostres hipòtesis, però com que $b_1(B \times S^1)$ és senar, sobre $B \times S^1$ no hi ha estructura sasakiana ja que el primer nombre de Betti d'una varietat de Sasaki és zero o bé és parell (veure apartat 1 del capítol 0).

El primer resultat que obtenim és el següent:

<u>TEOREMA 1.</u> Sigui (E,ξ,g) una varietat de Riemann compacta orientable, de dimensió 2n+1, amb un camp de vectors de Killing unitari i regular ξ sobre E.

Aleshores,

$$(3) \quad ((-1)^n / \ell(\xi)\, 2^{2n} \pi^n n!) \int_E f(\Omega,\xi) = \sum_{r=0}^{n} (n+1-r)(-1)^r b_r(E) + \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r d_r$$

a on $f(\Omega,\xi)$ és certa funció de Ω i de ξ, $b_r(E)$ és el r-èsim nombre de Betti de E i $d_r = \dim \operatorname{Ker} \{ H^r(E/\xi, R) \longrightarrow H^{r+2}(E/\xi, R) \}$. Aquesta aplicació és la multiplicació per la classe d'Euler del fibrat $E \longrightarrow E/\xi$ (capítol 0 apartats 2 i 3).

El primer membre de (3) depèn de g i de ξ. En canvi el segon membre només depèn de ξ (**perquè** d_r depèn de ξ). Concretament, el membre de la dreta és $\chi(E/\xi)$.

A pesar d'això, és possible que, en els casos més interessants, les condicions sobre el camp ξ (unitari, regular, de Killing) determinin $\chi(E/\xi)$. Això és, si ξ i ξ' són dos camps de vectors de Killing unitaris regulars sobre E, llavors $\chi(E/\xi) = \chi(E/\xi')$. En aquest cas el membre dret de (3) podria ser calculat coneixent tan sols els nombres de Betti de E.

En aquest treball, hem intentat de solucionar aquests problemes en dimensions baixes (dim 3 i dim 5) i hem obtingut alguns resultats particulars per a dimensions més elevades.

Concretament, en dimensió 3 hem obtingut el següent resultat

TEOREMA 2. Sigui (E,g) una varietat de Riemann orientable, compacta connexa de dimensió 3. Sigui ξ un camp de vectors unitari regular, de Killing sobre E. Llavors

$$(4)\qquad (1/2\pi\, \ell(\xi))\int_E (K(\xi^{\perp}) + 3K(\xi))\,\eta = 2 - b_1(E)$$

si i sols si $b_1(E)$ és parell, i

$$(5)\qquad (1/2\pi\, \ell(\xi))\int_E (K(\xi^{\perp}) + 3K(\xi))\,\eta = 3 - b_1(E)$$

si i sols si $b_1(E)$ és imparell,

on $K(\xi^{\perp})$ significa la curvatura seccional del pla ortogonal a ξ, $K(\xi)$ la curvatura seccional de qualsevol pla que contingui ξ (és independent de l'elecció del pla) i η denota la forma de volum.

A més a més, en el darrer cas el fibrat és trivial. (Llavors és clar que el segon membre és independent de ξ, en el sentit que si ξ' és un altre camp de vectors unitari regular, de Killing sobre E, aleshores $\chi(E/\xi) = \chi(E/\xi'))$.

El teorema de Tanno en dimensió 3 s'hi inclou (fórmula (4)), ja que per a les varietats de Sasaki $b_1(E)$ és parell i $K(\xi) = 1$.

En la demostració del Teorema 2 fem servir el fet que E/ξ és una superfície de Riemann, això és, una corba algebraica. Si volem fer un estudi anàleg en dimensió 5, hauríem d'imposar almenys la condició que E/ξ fos una varietat complexa.

De cara a això, és suficient de suposar que E admet una estructura de quasi contacte normal, segons el teorema de Morimoto [4].(Apartat 5, capítol 0).

Per exposar el nostre resultat en dimensió 5 més fàcilment, introduïm la següent definició.

<u>Definició:</u> Sigui E una varietat compacta connexa de dimensió 5. Diem que els nombres de Betti $b_1(E)$ i $b_2(E)$ satisfan la R_1-condició si compleixen alguna de les següents condicions:

(1)	$b_1(E) = 0,$	$b_2(E)$ arbitrari
(2)	$b_1(E) = 1,$	$b_2(E) = 0$

(3) $\quad b_1(E)$ parell $\neq 2$, $\quad b_2(E) = 1$

(4) $\quad b_1(E) = 2$, $\quad b_2(E) = 2$ o bé $b_2(E) = 1$

I diem que satisfan la R_2-condició si

(5) $\quad b_1(E)$ imparell $\neq 1$ i $b_2(E) < 12\,[(4b_1(E)-4)/10] + 12\,\delta_{01} + 3 - 4b_1(E)$. ($\delta_{01} = 0$ si $((4b_1(E)-4)/10) \in \mathbb{Z}$

i $\delta_{01} = 1$ altrament. El claudàtor significa "part entera").

Donem ara una taula que mostra, per a nombres de Betti baixos, quins satisfan la R_2-condició.

$b_1(E)$	$b_2(E)$
3	0,1,2.
5	0,1,2,3,4,5,6.
7	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10.
.	.
.	.

<u>TEOREMA 3.</u> Sigui (E,g) una varietat de Riemann compacta connexa de dimensió 5, amb una estructura de quasi contacte normal i regular (φ,ξ,η), on ξ és un camp de vectors unitari de Killing. Llavors

(6) $$\left(1/\rho(\xi)\,2^4\pi^2\,2!\right)\int_E F(\Omega,\xi) = 3 - 2\,b_1(E) + b_2(E)$$

si els nombres de Betti de E satisfan la R_1-condició, i

(7) $$\left(1/\lambda(5)\, 2^4 \pi^2 2!\right) \int_E F(\Omega,\xi) = 5 - 3b_1(E) + b_2(E)$$

si els nombres de Betti de E satisfan la R_2-condició.

És obvi que el segon membre no depèn del camp de vectors unitari de Killing escollit. En aquesta fórmula $F(\Omega,\xi)$ és:

$$8\Big(\Omega_{12} - A_{12}\, d\varphi^0 - \sum_{k,s} A_{1k}\varphi^k \wedge A_{2s}\varphi^s\Big) \wedge \Big(\Omega_{34} - A_{34}\, d\varphi^0 - \sum_{k,s} A_{3k}\varphi^k \wedge A_{4s}\varphi^s\Big) \wedge \varphi^0 - 8\Big(\Omega_{13} - A_{13}\, d\varphi^0 - \sum_{k,s} A_{1k}\varphi^k \wedge A_{3s}\varphi^s\Big) \wedge \Big(\Omega_{24} - A_{24}\, d\varphi^0 - \sum_{k,s} A_{2k}\varphi^k \wedge A_{4s}\varphi^s\Big) \wedge \varphi^0 + 8\Big(\Omega_{14} - A_{14}\, d\varphi^0 - \sum_{k,s} A_{1k}\varphi^k \wedge A_{4s}\varphi^s\Big) \wedge \Big(\Omega_{23} - A_{23}\, d\varphi^0 - \sum_{k,s} A_{2k}\varphi^k \wedge A_{3s}\varphi^s\Big) \wedge \varphi^0$$

on $A_{ij} = g(e_i, \nabla_{e_j}\xi)$, φ^k és dual de e_k, i $\xi, e_1, \ldots, e_{2n}$ és una base ortonormal.

Ens hem preocupat també de saber ens quins casos aquest integrant és positiu. Concretament, hem obtingut el següent resultat:

<u>TEOREMA 4.</u> En aquestes hipòtesis, si la curvatura seccional és sempre positiva, l'integrant és positiu. Si la curvatura seccional al llarg dels plans ortogonals a ξ és sempre positiva, l'integrant és positiu.

Hem obtingut també, el següent Teorema:

TEOREMA 5. Sigui E una varietat compacta, connexa de dimensió 5, amb $b_1(E)$ parell diferent de zero i de dos, i $b_2(E) = 0$. Aleshores E no pot admetre cap estructura regular, quasi de contacte i normal.

En dimensions més altes, hem obtingut el resultat següent:

TEOREMA 6. Sigui E una varietat de Riemann connexa compacta, de dimensió $n = 3 + 4m$, $m > 0$, que admeti un camp de vectors regular unitari i de Killing ξ. Si $b_2(E) = b_4(E) = \ldots = b_{2m}(E) = 0$; llavors:

(8) $\chi(E/\xi) = \sum_{r=0}^{2m+1} (n+1-r)(-1)^r b_r(E) + 1$ si i sols si

$b_1(E) + b_3(E) + \cdots + b_{2m+1}(E)$ és imparell. I

(9) $\chi(E/\xi) = \sum_{r=0}^{2m+1} (n+1-r)(-1)^r b_r(E)$ si i sols si

$b_1(E) + b_3(E) + \cdots + b_{2m+1}(E)$ és parell.

Si $b_1(E) = b_3(E) = \ldots = b_{2m+1}(E) = 0$, aleshores

(10) $\chi(E/\xi) = \sum_{r=0}^{2m+1} (n+1-r)(-1)^r b_r(E)$

(Per tant, $\chi(E/\xi)$ és independent del camp de vectors ξ regular, unitari, de Killing).

COROL.LARI 1. Sigui (E,ξ) una varietat de Sasaki connexa compacta, de dimensió 7, amb ξ regular, i tal que la seva curvatura sigui estrictament positiva.

Aleshores, si ξ' és un altre camp de vectors unitari regular de Killing, tenim: $\chi(E/\xi) = \chi(E/\xi')$.

També obtenim un interesant resultat sobre productes d'esferes, ja que, malgrat admetre $S^2 \times S^3$ (o, $S^6 \times S^7$) una estructura de Sasaki regular (fibrat esfèric tangent unitari de S^3) nosaltres provem:

COROL.LARI 2. $S^{2p+1} \times S^{2q}$ $(p+q = 2m+1,\ p \leq m < q)$ no admet una estructura de Sasaki regular.

CAPITOL 0

PRELIMINARS I NOTACIONS

Dediquem aquest capítol a exposar definicions i resultats, que seran utilitzats al llarg del treball. Com que són resultats independents, dividirem aquest capítol en varis apartats. En cada un d'ells ens limitarem a donar els resultats que més tard farem servir, i les definicions imprecindibles per a la seva comprensió.

