Pub. Mat. UAB
nº 10, Desembre 1978

UN PROBLEMA EN RELACIÓ AMB LA SUMA D'ESPAIS TANCATS

Julià Cufí

1.- Introducció i notacions.

Considerem la circumferència unitat T i un subconjunt arbitrari $E \subset T$. L^∞_E serà l'àlgebra de Banach de les funcions de $L^\infty = L^\infty(T, dm)$ (dm = mesura de Lebesgue sobre T) que són essencialment contínues a cada punt de E. H^∞ és la subàlgebra de L^∞ de les funcions que tenen nuls tots els coeficients de Fourier negatius. Direm C a l'àlgebra L^∞_T de les funcions contínues a T.

Sarason [3] va provar que la suma $H^\infty + C$ és tancada a L^∞ i Davie-Gamelin-Garnett [1] van estendre aquest resultat provant que $H^\infty + L_E$ també és tancat a L^∞, per qualsevol $E \subset T$. Stegenga [5] va generalitzar el teorema de Sarason, sustituint H^∞ per un subespai M de L^∞, dèbilment tancat i invariant enfront de la multiplicació per la funció idèntica a T. És sabut [5] que aquests espais són de dues formes possibles: a) $M = L^\infty(K)$, espai de les funcions de L^∞ nul.les quasi per tot fora de K, on K és un subconjunt mesurable de T. b) $M = \varphi . H^\infty$ on φ és una funció unimodular de L^∞.

És natural, doncs, generalitzant aquests resultats, intentar de trobar sota quines condicions serà tancada la suma $M + L^\infty_E$, on M és un espai dels tipus anteriors. Això és el que fem aquí quan M és del tipus a) o del tipus b) amb la restricció $\varphi . H^\infty \cap L^\infty_E = 0$. Quedà pendent, però, el cas més interessant de que $\varphi H^\infty \cap L_E \neq 0$. També estenem a aquesta nova situació altres resultats coneguts quan E = T i això planteja nous problemes.

2.- La suma $L^{\infty}(K) \dotplus L^{\infty}_{E}$.

Teorema.- Siguin E, K subconjunts de T, amb K mesurable. Aleshores la suma $L^{\infty}(K) \dotplus L^{\infty}_{E}$ és tancada a L .

Per demostrar que la suma de dos espais tancats és tancat farem servir el següent resultat ben conegut [5] :

Lema.- Siguin X,Y subespais tancats de l'espai de Banach Z. Aleshores $X \dotplus Y$ és tancat si i només si existeix un $k < \infty$ tal que:

$$d(y, X \cap Y) \leq k.d(y,X) \quad \text{per a tot } y \text{ de } Y.$$

(d és la distància associada a la norma de l'espai Z).

Demostrem el Teorema suposant, de moment, que el conjunt E és un interval obert, $E = (a,b) \subset T$. Anem a veure que si $g \in L^{\infty}_{E}$, tenim

$$(1) \qquad d(g, L^{\infty}(K) \cap L^{\infty}_{E}) \leq d(g, L^{\infty}(K)).$$

Observem que $d(g, L^{\infty}(K)) = \| \chi_{K^c} g \|_{\infty}$ i sigui H un subconjunt compacte de $K_o \cap E$, on K_o és l'interior essencial de K (és a dir, la reunió de tots els conjunts oberts de T que tallen a $K^c = T - K$ en un conjunt de mesura zero). Sigui ara φ una funció contínua a T, que valgui 1 sobre H i amb $\sup(\varphi) \subset K_o \cap E$ i definim:

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x) . \varphi(x) & \text{si} \quad x \in E \\ g(x) . \chi_K(x) & \text{si} \quad x \notin E \end{cases}$$

de manera que $g_1 \in L^{\infty}(K) \cap L^{\infty}_{E}$. A més a més:

$$d(g, L^{\infty}(K) \cap L^{\infty}_{E}) \leq \| g - g_1 \|_{\infty} \leq \text{màx} \, (\|g\|_{E-H}, \|g\|_{T-(E\ K)}) \leq$$

$$\leq \text{màx} \, (\|g\|_{E-(K_o\ E)}, \|g\|_{T-(E\ K)}) .$$

Considerem ara les dues possibilitats :

1) Si $d(g, L^{\infty}(K) \cap L^{\infty}_{E}) = \|g\|_{T-(E\ K)}$ és clar que (1) val.

