Pub. Mat UAB
Nº 13 , Juliol 1979

Subàlgebres de L^∞ que contenen a l'Àlgebra del Disc.

Joan del Castillo i Franquet

Memòria presentada per a
optar al grau de Llicenciat
en Ciències Matemàtiques ,
Universidad Autònoma de
Barcelona.-

Director : Julià Cufí i Sobregrau

INDEX

Introducció

L'objecte d'aquesta tesina és l'estudi de certes àlgebras uniformes de funcions a la circumferència unitat, T.

Aquestes qüestions tenen el seu origen en l'estudi del comportament a la frontera, de les funcions holomorfes en el disc unitat, U. Actualment, a partir de la teoria espectral de Gelfand, no s'estudien les funcions directament, sinó que es considera l'àlgebra de les funcions que compleixen una determinada condició; aleshores determinant l'espectre, el conjunts d'interpolació, etc., s'obté informació de com són les funcions estudiades. Les tècniques que s'utilitzen en aquests problemes van, desde l'Anàlisi Funcional i la Teoria de la Mesura, fins a l'Àlgebra i la Topologia.

Les àlgebres que he estudiat són sempre subàlgebres de L^∞, àlgebra de les funcions essencialment acotades a T (respecte de la mesura de Lebesgue, normalitzada, dm) i que contenen a A, àlgebra de les funcions holomorfes a U que s'estenen continuament a T. És indispensable, per al nostre treball, el coneixement d'aquestes àlgebres, juntament amb el coneixement de l'algebra H^∞, de les funcions holomorfes i acotades a U. Suposarem coneguts els resultats generals d'algebres de Banach, que es poden trobar, per exemple, a Zelazko [28] , així com el referent als espais de Hardy, H^p , ($0 < p \leq \infty$) i especialment l'estudi de H^∞ com a àlgebra de Banach, que es troba a Hoffman [16]

La primera part d'aquest treball, que correspon als dos primers capítols, ha consistit en assabentar-se del estat actual d'aquestes qüestions. Els tres darrers capítols corresponen ja a l'estudi d'alguns problemes concrets. Els resultats més interessants que he obtingut són, potser, el Teorema (4.8.), en quant a àlgebros generades per productes de Blaschke, i els Teoremes (5.1.) i (5.13.) pel que fa referència a subàlgebres de L^∞ que contenen H^∞ .

Finalment, voldria mostrar el meu agraïment al Dr. Julià Cufí, pel molt que m'ha ajudat en tot moment, així com a tots aquells que d'alguna manera o altra han contribuit a fer posible aquest treball.

1. Interpolació i Teorema de la Corona

Sigui X un espai topologic, F un subconjunt de X i M una familia de funcions contínues a X.

Entendrem per "problema d'interpolació", el fet de trobar, per a cada funció contínua g a F, una funció f de M de manera que $f_{|F} = g$. Un exemple concret d'aquesta situació ens el dóna el Teorema de Tietze: Si X és ara un espai normal, F un tancat de X i M el conjunt de funcions contínues a X a valors complexos, C(X); sempre és posible, donada una funció g contínua a F, de trobar $f \in C(X)$ de manera que $f_{/F} = g$.

En el cas que ens interessa, l'espai topològic que considerarem serà el disc, U, de centre 0 i radi 1, en el conjunt $\mathbb{C}$ dels nombres complexos. La família de funcions serà sempre una àlgebra uniforme de funcions holomorfes i acotades a U. D'ací que el conjunt F no podrà ser altra cosa que una successió de punts, amb la condició $\sum_{n=1}^{\infty} (1-|z_n|) < +\infty$, que a partir d'ara en direm "successió de Blaschke". En particular, també es pot considerar el cas d'un nombre finit de punts.

Al 1916 i 1919 Pich i Navanlinna varen demostrar que donats n punts de U, $\{w_1,\dots,w_n\}$, la condició necessària i suficient, per tal que existeixi una funció f, holomorfa a U amb $f(z_i)=w_i\,(i=1,2\dots n)$ i amb $|f(z)| \leq 1$ a U, és que la matriu.

$$\left[\frac{1 - w_i \bar{w}_j}{1 - z_i \bar{z}_j}\right] \qquad (1 \leq i, j \leq n)$$

sigui semidefinida positiva. Aquesta condició ja inclou el fet de que $\{ w_1,\ldots,w_n\}$ siguin punts de U . Més endevant R.C.Buck plantejà el problema de caracteritzar les successions $\{z_n\}$ "universalment interpolants" és a dir, tals que per a tota successió de nombres complexos $\{ w_n\}$, acotada, es pugui trobar una funció f, de H^∞, amb $f(z_n) = w_n$. Es varen trobar solucions parcials per Hayman i Newman[20] . Newman les caracteritzà com aquelles successions $\{z_n\}$ que compleixen:

$$\text{(C)} \qquad \prod_{j \neq k} \left| \frac{z_k - z_j}{1 - \bar{z}_j z_k} \right| \geq \delta > 0 \ , \ (k= 1,2,\ldots)$$

$$\text{(N)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |f(z_k)| \, (1 - |z_k|) < +\infty \text{ per a cada } f \in H^1$$

Al mateix temps, l'any 1958, Carleson [2] demostrà que (C) és condició necessària i suficient per a garantir que $\{z_n\}$ és universalment interpolant, demostrant doncs que (C) implica (N).

Newman va demostrar que el producte de Blaschke, b, associat a una successió, que compleixi la propietat (C),és tal que existeix $\varepsilon > 0$, de manera que $\{z \in U: |b(z)| = \varepsilon\}$ és una unió disjunta de corbes tancadas i cada una conté un i un sol terme de le successió. Degut a aquest fet, les successions $\{z_k\}$, que compleixen la propietat (C), s'en diuen

" uniformement separades" , terme introduit per Duren. Amb l'article de Carleson, es va tancar el problema que havia plantejat Buck, tot i que s'han anat fent generalitzacions. Per una successió $\{z_n\}$, de punts diferents del disc U, que s'acumulin a la frontera, definim l'operador T_p, a l'espai de Hardy H^p $(0 < p \leq \infty)$ per:

$T_p\ (f) = \{(1 - |z_k|^2)^{1/p} \cdot f\ (z_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ si $p < \infty$ i

$T_\infty\ (f) = \{f\ (z_k)\}$ per $p = \infty$

El problema d'interpolació, descrit anteriorment, no és altre cosa sinó caracteritzar les successions $\{z_k\}$, tals que $T_\infty\ (H^\infty) = l^\infty$. Shapiro i Shields [24] van demostrar, que per a $1 \leq p < \infty$, també es compleix, $T_p(H_p) = l^p$ si i nomes si $\{z_k\}$ és uniformement separada. Més tard Kabaila , ho va generalitzar al cas $0 < p < 1$.