El primer d'aquests apartats estarà dedicat a les varietats de Sasaki, ja que els resultats de S.Tanno s'han obtingut sobre aquestes varietats. (Més concretament, sobre varietats de Sasaki regulars).

A continuació donarem una detallada definició d'integració al llarg de les fibres. A partir d'aquesta definició construirem la successió exacta de Gysin i la classe d'Euler per a fibrats esfèrics.

El § 3 versarà sobre regularitat i varietats quocients. Construirem el conjunt $E/\mathfrak{F}$, el dotarem d'una topologia i, utilitzant la regularitat, d'una estructura de varietat diferenciable.

El § 4 estarà dedicat a estudiar l'estructura Riemanniana sobre un fibrat circular principal: es consideren mètriques riemannianes sobre l'espai total i sobre la base, relacionades mitjançant la forma de connexió del fibrat, i es troben expressions que relacionen les respectives connexions riemannianes (i les respectives curvatures).

L'apartat següent estarà dedicat a la classificació de superfícies complexes compactes donada per Kodaira, juntament amb algun resultat sobre relacions entre els nombres característics d'aquestes superfícies (gènere, irregularitat, etc). Per a poder aplicar aquesta classificació a E/ξ, usarem un resultat de Morimoto que exposarem també en aquest apartat.

§1. Sobre varietats de Sasaki

Una varietat diferenciable E^{2n+1} té una (φ,ξ,η)-estructura, si admet un camp φ d'endomorfismes de l'espai tangent, un camp vectorial ξ i una 1-forma η tal que $\eta(\xi) = 1$, $\varphi^2 = -I + \eta\otimes\xi$.

Si una varietat E^{2n+1} amb una (φ,ξ,η)-estructura admet una mètrica riemanniana g tal que

$$g(\varphi X,\varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\,\eta(Y)$$

$\forall X,Y$, aleshores de l'estructura (φ,ξ,η,g) se'n diu estructura mètrica quasi de contacte, i g és la mètrica compatible amb l'estructura.

Si definim $\Phi(X,Y) = g(X,\varphi Y)$ i es compleix que $\Phi = d\eta$, aleshores de l'estructura mètrica quasi de contacte se'n diu estructura mètrica de contacte.

Si a més a més

$$[\varphi,\varphi] + 2d\eta\otimes\xi = 0$$

on

$$[\varphi,\varphi](X,Y) = \varphi^2[X,Y] + [\varphi X,\varphi Y] - \varphi[\varphi X,Y] - \varphi[X,\varphi Y]$$

tenim una estructura mètrica de contacte normal, o abreviadament, una varietat de Sasaki.

Sobre aquestes varietats tenim

$$R(X,Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y$$

però a més a més es fàcil de veure el següent resultat:

Teorema. Sigui $\bar{E}^{2n+1}$ una varietat de Riemann que admeti un camp de Killing ξ amb $R(X,Y)\xi = g(\xi,Y)X - g(X,\xi)Y$. Aleshores, E^{2n+1} és una varietat de Sasaki.

També utilitzarem un resultat topològic sobre aquestes varietats, concretament:

Teorema. El primer nombre de Betti d'una varietat de Sasaki compacta E^{2n+1} és zero o parell.

Per provar aquest teorema, es pren una 1-forma harmònica u sobre E^{2n+1} i es defineix una altra 1-forma $\hat{u}= u\circ\varphi$. Es comprova que $\hat{u}$ és harmònica i que u i $\hat{u}$ són independents.

§2. Integració al llarg de les fibres

Per a fibrats trivials.

Considerem el producte de dues varietats diferenciables, $\mathcal{E}$, B x F. Se suposa que F és orientable de dimensió n i que ja s'ha elegit una orientació. Designem per $A^p_F(B \times F)$ el subespai de $A^p(B \times F)$ de p-formes amb suport compacte al llarg de F, és a dir:

$A^p_F(B \times F) = \{\alpha \in A^p(B \times F)$ tals que $\mathrm{sup}\,\alpha \cap \pi^{-1}(K)$ és compacte per a tot compacte K de B $\}$, π indica la projecció canònica $B \times F \longrightarrow B$.

Sigui $\alpha \in A^{p+r}_F(B \times F)$ $(p \geq 0)$. Anem a definir la integral de α al llarg de F, que designarem per $\fint_F \alpha$. En cada punt $(x,y) \in B \times F$, $\alpha(x,y) \in \Lambda^{p+r} T_{(x,y)}(B \times F)^* \cong \Lambda^{p+r}(T_x(B)^* \oplus \oplus T_y(F)^*) \cong \sum_{p\leq q\leq p+r} (\Lambda^q T_x(B)^*) \otimes (\Lambda^{p+r-q} T_y(F)^*)$. (Tingui's en compte que si $q < p$, és $p+r-q > r$ i per tant $\Lambda^{p+r-q} T_y(F)^* = 0$).

$\alpha(x,y)$ es descompose, segons la suma directa anterior, en components homogènies:

$$\alpha(x,y) = \sum_{p \leq q \leq p+r} \alpha_q(x,y)$$

on

$$\alpha_q(x,y) \in (\Lambda^q T_x(B)^*) \otimes (\Lambda^{p+r-q} T_y(F)^*)$$

Fixem x a B i fem variar y dins F. $\alpha_p(x,y)$ constituirà una r-forma diferencial sobre F amb coeficients a l'espai vectorial $\Lambda^p T_x(B)^*$ (els coeficients d'aquesta forma diferencial dependran diferenciablement de y). A més a més, el suport d'aquesta forma diferencial serà compacte, si recordem la condició imposada al suport de α. Podem doncs, integrar-la sobre F: $\int_{y \in F} \alpha_p(x,y)$. Obtindrem un element de $\Lambda^p T_x(B)^*$. Si a cada $x \in B$ li assignem

$$\int_{y \in F} \alpha_p(x,y) \in \Lambda^p T_x(B)^*$$

obtindrem una p-forma sobre B, i és immediat de comprovar que depèn diferenciablement de x. Aquesta p-forma diferencial la designarem per $\oint_F \alpha$ i direm que s'ha obtingut a partir de α integrant al llarg de les fibres.

Per a fibrats qualssevols (localment trivials)

Sigui $E \longrightarrow B$ un fibrat diferenciable (localment trivial), amb fibra una varietat diferenciable F de dimensió r. L'esmentat fibrat es diu orientable si admet una r-forma diferencial ω sobre E tal que per a cada $x \in B$ la r-forma diferencial $j_x^*(\omega)$ (on j_x indica la inclusió canònica $F_x = \pi^{-1}(x) \longrightarrow E$), constitueix una orientació de F_x. Dit d'una altra manera, $j_x^*(\omega)$ *no* s'anul.la a cap punt de F_x. La forma ω, si existeix, s'anomena una orientació del fibrat $E \longrightarrow B$. Suposarem d'ara en endavant que $E \longrightarrow B$ és un fibrat orientat. Designarem per $A_F^p(E) = \{ \alpha \in A^p(E)$ tals que $\operatorname{sup}\alpha \cap \pi^{-1}(K)$ és compacte per a tot compacte K de B$\}$. Donat un $x \in B$

considerem un entorn $\mathcal{U}$ de x tal que $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ sigui trivial. Sigui φ una trivialització que conservi les orientacions:

$$\pi^{-1}(\mathcal{U}) \longleftarrow \mathcal{U} \times F$$

(F és una varietat orientada)

Donada $\alpha \in A_F^{p+r}(E)$, considerem

$$\oint_F \varphi^*(\alpha | \pi^{-1}(\mathcal{U}))$$

que serà una p-forma diferencial sobre $\mathcal{U}$.

Es comprova que el valor d'aquesta forma en el punt x no depèn ni de l'entorn $\mathcal{U}$ ni de la trivialització φ.

Donada doncs $\alpha \in A_F^{p+r}(E)$, definim $\oint_F \alpha$ com la p-forma sobre B que a cada $x_0 \in$ B val

$$\oint_F \varphi^*(\alpha | \pi^{-1}(\mathcal{U}))_{x_0} \in \Lambda^p T_{x_0}(B)^*$$

La diferenciabilitat de $\oint_F \alpha$ és òbvia ja que sobre cada $\mathcal{U}$, $\oint_F \alpha$ coincideix per definició amb $\oint_F \varphi^*(\alpha | \pi^{-1}(\mathcal{U}))$ que, com ja sabem, és diferenciable.

Completem la definició posant $\oint_F \alpha = 0$, si $\alpha \in A_F^q(E)$ i $q < r$.

També pot comprovar-se que la integració al llarg de les fibres commuta amb la diferencial exterior; és a dir $\oint_F d\alpha = d \oint_F \alpha$. I que $\int_E = \int_B \circ \oint_F$, i $\oint_F \pi^*\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge \oint_F \beta$ $\alpha \in A(B)$, $\beta \in A(E)$.

Ara utilitzarem aquesta definició per a construir la successió exacta de Gysin i la classe d'Euler per a fibrats esfèrics.

Sigui $E \longrightarrow B$ un fibrat orientat de base B i fibra una esfera S de dimensió r. Sigui n la dimensió de B. $\forall p$, considerem el morfisme

$$A^{p+r}(E) \xrightarrow{\Upsilon} A^p(B)$$
$$\alpha \longmapsto \oint_S \alpha$$

És un morfisme exhaustiu. Designem per K^{p+r} el nucli (per a cada p) del morfisme φ. Com que la integració al llarg de les fibres commuta amb la diferencial exterior, si $\alpha \in K^{p+r}$, aleshores $d\alpha \in K^{p+r+1}$. Així doncs K^* és un complex diferencial amb la diferencial exterior

$$\dots \longrightarrow K^q \xrightarrow{d} K^{q+1} \longrightarrow \dots$$

Per a cada q considerem el morfisme

$$A^q(B) \xrightarrow{\pi^*} A^q(E)$$

Es pot comprovar que la imatge d'aquests morfismes està continguda a K^q. Per tant $A^q(B) \xrightarrow{\pi^*} K^q$.
A més a més, com que $d\pi^*\phi = \pi^* d\phi$, el següent diagrama és commutatiu:

$$\begin{tikzcd} A^q(B) \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[d, "d"] & K^q \arrow[d, "d"] \\ A^{q+1}(B) \arrow[r, "\pi^*"] & K^{q+1} \end{tikzcd}$$

Per tant π^* indueix, per a cada q, un morfisme de cohomologia $H^q(B) \xrightarrow{\pi^*} H^q(K^*)$ que continuem designant per π^*. Es pot comprovar que π^* és un isomorfisme.