2) Si $d(g, L^\infty(K) \cap L^\infty_E) = \|g\|_{E-(K_o\ E)} = \|g\|_{E-K_o} = \rho$, aleshores hi ha encara dues possibilitats :

1') $\rho = |g(\alpha)|$ amb $\alpha \in E$ i, per tant, $\alpha \notin K_o$ i $|g(x)| \geq \rho - \varepsilon$ a un entorn $U(\alpha)$ amb $m(U \cap K^c) > 0$ el que dóna $\|\chi_{K^c} g\| \geq \rho$.

2') Hi ha $\alpha_n \notin K_o$ amb (α_n) convergent i $|g(\alpha_n)| \longrightarrow \rho$, de manera que per a tot $\varepsilon > 0$ és $|g(\alpha_n)| > \rho - \varepsilon$ (per algún $\underline{n}$) i, per tant, $|g(x)| > \rho - \varepsilon$ si $x \in U(\alpha_n)$ i $U(\alpha_n) \not\subset K_o$ el que dóna $m(K^c \cap U) > 0$ i $\|\chi_{K^c} g\|_\infty \geq \rho - \varepsilon$.

Això prova (1) en tots els cassos, quan $E = (a,b)$. Sigui ara E arbitrari i $g \in L^\infty_E$; tenim que per a tot $\varepsilon > 0$ hi ha una funció $g_\varepsilon \in L^\infty_{E_\varepsilon}$ (E_ε obert que conté a E) amb $\|g - g_\varepsilon\| < \varepsilon$. Per tant

$$d(g_\varepsilon, L^\infty(K) \cap L^\infty_E) \leq d(g_\varepsilon, L^\infty(K) \cap L^\infty_{E_\varepsilon}) \leq d(g_\varepsilon, L^\infty(K))$$

i ara fent $\varepsilon \longrightarrow 0$ resulta (1).//

3.- La suma $\varphi H^\infty + L^\infty_E$ en el cas $\varphi H^\infty \cap L_E = 0$.

Considerem ara el cas en què l'espai invariant és del tipus φH^∞ amb $\varphi \in L^\infty$, unimodular, i fem, en tot aquest apartat, la hipòtesi de que $\varphi H^\infty \cap L^\infty_E = 0$. En aquestes condicions $\varphi H^\infty + L^\infty_E$ és tancat si i només si existeix $k < \infty$ amb

$$\|g\|_\infty \leq k.d(g, \varphi H^\infty) \qquad \text{per a tota } g \in L^\infty_E.$$

<u>Definició</u>: Si $\underline{f}$ i $\underline{g}$ són funcions de L^∞ direm

$$d_\alpha(f,g) = \overline{\lim_{\substack{z\to\alpha\\ |z|=1}}} \text{ ess } |f(z) - g(z)|; \qquad \rho_\alpha(f,g) = \underline{\lim_{\substack{z\to\alpha\\ |z|=1}}} \text{ ess } |f(z) - g(z)|$$

Equivalentment, si estenem $\underline{f}$ i $\underline{g}$ harmònicament al disc unitat

$$d_\alpha(f,g) = \overline{\lim_{\substack{z\to\alpha\\ |z|=1}}} |f(z) - g(z)| \quad ; \quad \rho_\alpha(f,g) = \underline{\lim_{\substack{z\to\alpha\\ |z|=1}}} |f(z) - g(z)|$$

També posem :

$$d_\alpha(f,H^\infty) = \inf_{g\in H^\infty} d_\alpha(f,g) \qquad ; \qquad \rho_\alpha(f,H^\infty) = \inf_{g\in H^\infty} \rho_\alpha(f,g)$$

Proposició 1.- Si $\varphi H^\infty + L^\infty_E$ és tancat, on φ és unimodular, $E\subset T$ qualsevol i $\varphi H^\infty \cap L^\infty_E = 0$, aleshores existeix un $\varepsilon > 0$ tal que

$d_\alpha(\bar\varphi, H^\infty) \geq \varepsilon$ per a tot $\alpha\in T$ i $\rho_\alpha(\bar\varphi, H) \geq \varepsilon$ per a tot $\alpha \notin \bar E$.