Sigui E un subconjunt obert de la circumferència unitat, T. Designem per H^∞_E, al conjunt de les funcions, holomorfes i acotades a U, que s'estenen continuament a E. Direm que un subconjunt S de $U \cup E$ relativament tancat, és un conjunt interpolant per a H^∞_E, si per a tota funció g, contínua i acotada a S, hi ha una funció $f \in H^\infty_E$, de manera que $f|_S = g$. Al 1955 W. Rudin [21] , caracteritzà els conjunts $S \subset T$, interpolants per a $H^\infty_T = A$, com els subconjunts de T de mesura zero. Al 1969 Herard i Wells [15] , fent servir aquest resultat i el de Carleson [2] , demostren que S és interpolant per a H^∞_E , si i només si, $S \cap E$ té mesura zero i $S \cap U$ és una successió uniformement separada. Diguem també que J.Garnet [14], l'any 1971, és planteja i resol el problema d'interpolació al disc U, per a funcions harmòniques, arribant a que, la condició necessària i suficient, és la mateixa que en el cas de funcions holomorfes.

D'altre banda, al 1941, Kakutani havia plantejat l'anomenat "Problema de la Corona" que com veurem està molt relacionat amb els problemes d'interpolació. El seu enunciat, com el de molts grands teoremes, no necessita de masses definicions: Donades $f_1, \dots, f_n$ funcions de H^∞ amb $|f_1(z)| + \dots + |f_n(z)| \geq \delta > 0$, existeixen $g_1, \dots, g_n$ de H^∞ amb $f_1 g_1 + \dots + f_n g_n = 1$. Fixem-nos que, en el domini de l'àlgebra commutativa, si M és una $\mathbb{C}$-àlgebra finitament generada, el Teorema del zeros de Hilbert ens diu que donades $f_1, \dots, f_n$ de M, sense zeros comuns, és a dir, complint simplement $|f_1(m)| + \dots + |f_n(m)| > 0$, per a tot ideal maximal m de M, existeixin $g_1, \dots, g_n$ de M amb $f_1 g_1 + \dots + f_n g_n = 1$. Al considerar funcions de H^∞ és necessària i suficient la condició una mica més forta: $|f_1(z)| + \dots + |f_n(z)| \geq \delta > 0$.

Carleson [3], en un article del 1962, resol també aquest problema. Primer, demostra que donades dues successions de Blaschke (z_n) i (w_n), amb els respectius productes de Blaschke b i b', la condició necessària i suficient per tal que existeixi una funció f de H^∞ amb $f(z_n)=0$ i $f(w_n)=1$ és que es compleixi $|b(z)| + |b'(z)| \geq \delta > 0$. Aquest, és un problema d'interpolació de zeros i uns, a partir del qual Carleson obté per un cantó, el Teorema d'interpolació per a H^∞ , i per l'altre, el Teorema de la Corona per a n=2.

El teorema, per a un n qualsevol, s'obté demostrant el seguent resultat, que Newman ja havia vist que era suficient: Donats, un producte de Blaschke b(z), amb un conjunt finit de zeros $\{a_1,\ldots,a_s\}$, $0<\delta<1/2$ i F(z), funció holomorfa a $\{z : |b(z)|<\delta\}$, amb $|F(z)|<1$; aleshores existeix $f \in H^\infty$, amb $f(a_n)=F(a_n)$ (n=1,2,...s) i $||f||\leq\delta^a$ per certa constant a.

La part més complicada de la demostració de Carleson està en la construcció d'una corba Γ, que envolti els zeros d'un producte de Blaschke finit i que, com ell diu, no sigui ni massa llarga, ni massa curta., concretament: Si b(z) és un producte de Blaschke amb zeros $\{a_1,\ldots,a_s\}$, aleshores existeix una corba rectificable Γ, que compleix:

(i) Γ dóna una volta a cada a_n (n= 1,2...,s)

(ii) Existeix $k (0<k<1)$, de manera que per a tot ε, $(0<\varepsilon\leq 1/4)$, es compleixi $\varepsilon<|b(z)|\leq\varepsilon^k$; per a tot $z \in \Gamma$

(iii) La mesura μ, definida a $|z|<1$, posant $\mu(E)$ igual a la longitud del tros de corba $\Gamma \cap E$ té la propietat (1):

(1) $\mu(S) \leq C\,\varepsilon^{-2}\,h$ per a certa constant C independent de ε en els conjunts :

$$S = \{ z = r e^{i\theta} : 1-k \leq r < 1 \wedge \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + h \}$$

Les mesures μ, amb la propietat $\mu(S) \leq c'\,h$ sobre els conjunts S, tals com acabem de definir, es diuen de Carleson i són exactament les que compleixen:

(2) $\left(\int\!\!\int_{|z|<1} |f(z)|^p \, d\mu(z)\right)^{1/p} \leq c' \,||f||_p$ per a tot $f \in H^p$ ($0<p<\infty$).

Aquestes mesures estan directament relacionades amb els problemas d'interpolació. J.Garnett [14], demostra que $\{z_n\}$ és uniformement separada sí i solament sí es compleix, primer, $\left|\frac{z_j - z_k}{1 - \bar{z} \quad z_j}\right| \geqslant \delta$, per a $j \neq k$ i segon, la mesura μ definida per $\mu(E) = \sum_{z_n \in E} (1- |z_n|^2)$ amb $E \subset U$, és una mesura de Carleson. També, en una part de la demostració del Teorema d'Interpolació per a $1 \leq p \leq \infty$, es demostra que $\sum_{n=1}^{\infty} (1- |z_k|^2) \, |f (z_k)|^p \leq C \, ||f||_p^p$, que en definitive és el mateix que dir que la mesura μ, que té massa $1-| z_k|^2$ a z_k, també és una mesura de Carleson.

Hörmander va donar una altre demostració del Teorema de la Corona [4], reduint-lo a un sistema d'equacions en derivades parcials, de la següent manera: Suposem donades $f_1,\dots f_n$ de H^{∞} amb $|f_1| + \dots + |f_n| \geqslant \delta > 0$; suposem també que tenim $Q_1,\dots,Q_n$, funcions de $C^{\infty}(U)$, amb $Q_j(z) = 0$ si $|f_j(z)| < \varepsilon$ (on ε només depèn de δ) i amb $0 \leq Q_j \leq 1$ $(j = 1,2\dots,n)$ i $\sum_{j=1}^{n} Q_j (z) = 1$, aleshores es compleix:

$$1 = \sum_{j=1}^{n} f_j (z) \frac{Q_j (z)}{f_j (z)}$$

Si construim ara $g_j (z) = \frac{Q_j (z)}{f_j (z)} + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(z) \, f_k (z)$,

amb $a_{jk} = -a_{kj}$, resulta que també es compleix $f_1 g_1 + \dots + f_n g_n = 1$; cal ara determinar a_{jk}, de manera que les g_j siguin holomorfes, és a dir, que es compleixi $\frac{\partial g_j}{\partial \bar{z}} = 0$. Això ens porta a resoldre:

$$\frac{\partial a_{jk}}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\bar{f}_j}{f_k} \frac{\partial Q_k}{\partial \bar{z}} - \frac{\bar{f}_k}{f_j} \frac{\partial Q_j}{\partial \bar{z}} \right) \frac{1}{\sum^n |f_k|^2}$$

Cal doncs trobar $Q_1, \ldots, Q_n$, de manera que es pugui assegurar l'existència de solucions. Això porta un altre cop a una construcció semblant a la que es fa per la corba Γ ,de l'article de Carleson, si bé desapareix alguna dificultat, per exemple un lema de Hall sobre funcions harmòniques.

