Pub. Mat. UAB
nº 10, Desembre 1978

Un problema molt difícil d'anells de grup(*)

P. Menal
Secció de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Donats un cos K i un grup G hom pot construir un anell, l'anell de grup K[G], de la manera següent: els elements α de K[G] són les combinacions lineals formals d'elements de G amb coeficients a K. És a dir

$$\alpha = \sum_{x \in G} a_x \cdot x, \quad a_x \in K \quad \text{i quasi tots nuls.}$$

Donat que G és un grup, K[G] admet una estructura d'anell:

$$\alpha = \sum_{x \in G} a_x \cdot x, \quad \beta = \sum_{y \in G} b_y \cdot y, \text{ aleshores,}$$

$$\alpha\beta = \sum_{x, y \in G} (a_x b_y) \cdot xy .$$

D'aquesta manera K[G] és una K-àlgebra.

Els anells de grup apareixen d'una manera natural en estudiar representacions d'un grup G, és a dir, els homomorfismes

$$\Phi : G \longrightarrow Aut_k(V),$$

on V és un K-espai vectorial. Una tal representació dóna un homomorfisme d'anells

(*) Conferència donada als alumnes de la U.A.B. el 24 de Novembre de 1977.

$$\phi^{*} : K[G] \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(V,V)$$

$$\Sigma\, a_x \cdot x \longmapsto \Sigma\, a_x \cdot \phi(x).$$

Per tant, estudiar les representacions de G equival a estudiar els $K[G]$-mòduls. A l'hora d'estudiar els mòduls sobre un anell és molt necessari conèixer el radical de Jacobson d'aquest anell. Així, té sentit plantejar el següent

PROBLEMA. Trobar $JK[G]$ (radical de Jacobson de $K[G]$).

Jo voldria parlar en aquesta xerrada sobre aquest problema plantejat fa uns 25 anys i que, hores d'ara, no és resolt.

En els casos que $JK[G]$ és conegut, el que s'ha fet és trobar un convenient subgrup H de G tal que

$$JK[G] = JK[H]\; K[G]$$

i de manera que l'estructura de $JK[H]$ sigui fàcilment calculable o al menys més fàcil que la de $JK[G]$.

Començaré suposant que G és finit, $G=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$. En aquest cas $V=K[G]$ és un espai vectorial de dimensió $n<\infty$. Per tant $JK[G]^m = JK[G]^{m+1}$ per a un cert $m \geq 1$. Aplicant el lema de Nakayama tenim $JK[G]^m = (0)$. Considerem la representació regular r de $K[G]$, que és

$$r : K[G] \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(V,V), \quad V=K[G]$$

$$\alpha \longmapsto r(\alpha)$$

$$r(\alpha)(v)=\alpha v, \quad v \in V.$$

Suposem $0 \neq \alpha \in JK[G]$. Aleshores podem escriure $\alpha = a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n$ i $a_1 \neq 0$, per exemple. Multiplicant si convé per x_1^{-1} podem suposar $x_1 = 1$. Agafem $x_1, \ldots, x_n$ com a base de V per a calcular la traça del $r(\alpha)$.

Si $x \in G$ tenim

$$\operatorname{tr} r(x) = 0 \qquad \text{si } x \neq 1,$$
$$\operatorname{tr} r(1) = n.$$

Així, $\operatorname{tr} r(\alpha) = n a_1$ i com que $r(\alpha)$ és nilpotent $n a_1 = 0$. Això vol dir que la característica de K és $p > 0$ i $p | n$. En particular G té elements d'ordre p. Recíprocament suposem $c(K) = p$ i $p | n$. Aleshores $\alpha = \sum_{x \in G} x \neq 0$ és tal que $\alpha^2 = |G| \alpha = 0$ i com que α és central a $K[G]$ veiem que $\alpha \in JK[G]$.

Resumint,

<u>Teorema 1</u> (Mashcke). Sigui G un grup finit. Aleshores $JK[G] = (0)$ si i només si $c(K) = 0$ o si $c(K) = p > 0$, $p \nmid |G|$.