Amb aquests preliminars, considerem la successió exacta

$$0 \longrightarrow K^q \xrightarrow{j} A^q(E) \xrightarrow{\varphi} A^{q-r}(B) \longrightarrow 0$$

on j és la inclusió canònica. Aquesta successió exacta indueix una successió exacta de cohomologia

$$\longrightarrow H^q(K^*) \xrightarrow{j} H^q(E) \xrightarrow{\varphi} H^{q-r}(B) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(K^*) \rightarrow$$

En virtut de l'isomorfisme entre $H^q(B)$ i $H^q(K^*)$ podem escriure la successió exacta així:

$$\longrightarrow H^q(B) \xrightarrow{\pi^*} H^q(E) \xrightarrow{\varphi} H^{q-r}(B) \xrightarrow{D} H^{q+1}(B) \rightarrow$$

on $D = \pi^{*-1} \circ \delta$. Aquesta és la successió exacta de Gysin.

D funciona així: Donat $\{\alpha\} \in H^{q-r}(B)$, sigui β una q-forma de E tal que $\int_{S^r} \beta = \alpha$. Sigui γ una q+1-forma de B tal que $\pi^* \gamma = d\beta$. Aleshores $D\{\alpha\} = \{\gamma\}$.

Suposem que B es connexa, $H^0(B) = R$ i $D\colon R \longrightarrow H^{r+1}(B)$. $D(-1) \in H^{r+1}(B)$ és la classe d'Euler del fibrat E i es designa per χ_E .

Per tant, si Ω és una r-forma diferenciable sobre E amb $\int_S \Omega = -1$, i ϕ una r+1-forma sobre B tal que $\pi^* \phi = d\Omega$ aleshores ϕ és un representant de la classe d'Euler.

§3. Regularitat i varietats quocients

Encara que nosaltres treballarem en sistemes diferencials 1-dimensionals, donarem ara definicions i part dels resultats obtinguts per Palais [5] sobre sistemes diferencials m-dimensionals.

Definició: Per sistema diferencial m-dimensional sobre una varietat diferenciable de dimensió n, E, entendrem una aplicació θ que assigni a cada punt $p \in E$ un subespai θ_p de l'espai tangent de E a p. Un camp vectorial ξ de E, pertany a θ si per a cada p del domini de ξ , $\xi_p \in \theta_p$. El sistema diferencial θ es diu diferenciable si per a cada $p \in E$ existeix un entorn $\mathcal{U}$ de p i uns camps vectorials diferenciables $\xi_1, \dots \xi_m$ definits a $\mathcal{U}$ tals que $\xi_{1q}, \dots, \xi_{mq}$ és una base de θ_q a cada $q \in \mathcal{U}$.

θ es diu involutiu si és diferenciable i si quan X i Y són dos camps vectorials diferenciables a E amb el mateix domini, tots dos de θ , el seu parèntesi de Lie també pertany a θ . Una subvarietat N de E es diu varietat integral de Θ si per a cada punt $p \in N$, l'espai tangent a N en el punt p està inclòs a Θ_p.

Si Θ és un sistema diferencial m-dimensional sobre E, un sistema coordenat $(x_1, \ldots, x_n, \mathcal{U})$ es dirà pla respecte a Θ si per a cada $q \in \mathcal{U}$, $X_{1_q}, \ldots, X_{m_q}$ és base de Θ_q, on $X_i = \partial/\partial x_i$.

<u>Definició:</u> Sigui Θ un sistema diferencial involutiu m-dimensional sobre una varietat diferenciable n-dimensional (E,Ψ) (Ψ és l'atlas de la varietat) i sigui $(x_1, \ldots x_n, \mathcal{U})$ un sistema coordenat cúbic de E, pla respecte a Θ. Si Σ és una llesca m-dimensional de $(x_1 \ldots x_n, \mathcal{U})$ ($\Sigma = \{q \in \mathcal{U};$ $x_{m+i}(q) = t_{m+i}$; $i=1..n-m, (t_1, \ldots, t_n) \in R^n \}$), l'aplicació $q \longrightarrow (x_1(q), \ldots, x_m(q))$ de Σ a R^m es diu una carta foliada de E respecte a Θ. Es pot comprovar que el conjunt de les cartes foliades de E respecte a Θ formen un atlas m-dimensional sobre E. Sigui (E,Φ) la varietat diferenciable m-dimensional que aquest atlas defineix. Aleshores (E,Φ) es diu la varietat integral maximal de Θ. Una component connexa de E respecte a la topologia de la varietat (E,Φ) mirada com a subvarietat oberta de (E,Φ) es diu una fulla de Θ. El conjunt de fulles de Θ es denotarà per E/Θ.

Sigui Π_Θ la projecció canònica de E a E/Θ, que associa a cada $p \in E$, la fulla de Θ que conté p. La topologia de E/Θ és la topologia més forta que fa Π_Θ contínua.

Ara es tracta de donar condicions sota les quals E/Θ admeti una estructura natural de varietat diferenciable de dimensió n-m. Per això, hem de parlar de regularitat.

<u>Definició:</u> Sigui Θ un sistema diferencial involutiu m-dimensional sobre una varietat diferenciable E de

dimensió n. Un sistema coordenat $(x_1, \ldots x_n, \mathcal{U})$ a E es dirà regular respecte a θ si és cúbic, pla respecte a θ i si cada fulla de θ talla $\mathcal{U}$ en, com a molt, una llesca m-dimensional de $(x_1, \ldots x_n, \mathcal{U})$. Una fulla de θ es dirà fulla regular de θ si interseca el domini d'un sistema de coordenades regular respecte a θ . Direm que θ és regular si cada fulla de θ és una fulla regular de θ .

Amb aquestes definicions, estem en condicions de poder enunciar dos resultats, que ens asseguraran que $E/_\theta$ és una varietat diferenciable Hausdorff. Concretament:

Teorema: Si θ és un sistema diferencial involutiu m-dimensional sobre una varietat diferenciable n-dimensional E, i si $(x_1, \ldots x_n, \mathcal{U})$ és un sistema coordenat a E regular respecte a θ , aleshores existeix una única carta (n-m)-dimensional φ , a E/θ amb domini $\eta_\theta(\mathcal{U})$ tal que $\varphi \circ \eta_\theta(q) = (x_{m+1}(q), \ldots, x_n(q))$ $\forall q \in \mathcal{U}$. Dues d'aquestes cartes, estan diferenciablement relacionades i el conjunt de totes aquestes cartes, és un atlas diferenciable de $E/_\theta$ si i sols si θ és regular. (Així, podem parlar de la varietat quocient $E/_\theta$ com $(E/\theta, \Psi)$ on Ψ és l'únic atlas complet de $E/_\theta$ que conté l'atlas citat).

I finalment

Teorema: Si θ és un sistema diferencial regular sobre una varietat diferenciable E compacta, Hausdorff, aleshores cada fulla de θ és compacta. $E/_\theta$ és una varietat diferenciable compacta i Hausdorff, i η_θ és una aplicació tancada. Si a més a més, $E/_\theta$ és connexa (en particular, si E és connexa) aleshores les fulles de θ són les fibres d'una fibració C^∞ de E amb espai base E/θ i projecció η_θ, i en particular les fulles de θ són C^∞ isomorfes.

§4. Estructura Riemanniana sobre fibrats circulars

Sigui E un fibrat principal circular sobre una varietat n-dimensional B, amb projecció π. h una mètrica riemanniana sobre B, i ω una 1-forma sobre E, definidora d'una connexió en el fibrat. Sigui g una mètrica riemanniana sobre E tal que $g = \pi^* h + \omega \otimes \omega$. Estudiarem les equacions d'estructura de les connexions riemannianes definides per g i h, i també la connexió donada per ω.

Dos comentaris sobre notació: i,j,k,l variaran de 1 a n, i $\alpha, \rho, \lambda, \mu$ de 0 a n. No canviarem la notació quan considerarem funcions sobre B com funcions sobre E, de manera natural.

Sigui $\mathcal{U}$ obert a B, prou petit, en el que $h = \sum_j \theta^j \otimes \theta^j$ on $\theta^1, \ldots, \theta^n$ són 1-formes definides sobre $\mathcal{U}$. Sigui (ω^i_j) una matriu hemi-simètrica de 1-formes sobre $\mathcal{U}$, la qual defineix la connexió riemanniana de B, de manera que tenim les següents equacions d'estructura:

$$d\theta^i = -\sum_j \omega^i_j \wedge \theta^j$$

$$d\omega^i_j = -\sum \omega^i_k \wedge \omega^k_j + \Omega^i_j$$

amb

$$\Omega^i_j = 1/2 \sum_{k,l} K_{ijkl}\, \theta^k \wedge \theta^l$$

on K_{ijkl} són les components del tensor de curvatura respecte a $\theta^1, \ldots, \theta^n$.

Estudiem ara, la connexió definida per ω. Ja que el grup d'estructura S^1 del fibrat és abelià, l'equació d'estructura és:

$$d\omega = \Gamma$$

on Γ és la forma de curvatura de ω, i es pot escriure

$$\Gamma = \pi^*\left(\sum_{ij} A_{ij}\, \theta^i \wedge \theta^j\right), \qquad A_{ij} = -A_{ji}.$$

Per estudiar la connexió riemanniana definida per g, posem $\varphi^0 = \omega$, $\varphi^i = \pi^*(\theta^i)$, de manera que tindrem

$$g = \sum_\alpha \varphi^\alpha \otimes \varphi^\alpha$$

Aleshores, Kobayashi demostra la següent proposició:

Proposició: Si

$$\psi^0_0 = 0$$

$$\psi^i_0 = -\psi^0_i = -\sum_j A_{ij}\varphi^j$$

$$\psi^i_j = \pi^*(\omega^i_j) - A_{ij}\varphi^0$$

Aleshores, (ψ^ν_ρ) defineix la connexió riemanniana sobre E respecte a g..