En efecte: com que $\varphi H^\infty + L^\infty_E$ és tancat es compleix

$$\|g\|_\infty \leq k.d(g, \varphi H^\infty) \qquad \text{per a tota } g\in L^\infty_E$$

i, en particular, $\varphi H^\infty + C$ és tancat i, segons [5], $d_\alpha(\bar\varphi, H^\infty) \geq \varepsilon$ per a tot $\alpha\in T$, per algún $\varepsilon > 0$.

Sigui ara $\varepsilon = k^{-1}$ i vegem que $\rho_\alpha(\bar\varphi, H^\infty) \geq \varepsilon$ si $\alpha \notin \bar E$. Si fos $\rho_\alpha(\bar\varphi, H^\infty) < \varepsilon$ per un $\alpha \notin \bar E$, això voldría dir que hi ha una funció $h\in H^\infty$ tal que per a tot entorn $U(\alpha)$ existeix $M\subset U(\alpha)$ amb $m(M) > 0$ i $|\bar\varphi(z) - h(z)| < \varepsilon$ si $z\in M$.

Agafem una funció $g\in H^\infty \cap L^\infty_E$ tal que $\|g\|_\infty = 1$ i $|g| < \delta$ fora de M; per exemple agafem:

$$u(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta\in M \\ \log & \text{si } \theta\notin M \end{cases} \qquad \text{i} \quad g(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, u(\theta)\, d\theta\right)$$

de manera que $|g| = 1$ q.p.t. a M i $|g| = \delta$ ($\delta < 1$) q.p.t. a M^c. Ara tenim

$$\|g\bar\varphi - gh\|_\infty < \varepsilon \qquad \text{i}$$

$$1 = \|g\|_\infty \leq \varepsilon^{-1} d(g, \varphi H^\infty) \leq \varepsilon^{-1} d(g, \varphi gh) = \varepsilon^{-1} d(\bar\varphi g, gh) < 1,$$

contradicció.//

Intentem ara de demostrar la suficiència de les condicions que hem trobat; això es pot fer si posem alguna restricció a E.

Proposició 2.- Sigui E un interval obert de T, $\varphi\in L^\infty$ unimodular i suposem que hi ha un número $\varepsilon > 0$ tal que

$$d_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon \quad \text{per a tot } \alpha \in T \text{ i } \quad \rho_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon \quad \text{per a tot } \alpha \notin \bar{E}.$$

Si, a més, $\varphi H^\infty \cap L^\infty_E = \emptyset$ aleshores $\varphi H^\infty + L^\infty_E$ és tancat.

Per provar la Proposició només ens cal veure que per a tota g de L^∞_E és

$$\varepsilon \|g\|_\infty \leq d(g, \varphi H^\infty).$$

Si λ és un punt de E, tenim:

$$|g(\lambda)| \cdot |\bar{\varphi}(z) - h(z)| \leq |g(\lambda) - g(z)| + \| g - g(\lambda)\varphi h\|_\infty$$

i això dóna, si $g(\lambda) \neq 0$: $|g(\lambda)|\varepsilon \leq \|g - \varphi h\|_\infty$ per a tota $h \in H^\infty$.
Ara cal provar l'acotació

$$\varepsilon\, |g(\lambda)| \leq d(g, \varphi H^\infty) \qquad \text{q.p.t. } \lambda \text{ de } T - E.$$

Per això, provem el següent

<u>Lema</u>.- Si $g \in L^\infty(T-E)$ es pot triar una representació $g(\lambda)$ d'aquesta classe de funcions amb la propietat de que q.p.t. λ de T-E tinguem:

$$\text{per a tot } \varepsilon > 0 \; : \quad m\left\{ z \in T-E : | g(z) - g(\lambda)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

En efecte: posem T-E com a reunió $T-E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup N$ de compactes K_n (amb $m(K_n) > 0$) i $m(N) = 0$, éssent contínua la restricció de g a K_n. Si per un punt $\lambda \in K_n$, tot entorn de λ talla K_n en un conjunt de mesura positiva, és clar que la propietat es compleix a λ. Anem a reduir cada K_n a un compacte més petit en el que això passa, treient només un conjunt de mesura zero.