El teorema de la Corona té diverses formes equivalents. Recentment, D.Stegenga (25) ens fa veure que el Teorema de la Corona es pot interpretar com una condició, necessària i suficient, perquè la suma d'ideals, dèbilment tancats de H^{∞} , sigui dèbilment tancada.

Diguem $\mathcal{M}$ a l'espectre de H^{∞} , identificant cada punt $\alpha \in U$, amb el caràcter X_{α} , que consisteix en asignar a cada funció de H^{∞} , el seu valor en el punt α; s'obté un homeomorfisme de U, en un subconjunt de $\mathcal{M}$, que seguirem representant per U. Amb aquesta notació, el Teorema de la corona és equivalent a demostrar $\bar{U} = \mathcal{M}$, amb la topologia de Gelfand D'ara en endevant, quan ens referim a la Propietat de la Corona, per a H^{∞}, o per a una subàlgebra seva, ens referim al fet de si U és o no denc al seu espectre. J.Detraz [10] , va veure que a le àlgebres del tipus H^{∞}_E es complia la Propietat de la Corona. Chang i Marshall [7] van demostrar que també es complia per a les àlgebres $H^{\infty} \cap C_B$, on C_B és la C^*- algebra generada pels productes de Blaschke, invertibles en una subàlgebra B de L^{∞} . Dauson [8] , en canvi, dóna un exemple de subàlgebra de H^{∞} , que conté A i no compleix la

Propietat de la Corona. Resta obert però el problema de caracteritzar les subàlgebras de H^∞, que contenen A i compleixen aquesta propietat.

Veurem ara com, per certes subalgebras de H^∞, el problema d'interpolació es pot reduir a l'existència d'una successió de funcions, uniformement acotades, que valguin 1 en un punt de la successió interpolant i zero en els altres.

Sigui M una subàlgebra tancada qualsevol de L^∞ que contingui a l'àlgebra del disc, A, (d'ara en en endevant, sempre que parlem d'una àlgebra suposarem que estem en aquestes condicions). Representem per $Sp(M)$ a l'espectre de M i per π la transformada de Gelfand de la funció z. π ens dóna una projecció de $Sp(M)$ a $\bar{U}$. Per a un punt $\alpha \in \bar{U}$, es defineix la fibra de M α per $Sp(M)_\alpha =$
$= \{ X \in Sp(M) \mid X(z) = \alpha \}$

Sigui ara $M \subset H^\infty$, per $\alpha \in U$, diguem δ_α al caràcter que consisteix en prendre valor en el punt α, si $Sp(M)_\alpha = \{ \delta_\alpha \}$, llavors podrem afirmar que $U \subset S_p(M)$, de la mateixa manera que per a H^∞. Es diu que M és estable si per a tota $f \in M$ i per a tot $\alpha \in U$, $\dfrac{f - f(\alpha)}{z - \alpha} \in M$. Si M és estable resulta que, per a tot $\alpha \in U$, $Sp(M)_\alpha = \{ \delta_\alpha \}$ per altra banda, no coneixem condicions més febles que ens donguin aquest resultat.

En tot aquest capítol, M serà una àlgebra estable en què cada caràcter que es projecti a U, estigui representat per una única mesura i totes aquestes mesures siguin absolutament contínues, respecte una d'elles. Exemples d'aques tes àlgebras ho són les estables, log-modulars i generades per productes de Blaschke; com les del tipus H^{∞}_{E} i $H^{\infty} \cap C_B$.

Vegem, en primer lloc, què és el que passa a l'àlgebra del disc. Sigui $\{z_n\}$ una successió de punts, diferents, del disc unitat U, que no s'acumulin a cap punt de U. Sigui K el subconjunt de T en què s'acumula la successió $\{z_n\}$ .Representerem per dm ó m a la mesura de Lebesgue a T, normalitzada. Direm Teorema de Beurling i Rudin o Teorema d'interpolació per a l'Àlgebra del disc A, el següent resultat:

Teorema B - R

Amb les notacions anteriors, són equivalents:

(a) $\{z_n\}$ és uniformement separada i $m(K) = 0$,

(b) Per a tota $g \in C(\bar{U})$, existeix $f \in A$ amb $f(z_n) =$
$= g(z_n)$ $(n = 1,2,...)$

Tot i que aquest teorema es demostra, per exemple en l'article de Heard Wells [15] , veurem una forma de reduir la seva demostració al seguent fet:

(C) Existeix una successió $\{f_n\}$ i una constant $\underline{a}$ tals que $f_n \in A$, $f_n(z_m) = \delta_{nm}$ i $\|f_n\| \leq a$ $(n,m = 1,2,...,)$.

Necessitarem alguns resultats de tipus general. Sigui R una àlgebra uniforme arbitrària, sobre un espai compacte X, S un tancat de X i $R_{|S}$ l'àlgebra de les funcions contínues a S, que són restricció d'una funció de R. Diguem $M(X)$ a l'espai dual de $C(X)$, els elements del qual els pensarem com a mesures sobre X. Considerarem sempre $M(S)$ inclós, de forma natural, a $M(X)$ i per a $\mu \in M(X)$ definim la seva restricció a S per $\mu_S = \phi_S \cdot \mu$ (on ϕ_S representa la funció caracteristica del conjunt S). Farem servir la notació $R^{\perp} = \{\mu \in M(X) : \mu(f) = 0 \ \forall f \in R\}$ i anàlogament per $(R_{|S})^{\perp}$. En aquest termes tenim:

<u>(1.1.) Teorema</u>

$R_{|S}$ és tancada a $C(S)$ si i només si existeix $k < 1$, tal que $\| \mu_S + (R_{|S})^{\perp} \| \leq k \|\mu\|$, per a tota $\mu \in R^{\perp}$

Demostració.- Ion Sucin [17] pag. 57

<u>(1.2.) Corol·lari</u>

$R_{|S} = C(S)$ si i només si existeix $k < 1$ tal que $\| \mu_S \| \leq k \|\mu\|$ per a tota $\mu \in R^{\perp}$.