També demostra les dues següents proposicions:

Proposició: Si (Ψ^ν_ρ) és la forma de curvatura de la connexió definida per (ψ^ν_ρ), aleshores

$$\Psi^0_0 = 0$$

$$\Psi^i_0 = -\Psi^0_i = -\sum_{k,s} A_{ik}A_{ks}\varphi^s \wedge \varphi^0 - \sum_{k,s} A_{ik;s}\varphi^i \wedge \varphi^k$$

$$\Psi^i_j = \pi^*(\Omega^i_j) - \sum_{k,s}(A_{ij}A_{ks} + A_{ik}A_{js})\varphi^k \wedge \varphi^s - \sum_k A_{ij;k}\varphi^k \wedge \varphi^0$$

on

$$\sum_k A_{ij;k}\theta^k = dA_{ij} - \sum_k A_{ik}\omega^k_j + \sum_k A_{kj}\omega^j_k$$

Proposició: Si $\Psi^\nu_\rho = 1/2\sum_{\lambda,\mu} R_{\nu\rho\lambda\mu}\varphi^\lambda \wedge \varphi^\mu$, tenim les següents relacions

$$R_{ijkl} = K_{ijkl} - (2A_{ij}A_{kl} + A_{ik}A_{jl} - A_{il}A_{jk}),$$

$$R_{j0k0} = \sum_{\ell} A_{i\ell} A_{k\ell}$$

$$R_{i0k\ell} = A_{ik;\ell} - A_{i\ell;k}$$

§5. Sobre superfícies analítiques compactes

Sigui S una varietat complexa compacta de dimensió complexa 2. Denotem per c_1 i c_2 la primera i segona classes de Chern de S. Representem qualsevol classe de cohomologia $c \in H^4(S,Z)$ pel valor $c(S)$ de c sobre el cicle fonamental de la superfície S, orientada de manera natural respecte a la seva estructura complexa. Així, considerem c_1^2 i c_2 com enters.

Definim $h^{r,s} = \dim H^s(S, \Omega^r)$, on Ω^r és el feix de gèrmens de les r-formes holomorfes sobre S. Posem $p_g = h^{2,0} = h^{0,2}$, i $q = h^{0,1}$, i anomenem p_g i q respectivament, el gènere geomètric i la irregularitat de S.

Més encara, si ξ i η són 2-formes tancades sobre S, definim

$$(\xi, \eta) = \int_S \xi \wedge \eta$$

Podem considerar (,) com una forma bilineal simètrica no singular definida sobre $H^2(S,R)$. Definim b^+ i b^- respectivament, com el nombre de valors propis positius i negatius de la forma bilineal simètrica.

Kodaira obté el següent resultat, que denominem

<u>Teorema A</u>. Si b_1 és parell, llavors $2q = b_1$, $2p_g = b^+ - 1$, $h^{1,0} = q$. Si b_1 és imparell, llavors $2q = b_1 + 1$, $2p_g = b^+$, $h^{1,0} = q - 1$. Més encara, $c_1^2 + 8q + b^- = 10p_g + 8$ si b_1 és imparell i $c_1^2 + 8q + b^- = 10p_g + 9$ si b_1 és parell.

També farem servir el següent teorema (Grauert): "Qualsevol superfície s'obté a partir d'una superfície que no contingui corbes excepcionals per mitjà d'un nombre finit de transformacions quadràtiques".

Recordem que una corba excepcional (de primera espècie) sobre S és, per definició, una corba racional no singular C amb $(C^2) = -1$.

Kodaira dóna una prova d'aquest teorema demostrant que una corba excepcional (de primera espècie) C sobre S és contràctil, o sigui, existeix $f: S \longrightarrow S'$ amb $f(C) = p$, $S - C$ isomorf a $S' - p$ i f és una transformació monoidal.

Tenim: $H_2(S,Z) = H_2(S',Z) \oplus Z$. Com que $H_2(S,Z)$ és un Z-mòdul finitament generat, en la classificació de superfícies suposem sempre que les superfícies no contenen corbes excepcionals.

De l'última relació tenim: $c_1^2(S) = c_1^2(S') - 1$, que per a un nombre finit n_t de transformacions quadràtiques és $c_1^2(S) = c_1^2(S') - n_t$.

També usarem el següent teorema de Kodaira, que denominem

<u>Teorema B.</u> Tenim la següent taula per a superfícies que no posseeixin corbes excepcionals:

b_1	P_{12}	P_2	K	c_1^2	estructura
parell	0	0			plana o reglada
0	1	1	=0	0	K3 superfície
4	1	1	=0	0	tor complexe
parell	+		$\neq 0$	0	el.líptica
parell	+	+		+	algebraica
senar	+			0	el.líptica
1	0	0			?

on $P_m = \dim H^0(S, \Omega^2(mK))$ i K és un divisor canònic.

Utilitzarem també el següent resultat (Kodaira):

Teorema C. Si sobre una superfície complexa tenim $p_g = 0$ i $c_1^2 > 0$, aleshores $q = 0$.

Finalment recordem l'enunciat del teorema de Morimoto.

Teorema de Morimoto. Sigui E^{2n+1} una varietat diferenciable compacta amb una estructura (φ, ξ, η) quasi de contacte i normal. Suposem que ξ és un camp vectorial regular. Aleshores E^{2n+1} és l'espai total d'un fibrat circular principal $E^{2n+1} \longrightarrow B$ on B és una varietat complexa de dimensió 2n. A més a més, η és una forma de connexió i la 2-forma Ψ sobre B tal que $d\eta = \pi^*\Psi$ és de tipus (1,1).

CAPITOL 1

PROVA DEL TEOREMA 1

Sigui E una varietat orientable compacta de dimensió $2n+1$. Sigui ξ un camp regular sobre E i g una mètrica de Riemann sobre E tal que ξ és un camp de vectors unitari de Killing.

Les corbes integrals de ξ són homeomorfes a S^1, ja que ξ és regular i la varietat E és compacta.

Demostrem, en primer lloc, la següent proposició:

PROPOSICIO 1. En aquestes hipòtesis, totes les trajectòries de ξ tenen la longitud comuna $\ell(\xi)$.

Prova: Com que ξ és un camp de vectors unitari tenim, per mitjà del seu grup uniparamètric φ_t, una parametrització per la longitud de l'arc. Posem $\lambda(p) = \inf\{t \in R;\ t > 0 \text{ i } \varphi_t(p) = p\}$. És el període de l'òrbita a través de p. És constant sobre cada òrbita i com que no hi han punts fixos ($\xi \neq 0$), $\lambda(p)$ no és mai zero. També, com les òrbites són cercles, $\lambda(p)$ no és infinit. Clarament $\lambda(p)$ coincideix amb la longitud de l'òrbita a través de p.

Sigui $\mathcal{U}$ un conjunt obert connex i $p \in \mathcal{U}$. Sigui $V = \varphi_t((-\varepsilon,\varepsilon) \times V_0)$ un entorn de p. $\varphi_0(p) = p$ amb V_0 transversal amb el grup uniparamètric. Per a $x \in V$, agafant un entorn més petit, si cal, podem suposar que existeix una corba ortogonal $\sigma : [0,1] \longrightarrow E$ amb

$\sigma(0) = p$ i $\sigma(1) = x'$, on x i x' descansen sobre la mateixa òrbita.

Aleshores, la transformada σ' de σ per $\Psi_{x,p}$ és una altra corba ortogonal (ja que ξ és un camp de Killing) amb $\sigma(0) = \sigma'(0) = p$ i $n\cdot\sigma' = n\cdot\sigma$. Llavors, com aplicació directa de la unicitat de solucions de les equacions diferencials ordinàries tenim $\sigma = \sigma'$, i així el període de p coincideix amb el de x' //.

Així doncs, com que el període és constant, el podem prendre igual a 1. D'aquesta manera, el grup uniparamètric associat a $\lambda\xi$ depèn només de les classes d'equivalència mod 1 de t i l'acció així induïda és efectiva i lliure (Boothby i Wang [1]).

Els resultats de Palais, ens diuen que E és un fibrat sobre la varietat diferenciable E/ξ . (Posarem $E/\xi = B$). Tan sols resta veure que és localment trivial, és a dir, hem de veure que B pot ser recuberta per entorns U_α tals que existeixi una secció $s_\alpha : U_\alpha \longrightarrow E$ ($\pi s_\alpha = Id$). Aleshores, les aplicacions $\varphi_\alpha : U_\alpha \times S^1 \longrightarrow E$ definides per $\varphi_\alpha(p,t) = t\cdot s_\alpha(p)$ seran funcions coordenades del fibrat.

És fàcil de veure que si agafem com a U_α les projeccions dels entorns regulars, automàticament tenim seccions ($s_\alpha(x_1,\ldots,x_{2n}) = (x_1,\ldots x_{2n}c)$ per a alguna constant c, on $x_1,\ldots x_{2n}$ representen funcions coordenades sobre U_α). Així doncs, $E \longrightarrow B$ és un fibrat circular principal.

Sigui ω la forma dual de ξ per g, això és:

$$\omega(X) = g(\xi, X)$$

Introduïm ara una mètrica riemanniana sobre B. Per a això definim

$$h(X,Y)(p) = g(X',Y')(q) - \omega\otimes\omega(X',Y')(q)$$

on X', Y' són camps sobre E, que són projectats sobre X, Y respectivament, i q és un punt de la fibra de p.

És fàcil de veure que aquesta definició és independent del punt q i dels camps X', Y' escollits, i que es tracta d'una mètrica de Riemann.

En efecte, vegem primerament que si un cop elegit el punt q de la fibra, canviem X'_q per X''_q (amb $T_q\eta X''_q = X_p$) i canviem Y'_q per Y''_q (amb $T_q\eta Y''_q = Y_p$), la definició de h no varia. I no varia, ja que al projectar-se X'_q i X''_q sobre X_p, difereixen en un múltiple de ξ i tenim

$$g_q(X'_q+\lambda\xi\,,\ Y'_q+\mu\xi) - \omega_q(X'_q+\lambda\xi)\ \omega_q(Y'_q+\mu\xi) =$$

$$= g_q(X'_q\,,\ Y'_q) - \omega_q(X'_q)\ \omega_q(Y'_q).$$

Anem a veure ara que no depèn del punt elegit a la fibra de p. Per a això, siguin q, q' punts d'aquesta fibra amb $q \neq q'$.

Siguin X'_q, Y'_q vectors tangents a E, a q, que es projectin sobre X_p, Y_p .

Siguin $X'_{q'}$, $Y'_{q'}$ vectors tangents a E, a q', que es projectin sobre X_p, Y_p.

Hem de veure:

$$g_q(X'_q\,,Y'_q) - \omega_q(X'_q)\ \omega_q(Y'_q) = g_{q'}(X'_{q'}\,,\ Y'_{q'}) -$$

$$- \omega_{q'}(X'_{q'})\ \omega_{q'}(Y'_{q'}).$$

Mitjançant el grup uniparamètric associat a ξ passarem X'_q, Y'_q, elements de T_qE, a elements de $T_{q'}E$. Veurem que aquests dos nous vectors de $T_{q'}E$ es projecten sobre X_p, Y_p respectivament, i pel que s'ha vist anteriorment, utilitzant que ξ és un camp vectorial de Killing, quedarà provat.