Fixem-nos en K_n: considerem els intervals racionals de la recta i sigui A_n el conjunt de punts $\underline{x}$ de K_n per els quals hi haun interval racional I_x que conté a $\underline{x}$ i tal que $m(I_x \cap K_n) = 0$. Sigui U_n la reunió d'aquests intervals I_x per $\underline{x}$ de A_n éssent així, U_n un obert, reunió d'intervals que tallen K_n en un conjunt de mesura nul.la. Si ara treiem de K_n la seva intersecció amb U_n, hem tret un conjunt de mesura zero i per cada punt $\lambda \in K_n - U_n$ tot entorn seu talla K_n en un conjunt de mesura positiva.

Continuant amb la demostració de la Proposició, tenim per a quasi tot $\lambda \notin E$ (si $g(\lambda) \neq 0$):

$$|g(\lambda)||\bar{\varphi}(z) - g(z)| \leq |g(\lambda) - g(z)| + \|g - g(\lambda)\varphi h\|_\infty \; ;$$

per a tot $\delta > 0$ és $|g(\lambda) - g(z)| < \delta$ a un conjunt de mesura positiva i per $\underline{z}$ d'aquest conjunt tenim $|\bar{\varphi}(z) - h(z)| \geq \varepsilon$ q.p.t.; per tant, concluim

$$|g(\lambda)|\,\varepsilon \leq \delta + \|g - g(\lambda)\varphi h\|_\infty \quad \text{i, per tant,}$$

$$|g(\lambda)| \cdot \varepsilon \leq \|g - g(\lambda)\varphi h\|_\infty \quad .//$$

En el cas en que $E \subset T$ sigui arbitrari, és clar que podem deduir que $\varphi H^\infty + L^\infty_E$ és tancat de la hipòtesi de que $d_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon$ per a tot $\alpha \in E$ i $\rho_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon$ per a tot $\alpha \notin E$. Però no és clar que es pugui deduir del fet que $d_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon$ per a tot $\alpha \in T$ i $\rho_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon$ per a tot $\alpha \notin \bar{E}$. Tampoc és clar si $\varphi H^\infty + L^\infty_E$ tancat implica $\rho_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon$ per a tot $\alpha \notin E$. Resumint:

<u>Teorema</u>.- Si $E \subset T$, φ unimodular de L^∞, i $\varphi H^\infty \cap L^\infty_E = 0$, aleshores $\varphi H^\infty + L^\infty_E$ tancat dóna $d_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon$ a T i $\rho_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon$ fora de $\bar{E}$. Si $d_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon$ a E i $\rho_\alpha(\bar{\varphi}, H^\infty) \geq \varepsilon$ fora de E, tenim que $\varphi H^\infty + L^\infty_E$ és tancat.

<u>Exemple</u>.- És clar que, sota la hipòtesi $\varphi H^\infty \cap L^\infty_E = 0$, si $\varphi H^\infty + L^\infty_E$ és tancat, també ha de ser-ho $\varphi H^\infty + C$. Donem ara un exemple en el que $\varphi H^\infty + C$ és tancat però, en canvi, $\varphi H^\infty + L^\infty_E$ no ho és, tot i que $\varphi H^\infty \cap L^\infty_E = 0$:

Sigui φ un producte de Blaschke, els zeros del qual s'acumulen a tots els punts de la circumferència. Com que $d_\alpha(\bar\varphi, H^\infty) = 1$ a tot punt de T, ja és $\varphi H^\infty + C$ tancat (cf. [5]); agafem com a E un interval tancat propi de T, amb lo qual $\varphi H^\infty \cap L_E^\infty = 0$. Ara bé, a qualsevol punt α de T és $\rho_\alpha(\bar\varphi, H^\infty) = 0$ ja que podem agafar una successió $(\lambda_n) \dashrightarrow \alpha$ amb $\varphi(\lambda_n) \dashrightarrow \lambda$, $|\lambda| > 0$ i $|\varphi(\lambda_n)| \geq \delta > 0$; ara (λ_n) conté una successió parcial que és d'interpolació per H^∞ ([2] pàg. 204); sigui encara (λ_n) i agafem una funció $\underline{f}$ de H^∞ amb $f(\lambda_n) = 1/\varphi(\lambda_n)$ de manera que $f(\lambda_n).\varphi(\lambda_n) = 1$. Aleshores:

$$\rho_\alpha(\bar\varphi, f) = \underline{\lim}\ \mathrm{ess}\ |\varphi(z) - f(z)| = \underline{\lim}\ \mathrm{ess}\ |1 - \varphi(z)f(z)| = 0.$$