Vegem ara (b) $\Rightarrow$ (a) $\wedge$ (C). Si es compleix (b), podem construir una funció $f \in A$, amb $f_{|K} = 0$ i $f \neq 0$. Com que necessàriament $\log |f| \in L^1(T)$ tenim que $m(K) = 0$. Si diem $S = K \cup \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ i definim l'operador:

$$T_{|A} : A \longrightarrow (S)$$
$$f \longrightarrow f_{|S}$$

la condició (b) ens diu que $T_{|A}$ és un epimorfisme entre els espais de Banach A i $C(S)$. A l'igual que Hoffman [16] pag. 196, passem el quocient i apliquem el Teorema de l'Aplicació Oberta; aleshores obtenim, en particular, la condició (C) i d'ací es té que $\prod_{j \neq k} \left| \frac{z_k - z_j}{1 - \bar{z}_j \cdot z_k} \right| \geq \delta > 0$, on $\delta = \frac{1}{a}$,

això és el mateix que dir que la successió és uniformement separada.

Passem ara a demostrar (a) i (C) $\Rightarrow$ (b). Gràcies al Teorema de Tietze, només ens cal veure que $C(S) = A_{|S}$ i per (1.2.) n'hi ha prou de veure que per a tota $\mu \in A^{\perp}$, $\mu \neq 0$, és $\frac{\|\mu_S\|}{\|\mu\|} \leq k < 1$.

Sigui $X = S \cup T$ i considerarem l'àlgebra del disc, A, com una àlgebra uniforme sobre X. Siguin $X_n = T \cup \{ z_1, \dots z_n \}$ i ϕ_n la funció característica de X_n. Per cada $\mu \in A^{\perp}$, siguin $\mu_n = \phi_n \cdot \mu$. Aplicant el Teorema de la Convergència Monòtona obtenim que $\{ \mu_n \} \to \mu$ vagament; així doncs, només ens cal veure que existeix k, $0 < k < 1$, tal que $n \in \mathbb{N}$ i per a tota $\mu \in M(X_n)$, $\mu \in A^{\perp}$ es compleixi $\dfrac{\| \mu_S \|}{\| \mu \|} \leq k$

Per una $\mu \in M(X_n) \cap A^{\perp}$, tenim que $\mu =$
$= \lambda_1 \delta_1 + \dots + \lambda_n \delta_n + \mu_T$. Vegem qui és μ_T. Per a tota $f \in A$,

$$\int f \, d\left(\frac{-\lambda_2}{\lambda_1} \delta_1 + \dots + \frac{-\lambda_n}{\lambda_1} \delta_n - \mu_T \right) = \delta_1 (f).$$

Per cada $j = 1,2 \dots n$, sigui $z_j = r_j e^{i \theta_j}$, i sigui $P_j =$
$= P_{r_j} (\theta_j - t)$ el nucli de Poisson corresponent a z_j; podrem escriure aleshores:

$$\int f \, d \left(- \frac{\lambda_2}{\lambda_1} P_2 \, dm + \dots + \frac{-\lambda_n}{\lambda_1} P_n \, dm - \mu_T \right) = \delta_1 (f),$$

$f \in A$ per tant $- \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} P_2 \, dm + \dots + \dfrac{-\lambda_n}{\lambda_1} P_n \, dm - \mu_T$

és una mesura, suportada per T, que representa el caràcter δ_0; necessàriament és $P_1 \, dm$ i per tant:

$$\mu_T = - (\lambda_1 P_1 \, dm + \dots + \lambda_n P_n \, dm) = Q \, dm, \text{ amb } Q \in L^{\infty}.$$

Tenim doncs $\mu = \lambda_1 \delta_1 + \dots + \lambda_n \delta_n + Q \, dm$; així
$\mu_S = \ _1 \ _1 + \dots + \ _n \ _n$, ja que $m(K) = 0$ i μ_T és absolutament contínua; per tant $\| \mu \| = | \lambda_1 | + \dots + | \lambda_n | + \int | Q | \, dm$,
$\| \ _S \| = | \lambda_1 + \dots + | \lambda_n$ i

$$\frac{\|\mu_S\|}{\|\mu\|} = \frac{|\lambda_1| + \dots + |\lambda_n|}{|\lambda_1| + \dots + |\lambda_n| + \int |Q| \, dm}$$

Ens caldria veure que la darrera expressió és més petita que certa k, més petita que 1. Suposarem el contrari; aleshores existirà una successió (μ_n), amb $\mu_n \in A$, $\mu_n \neq 0$, $\mu_{nT} = Q_n \, dm$, que complirà $\int |Q_n| \, dm \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Puc suposar també que $\mu_n = \lambda_1 \delta_1 + \dots + \lambda_{r(n)} \delta_{r(n)} + Q_n dm$, amb $\lambda_{r(n)} = 1$ (sinó dividirem per l'ultim λ_i diferent de zero). A partir de la condició (C) podem trobar, per a cada n, una funció $f_{r(n)}$ de A, amb $f_{r(n)}(z_{r(n)}) = 1$, $f_{r(n)}(z_m) = 0$ si $n \neq m$ i amb $\|f_{r(n)}\| \leq a$; llavors $\int f_{r(n)} \, d\mu_n = 0$ implica $\int_T f_{r(n)} Q_n = -1$ i així: $1 = \left| \int f_{r(n)} Q_n \, dm \right| \leq a \int |Q_n| \, dm \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

que és absurd.

Sigui ara, com dèiem abans, M una subàlgebra de H^∞ que conté A, estable, tal que cada caràcter, que es projecta a U, està representat per una única mesura, sobre la frontera de Shilow Γ. i tal que aquestes mesures són absolutament contínues respecte d'una d'ellas, diguem-ne dm_0 ; aleshores es compleix:

<u>(1.3.) Proposició</u>

Si $\{z_n\}$ és una successió de punts de U, que s'acumulen a un conjunt K, contingunt a Γ i $m_0(K) = 0$, aleshores són equivalents:

(a) Existeix una successió (f_n) i una constant a, tal que $f_n \in M$ $\|f_n\| \leq a$ i $f_n(z_m) = \delta_{nm}$

(b) Si posem $S = K \cup \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $M_{|S} = C(S)$

Demostració.- És exactament la mateixa que hem fet per a l'àlgebra del disc.

Dèiem abans que eren exemples d'aquestes àlgebres que considerem les que eran estables, log.modulars i generades per productes de Blaschke, com les del tipus H^{∞}_{E} ó $H^{\infty} \cap C_B$ [7] . Anem a veure-ho. Necessitarem en primer lloc el següent Lema:

(1.4.) Lema

Si R és un àlgebra generada per productes de Blaschke i $X \in S_p(R)$, són equivalents:

a) $|X(b)| = 1$ per a tot producte de Blaschke $b \in R$

b) $X \in \Gamma(R)$,(Frontera de Shilow de R)

c) $X \in Sp(C^*(R))$ ($C^*(R)$ = C^*-àlgebra generada per R).