Sigui φ_t el grup uniparamètric associat al camp ξ, i $\varphi_{t_0}(q) = q'$. Tenim

$$\begin{aligned} T_q\varphi_{t_0} \ : \ T_qE &\longrightarrow T_{q'}E \\ X'_q &\longrightarrow T_q\varphi_{t_0}(X'_q) = X''_{q'} \ . \end{aligned}$$

Pel que s'ha dit abans, hem de veure només:

$$(T_{q'}\pi)(T_q\varphi_{t_0}(X'_q)) = X_p$$

però

$$T_{q'}\pi \cdot T_q\varphi_{t_0} = T_q(\pi\cdot\varphi_{t_0}) = T_q\pi$$

ja que $\pi\cdot\varphi_{t_0}(z) = \pi(z)$, per ser $\varphi_{t_0}(z)$ un punt de la mateixa fibra que z.

Amb això, la igualtat que hem de provar queda, a partir de:

$$g_{q'}(X'_{q'}, Y'_{q'}) - \omega_{q'}(X'_{q'})\,\omega_{q'}(Y'_{q'}) =$$

$$= g_{q'}(T_q\varphi_{t_0}X'_q, T_q\varphi_{t_0}X'_q) - \omega_{q'}(T_q\varphi_{t_0}X'_q)\,\omega_{q'}(T_q\varphi_{t_0}Y'_q)$$

de la forma següent:

$$g_q(X'_q, Y'_q) - \omega_q(X'_q)\,\omega_q(Y'_q) =$$

$$= g_{q'}(T_q\varphi_{t_0}X'_q, T_q\varphi_{t_0}Y'_q) - \omega_q(T_q\varphi_{t_0}X'_q)\,\omega_q(T_q\varphi_{t_0}Y'_q)$$

Però, per ser ξ un camp vectorial de Killing i $T_q \varphi_{t_0} \xi_q = \xi_{q'}$, aquesta igualtat és certa i tenim doncs una mètrica sobre B, que a més a més és riemanniana, definida a partir de g i de ω.

Així, tenim que (B,h) és una varietat de Riemann amb $g = \pi^* h + \omega \otimes \omega$.

Més encara, com que E és orientable, existeix una (2n+1)-forma que no s'anul.la sobre E. Aquesta forma, integrada al llarg de les fibres (el fibrat és orientable), és una 2n-forma que no s'anul.la sobre B. Així B és orientable.

(NOTA: Podem veure que B és orientable, aplicant el resultat més general donat pel següent exercici (Greub):

Sigui (E,π,B,F) un fibrat diferenciable amb E connexa i orientable, però B no orientable. Sigui $\rho : \widetilde{B} \longrightarrow B$ el doble recobriment orientable. Demostrar que el fibrat és orientable si i sols si existeix un fibrat diferenciable $(E,\tilde{\pi},\breve{B},F_1)$ tal que $\pi = \rho \circ \tilde{\pi}$. Provar que llavors $F = F_1 \times Z_2$).

Per tant, sobre B podem aplicar el teorema de Gauss-Bonnet, que diu:

$$\int_B Q = 2^{2n} \pi^n n! \chi(B) \tag{11}$$

a on $Q = (-1)^n \sum \epsilon(i_1 \ldots i_{2n}) \Omega_{i_1}^{i_2} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_{2n-1}}^{i_{2n}}$

i (Ω_j^i) denota la forma de curvatura de la mètrica h, i $\chi(B)$ és la característica d'Euler-Poincaré de B.

Com que $\omega(X) = g(\xi, X)$ i ξ és un camp de vectors de Killing, tenim que ω és una forma de connexió sobre el fibrat i així podem escriure Ω_j^i com una funció de la curvatura sobre E respecte a la mètrica g (Kobayashi [2])(Capítol 0, apartat 4).

Comprobem, primerament, que ω és forma de connexió.

PROPOSICIO 2. En aquestes hipòtesis, ω és forma de connexió.

Prova: Si agafem $A = d/dt$ una base de $\mathfrak{S}^1$, àlgebra de Lie de S^1, aleshores $\tilde{\omega} = \omega A$, és una forma sobre E que pren valors a $\mathfrak{S}^1$. Com és habitual, identifiquem ω amb $\tilde{\omega}$, quan parlem de la connexió definida per ω. Per a veure que ω defineix efectivament una connexió hem de provar: Primer, si $V \in \mathfrak{S}^1$ i V^* és el camp vectorial sobre E induït per V, aleshores $\omega(V^*) = V$ en cada punt; i segon, $R_t^* \omega(X) = ad(t^{-1})(X)$ per a cada X vector tangent a E.

La primera afirmació només cal provar-la per a la base A de $\mathfrak{S}^1$, però $A^* = \xi$ i $\omega(\xi) = 1$, per tant, en virtut de la identificació tenim: $\omega(A^*) = \tilde{\omega}(A^*) = \omega(A)A = \omega(\xi)A = A$.

Respecte al segon punt, com que S^1 és abelià, haurem de veure tan sols que $R_t^*\omega = \omega$, però

$$R_t^* \omega(X)(p) = \omega(R_{t*} X_p) = g(R_{t*}X_p, \xi_{R_t p}) =$$

$$= g(R_t X_p, R_t \xi_p) = g(X_p, \xi_p) = \omega(X_p)$$

per ser ξ camp vectorial de Killing. Així doncs, ω defineix una connexió sobre E.

Per veure fàcilment que $A^* = \xi$, recordem breument la construcció de V^*. Si $V \in \mathfrak{S}^1$ i a_t és el subgrup uniparamètric de S^1 generat per V, aleshores el grup uniparamètric de transformacions R_{a_t} sobre E, indueix un camp vectorial diferenciable sobre E, que denotem V^*. Si partim de A, $a_t = t$ i la igualtat és obvia.

Queda provada la proposició 2 //.

A partir de les propietats de la integració al llarg de les fibres, (Capítol 0, apartat 2), és fàcil de veure que

$$\int_E \pi^*\theta \wedge \omega = \ell(\xi) \int_B \omega$$

on θ és una 2n-forma arbitrària sobre B.

Utilitzant aquesta igualtat, i les relacions entre les formes de curvatura de g i h (Capítol 0, apartat 4), a partir de (11) obtenim:

(12) $\left((-1)^n / 2^{2n} \pi^n n!\, \ell(\xi)\right) \int_E \sum \varepsilon(i_1 \dots i_{2n})\, \pi^*\Omega^{i_2}_{i_1} \wedge \dots$

$\dots \wedge \pi^*\Omega^{i_{2n}}_{i_{2n-1}} \wedge \varphi^0 = \chi(B)$. Si posem A(ij) en lloc de A_{ij}, resulta

(13) $\left((-1)^n / 2^{2n} \pi^n n!\, \ell(\xi)\right) \int_E \sum \varepsilon(i_1 \dots i_{2n}) \Big(\Psi^{i_2}_{i_1} +$

$+ \sum_{k,s} (A(i_2 i_1)A(ks) + A(i_2 k)A(i_1 s))\, \varphi^k \wedge \varphi^s \Big) \wedge \dots \wedge \Big(\Psi^{i_{2n}}_{i_{2n-1}} +$

$+ \sum_{k,s} (A(i_{2n}\, i_{2n-1})A(ks) + A(i_{2n}\, k)A(i_{2n-1}\, s))\, \varphi^k \wedge \varphi^s \Big) \wedge \varphi^0 =$

$= \chi(B)$.

Calculem $\chi(B)$ en termes dels nombres de Betti de E. La successió exacta de Gysin del fibrat $\pi : E \longrightarrow B$ és

$$0 \longrightarrow H^1(B) \xrightarrow{\pi^*} H^1(E) \xrightarrow{\int} H^o(B) \longrightarrow$$

Trencant-la,

$$0 \longrightarrow H^{p+2}(B)/\mathrm{Im}\, D_p \longrightarrow H^{p+2}(E) \longrightarrow \mathrm{Ker}\, D_{p+1} \longrightarrow 0$$

i així, com que són espais vectorials, tenim:

$$H^{p+2}(E) = \mathrm{Ker}\, D_{p+1} \oplus \mathrm{Coker}\, D_p \ .$$

Llavors, obtenim les següents relacions:

$$b_o(B) = b_o(E)$$
$$b_1(B) = b_1(E) - d_o$$
$$b_2(B) = b_2(E) + b_o(E) - d_o - d_1$$
$$\vdots$$
$$b_n(B) = b_n(E) + b_{n-2}(E) + \dots + b_{n-2k}(E) - d_o - d_1 - \dots - d_{n-1} .$$

(amb $2k = n$ o $2k+1 = n$, $d_i = \dim \mathrm{Ker}\, D_i$, i $D_i : H^i(B;R) \longrightarrow H^{i+2}(B;R)$ la multiplicació per la classe d'Euler del fibrat (Capítol 0, apartat 2).

Ja que

$$(14) \qquad \chi(B) = \sum_{r=0}^{n-1} 2b_r(B)(-1)^r + b_n(B)(-1)^n \quad (\dim B = 2n)$$

expressant cada $b_r(B)$ com una funció de $b_r(E)$ i d_r tenim:

$$(15) \qquad \chi(B) = \sum_{r=0}^{n} (n+1-r)(-1)^r b_r(E) + \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r d_r \; .$$

D'aquesta manera obtenim la fórmula (3), amb $f(\Omega, \xi)$ donada per (13). Aquesta $f(\Omega, \xi)$ és independent de l'elecció dels camps de ξ-bases.(Si $\xi, e_1, \ldots, e_{2n}$ i $\xi, v_1, \ldots, v_{2n}$ són dues referències orientades positivament, els integrants de (13) diferirien en el determinant del canvi, que en aquest cas és igual a 1).

Si treballem sobre varietats de Sasaki, el terme $\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r d_r$, no apareix. En efecte, en aquest cas la base del fibrat és una varietat Kähleriana, però com que la classe d'Euler del fibrat coincideix amb la classe de la 2-forma fonamental de la variatat Kähleriana, sabem que, aleshores, D_p és injectiu per a $p \leq (2n-2)/2$.

Aquest és el cas estudiat per S.Tanno [7].