Les tècniques de demostració del Teorema 1 són

1.- $JK[G]$ és nilpotent.

2.- Les funcions traça (no es poden utilitzar en el cas infinit).

En general $JK[G]$ no és nilpotent, però si ho és tenim

<u>Teorema 2</u> (Passman, 1970). Si $JK[G]$ és nilpotent, aleshores

(i) $JK[G] = JK[\Delta^p(G)]\, K[G]$,
$JK[\Delta^p(G)] = \bigcup_W JK[W]$ on $W \lhd \Delta^p(G)$ i $|W| < \infty$.

(ii) $JK[G] = (0)$ si i només si $\Delta^p(G) = \langle 1 \rangle$, on
$\Delta(G) = \{x \in G : [G:N_x(G)] < \infty\}$,

$\Delta^p(G) = < x \in \Delta(G) :$ l'ordre de x és potència de $p>$.

En general $JK[G]$ no és nilpotent. De tota manera està conjecturat que $JK[G]$ és sempre un nil-ideal. Com hom ha arribat a aquesta conjectura?. Amitsur (1959) demostrà que si H és un subgrup de G de tipus finit es compleix que $JK[G] \cap K[H] \subseteq JH[H]$.

Sigui $\alpha \in JK[G]$, $\alpha = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$. Aleshores si $H = < x_1, \ldots, x_n >$ tenim que $\alpha \in JK[H]$. $K[H]$ és una K-àlgebra de tipus finit. Suposem de moment que G és abelià. Aleshores $K[H]$ és una K-àlgebra commutativa de tipus finit. Es dedueix del teorema dels zeros de Hilbert que $JK[H]$ és un nil-ideal. D'aquesta manera veiem que una bona generalització del T.Z.H. podria portar, en el cas no commutatiu, a la solució d'aquesta conjectura. Amitsur provà que si A és una K-àlgebra de tipus finit que satisfà una identitat polinòmica, aleshores $J(A)$ és nil. Si la conjectura fos certa, hom podria provar que $JK[G] = (0)$, si la $c(K) = 0$, utilitzant el següent

<u>Teorema 3</u>. Si $c(K) = 0$, aleshores $K[G]$ no té nil-ideals.

Apart d'aquesta conjectura tenim els resultats següents:

<u>Teorema 4</u> (Amitsur-Passman). Suposem que $c(K) = p \geq 0$ i que K té un element transcendent sobre el cos primer. Si G és un grup que no té elements d'ordre p en el cas $p > 0$, aleshores $JK[G] = (0)$.

Amitsur provà aquest teorema (1959) per a $p = 0$ i Passman (1970) per a $p > 0$.

Influenciats per la conjectura, en característica zero no s'ha fet gaire cosa més. En característica $p > 0$ s'hi ha treballat molt més. Cal notar primer que en el cas infinit el T. de Mashcke no generalitza. Per exemple si $G = Z \wr Z_p$ i $c(K) = p$ hom té $JK[G] = 0$.

Passman defineix un nou ideal radical per un anell A.

$N^*(A)=\{\alpha \in A|\alpha B$ és nilpotent per a tot subanell B de tipus finit de A$\}$.

Si $H\subseteq G$ és un subgrup, hom diu que H és localment d'index finit (l.f.) si per qualsevol subgrup S de G de tipus finit es compleix

$$[S:S\cap H] < \infty .$$

Donat un grup G es defineix

$$\Lambda(G) = \{x \in G|\ [G:N_x(G)] = \text{l.f.}\}.$$

Es demostra que $\Lambda^+(G)$, els elements d'ordre finit, formen subgrup. Amb aquesta notació tenim

<u>Teorema 5</u> (Passman 1974) $N^*(K[G]) = J(K[\Lambda^+(G)])\ K[G]$.

Passman ha fet la següent

<u>Conjectura</u>. $N^*(K[G]) = J(K[G])$.