Demostració.- Està inclosa en els Teoremas 3 i 4 de l'article de Douglas i Rudin [12] , ja que en ells esencialment només es necessita que l'àlgebra estigui generada per productes de Blaschke.

(1.5.) Proposició

Si R és una àlgebra generada per productes de Blaschke estable i cada caràcter, que es projecta a U, està representat per una única mesura, positiva, suportada per la frontera de Shilow Γ de R , aleshores tota mesura, que representa l'avaluació en un punt de U, és absolutament contínua, respecte la que representa l'avaluació a l'origen, dm_0 .

Demostració.- Per (1.4.) tenim $C(\Gamma) \subset C(\mathfrak{X}) = L^{\infty}$. Sigui α un punt de U i escribim $\alpha = r \cdot e^{i\theta}$. Sigui $P_r(\theta - t)$ el nucli de Poisson corresponent al punt α. El funcional $f \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, P_r(\theta - t)\, d_t$ és una mesura sobre $\mathfrak{X}$ tal que per funcions de H representa l'avaluació al punt α, δ_α. Per restricció, ens donarà una mesura sobre Γ, dm_α que representarà al caràcter δ_α a R; sabem també que aquesta és l'única que representa δ_α. Diguem dm_0 a la mesura sobre Γ que obtenim per $\alpha = 0$. Tindrem llavors:

$$\int_\Gamma f\, dm_\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, P_r(\theta - t)\, d_t \quad \text{i}$$

$$\int_\Gamma f\, dm_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, d_t$$

Sigui P la projecció de Γ a T. Considerem $P_r(\theta - t)$ com a funció sobre T i diguem $P_\alpha = P_r(\theta - t) \circ P$, llavors $P_\alpha \in C(\Gamma)$ i també:

$$\int_\Gamma f\, P\, dm_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \quad P_r(\theta - t)\, d_t = \int_\pi f\, dm$$

és a dir, $dm_\alpha = P_\alpha\, dm_0$.

<u>(1.6.) Corol.lari</u>

Si M és una subàlgebra de H^∞, que conté A, generada per productes de Blaschke i log-modular, aleshores cada mesura, positiva, que representi l'avaluació en un punt α de U, és absolutament contínua respecta de la que representa l'avaluació a zero. Aquest resultat s'aplica en particular a H^∞_E i $H^\infty \cap C_B$.

2. El Problema de Douglas

En el nostre treball, hem estudiat propietats d'algunes subàlgebres de H^∞ que contenen A. Aquestes àlgebres són encara bastant desconegudes (ja hem dit que, per exemple, no estan caracteritzades les que tenen la propietat de la corona) . No passa el mateix per a les subàlgebres de L^∞ que contenen H^∞ . Sabem actualment que tota subàlgebra tancada, B, de L^∞ que conté H^∞ , està generada per H^∞ i pels inversos del producte de Blaschke invertibles a B . Aquesta questió havia estat plantejada per Douglas l'any 1968; anem a fer-ne una mica d'història.

Al 1953, Wermer demostrà que l'àlgebra del disc, A, era maximal entre les subàlgebras tancades de $C(T)$; això diu, en particular, que donada f de $C(T) \setminus A$, tota altra funció contínua es pot aproximar per polinomis en f amb coeficients a A. Anem a veure com el problema de Douglas és, en certa forma, una generalització d'aquest fet. Al 1960 Hoffman i Singer donen una altra demostració del Teorema de Wermer, que aplicada a H^∞ , ens diu que tota subàlgebra tancada B, de L^∞ que conté H^∞ , conté també a $C(T)$ (que d'ara en endevant representarem per C). Uns anys després, al 1967, Sarason demostra que la mínima subàlgebra de L^∞ , que conté H^∞ i C, és $H^\infty + C$; observem que per a aquesta subàlgebra, els únics productes de Blaschke invertibles són els finits, per tant, per a $B = H^\infty + C$ la qüestió de Douglas té resposta afirmativa.

Fou al 1968 quan Douglas plantejà el problema que porta el seu nom, motivat per l'estudi dels operadors de Toeplitz. Si P és la projecció de $L^\infty(T)$ a H^2, es defineix, per a $Q \in L^\infty$, l'operador de Toeplitz T_Q a H^2 per: $T_Q(f) = P(f.Q)$, $f \in H^2$. Disposem doncs d'una correspondència entra funcions de L^∞ i operadors de H^2. En aquesta situació, s'observa que T_Q es invertible o de Fredholm segons la subàlgebra de L^∞ a que pertany Q; era doncs interesant estudiar aquestes subàlgebres.

Poc temps després de estar plantejat el problema de Douglas, Douglas i Rudin [12] el resolen afirmativament per a L^∞; demostrant que tota funció de L^∞ pot aproximar-se per una expressió $\bar{b}\cdot Q$, on $\bar{b}$ és el conjugat d'un producte de Blaschke i Q una combinació lineal de productes de Blaschke. Cal notar, però, que restava sense resposta la qüestió, plantejada temps abans, de si H^∞ era o no generada per productes de Blaschke.

Successivament apareixen resultats parcials; Sarason resol afirmativament el problema de Douglas per a l'àlgebra generada per H^∞ i per les funcions contínues a $T - \{1\}$, amb limits laterals. Davie, Gamelin i Garmett [9] el resolen, també afirmativament, per a les àlgebras $[H^\infty, L^\infty_E]$, generades per H^∞ i per l'àlgebra de les funcions de L^∞ contínues a un subconjunt E de T, L^∞_E i demostran també que $[H^\infty, L^\infty_E] = H^\infty + L^\infty_E$.

S'havia observat que si el problema de Douglas tenia resposta afirmativa s'obtenia, en particular, que dues subàlgebras de L^∞ que contenen H^∞, amb el mateix espectre, eren iguals.

Al 1974, Sarason [23] demostra que una subàlgebra de L^∞ que conté H^∞, amb el mateix espectre que $H^\infty + C$, és $H^\infty + C$. Aquest article és el que dóna el camí per a resoldre el problema definitivament; vegem-ne una mica les idees generals.