CAPITOL 2

DIMENSIO 3 I DIMENSIO 5

§1. Dimensió 3

TEOREMA 2. Sigui (E.g) una varietat de Riemann orientable, compacta connexa de dimensió 3. Sigui ξ un camp de vectors unitari regular, de Killing sobre E. Llavors

$$(16) \qquad (1/2\pi\ell(\xi)) \int_E (K(\xi^\perp) + 3K(\xi))\eta = 2 - b_1(E)$$

si i sols si $b_1(E)$ és parell, i

$$(17) \qquad (1/2\pi\ell(\xi)) \int_E (K(\xi^\perp) + 3K(\xi))\eta = 3 - b_1(E)$$

si i sols si $b_1(E)$ és imparell,

on $K(\xi^\perp)$ significa la curvatura seccional del pla ortogonal a ξ, $K(\xi)$ la curvatura seccional de qualsevol pla que contingui ξ (és independent de l'elecció del pla) i η denota la forma de volum.

A més a més, en el darrer cas el fibrat és trivial.

Prova: $\chi(E/\xi) = 2 - b_1(E) + d_o$. E/ξ és una superfície de Riemann, així $b_1(E/\xi) \equiv \chi(E/\xi) \equiv 0 \pmod 2$. Si $b_1(E)$ és parell, d_o és parell i, ja que $d_o \leq b_o(E/\xi) = 1$ (per connexió), tenim: $d_o = 0$. Si $b_1(E)$ és imparell, d_o és imparell i així, $d_o = 1$. Per (13) tenim:

$$(18) \quad (-1/4\pi \ell(\xi)) \int_E 2(\Psi_1^2 - 3A(12)^2 \varphi^1 \wedge \varphi^2) \wedge \varphi^o =$$

$$= (1/2\pi \ell(\xi)) \int_E (K(\xi^\perp) + 3K(\xi))\, \eta = \chi(B).$$

Anem a calcular $A(12)^2$. Sigui X_1, X_2, ξ una base ortonormal. $R(\xi, X_1, \xi, X_1) = g(R(\xi, X_1)X_1;\xi) = \Psi_1^o(\xi, X_1) = A(12)A(21)\, \varphi^1 \wedge \varphi^o(\xi, X_1) = A(12)^2$.

Així, $A(12)^2$ és la curvatura seccional del pla determinat per ξ i X_1. Si $Z = \lambda X_1 + \mu X_2$ amb $\lambda^2 + \mu^2 = 1$, com que $R(\xi, X_1, \xi, X_2) = g(R(\xi, X_2)X_1;\xi) = \Psi_1^o(\xi, X_2) =$

$= A(12)A(21)\, \varphi^1 \wedge \varphi^o(\xi, X_2) + A(12)_{;1}\, \varphi^1 \wedge \varphi^2(\xi, X_2) = 0$,

tenim que $R(\xi, Z, \xi, Z) = A(12)^2$. Així, podem dir que $A(12)^2 = K(\xi)$ = curvatura seccional de qualsevol pla que contingui ξ.

Anàlogament, tenim: $\Psi_1^2 \wedge \varphi^o = -K(\xi^\perp)\, \varphi^o \wedge \varphi^1 \wedge \varphi^2$.

En efecte:

$$\Psi_1^2 \wedge \varphi^o = R^2_{112}\, \varphi^o \wedge \varphi^1 \wedge \varphi^2 = -R^2_{121}\, \varphi^o \wedge \varphi^1 \wedge \varphi^2.$$

Però, $R(X_1, X_2, X_1, X_2) = g(R(X_1, X_2)X_2;X_1) =$

$= \Psi_2^1(X_1, X_2) = -\Psi_1^2(X_1, X_2) = -R^2_{112} = R^2_{121}$.

Per tant, $\Psi_1^2 \wedge \varphi^o = -K(\xi^\perp)\, \varphi^o \wedge \varphi^1 \wedge \varphi^2$. $(R^1_{212} = \Psi_2^1(X_1, X_2))$.

Així docs, (16) i (17) ja s'han demostrat.

Comentaris:

(i) Sigui (E,g) com en el teorema 2. Si (E,g) és de curvatura constant k, llavors $k \geq 0$ i tenim:

a) Si $k = 0$, llavors E és homeomorf a $S^1 \times S^1 \times S^1$.

b) Si $k > 0$, llavors E és un fibrat sobre S^2.

En efecte, si $k = 0$, tenim: $b_1(E) = 2$, o $b_1(E) = 3$. Però, com que $A(ij) = 0$, la classe característica del fibrat és zero i per tant el fibrat és trivial. Per tant $b_1(E) = 3$ i $E = B \times S^1$ amb $b_1(B) = 2$. Aplicant la classificació de superfícies compactes, hem acabat.

Si $k > 0$, $b_1(E) = 0$ o $b_1(E) = 1$. Però, Tanno ha demostrat que qualsevol varietat Riemanniana completa de curvatura constant 1, de dimensió imparella, admet una estructura de Sasaki. Per tant $b_1(E)$ és zero o parell, i per tant $b_1(E) = 0$. Per tant $d_o = 0$ i $b_1(B) = 0$. Apliquem ara la classificació de superfícies compactes.

(ii) Sigui (E,g) com en el teorema 2. Si (E,g) no és de curvatura constant, però $K(\xi) = k \neq 0$, aleshores (E, g', ξ'), on $g' = kg$ i $\xi' = \xi/\sqrt{k}$, és una varietat de Sasaki.

En efecte: ξ' és un camp vectorial regular unitari de Killing respecte a g'. Tenim que veure

$$R(X,Y)\xi' = g'(\xi',Y)X - g'(X,\xi')Y$$

Sigui ξ', e_1, e_2 una base ortonormal respecte g'.

$g'(\xi', e_1)\xi' - g'(\xi', \xi')\, e_1 = -e_1$

$g'(R(\xi', e_1)\xi', \xi') = R(\xi', \xi', \xi', e_1) = 0$

$g'(R(\xi', e_1)\xi', e_1) = R(e_1, \xi', \xi', e_1) = -1$

$g'(R(\xi', e_1)\xi', e_2) = R(e_2, \xi', \xi', e_1) = 0$

Per tant la igualtat és certa quan prenem $X = \xi'$, $Y = e_1$. Anàlogament per a $X = \xi'$, $Y = e_2$. Comprovem ara el cas $X = e_1$, $Y = e_2$ i, per linealitat, quedarà provada la igualtat.

En aquest últim cas, el terme de la dreta és zero, i el de l'esquerra és $R(e_1,e_2)\xi'$. Però

$$g'(R(e_1,e_2)\xi',\xi') = R(\xi',\xi',e_1,e_2) = 0$$

$$g'(R(e_1,e_2)\xi',e_1) = R(e_1,\xi',e_1,e_2) = (1/k)A_{12;1} = 0$$

$$g'(R(e_1,e_2)\xi',e_2) = R(e_2,\xi' e_1,e_2) = (1/k)A_{12;1} = 0.$$

§2. Dimensió 5

<u>TEOREMA 3</u>. Sigui (E,g) una varietat de Riemann compacta, connexa de dimensió 5, amb una estructura quasi de contacte normal i regular (φ,ξ,η), on ξ és un camp de vectors unitari de Killing. Llavors

$$(19)\qquad (1/\ell(\xi)\, 2^4 \pi^2\, 2!) \int_E F(\Omega,\xi) = 3 - 2b_1(E) + b_2(E)$$

si els nombres de Betti de E satifan la R_1-condició, i

$$(20)\qquad (1/\lambda(\xi)\, \pi^2 2^4\, 2!) \int_E F(\Omega,\xi) = 5 - 3b_1(E) + b_2(E)$$

si els nombres de Betti de E satisfan la R_2-condició.

És obvi que el segon membre no depèn del camp de vectors unitari de Killing escollit. En aquesta fórmula

$F(\Omega, \xi)$ ve donada per (13) on $A(ij) = g(e_i, \nabla_{e_j}\xi)$, φ^k és dual de e_k, i ξ, e_1, e_2, e_3, e_4 és una base ortonormal.

Provem el teorema 3 estudiant per separat els diferents casos de les condicions R_1 i R_2.

<u>TEOREMA 3a.</u> Sigui E una varietat riemanniana orientable connexa compacta, de dimensió 5, i sigui ξ un camp de vectors regular unitari i de Killing sobre E tal que E/ξ és una varietat complexa. Aleshores, si $b_1(E)$ i $b_2(E)$ satisfan la R_2-condició, tenim $E = E/\xi \times S^1$ i $\chi(E/\xi) = 5 - 3b_1(E) + b_2(E)$.

Prova: Si el fibrat no és trivial tenim: $d_o = 0$, i així $b_1(B) = b_1(E)$ imparell $\neq 1$. Pel teorema de Grauert es té: $B = Q \ldots Q(B')$, amb B' lliure de corbes excepcionals (de primera espècie). El gènere geomètric p_g i la irregularitat q de B són invariants sota transformacions quadràtiques. Així doncs, $b_1(B) = b_1(B') \neq 1$ i imparell. Per tant, pel teorema B tenim $c_1^2(B') = 0$. Però $c_1^2(B) + n_t = c_1^2(B') = 0$ implica: $c_1^2(B) \leq 0$. A més a més $c_1^2(B) + b^-(B) = c_1^2(B') + b^-(B') = b^-(B')$ implica: $c_1^2(B) + b^-(B) \geq 0$. De $c_1^2(B) + b^-(B) = 10p_g(B) + 8 - 8q(B) \geq$ ≥ 0 deduïm: $p_g(B) \geq [(8q(B) - 8)/10] + \delta_{o1}$.

Més encara, de la successió exacta de Gysin, resulta $b_2(E) = b_2(B) - b_o(E) + d_o + d_1$. I del teorema A, $b_2(E) = b^+(B) + b^-(B) + d_o + d_1 - 1 = 2p_g(B) + b^-(B) -$ $- 1 + d_1 \geq 2p_g(B) + b^-(B) - 1$. També del teorema A tenim: $b_2(E) \geq 12p_g(B) + 3 - 4b_1(E)$, això és,

$b_2(E) \geq 12\left[(4b_1(E)-4)/10\right] + 12\,\delta_{01} + 3 - 4b_1(E)$, però nosaltres justament hem exclòs aquest cas.

Així doncs, el fibrat ha de ser trivial i per tant $d_o = 1$ i $d_1 = b_1(E) - 1$. En conseqüència, tenim: $\chi(B) = 5-3b_1(E)+b_2(E)$, independentment del camp de vectors unitari regular de Killing.

