Pub. Mat.UAB
nº 10, Desembre 1978

UNA NOTA SOBRE DUALIDAD DE KÖTHE Y FUNCIONES REPRESENTADAS POR SERIES DE DIRICHLET

J.Prada Blanco

INTRODUCCION. En este trabajo, probamos que es posible identificar ciertos espacios de sucesiones asociadas a series de Dirichlet (con la topología normal) con determinados espacios de funciones holomorfas representadas por dichas series (con la topología compacto-abierta).

Como en [VI] y [VII] consideremos los espacios siguientes

$$H(\mathcal{R}) = \{ f(z) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, z \in \mathcal{R}, (a_n) \in H(r), r \in \mathbb{R} \}$$

$$H(C) = \{ f(z) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, z \in C, (a_n) \in H(-\infty) \}$$

siendo $\mathcal{R} = \{ z \in C :$ parte real de $z > r \}$,

$$H(r) = \{ (a_n) \in C^N : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n r'} < \infty, r' > r \}$$

$$H(-\infty) = \{ (a_n) \in C^N : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n r'} < \infty, r' \in \mathbb{R} \}$$

y λ_n una sucesión de números reales estrictamente creciente y tendiendo a infinito ($\lambda_o \geq 0$).

$H(\mathcal{R}_0)$ (respectivamente $H(C)$) con la topología T definida por las seminormas $h_p(f(z))=\sup\{|f(z)|, z=a+ib, a\geq p>r, b\in \mathbb{R}\}$ (respectivamente $p\in\mathbb{R}$) se identifica con $H(r)$ (respectivamente $H(-\infty)$) con la topología definida por las seminormas $h_p(a_n)=\sup(|a_n|e^{-\lambda_n p}, n\in N), p>r$ (respectivamente $p\in\mathbb{R}$), cuando $\underline{\lim}\ \lambda_n/n>0$(finito o no)[VI y VII].Veremos que en ciertos casos la topología compacto-abierta en $H(\mathcal{R}_0)$ (análogamente en $H(C)$) es la misma que la topología T;por tanto,en esos casos $H(r)$ (respectivamente $H(-\infty)$) con la topología normal se identifica con $H(\mathcal{R}_0)$ (respectivamente $H(C)$) con la topología compacto-abierta.

NOTACIONES

$$D=\begin{cases}\overline{\lim}\ n/\lambda_n, n\geq 0, \lambda_o>0,\\ \\ \overline{\lim}\ n/\lambda_n, n\geq 1, \lambda_o=0.\end{cases}$$

$N(x)$=número de λ_n tal que $\lambda_n<x, (x>0)$. $D(x)=N(x)/x$.

$\bar{D}(x)=(1/x)\int_o^x D(y)\,dy,\ x>0.\ \bar{D}=\overline{\lim}\ \bar{D}(x)$.

$$P_n=\begin{cases}\prod_{\substack{m=0\\ m\neq n}}^{\infty} |\lambda_n^2-\lambda_m^2|/\lambda_m^2, n\geq 0, \lambda_o>0,\\ \\ \prod_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty} |\lambda_n^2-\lambda_m^2|/\lambda_m^2, n\geq 1, \lambda_o=0.\end{cases} \qquad \Lambda_n=\begin{cases}P_n^{-1}, n\geq 0, \lambda_o>0,\\ \\ P_n^{-1}, n\geq 1, \lambda_o=0.\end{cases}$$

1. Una desigualdad fundamental

Teorema 1. Sean $\lambda_o>0$, $0\leqslant D<\infty$, $z_o \in \mathcal{R}$ (con su parte imaginaria igual a cero), $R>\bar{D}$ con $\overline{D(z_o,R)}$ contenido en $\mathcal{R}$ y f un elemento de $H(\mathcal{R})$. Entonces

$|a_n|\leqslant AM(z_o)\Lambda_n e^{\lambda_n z_o}$, $n\geqslant 0$, donde A es una constante que sólo depende de R y $M(z_o)=\sup\{|f(z)|, z\in\overline{D(z_o,R)}\}$.

Sean $\lambda_o=0$, $z_o\in\mathcal{R}$ (cOn su parte imaginaria igual a cero) y f un elemento de $H(\mathcal{R})$. Si D=0 v R tal que $0<R<1$ con $\overline{D(z_o,R)}$ contenido en $\mathcal{R}$, entonces $|a_o|\leqslant AM(z_o)$ y $|a_n|\leqslant AM(z_o)e^{\lambda_n z_o}\lambda_n^{-1}\Lambda_n$, $n\geqslant 1$. Si D es tal que $0<D<\infty$ y $R>\bar{D}$ con $\overline{D(z_o,\pi R)}$ contenido en $\mathcal{R}$, entonces $|a_o|\leqslant ARM(z_o)$ y $|a_n|\leqslant AM(z_o)e^{\lambda_n z_o}\lambda_n^{-1}\Lambda_n$, $n\geqslant 1$. En ambos casos, A es una constante que sólo depende de R.