Per a una funció $f \in L^1$ i per a un arc I de T es defineix:

$$f_I = \frac{1}{m(I)} \int_I f\, dm \,, \quad \|f\|_* = \sup_{m(I) \leq 1} \frac{1}{m(I)} \int_I |f - f_I|\, dm$$

es diu aleshores que f és d'oscil.lació mitjana acotada (f $\in$ B.M.O.) si $\|f\|_* < +\infty$. Sarason introdueix llavors l'espai V.M.O. de les funcions, que en diu, d'oscil.lació nul.la, que consisteix en les funcions $f \in L^1$ que compleixen:

$$\lim_{a \to 0} \sup_{m(I) \leq a} \frac{1}{m(I)} \int_I |f - f_I|\, dm = 0$$

Gràcies als treballs de Fefferman i Stein sobra l'espai B.M.O., Sarason consegueix demostrar que Q.C.= V.M.O.$\cap L^\infty$ (on Q.C. és el subespai de les funcions de $H^\infty + C$, que tenen la seva conjugada a $H^\infty + C$). Per altra banda, Douglas havia observat que per a $H^\infty + C$ la integral de Poisson era "asimptoticament multiplicativa", és a dir:

$$\lim_{r \to 1} \|f_r\, g_r - (f.g)_r\| = 0 \quad \text{per } f,g \text{ de } H^\infty + C$$

Sarason demostra que si $S_p(B) = S_p(H^\infty + C)$, llavors la integral de Poisson és també asimptòticament multiplicativa per a B. A partir d'aquest fet i de la caracterització de l'espai Q.C., es veu que tota funció invertible a B és de Q.C i llavors resulta inmediatament que $B = H^\infty + C$.

Un any després de l'article de Sarason, Chang [6] generalitza aquest treball, demostrant que dues subàlgebras de L^∞ que contenen H^∞, amb el mateix espectre i essent una d'ellas "de Douglas", són iguals. En primer lloc demostra aquest resultat per l'àlgebra generada per H^∞ i el conjugat d'un producte de Blaschke $[H^\infty, \bar{b}]$. Fixem-nos que Sarason ho havia demostrat per $[H^\infty, \bar{z}]$. Si per $[H^\infty, \bar{z}] = H^\infty + C$ s'utilitzava el comportament asimptòtic de la integral de Poissón, per $[H^\infty, \bar{b}]$ s'utilitza el següent comportament asimptòtic:

$$\lim_{\delta \to 0} \ \sup_{z \in G_\delta} |f(z)\, g(z) - (f.g)\,(z)| = 0 \qquad f.g \in B$$

on $G_\delta = \{z \in U : |b(z)| \geqslant 1-\delta\}$. Aquesta propietat, aplicada a un producte de Blaschke, la demostrarem nosaltres més endevant junt amb d'altres caracteritzacions dels productes de Blaschke invertibles a $[H, \bar{b}]$.

En aquesta situació, la solució del problema de Douglas semblava propera i en efecte, uns mesos més tard, Marshal [19] va donar el pas final. Concretament, en aquest article Marshall demostra que tota subàlgebra B de L^∞ que contingui H^∞, té el mateix espectre que l'àlgebra B_I, generada per H^∞ i pels conjugats dels productes de Blaschke invertibles a B.

En un altre article, del mateix temps, Marshall [18] demostra que H^∞ està generat pels productes de Blaschke, que com hem dit quedava pendent desde fèia temps. Aquest resultat, encara que les tècniques, que s'utilitzen per a la seva demostració, són molt diferents de les que s'apliquen per al problema de Douglas, podriem dir que el completa, ja que a partir d'això es pot afirmar que tota subàlgebra de L^∞, que conté H^∞, està generada pels productes de Blaschke, junt amb el inversos d'aquells productes que siguin invertibles.

Si B és una subàlgebra de L^∞, que conté H^∞, direm C_B a la C^*-àlgebra generada pels productes de Blaschke invertibles a B. Sabem per la solució del problema de Douglas que $B = [H^\infty, C_B]$. Es sabia en algún cas que $[H^\infty, C_B] = H^\infty + C_B$ (per exemple si $B = H^\infty + L_E$). Chang ho demostra en general i poc després Chang i Marshall [7] en donen una demostració més senzilla, basada en un Teorema clàssic de Nevanlinna.
En aquest mateix article, demostren que per a tota àlgebra tancada D, $H^\infty \cap C_B \subset D \subset C_B$, té resposta afirmativa el problema de Douglas, és a dir, D està generada per $H^\infty \cap C_B$ junt amb els inversos dels productes de Blaschke invertibles a D. Aquest resultat, aplicat al cas $B = L^\infty$, ens dóna la solució del problema de Douglas i, per $B = [H^\infty, \bar{z}]$, conté el Teorema de Maximalitat de Wermer, del qual el resultat de Chang i Marshall n'és per tant una generalització.

3. Regularitat

Sabiem, de Douglas i Rudin [12] , que tota $g \in L^\infty$ es pot aproximar per quocients de productes de Blaschke, S. Axler [1] , l'any passat, aprofitantaquest resultat, va demostrar que si $g \in L^\infty$, existeixen $h \in H^\infty + C$ i b, producte de Blaschke, tals que $g = {}^h/_b$. Veurem ara nosaltres com aquest resultat es generalitza a L^∞_E , amb E obert i ens serveix per donar una demostració més senzilla, de que H^∞_E no està continguda a cap subàlgebra maximal de L^∞_E (Aquest resultat està demostrat a[5]). Generalitzarem després aquests resultats, per el cas en què E sigui tancat.

(3.1.) Teorema

Sigui E un obert de la circumferència unitat T. Sigui $g \in L^\infty_E$; aleshores, existeix una funció $h \in H^\infty_E + C$ i un producte de Blaschke $b \in H^\infty_E$ tals que $g = {}^h/_b$.

Demostració.- És la mateixa que la de S.Axler [1] tenint present que els productes de Blaschke de H^∞_E són aquells que llurs zeros no s'acumulen en cap punt de E i que donada una successió de productes de Blaschke, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de H^∞_E , el conjunt de tots els zeros de $\{z_n^m\}$ $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tampoc s'acumula en cap punt de E,(això no és cert si E és tancat).

(3.2.) Corol.lari

Si $g \in L^{\infty}_{E}$, aleshores existeix $h \in H^{\infty}_{E}+C$ amb $|h| = |f|$

(3.3.) Corol.lari

$H^{\infty}_{E} + C$ és una subàlgebra regular de L^{∞}_{E}

Demostració.- $L^{\infty}_{E} = (S_p (L^{\infty}_{E}))$. Pel lema de Urysohn, donats un tancat, $F \subset S_p (L^{\infty}_{E})$ i un punt, $X_0 \in S_p (L^{\infty}_{E}) \setminus F$, existeix, $f \in L^{\infty}_{E}$ amb $f (X_0) = 1$ i $f_{|F} = 0$. Pel Corol.lari anterior, existeix $h \in H^{\infty} + C$ amb $h = f$, variant h en una constant, es pot conseguir que $h (X_0) = 1$ i $h_{|F} = 0$.

Sigui ara B una àlgebra tancada, amb $H^{\infty} \subset B \subset L^{\infty}$ Sigui C_B la C^*-àlgebra generada pels productes de Blaschke invertibles a B, llavors es compleix:

(3.4.) Lema

Si D és una àlgebra tancada, amb $H^{\infty} \cap C_B \subset D \subset C_B$, aleshores $C \subset D$.