<u>TEOREMA 3b</u>. Sigui E una varietat de Riemann orientable, compacta, connexa de dimensió 5, i ξ un camp de vectors unitari, regular, de Killing sobre E tal que E/ξ és una varietat complexa. Llavors, si $b_1(E)$ és parell $\neq 2$ i $b_2(E) = 0$ o bé $b_2(E) = 1$, tenim: $E \neq E/\xi \times S^1$ i $\chi(E/\xi) = 3 - 2b_1(E) + b_2(E)$.

Prova: Si el fibrat és trivial, tenim: $d_o = 1$ i $b_1(B) = b_1(E) - 1$. Per tant, $b_1(B)$ és imparell i $b_1(B) \neq 1$. Com en el cas anterior, tenim: $B = Q\ldots Q(B')$, amb B' lliure de corbes excepcionals. Semblantment, tenim: $c_1^2(B') = 0$ i així, $c_1^2(B) + b^-(B) = c_1^2(B') + b^-(B') \geq 0$. Això implica: $p_g(B) \geq \left[(4b_1(E)-8)/10\right] + \delta_{01}$ i $b_2(E) \geq 2\left[(4b_1(E)-8)/10\right] + 2\,\delta_{01}$. Però aquesta desigualtat no és certa quan $b_2(E) = 0$ o $b_2(E) = 1$.

Així doncs, el fibrat ha de ser no trivial. En aquest cas, $d_o = 0$ i $b_1(B) = b_1(E)$ parell diferent de 2. Com que $b_2(B) = b_2(E) + 1 - d_1 = 2p_g(B) + 1 + b^-(B)$, si $b_2(E) = 0$, tenim $1 - d_1 = 2p_g(B) + 1 + b^-(B)$ i això implica: $\chi(E/\xi) = 3 - 2b_1(E)$. Tenim doncs provat el teorema quan $b_2(E) = 0$.

Si $b_2(E) = 1$ anem a veure que $c_1^2(B') < 0$. Altrament tindríem: $c_1^2(B) + b^-(B) \geq 0$ i llavors, $p_g(B) \geq \left[(4b_1(E)-9)/10\right] + \delta_{01}$ pel Teorema A. També $b_2(E) = b_2(B) - 1 + d_1 \geq$

$\geq 2p_g(B)$, i així $b_2(E) \geq 2\left[(4b_1(E)-9)/10\right] + 2\,\overline{\delta_{01}}$. Però aquesta desigualtat no és certa quan $b_2(E) = 1$. Així doncs $c_1^2(B') < 0$. Aleshores, per ser $b_1(B')$ parell estem en algun dels cinc primers casos del Teorema B, i com que $c_1^2(B') < 0$, estem en el primer cas.

Com que $c_1^2(P_2(C)) = 9$, B' és una superfície reglada, això és, $B' = P_1(C) \times S$ on S és una corba de gènere p ($\dim_C S = 1$). Per tant, $b_2(B') = b_2(P_1(C)) + b_1(P_1(C)) \cdot b_1(S) + b_2(S) = 1 + 1 = 2$, ja que $b_1(S) = 2p$ $b_0(S) = 1$, $b_2(S) = 1$ i $b_1(P_1(C)) = 0$, $b_0(P_1(C)) = 1$, $b_2(P_1(C)) = 1$.

A més a més $b_2(B') = 2$ implica: $b^-(B) = 2 - b^+(B') = 2 - 2p_g(B') - 1$ i això ens porta a escriure: $p_g(B') = p_g(B) = 0$ i $b^-(B') = 1$. Per conseqüent, $b^-(B) = b^-(B') + n_t \geq 1$. De $b_2(E) + 1 - d_1 = 2p_g(B) + 1 + b^-(B)$ tenim: $d_1 = 0$ i $\chi(E/\xi) = 3 - 2b_1(E) + 1$. Això prova el teorema.

En ambdós casos hem provat que la superfície E/ξ és lliure de corbes excepcionals.

Estudiem separadament els casos 1, 2 i 3 de la condició R_1.

<u>PROPOSICIÓ 3</u>. Sigui (E,ξ) com en el teorema anterior. Aleshores, si $b_1(E) = 2$ i $b_2(E) = 0$ tenim: $\chi(E/\xi) = -1$ i el fibrat és no trivial.

Prova: En aquest cas, $b_2(B) = 1 - (d_0 + d_1)$. $d_0 = 0$ implica: $b_1(B) = b_1(E) = 2$ i així $b_2(B) = 2p_g(B) + 1 + b^-(B)$. D'aquí deduïm: $d_1 = 0$ i $\chi(E/\xi) = -1$. $d_0 = 1$

implica: $b_1(B) = d_1 = b_1(E) - d_o = 1$ i això implica:

$b_2(B) = 1 - (d_o + d_1) = 1 - 2$, cosa impossible.

PROPOSICIÓ 4. Sigui $(E,\mathfrak{F})$ com en la proposició 2. Llavors $b_1(E) = 0$ implica: $\chi(E/\mathfrak{F}) = 3 + b_2(E)$ i el fibrat és no trivial.

Prova: $b_1(B) = b_1(E) - d_o = - d_o$ implica $d_o = b_1(B) = 0$. Així és $d_1 = 0$ ja que $d_1 \leq b_1(B)$.

PROPOSICIÓ 5. Sigui $(E,\mathfrak{F})$ com en les proposicions anteriors. Si $b_1(E) = 2$ i $b_2(E) = 1$, tenim: $\chi(E/\mathfrak{F}) = 0$.

Prova: $b_2(B) = 1 + 1 - (d_o + d_1)$. (i) $d_o = 0$ implica: $b_1(B) = 2$ i $b_2(B) = 2 - d_1 = 2p_g(B) + 1 + b^-(B)$, d'on $d_1 = 0$ o $d_1 = 1$.

Anem a veure que $d_1 \neq 1$. Suposem que no; tenim: $b_2(B) = 1$ i així, $p_g(B) = b^-(B) = 0$. Però $b^-(B) = 0$ vol dir que B és lliure de corbes excepcionals (cf. amb la prova del Teorema 3a). Pel Teorema A, tenim: $c_1^2(B) = 10p_g + 9 - b^- - 8q = 1 > 0$ i $q = 1$. Però pel Teorema C tenim $q = 0$. Això és una contradicció, i així, $d_1 = 0$. (ii) Si $d_o = 1$, llavors $d_1 = b_1(B) = b_1(E) - d_o = 1$. En ambdós casos, $\chi(E/\mathfrak{F}) = 3 - 2b_1(E) + b_2(E) + d_o - d_1 = 3 - 2b_1(E) + b_2(E) = 0$.

PROPOSICIÓ 6. Sigui $(E,\mathfrak{F})$ com en les altres proposicions. Si $b_1(E) = 1$ i $b_2(E) = 0$, tenim: $\chi(E/\mathfrak{F}) = 1$ i el fibrat és no trivial.

Prova: $b_2(B) = 1 - (d_o + d_1)$. Si $d_o = 0$, $b_1(B) = b_1(E) = 1$. Per tant, $b_2(B) = 2p_g(B) + b^-(B) = b_2(E) +$

$+b_o(E) - d_o - d_1 = 1 - d_1$. Això implica: $p_g(B) = 0$ i $b^-(B) + d_1 = 1$. Si $d_1 = 1$, $b^-(B) = 0$ implica: $b_2(B) = 0$; però això és imposible, ja que $\chi_E \in H^2(B;R)$ i χ_E no és zero perquè $d_o = 0$. Si $d_o = 1$, $d_1 = b_1(B) = b_1(E) - 1 = 0$, però llavors $b_2(B) = 0 = 2p_g(B) + 1 + b^-(B)$ i això és impossible. La darrera igualtat ve del Teorema A. Per tant, tenim: $d_o = 0$ i $d_1 = 0$. Així, $\chi(E/\xi) = 1$ i el fibrat és no trivial.

Òbviament, el Teorema 3 és conseqüència dels teoremes 3a i 3b, i de les proposicions 3,4,5 i 6. L'integrant s'obté de (13) per a $n = 2$.

<u>TEOREMA 4.</u> Sigui (E,g) com en el Teorema 3. Aleshores, si la curvatura seccional de E és sempre positiva, l'integrant és positiu. Si la curvatura seccional al llarg dels plans ortogonals a ξ és sempre positiva, l'integrant és positiu.

Prova: L'integrant de la fórmula de Gauss-Bonnet en dimensió 4 pot escriure's com segueix (Chern, Abh. Math.Sem.Univ.Hamburg, 20 (1955),p.124):

$$(21) \qquad (K_{1212}K_{3434} + K_{1234}^2 + K_{1313}K_{4242} + K_{1342}^2 + K_{1414}K_{2323} + K_{1423}^2)$$

$$\text{On} \quad \Omega^i_j = (1/2)\sum_{k,r} K_{ijkr}\,\theta^k \wedge \theta^r$$

En efecte: Recordem que si una secció plana P ve generada per dos vectors de components X_i, Y_k respectivament, les seves coordenades de Plücker es defineixen així:

$$p_{ik} = X_iY_k - X_kY_i.$$

Quan P és de mesura unitat, això és, quan $\sum_{i<k} p_{ik}^2 = 1$ la curvatura seccional de P ve donada per

$$K(P) = -\frac{1}{4} \sum_{ijk\ell} K_{ijk\ell}\, p_{ij}\, p_{k\ell}$$

Suposem la secció plana P_o : $p_{12} = 1$, $p_{k\ell} = 0$, $(k,\ell) \neq (1,2)$, per a la qual la curvatura seccional és màxima, entre totes les seccions planes a través del punt. En un entorn de P_o tenim: $p_{12} \neq 0$. Per a més seccions planes com aquestes, podem escriure un conjunt complet de relacions independents entre les p_{ik} així:

$$p_{12}\, p_{\alpha\beta} + p_{1\alpha}\, p_{\beta 2} + p_{1\beta}\, p_{2\alpha} = 0, \qquad 3 \leq \alpha, \beta \leq n.$$

