Pub. Mat. UAB
nº 10, Desembre 1978

UNA CONTRIBUCIÓ A L'ESTUDI DE GRUPS QUE OPEREN SOBRE UN PRODUCTE D'ESFERES.

M. Castellet *

1. Introducció

L'estudi de grups finits que operen sense punts fixos sobre una esfera està íntimament lligat al dels grups periòdics, és a dir grups per als quals la cohomologia és periòdica o bé, equivalentment, tals que llurs subgrups de Sylow són cíclics o quaterniònics (1). En aquest treball considero grups finits que operen sense punts fixos sobre un producte d'esferes $S^n \times S^n$ i analitzo propietats homològiques i no, per tal que això sigui possible. La cohomologia utilitzada és sempre la de Tate i la notació la de (1) i (2).

2. Acció d'un grup finit sobre $S^n \times S^n$

X serà sempre una varietat compacta amb la mateixa cohomologia entera que $S^n \times S^n$; és a dir $H^0X = Z$, $H^nX = Z \oplus Z$, $H^{2n}X = Z$,

* Aquest és un resum d'un treball realitzat l'any 1975 amb ajut d'una Borsa d'Estudis de la Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques i Matemàtiques. El treball sencer serà publicat per l'Institut d'Estudis Catalans.

$H^i X = 0$ per $i \neq 0, n, 2n$.

Si G és un grup finit que opera lliurament sobre X podem considerar la successió espectral de Swan $E_i^{p,q}$ associada a l'acció de G sobre X (6); es té

$$E_2^{p,q} = H^p(G, H^q X)$$

En virtud de les propietats cohomològiques de X i tenint en compte que el bigrau de les diferencials d_i és $(i, 1-i)$ i que a l'operar G lliurement, $E_\infty = 0$, s'obté una successió exacta llarga

$$\cdots \longrightarrow E_2^{p+2n+1,0} \xrightarrow{\partial} E_2^{p,2n} \xrightarrow{\beta} E_2^{p+n+1,n} \xrightarrow{\alpha} E^{p+2n+2,0} \cdots$$

on α, β i ∂ poden ésser explicitades.

Suposem, ara, que l'acció de G sobre X conserva l'orientació (és a dir, que el G-mòdul $H^{2n}X$ és trivial). Aleshores un petit càlcul mostra que l'estructura del G-mòdul $H^n X = Z \oplus Z$ és també la trivial i per tant tenim:

<u>Teorema</u> Si G és un grup finit que opera sense punts fixos i conservant l'orientació sobre un producte d'esferes $S^n \times S^n$, es té una successió exacta llarga

$$\dots \longrightarrow H^{p+2n+1}G \xrightarrow{\partial} H^pG \xrightarrow{\beta} H^{p+n+1}G \oplus H^{p+n+1}G \xrightarrow{\alpha}$$

$$\longrightarrow H^{p+2n+2}G \xrightarrow{\partial} \dots$$

<u>Corol.lari</u> En les condicions anteriors, si $|G| = r$ es té una successió exacta.

$$0 \longrightarrow H^nG \longrightarrow H^{n+1}G \longrightarrow Z/rZ \oplus Z/rZ \longrightarrow H^{n+1}G \longrightarrow H^nG \longrightarrow 0$$

(Ja que la finitud de G ens dóna l'isomorfisme $H^nG =$ $=\mathrm{Hom}\,(H^{-n}G,\ Z/rZ) = H^{-n}G$.

3. <u>Grups cohomològicament semiperiòdics</u>

Diré que un grup finit G d'ordre r és cohomològicament semiperiòdic-n (c.s.p.-n) si existeix una successió exacta

$$0 \longrightarrow H^{n-1}G \longrightarrow H^nG \longrightarrow Z/rZ \oplus Z/rZ \longrightarrow H^nG \longrightarrow H^{n-1}G \longrightarrow 0$$

<u>Proposició</u> Tot grup periòdic-n és c.s.p.-n

<u>Proposició</u> Si G és c.s.p.-n, aleshores

$$H^nG \,/\, H^{n-1}G = Z/hZ \oplus Z/kZ \quad \text{on } h.k = |G|$$

(És conseqüència de la definició i del teorema de Kulikov (5)).

<u>Proposició</u> El producte directe d'un grup periòdic-n per un grup periòdic-m és c.s.p.-(m.c.m.(n,m)).

(Conseqüència de les fórmules de Künneth).

Corol.lari Si Qs és el grup de quaternions generalitzat d'ordre S, es té

a) $Z/rZ \oplus Z/sZ$ és c.s.p.-2

b) $Z/rZ \times Q_s$ és c.s.p.-4

c) $Q_r \times Q_s$ és c.s.p.-4

Teorema $G = Z/pZ \oplus Z/pZ \oplus Z/pZ$ no és c.s.p.-n per a cap n.