$\Lambda^+(G)$ és un grup localment finit i, si la conjectura és certa, una segona etapa és estudiar els grups localment finits. El treball més significatiu d'això és el d'en Passman(1975). Sigui G un grup localment finit i $H\subseteq G$ un subgrup finit. Aleshores H és localment subnormal a G (H lsn G) si H és subnormal a tots els grups finits $H\subseteq S\subseteq G$. Un subgrup $S\subseteq G$ és subnormal a G si exis teixen subgrups $S = S_1 \triangleleft S_2 \triangleleft \dots \triangleleft S_n = G$.

$$\int(G) = \langle A|A \text{ lsn } G\rangle .$$

$$\int^p(G) = \langle A|A \text{ lsn } G,\ A^p = A\rangle,$$

on A^p és el subgrup generat per p-elements.

Si $O_p(G)$ és el p-subgrup normal maximal de G, hom defineix

$$\mathcal{J}(G) \supseteq O_p(G) \quad \text{i} \quad \mathcal{J}(G)/O_p(G) = \int^{p}(G/O_p(G)).$$

Aleshores es proposa com a candidat a $JK[G]$ el següent: $JK[\mathcal{J}(G)]\ K[G]$. Si això fos del tot cert es tindria que $JK[G] \neq 0$ si i només si $\mathcal{J}(\Lambda^{+}(G))$ té un element d'ordre p.

Destacarem que si G és un grup resoluble o un grup lineal en característica p, aleshores entre Hampton-Passman-Zaleskii proven que $JK[G] \neq (0)$ si i només si un cert subgrup de G (que determinen) té un element x d'ordre p tal que $[G:N_x] = 1.f.$

Finalment (Febrer 1977) Passman demostrà que per a un grup localment resoluble:

$$JK[G] = JK\ [\mathcal{J}(\Lambda^{P}(G))]\ K[G].$$

En el cas de grups lineals, encara hi ha algunes preguntes obertes: Sigui G un grup lineal localment finit de característica q. Sigui K un cos de característica p. Si $p=0$ és obvi que $JK[G] = 0$. Si $q=0$ o $q=p$ Passman provà (1974) que si $O_p(G) = \langle 1 \rangle$, aleshores $JK[G]$ és nilpotent i la seva estructura és donada pel Teorema 2. El cas $p>0$, $q>0$ i $p \neq q$ sembla més difícil i no és conegut si $O_p(G) = \langle 1 \rangle$ implica que $JK[G]$ és nilpotent.

Poden mirar The American Math. Monthy, Mars 1976, p. 173 on Passman fa una introducció als anells de grup.

BIBLIOGRAFIA

[1] Amitsur,S.A., On the semi-simplicity of group algebras, Michigan Math. J. 6(1959), 251-253.

[2] Amitsur,S.A., The radical of field extensions, Bull. Res. Council Israel, 7 F(1957), 1-10.

[3] Hampton,C.R. and Passman,D.S., On the semisimplicity of groups rings of solvable groups, Trans. Amer. Math. Soc. 173(1972), 289-301.

[4] Passman,D.S., Infinite group rings, Marcel Dekker, New York, 1971.

[5] Passman,D.S., Advances in group rings, Israel J. Math., 19(1974), 64-107.

[6] Passman,D.S., The semisimplicity problem for group rings, Symp. Math. Vol. 13, 333-342, Academic-Press, New York, 1974.

[7] Passman,D.S., The Algebraic Structure of Group Rings, Wiley-Interscience, 1978.

[8] Passman,D.S., The Jacobson Radical of a group ring of a locally solvable group, (per aparèixer),1977.

[9] Wallace,D.A.R., The Jacobson radicals of the group algebras of a group and of certain normal subgroups, Math. Z. 100(1967), 282-294.

[10] Zalesskii,A.E., On group rings of linear groups, Sib. Math. J. 12(1971), 246-250.

[11] Zalesskii,A.E., The Jacobson radical of the group algebra of a solvable group is locally nilpotent, Izv. Nauk. SSSR, Ser. Math. 38(1974), 983-994.