De fet, en aquest cas, $\varphi H^\infty + L_E^\infty$ no és tancat per qualsevol E amb $\bar E \neq T$.

4.- Funcions unimodulars de $H^\infty + L_E^\infty$.

Si φ és una funció unimodular de L^∞, definim $Z(\varphi)$ com el conjunt de zeros comuns a totes les funcions de $\varphi H^\infty \cap C$ de manera que, o bé $Z(\varphi)$ és un conjunt tancat i de mesura zero de T, o bé $Z(\varphi) = T$. Si $\varphi \in H^\infty + C$ (unimodular), definim $\sup(\varphi)$ com el conjunt de punts $\alpha \in T$ pels que és possible de trobar una successió (z_n) de punts del disc obert tal que $z_n \dashrightarrow \alpha$ i $\varphi(z_n) \dashrightarrow 0$. És sabut, [5], que amb la hipòtesi de que $\varphi H^\infty \cap C \neq 0$, $\varphi H^\infty + C$ és tancat si i només si $d_\alpha(\bar\varphi, H^\infty) \geq \varepsilon$ per a tot $\alpha \in Z(\varphi)$; així mateix, per una funció $\varphi \in H^\infty + C$ el fet de que $\sup(\varphi)$ sigui de mesura zero és suficient per assegurar que φ és el producte d'una funció interna i una funció invertible a $H^\infty + C$.

Sigui, ara, E un subconjunt de T el qual suposarem, per simplificar, que és un interval tancat. Si $\varphi \in L^\infty$ és unimodular, definim $Z(\varphi)_E$ com el conjunt de punts de E que són zeros comuns a totes les funcions de $\varphi H^\infty + L_E^\infty$.

És fàcil de veure que si $\varphi H^\infty + L^\infty_E$ és tancat i $\varphi H^\infty \cap L^\infty_E \neq 0$, aleshores $d_\alpha(\bar\varphi, H^\infty) \geq \varepsilon$ per a tot $\alpha \in Z(\varphi)_E$, ja que:

per a tota $g \in L^\infty_E$ és $\|g\|_{Z(\varphi)_E} \leq d(g, \varphi H^\infty \cap L^\infty_E)$

i, ara, es pot fer el mateix raonament que en el cas $E = T$ (cf.[5]). Com farem notar més endevant, és possible que aquesta condició sigui també suficient.

En tot cas, deixant de banda el problema de caracteritzar els parells E, φ per als que $\varphi H^\infty + L^\infty_E$ és tancat ($\varphi H^\infty \cap L^\infty_E \neq 0$), sembla que la condició més pròxima a $\varphi = 1$ és $Z(\varphi) = \emptyset$ i, per això, és natural de plantejar la següent:

<u>1ª Qüestió</u>: Si $\varphi \in L^\infty$ és unimodular i $Z(\varphi) = \emptyset$ (això ja implica $\varphi H^\infty \cap L^\infty_E \neq 0$ per a tot $E \subset T$), és veritat que $\varphi H^\infty + L^\infty_E$ és tancat per a tot $E \subset T$?

D'altra banda, és evident, d'acord amb les definicions anteriors, que per φ unimodular i $E \subset T$ és $Z(\varphi)_E \subset Z(\varphi) \cap E$; també és natural de preguntar si val la igualtat. És fàcil de veure que això no és veritat en general; per exemple, si E és un interval propi i φ és un producte de Blaschke, els zeros del qual s'acumulen a un punt de E i a un conjunt de mesura positiva a fora de E, aleshores $Z(\varphi)_E$ és un punt i $Z(\varphi) \cap E = E$. Ara bé, en aquest cas és $\varphi H^\infty \cap L^\infty_E = 0$. Plantejem, doncs, la

<u>2ª Qüestió</u>: Si $E \subset T$ i $\varphi \in L^\infty$ unimodular tal que $\varphi H^\infty \cap L^\infty_E \neq 0$, és veritat que $Z(\varphi)_E = Z(\varphi) \cap E$?