Demostració: Com que $H^{2n}G = G$ i $H^{2n-1}G = 0$, no pot existir cap successió exacta com la del corol.lari de l'apartat 2, ja que a G hi ha p^3-1 elements d'ordre p i a $Z/p^3Z \oplus Z/p^3Z$ només n'hi ha p^2-1.

Corol.lari $Z/pZ \oplus Z/pZ \oplus Z/pZ$ no pot operar sense punts fixos i conservant l'orientació sobre cap producte d'esferes de la mateixa dimensió.

Aquest corol.lari ja fou demostrat per Heller l'any 1959 amb mètodes totalment diferents (3). La demostració que n'he donat té dos avantatges: dóna un resultat algebraic més fort i és força més curta i elegant.

4. Grups semiperiòdics

El teorema d'Artin i Tate que he mencionat a la introducció dóna una caracterització dels grups periòdics en termes de teoria de grups clàssica: tot subgrup de Sylow ha d'ésser cíclic o quaterniònic. Es planteja, aleshores, la possibilitat d'obtenir una caracterització semblant per als grups c.s.p.

Diré que un grup G és semiperiòdic si tot subgrup de Sylow de G és un producte de dos grups cíclics o quaterniònics.

Proposició

a) Tot grup periòdic és semiperiòdic

b) El producte directe de dos grups periòdics es semiperiòdic.

c) Tot grup abelià semiperiòdic és la suma directa de dos grups cíclics.

Corol.lari Tot grup abelià semiperiòdic és c.s.p.

El resultat següent permet determinar quins grups nilpotents són semiperiòdics.

Teorema Sigui G un grup finit nilpotent semiperiòdic. Aleshores:

a) $|G| = 2^{a+b}\cdot q^{c+d}$, $(2,q) = 1$, $a+b \geq 3$, $a \leq b$, $c \leq d$.

$G = S_2G \times (Z/q^cZ \times Z/q^dZ)$ on $S_2G = Z/2^aZ \times Q_{2^b}$,

$Q_{2^a} \times Z/2^bZ$ o $Q_{2^a} \times Q_{2^b}$

b) G és c.s.p.-4 i

$$H^{4n}G/\,H^{4n-1}G = Z/2^{a}q^{c}Z \oplus Z/2^{b}q^{d}Z\ .$$

5. Algunes propietats d'extensió

Els resultats d'aquests apartats estan encaminats a demostrar l'equivalència entre semiperiòdic i c.s.p. o si més no a sugerir com s'ha de modificar el concepte de c.s.p. per tal de que valgui l'equivalència.

Proposició El producte semidirecte $Z/rZ \rtimes Z/sZ$ de dos grups cíclics es c.s.p.-(2m) on m és l'enter positiu més petit tal que $t^{m} \equiv 1 \bmod r$, éssent t la imatge de $1 \in Z/rZ$ per l'acció de $1 \in Z/sZ$.

(La demostració utilitza els càlculs fets per Wall a (7)).

Corol.lari $Z/rZ \rtimes Z/sZ$ només pot operar sense punts fixos i conservant l'orientació sobre $S^{Km-1} \times S^{Km-1}$ on K és parell i m com a la proposició anterior.

Proposició Sigui G una extensió d'un grup periòdic Q per un grup cíclic N = Z/rZ. Si 2m no és un període de Q o si $N^{Q} \neq N$, el grup G no és c.s.p.-(2m) i, per tant, no pot operar sense punts fixos i conservant l'orientació sobre $S^{2m-1} \times S^{2m-1}$.

La demostració resulta del fet que

$$H^n G = H^n Q \oplus H^o(Q, H^n N),$$

conseqüència de l'estudi de les diferencials de la successió espectral de Lyndon-Hochschild -Serre (4).

El punt essencial en la demostració de la possible equivalència entre semiperiòdic i c.s.p. radica en el fet que tot subgrup d'un grup c.s.p. sigui o no c.s.p. La següent proposició n'és un resultat parcial.

<u>Proposició</u> Si G és c.s.p.-n i U = S_p G és abelià, U és c.s.p.-n.

BIBLIOGRAFIA

(1) H. Cartan- S.Eilenberg "Homological Algebra"
Princeton 1956

(2) M. Castellet "Grupos finitos con cohomología periódica y espacios que admiten recubrimientos esféricos"
Tesis doctoral. Barcelona 1973

(3) A. Heller "A note on spaces with operators"
Illinois J. Math. 3(1959), 98-100

(4) P.J. Hilton- U.Stammbach "A course in homological Algebra"
Grad. Tetx in Math.4
Springer 1971

(5) A. Kurosh "The theory of groups" Part I
Chelsea Pub.

(6) R. Swan "A new method in fixed point theory"
Comment. Math. Helv.34(1960), 1-16

(7) C.T.C.Wall "Resolutions for extensions of groups"
Proc. Cambridge Phil.Soc. 57 (1961), 251-255