A això afegim la relació

$$\sum_{i,k} p_{ik}^2 = 2.$$

Seguint el procediment habitual, per estudiar un extrem relatiu de la curvatura seccional considerem la funció

$$f(p) = -\frac{1}{4} \sum_{ijk\ell} K_{ijk\ell}\, p_{ij}\, p_{k\ell} - \lambda \left(\sum_{ik} p_{ik}^2 - 2 \right)$$
$$- \sum_{\alpha<\beta} 2\mu_{\alpha\beta} \left(p_{12}\, p_{\alpha\beta} + p_{1\alpha}\, p_{\beta 2} + p_{1\beta}\, p_{2\alpha} \right)$$

on λ i $\mu_{\alpha\beta}$ són indeterminades. Trobem

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_{1\alpha}} f(p) = -\frac{1}{4} \sum_{k,\ell} K_{1\alpha k\ell}\, p_{k\ell} - \lambda p_{1\alpha} - \sum_{\alpha<\beta} \mu_{\alpha\beta}\, p_{\beta 2}$$

La condició que aquestes derivades parcials s'anul.lin per a P_o dóna

$$K_{1\alpha 12} = 0$$

Canviant els índexs 1 i 2, tenim

$$K_{2\alpha 12} = 0$$

A continuació considerem totes les seccions planes que tenen un vector no nul en comú a la vegada amb P_o i amb l'espai lineal $(n-2)$-dimensional perpendicular a ell. Sigui P_1 ($p_{13} = 1$, $p_{ik} = 0$, $(i,k) \neq (1,3)$), d'entre totes elles, aquella per a la que la curvatura seccional assoleix un màxim. Utilitzant l'anterior argument obtenim les condicions necessàries

$$K_{2313} = 0, \ K_{1\nu 13} = 0, \qquad 4 \leq \nu \leq n.$$

Per a $n = 4$, tenim doncs

$$K_{1213} = K_{1214} = K_{1223} = K_{1224} = K_{1323} = K_{1314} = 0$$

Per tant $\Omega_{12} \wedge \Omega_{34} + \Omega_{13} \wedge \Omega_{42} + \Omega_{14} \wedge \Omega_{23} =$

$$= (K_{1212}K_{3434} + K^2_{1234} + K_{1313}K_{4242} + \\ + K^2_{1342} + K_{1414}K_{2323} + K^2_{1423}).$$

Per l'apartat 4 del Capítol 0, si

$$\Psi^{*}_{e} = (1/2) \sum_{\lambda\mu} R_{\nu\rho\lambda\mu} \varphi^{\lambda} \wedge \varphi^{\mu} \quad , \text{ tenim}$$

(22) $$R_{ijij} = K_{ijij} - 3\, A(ij)^2 .$$

El resultat es dedueix fàcilment de (21) i (22).

Hem obtingut també, el següent Teorema:

<u>TEOREMA 5</u>. Sigui E una varietat compacta, connexa de dimensió 5, amb $b_1(E)$ parell diferent de zero i de dos, i $b_2(E) = 0$. Aleshores E no pot admetre cap estructura regular, quasi de contacte i normal.

Prova: En la demostració del Teorema 3b, l'existència d'un camp ξ , essent E/ξ una varietat complexa, implica la no trivialitat del fibrat i la igualtat $p_g(B) = b^-(B) = 0$. D'aquesta darrera veiem que B és lliure de corbes excepcionals.

Llavors, pel Teorema A tindríem: $c_1^2(B) = 9 - 8q < 0$, i utilitzant el Teorema B, seria B una superfície reglada i així, $b_2(B) = 2 = b^+(B) + b^-(B) = 2p_g(B) + 1 + b^-(B)$, cosa imposible.

CAPITOL 3

DIMENSIONS MES ELEVADES

En dimensions més altes, hem obtingut el resultat següent:

TEOREMA 6. Sigui E una varietat de Riemann connexa compacta, de dimensió $n = 3+4m$, $m > 0$, que admeti un camp de vectors regular unitari i de Killing ξ. Si $b_2(E) = b_4(E) = \dots = b_{2m}(E) = 0$, llavors:

(23) $\chi(E/\xi) = \sum_{r=0}^{2m+1} (n+1-r)(-1)^r b_r(E) + 1$ si i sols si

$b_1(E) + b_3(E) + \dots + b_{2m+1}(E)$ és imparell. I

(24) $\chi(E/\xi) = \sum_{r=0}^{2m+1} (n+1-r)(-1)^r b_r(E)$ si i sols si

$b_1(E) + b_3(E) + \dots + b_{2m+1}(E)$ és parell.

Si $b_1(E) = b_3(E) = \dots = b_{2m+1}(E) = 0$, aleshores

(25) $\chi(E/\xi) = \sum_{r=0}^{2m+1} (n+1-r)(-1)^r b_r(E)$.

(Per tant, $\chi(E/\xi)$ és independent del camp de vectors ξ regular, unitari, de Killing).

Prova: Per la successió exacta de Gysin i per la dualitat de Poincaré, tenim les següents relacions:

$b_1(B) = b_1(E) - d_o = b_{4m+1}(B) = b_{4m+1}(E) + \ldots + b_1(E) -$

$- d_o - \ldots - d_{4m}$.

$b_2(B) = b_2(E) + 1 - d_o - d_1 = b_{4m}(E) + \ldots + b_o(E) -$

$- d_o - \ldots - d_{4m-1}$.

Així,

(26) $\qquad b_{4m+1}(E) + \ldots + b_3(E) = d_1 + \ldots + d_{4m}$ i

(27) $\qquad b_{4m}(E) + \ldots + b_4(E) = d_2 + \ldots + d_{4m-1}$.

Però $b_{4m}(E) = b_3(E), \ldots$, i restant (27) de (26) tenim: $b_{4m+1}(E) = b_2(E) = d_1 + d_{4m}$. Anàlogament, $b_4(E) = d_3 + d_{4m-2}$.

Per tant, se segueix de la hipòtesi: $d_1 = d_3 = \ldots = d_{2m-1} = 0$. A més a més, si ξ' és un altre camp de vectors unitari, regular, de Killing amb $B' = E/\xi'$, tenim:

(28) $\quad b_{2m+1}(E) - b_{2m+1}(B') = d_o' - d_o + d_2' - d_2 + \ldots + d_{2m}' - d_{2m}$

(29) $\quad b_{2m+1}(B) - b_{2m+1}(B') \equiv 0 \pmod 2$.

(Ja que, sobre una 2m-varietat orientada compacta M, amb m imparell, és $\chi(M) \equiv b_m \equiv 0$) (mod 2).

També tenim:

(30) $\quad b_{2m}(B) = 1 - (d_o + \ldots + d_{2m-1})$

Per (28) i (29) tenim:

(31) $\quad d_o' + d_2' + \ldots + d_{2m}' = 2k + d_o + d_2 + \ldots + d_{2m}$.

Aleshores, si $d_o = 1$, per (30) tenim: $d_2 = \ldots = d_{2m} = 0$ i així, $d_o + \ldots + d_{2m} = 1$. Si $d_o = 0$, per (30) tenim $b_{2m}(B) = 0$ o 1, $d_{2m} = 0$ o 1 i $d_2 + \ldots + d_{2m-2} = 0$ o 1. Si $d_2 + \ldots + d_{2m-2} = 0$, tenim: $d_o + \ldots + d_{2m} =$

$= 0$ o 1. Si $d_2 + \ldots + d_{2m-2} = 1$, tenim: $b_{2m}(B) = 1 - 1 =$
$= 0$ i així, $d_{2m} = 0$; per tant $d_0 + \ldots + d_{2m} = 0$ o 1.

Anàlogament, $d'_0 + \ldots + d'_{2m} = 0$ o 1. Per (31) tenim: $d'_0 + \ldots + d'_{2m} = d_0 + \ldots + d_{2m}$. En conseqüència, $\chi(E/\xi) =$
$= \chi(E/\xi') = \sum_{r=0}^{n} (n+1-r)(-1)^r b_r(E) + d_0 + \ldots + d_{2m}$. Com que $b_{2m+1}(B) = b_{2m+1}(E) + \ldots + b_1(E) - (d_0 + \ldots + d_{2m})$ és parell, hem provat (23) i (24).

Si $b_1(E) = b_3(E) = \ldots = b_{2m+1}(E) = 0$, tenim: $b_{2m+1}(B) =$
$= -(d_0 + \ldots + d_{2m})$ i així,

$$\chi(E/\xi) = \sum_{r=0}^{n} (n+1-r)(-1)^r b_r(E).$$

Això prova el Teorema 5.

<u>COROL.LARI 1</u>. Sigui (E,ξ) una varietat de Sasaki connexa compacta, de dimensió 7, amb ξ regular, i de curvatura estrictament positiva. Aleshores, si ξ' és un altre camp de vectors unitari regular de Killing, tenim: $\chi(E/\xi) = \chi(E/\xi')$.

Prova: Per a aquesta varietat, $b_2(E) = 0$. (Tanno [6]).

<u>COROL.LARI 2</u>. $S^{2p+1} \times S^{2q}$ $(p+q = 2m+1,\ p \leq m < q)$ no admet una estructura regular de Sasaki.

Prova: $S^{2p+1} \times S^{2q}$ té nombres de Betti que satisfan $b_2 = \ldots = b_{2m} = 0$ i $b_1 + \ldots + b_{2m+1}$ imparell. Així, si ξ és un camp de vectors unitari, regular, de Killing sobre $S^{2p+1} \times S^{2q}$, tenim:

$$\chi(E/\xi) = \sum_{r=0}^{2m+1} (n+1-r)(-1)^r b_r(E) + 1$$

i per tant, ξ no és de Sasaki.

REFERÈNCIES

1.- W.M.BOOTHBY AND WANG, On Contact Manifolds, Annals of Math.,68(1958), 721-734.

2.- S.KOBAYASHI, Topology of positively pinched Käeler manifolds, Tôhoku Math.J.,15(1963), 121-139.

3.- K.KODAIRA, On the structure of compact complex analytic surfaces, I,II,III,IV, Amer.J.Math.,86 (1964), 751-798; 88(1966), 682-721; 90(1968), 55-83; 90(1968), 1048-1066.

4.- A.MORIMOTO, Om normal almost contact structure with a regularity, Tôhoku Math.J.,16(1964), 90-104.

5.- R.PALAIS, A global formulation of the Lie Theory of transportations groups, Memoirs of the Amer. Math.Soc.,22(1957).

6.- S.TANNO, The topology of contact Riemannian manifolds, Illinois J.Math.,12(1968), 700-717.

7.- S.TANNO, A formula on some odd-dimensional Riemannian manifolds related to the Gauss-Bonnet formula, J.Math.Soc.Japan, 24(1972), 204-212.

DEPARTAMENT DE GEOMETRIA I DE TOPOLOGIA
UNIVERSITAT AUTONOMA DE BARCELONA
BELLATERRA
BARCELONA