Demostració.- Es pot trobar a [7], però nosaltres en donarem una altre, seguint la que es fa en el cas en que $B = H^{\infty}$, $H^{\infty} \cap C_B$ és estable i per tant l'avaluaió a l'origen δ_0, és l'únic caràcter que s'anul.la a z. Si δ_0 no s'estèn a un caràcter de D, cap caràcter de D es pot anul.lar a z i per tant z és invertible a D, és a dir $\bar{z} \in D$; així doncs $C \subset D$. Suposem ara que δ_0 s'estén a D, pel Teorema de Hanh-Banach es pot estendre a un funcional lineal continu (és a dir una mesura) μ, a L^{∞}, però al ser $H^{\infty} \cap C_B$ log-modular [7], aquesta mesura serà la integral de la funció sobr T.

Tindrem doncs $\delta_0 (f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i \cdot t})\, e^{i \cdot n \cdot t}\, dt =$ $= \delta_0 (z^n f) = \delta_0 (z^n) \cdot \delta_0 (f) = 0$, és a dir, els coeficients de Fourier negatius són zero. Aleshores, $D \subset H^\infty$ i com que $D \subset C_B$, tindrem $D = H^\infty \cap C_B$ en contra del que havíem suposat.

(3.5.) Lema

Si $(H^\infty \cap C_B) + C$ és regular a C_B ; aleshores $H^\infty \cap C_B$ no està continguda en cap subàlgebra maximal de C_B.

Demostració.- Sigui D una subàlgebra maximal de C_B , que contingui $H^\infty \cap C_B$. Per (3.4.), $(H^\infty \cap C_B) + C \subset D$; a partir de [16] pag. 190, això és impossible, al ser $(H \cap C_B) + C$ regular.

(3.6.) Corol.lari

Si E és un obert de T, H^∞_E no està continguda en cap subàlgebra maximal de L^∞_E .

Demostració.- Només cal aplicar (3.5.),per $B = H^\infty + L^\infty_E$

J. Cufí [5] demostra l'anterior resultat, veient que H^∞_E , restringida a cada fibra X^E_α de l'espectre de L^∞_E , és una subàlgebra regular. Demostrarem nosaltres aquest darrer resultat, a partir de que $H^\infty_E + C$ és una subàlgebra regular de L^∞_E . En realitat, demostrarem un Teorema una mica més general, per a poder fer-lo servir més endevant.

(3.7.) Teorema

Sigui X^B_α la fibra en el punt $\alpha \in T$ de C_B. Si $(H^\infty \cap C_B) + C$ és una subàlgebra regular de C_B, aleshores

$H^\infty \cap C_B|_{\chi^B_\alpha}$ és una subàlgebra regular de $C_B|_{\chi^B_\alpha} = C(\chi^B_\alpha)$.

Demostració.- En primer lloc, observem que $S_p((H^\infty \cap C_B) + C) = S_p(H^\infty \cap C_B) \setminus U$; en efecte: cada caràcter de $(H^\infty \cap C_B) + C$ ens dóna un caràcter de $H^\infty \cap C_B$, que es projecta a T i recíprocament, donat $x_0 \in S_p(H^\infty \cap C_B)$ amb $x_0(z) = \alpha \in T$, x_0 s'estén a $(H^\infty \cap C_B) + C$ definint $x_0(\bar{z}) = \dfrac{1}{\alpha}$.

Sabem per [7] que χ^B s'identifica amb el subconjunt de l'espectre de $H^\infty \cap C_B$, format pels caràcters que són de modul 1, sobre els productes de Blaschke de $H^\infty \cap C_B$. Per altra banda $\bar{z}$ és constant a la fibra α, $\mathfrak{m}^B_\alpha$, de l'espectre de $H^\infty \cap C_B$, $\mathfrak{m}^B$. Tenim doncs:

$$(H^\infty \cap C_B) + C|_{\chi^B_\alpha} = H^\infty \cap C_B|_{\chi^B_\alpha}$$

Al ser $(H^\infty \cap C_B) + C$ regular a C_B, resulta que $(H^\infty \cap C_B) + C|_{\chi^B_\alpha}$ ho és a $C(\chi^B_\alpha)$ i així $H^\infty \cap C_B|_{\chi^B_\alpha}$ és regular a $C_B|_{\chi^B_\alpha}$.

Anem ara a generalitzar els resultats anteriors per a un subconjunt tancat de T.

(3.8.) Teorema

Si E és un tancat de T, aleshores $H^\infty_E + C$ és una subàlgebra regular de L^∞_E.

Demostració.- Siguin, F un tancat de $S_p(L^\infty_E) = \chi^E$ i $x_0 \in \chi^E \setminus F$. Sigui Π la projecció de χ^E a $\bar{U}$. Si $x_0(z) = \alpha \notin \Pi(F)$, com que $\Pi(F)$ és un compacte, aleshores existeix $f_0 \in C$, amb $f_0(\alpha) = 1$ i $f_0|_{\Pi(F)} = 0$. Només ens cal trobar una funció, amb aquestes propietats, en el cas en què $\alpha \in \Pi(F)$.

Sigui χ^E_α la fibra en el punt α de χ^E. Suposem $\alpha \in \Pi(F)$; així $F_\alpha = F \cap \chi^E_\alpha \neq \emptyset$. Per altre banda $\alpha \notin E$, sinó $F_\alpha = \{\delta_\alpha\}$ i $X_0 \in F$ en contra de la hipòtesi. Sigui $\mathcal{O}$ un entorn de α a T i V, W dos oberts de T amb $E \subset V \subset \bar{V} \subset W$ i $W \cap \mathcal{O} = \emptyset$. Com que T és un compacte, podrem trobar $f \in C$, amb $f(\alpha) = 1$ i $f_{|T \setminus \mathcal{O}} = 0$. Tenim $H^\infty_V + C \subset H^\infty_E + C$ i sabem que $H^\infty_V + C$ és regular per (3.3.) ; aleshores puc trobar $h \in H^\infty_V + C$, amb $h(X_0) = 1$ i $h_{|F \cap \Pi^{-1}(T \setminus W)} = 0$. Vegem ara que f.h és la funció buscada: fixem-nos que $F = [F \cap \Pi^{-1}(T \setminus \mathcal{O})] \cup [F \cap \Pi^{-1}(T \setminus W)]$ i en un lloc s'anul.la f i en l'altre s'anul.la h; per tant sempre s'anu.la $f \cdot h$. Per altra banda $f(X_0) = f(\alpha) = 1$ i $h(X_0) = 1$ Aixi doncs hem demostrat que $H^\infty_E + C$ és regular a L^∞_E.

Ajuntant els resultats anteriors obtenim:

<u>(3.9.) Corol.lari</u>

Si E és un obert o bé un tancat de T es compleix:

a) $H^\infty_E + C$ és una subàlgebra regular de L^∞_E

b) H^∞_E no esta continguda en cap subàlgebra maximal de L^∞_E

c) $\forall\ \alpha \in T$, $H^\infty_{E\,|\,\chi^E_\alpha}$ és una subàlgebra regular de $L^\infty_{E\,|\,\chi_\alpha^E} = C(\chi^E_\alpha)$.