A la resta d'aquest treball ens ocuparem d'aquesta 2ª qüestió i d'alguna altra relacionada amb ella.

<u>Proposició 1</u>.- Si φ és una funció unimodular de $H^\infty + C$ tal que $\varphi H^\infty \cap C \neq 0$, aleshores $\mathrm{sup}(\varphi) = Z(\varphi)$.

En efecte: Notem, en primer lloc, que la inclusió $\sup(\varphi) \subset Z(\varphi)$ val sempre, ja que si $\varphi F = g$, $g \in C$, $F \in H^\infty$ i $\alpha \in \sup(\varphi)$ ha de ser $g(\alpha) = 0$, perquè si $z_n \dashrightarrow \alpha$ i $\varphi(z_n) \dashrightarrow 0$ és $g(\alpha) = \lim g(z_n)$ i el nucli de Poisson és assintòticament multiplicatiu a $H^\infty + C$ ([4]).

Per provar la igualtat, observem que $\varphi H^\infty \cap C \neq 0$ implica que $\sup(\varphi)$ sigui de mesura nul.la i, per tant, d'acord amb [5] pàg. 582, $\varphi = \psi . u$ a on ψ és una funció interna i $\underline{u}$ és una funció unimodular de $H^\infty + C$ invertible a $H^\infty + C$ (és a dir, quasi contínua). Sabem també per [4] que $u = h.w$ a on $h \in C^{-1}$ i $w \in (H^\infty)^{-1}$; per tant:

cada $g \in C$, $g = \varphi . F$, $F \in H^\infty$ s'escriu: $g = \psi . u . F = \psi . h . w . F$;

això dóna: $g . h^{-1} = \psi . w . F$

i, per tant, $Z(\varphi) \supset Z(\psi)$.

Ara bé, quan F varía a H^∞, $w.F$ també varía a H^∞, per tant, si $g = \psi . F$ també és $g = \psi . w . F_1$ i $g . h = \psi . h . w . F_1 = \varphi . F_1$ és a dir, $Z(\psi) \supset Z(\varphi)$.

Tenim, ja que, $Z(\varphi) = Z(\psi)$ i també $\sup(\varphi) = \sup(\psi)$, doncs $\underline{u}$ essent invertible a $H^\infty + C$, té suport buit. Com que ψ és interna, és clar que $\sup(\psi) = Z(\psi)$, ja que $m(\sup(\psi)) = 0$. Per tant, és $Z(\varphi) = \sup(\varphi)$.//

Amb el mateix argument es prova que $Z(\varphi)_E = Z(\psi)_E$ i d'aquí resulta que $Z(\varphi)_E = Z(\varphi) \cap E$, ja que aquesta igualtat és veritat per una funció interna. Tenim així:

<u>Proposició 2</u>.- Si $\varphi \in H^\infty + C$ és unimodular i $\varphi H^\infty \cap C \neq 0$, aleshores és $Z(\varphi)_E = Z(\varphi) \cap E$.

A la demostració de la Proposició 1 s'ha plantejat la relació entre la mesura del suport de φ i el fet de que $\varphi H^\infty \cap C \neq 0$. Observem que, de fet, quan $\varphi \in H^\infty + C$:

$m(\sup(\varphi)) = 0$ és equivalent a $\varphi H^{\infty} \cap C \neq 0$.

La implicació de dreta a esquerra ja l'hem feta servir. Per al recíproc, si $m(\sup(\varphi)) = 0$ tenim $\varphi = F.g$ amb $F \in H^{\infty}$ i $g \in C$, és a dir, $\varphi = I.E.g$ amb I interna, E externa i $\sup(I) \subset \sup(\varphi)$, el que dóna $m(\sup(I)) = 0$ i, per tant, hi ha una funció $H \in H^{\infty}$ amb $I.H \in C$, no idènticament nul.la; a més, E és invertible a H^{∞} i tenim : $I.E.g.H.E^{-1} = \varphi .E^{-1}.H \in C$ i no és idènticament nul.la.