Demostración. Vease III, pag. 26 (caso particular $C(s_o,\pi R)=C(L,\pi R)$, $s_o=z_o$). Cuando $\lambda_o=0$, las funciones $\Lambda_n(z)$, $n\geqslant 0$, son las siguientes:

$$\Lambda_o(z)=\prod_{m=1}^{\infty}(1-z^2/\lambda_m^2)\ ,\qquad \Lambda_n(z)=z\prod_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty}(1-z^2/\lambda_m^2),\ n\geqslant 1$$

y $\Lambda(z)=z\prod_{m=1}^{\infty}(1-z^2/\lambda_m^2)$.

Nota. Si tomamos $f\in H(C)$, obtenemos los mismos resultados.

2.En este apartado damos los resultados del trabajo.

Teorema 2.Sean $D=0, \lambda_o \geq 0$ y λ_n tal que $\underline{\lim}\ \lambda_n/\Lambda_n>0$ (finito o no).Entonces,en $H(\mathcal{R})$ la topología compacto-abierta es igual a la topología T.

Demostración.Tenemos que ver que la topología compacto-abierta es más fina que la topología T.

Sea $V=\{\ f(z)\in H(\mathcal{R})\ :\ \sup\ |f(z)|\leq\varepsilon, z=a+ib, a\geq p>r, b\in\mathbb{R}\}$

Consideremos $r<z_o<p_1<p$ y $R>0$ tal que $\overline{D(z_o,R)}$ contenido en $\mathcal{R}$;tomemos V' tal que

$V'=\{\ f(z)\ :\ f(z)\in H(\mathcal{R})\ :\ \sup|f(z)|\leq\varepsilon', z\in\overline{D(z_o,R)}\}$ siendo

$$\varepsilon'\leq\varepsilon_1 A^{-1} e^{\lambda_n(p_1-z_o)}/\Lambda_n, n\geq 0 \quad y \quad \varepsilon_1\leq\varepsilon/\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n(p-p_1)}$$

si $\lambda_o>0$.Si $\lambda_o=0$ tomamos R tal que $0<R<1$ y ε_1 de la misma forma,siendo $\varepsilon'<(\varepsilon_1/A, \varepsilon_1 A^{-1} e^{\lambda_n(p_1-z_o)}\lambda_n/\Lambda_n, n\geq 1)$.

Nota.Si $h=\underline{\lim}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)>0$,tenemos $\lim\ \lambda_n/\Lambda_n=\infty$,con lo que estamos en las condiciones del teorema anterior.

Teorema 3.Sean D tal que $0\leq D<\infty, \lambda_o\geq 0$ y λ_n tal que $\underline{\lim}\ \lambda_n/\Lambda_n>0$(finito o no).Entonces,en H(C) la topología compacto-abierta es igual a la topología T.

Demostración.Es similar a la anterior.

Nota.No podemos aplicar el mismo método en $H(\mathcal{R})$ cuando D es tal que $0<D<\infty$.De hecho,dado $p>r$ tal que $p-r<\overline{D}$,no es posible encontrar $r<z_o<p_1<p$ tal que $\overline{D(z_o,\pi R)}$ esté contenido en $\mathcal{R}$,siendo $R>\overline{D}$.

BIBLIOGRAFIA

I.-KÖTHE,G."Topological Vector Spaces I".Springer-Verlag. Berlín.Heidelberg.New York.1969.

II.-MANDELBROJT,S."Sur les séries de Dirichlet dont les exposants possèdent quelques propiétés arithmétiques". Bull.Soc.Math.de France t,60.1932.

III.-MANDELBROJT,S."Séries de Dirichlet.Principes et méthodes".Gauthiers-Villars.1969.

IV.-MANDELBROJT,S."Séries adhérentes.Régularisations des suites.Applications".Gauthiers-Villars.1952.

V.-PIETSCH,A."Nuclear Locally Convex Spaces".Springer-Verlag.Berlín.Heidelberg.New York.1972.

VI.-PRADA BLANCO,J."Series de Dirichlet consideradas como espacios de sucesiones".Collectanea Mathematica, volumen XXVIII,63-94.1977.

VII.-PRADA BLANCO,J."Espacios de Köthe y series de Dirichlet".Publicacions de la Secció de Matemàtiques.Universitat Autònoma de Barcelona,número 6,79-95.1977.