És sabut, [5] , que per $\varphi \in L^{\infty}$ unimodular, $Z(\varphi) = \emptyset$ és equivalent a $\varphi H^{\infty} \cap C \neq 0$ i $\bar{\varphi} \in H^{\infty} + C$. Hom pot preguntar-se si $Z(\varphi)_E = \emptyset$ serà equivalent a $\varphi H^{\infty} \cap C \neq 0$ i $\bar{\varphi} \in H^{\infty} + L^{\infty}_E$. En un sentit això és clar:

$$\bar{\varphi} \in H^{\infty} + L^{\infty}_E \Longrightarrow \sup(d_{\alpha}(\bar{\varphi}, H^{\infty})) \subset T-E \Longrightarrow Z(\varphi) \subset T-E = Z(\varphi)_E \subset$$
$$\subset Z(\varphi) \cap E = \emptyset.$$

Fem notar que totes les implicacions són reversibles, tret de $Z(\varphi)_E = \emptyset \Longrightarrow Z(\varphi) \subset T-E$ i aquesta també ho sería si fos afirmativa la resposta a la qüestió 2ª.

En tot cas, notem que $Z(\varphi) \cap E = \sup(d_{\alpha}(\bar{\varphi}, H^{\infty}) \cdot \chi_E)$ dóna suport al fet de que $\varphi H^{\infty} + L^{\infty}_E$ sigui tancat quan $d_{\alpha} \cdot \chi_E \geq \varepsilon$, és a dir $d_{\alpha}(\bar{\varphi}, H^{\infty}) \geq \varepsilon$ a $Z(\varphi)_E$, si val $Z(\varphi)_E = Z(\varphi) \cap E$.

Intentem ara de generalitzar a $H^{\infty} + L^{\infty}_E$ les Proposicions 1 i 2. En primer lloc, necessitem que si $Z(\bar{\varphi})_E = \emptyset$ aleshores sigui $\varphi = F.g$ amb $F \in H^{\infty}$ i $g \in L^{\infty}_E$. Això es prova amb la mateixa demostració que en el cas $E = T$ ([5] pàg. 581). Per tant, $\bar{\varphi} H^{\infty} \cap C \neq 0$ i $\varphi \in H^{\infty} + L^{\infty}_E$ ens donen també $\varphi = F.g$ com abans. Igual que quan $E = T$, a travers del teorema de factorització, s'obté $\varphi = \psi .u$ amb ψ interna i $u \in H^{\infty} + L^{\infty}_E$ unimodular invertible. També modificant trivialment la demostració de [4] pàg. 293, es pot escriure u com un producte $u = h.w$ amb $h \in (H)^{-1}$ i $w \in (L_E)^{-1}$.

Seguint els passos que hem fet per demostrar la Proposició 1, tenim: si $\varphi \in H^\infty + L^\infty_E$ i $\varphi H^\infty \cap L^\infty_E \neq 0$ és $m(\sup(\varphi)_E) = 0$, on $\sup(\varphi)_E = \sup(\varphi) \cap E$.

En efecte: si $\varphi . F = g$ amb $F \in H^\infty$, $g \in L^\infty_E$ i $\alpha \in E \cap \sup(\varphi)$ és $g(\alpha) = 0$, ja que si $z_n \dashrightarrow \alpha$ i $\varphi(z_n) \dashrightarrow 0$ ha de ser $g(z_n) \dashrightarrow 0$, ja que el nucli de Poisson és assintòticament multiplicatiu a E; de fet, podem concloure que $\sup(\varphi)_E - \{a,b\} \subset Z(\varphi)_E$ (si $E = [a,b]$); però en tot cas, si $\varphi H^\infty \cap L^\infty_E \neq 0$ és $m(\sup(\varphi)_E) = 0$.

Ara ens cal veure que $m(\sup(\varphi)_E) = 0$ és suficient per tal d'assegurar la factorització $\varphi = \psi . u$ amb ψ interna i $u \in (H^\infty + L^\infty_E)^{-1}$. Amb petites modificacions, que no val la pena de detallar, s'estenen el Lema i el Teorema 4.3 de [5] fent servir el criteri de que una funció és invertible a $H^\infty + L^\infty_E$ quan és acotada inferiorment a un conjunt $\{ re^{i\theta}$ amb $r_0 \leq r < 1$ i $e^{i\theta} \in E \}$. Així arribem a $\varphi = \psi . h . w$, $h \in (H\ )^{-1}$ i $w \in (L_E)^{-1}$. A partir d'aquesta descomposició, el mateix raonament de la Proposició 1 ens dóna $Z(\varphi)_E = Z(\psi)_E$, sempre amb la hipòtesi $\varphi \in H^\infty + L^\infty_E$ i $\varphi H^\infty \cap L^\infty_E \neq 0$. Com que $\sup(\varphi)_{\mathring{E}} = \sup(\psi)_{\mathring{E}}$ obtenim $Z(\varphi)_{\mathring{E}} = \sup(\varphi)_{\mathring{E}}$. De la mateixa manera que hem vist $Z(\varphi)_E = Z(\psi)_E$, resulta que per $\varphi \in H^\infty + L^\infty_E$ i $\varphi H^\infty \cap L^\infty_E \neq 0$ i $F \subset E$, interval tancat és $Z(\varphi)_F = Z(\psi)_F$ i això dóna $Z(\varphi)_F = Z(\varphi)_E \cap F$. Així tenim:

<u>Proposició 3</u>.- Si $\varphi \in H^\infty + L^\infty_E$ i $\varphi H^\infty \cap L^\infty_E \neq 0$, aleshores per a cada interval tancat $F \subset E$, tenim

$$Z(\varphi)_F = Z(\varphi)_E \cap F.$$

De la mateixa manera que en el cas de $H^\infty + C$, es pot veure que per $\varphi \in H^\infty + L^\infty_E$, $\varphi H^\infty \cap L^\infty_E \neq 0$ és equivalent a $m(\sup(\varphi)_E) = 0$.

Queda, però, la qüestió de si val $Z(\varphi)_E = Z(\varphi) \cap E$, al menys quan $\varphi \in H^\infty + L^\infty_E$. Podem veure, encara, que la resposta és afirmativa per a un tipus de funcions que són denses a $H^\infty + L^\infty_E$.

Proposició 4.- Si $\varphi = \psi\,.\bar{b}$ és unimodular, on $\psi \in H^{\infty}$ i b és un producte de Blaschke de L^{∞}_{E} i $\varphi H^{\infty} \cap L^{\infty}_{E} \neq 0$, aleshores $Z(\varphi)_{E} = Z(\varphi) \cap E$.

En efecte, només cal veure que $Z(\varphi) \cap E \subset Z(\varphi)_{E} = \sup(\varphi)_{E}$; és a dir, cal veure que $Z(\varphi) \cap E \subset \sup(\varphi) \cap E$: sigui $\alpha \in E$, $\alpha \notin \sup(\varphi)$ i vegem que $\alpha \notin Z(\varphi)$, el que vol dir que es pot trobar una $F \in H^{\infty}$ amb $\varphi F = g$, on $g \in C$ i $g(\alpha) \neq 0$. Ara bé, podem agafar $F_1, F_2 \in H^{\infty}$ amb $\psi F_1 = g_1 \in C$ i $\bar{b} F_2 = g_2 \in C$ i $g_1(\alpha) \neq 0$, $g_2(\alpha) \neq 0$ i només caldrà prendre $F = F_1 F_2$.//

REFERÈNCIES

[1].- A.M. Davie-T.W. Gamelin-J. Garnett "Distance estimates and pointwise bounded density" Trans. Am. Math. Soc. 175 (1973) 37-68

[2].- K. Hoffman "Banach Spaces of Analytic Functions" Prentice Hall Englewood Cliffs N.J. (1962)

[3].- D. Sarason "Generalized Interpolation in H^{∞}" Trans. Am. Math. Soc. 127 (1967) 179-203

[4].- D. Sarason "Algebras of functions on the unit circle" Bull. Am. Math. Soc. 79 (1973) 286-299

[5].- D.A. Stegenga "Sums of Invariant Subspaces" Pac. J. Math. Vol. 70 Nº 2 (1977) 567-584