4. Àlgebras del tipus [z,b]

Anem a estudiar en aquest capítol algunes subàlgebras tancades de H^∞, que contenen l'àlgebra del disc, A. D'entre aquestes subàlgebras, són conegudes les de tipus H^∞ (àlgebra de les funcions, analitíques i acotades, al disc unitat, que s'estenen contínuament a un subconjunt E de la frontera) i les del tipus $H^\infty \cap C_B$ (on C_B és la C^* àlgebra generada pels productes de Blaschke invertibles a una àlgebra tancada B, $H^\infty \subset B \subset L^\infty$). Aquestes àlgebres, per exemple, són estables, log-modulars, tenen la propietat de la Corona i estan generades per productes de Blaschke [7] .

D'ara en endevant, donades $f_1, \ldots, f_n$, funcions d'una àlgebra uniforme B, representarem per $[f_1, \ldots, f_n]$ la mínima subàlgebra amb la unitat de B, tancada, que conté $f_1, \ldots, f_n$ Estudiarem nosaltres les àlgebres [z,b] on b és un producte de Blaschke.

Si volem que [z,b] tingui la propietat de la Corona, necessitem primer que el seu espectre ($M = S_p([z,b])$), contingui un subconjunt homeomorf al disc U. Això es compleix si, per a cada $\alpha \in U$, la fibra M_α es redueix a un punt. Una condició suficient és que l'àlgebra sigui estable. El Teorema 4.18 de [8] ens diu que, si el conjunt de punts de T, on s'acumulen els zeros de b, té mesura zero, aleshores [z,b] és estable. Suposarem doncs que estem en aquesta situació.

En aquestes condicions, de 2.17 i de 2.24 de [8] es segueix que $[z,b]$ té la propietat de la Corona. A més a més, obtenim també que M està format per fibres M_α, sobre cada punt $\alpha \in \bar{U}$; si $\alpha \in U$ ó si $\alpha \in T$ i b s'estén continuament a α , M_α està format per un sol caràcter, que és l'avaluació en el punt α , δ_α ; en cas contrari, M_α s'identifica homeomorficament amb $\bar{U}$, fent correspondre a cada caràcter el seu valor a b.

A partir de (1.4) i amb les condicions anteriors, obtenim que la frontera de Shilow de $[z,b]$, Γ, està formada per fibres Γ_α sobre cada $\alpha \in T$, si b s'estén contínuament a α, $\Gamma_\alpha = \{\alpha\}$; si b no s'estén contínuament, Γ_α s'identifica amb T, fent correspondre a cada caràcter el seu valor a b.

Les preguntes que ens plantegem ara són les següents: Podria ser $[z,b]$, per a un cert producte de Blaschke b, igual a $H^\infty \cap C_B$, per a una subàlgebra B de L^∞ , que contingui H^∞ Podria ser $[z,b]$ igual a $H^\infty \cap \sigma$ per a una C^*-àlgebra σ? Quins productes de Blaschke hi ha a $[z,b]$?

En primer lloc, fixem-nos que de 5.8 de [8] obtenim que, si b té un únic punt d'acumulació de zeros, $\alpha \in T$, aleshores $[z,b] = [z,b,\bar{z},\bar{b}] \cap H^\infty$, es a dir, per a $\sigma = [z,b,\bar{z},\bar{b}]$, $[z,b] = H^\infty \cap \sigma$. Veurem que no podem obtenir aquest resultat per a $\sigma = C_B$, per a cap subàlgebra B de L^∞ , que contingui H^∞.

<u>(4.1.) Proposició</u>

Sigui B una subàlgebra tancada, $H^\infty \subset B \subset L^\infty$ i sigui C_B, la C^* àlgebra generada pels productes de Blaschke invertibles a B. Si $b \in H^\infty \cap C_B$ és un producte de Blaschke; aleshores tot divisor de b és també de $H^\infty \cap C_B$

Demostració.- Entenem per divisor de b un producte de Blaschke b_1, de manera que existeixi b_2 tal que $b=b_1.b_2$. Ens cal veure $b_1 \in C_B$. Com que $b \in H^\infty \cap C_B$, llavors b és invertible a B, és a dir, $\bar{b} \in B$ i així $1=b.\bar{b} = b_1(b_2.\bar{b})$; per tant b_1 és invertible a B, és a dir, $b_1 \in H^\infty \cap C_B$.

(4.2.) Corol.lari

Si b és un producte de Blaschke, amb un sol punt de discontinuitat α, $\alpha \in T$; aleshores $[z,b^2]$ no pot ser mai $H^\infty \cap C_B$, per a cap B ($H^\infty \subset B \subset L^\infty$).

Demostració.- Si $[z,b^2]$ fos $H^\infty \cap C_B$ per a una certa B, per (4.1.) $b \in [z,b^2]$ i llavors $[z,b^2] = [z,b^2.b^3]$. Això contradiu 5.5. de [8], jà que allà es demostra que $[z,b^2,b^3]$ no és mai $H^\infty \cap \sigma$, per a cap σ, C^*- àlgebra.

Demostrarem ara una proposició que farem servir més endevant.

(4.3.) Proposició

Si $\{b_1,\dots,b_n,\dots\}$ és un conjunt numerable de productes de Blaschke i $[z,b_1,\dots b_n,\dots]$ l'àlgebra que generen, aleshores si $[z,b_1\dots,b_n\dots] = H^\infty \cap C_B$, necessàriament $B = [H^\infty, \bar{b}_1,\dots,\bar{b}_n,\dots]$.

Demostració.- Si $\{b_1,\dots,b_n\dots\} \subset C_B$, aleshores $\{\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_n\dots\} \subset B$ i llavors $[H^\infty, \bar{b}_1,\dots,\bar{b}_n,\dots] \subset B$. Si l'inclusió fora estricte, per la solució del Problema de Douglas, existiria un producte de Blaschke b tal que

$\bar{b} \in B \setminus [H^{\infty}, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n, \ldots]$; però llavors $b \in C_B$ i per tant $b \in [z, b_1, \ldots, b_n, \ldots] \subset [H^{\infty}, b_1 \ldots, b_n, \ldots]$, que és absurd.

Volem arribar a veure que $[z,b]$ no pot ser mai $H^{\infty} \wedge C_B$; per això necessitarem el següent resultat.

(4.4.) Lema

Si f,g, són dues funcions de l'àlgebra del disc A, amb $z = f.g$, aleshores una d'elles és invertible a A.

Demostració.- Si $z = f.g$, necessàriament una d'elles és zero a l'origen. Suposem $f(0) = 0$, com que $1 = f'g + f g'$, resulta que $g(0) \neq 0$ i així $g(x) \neq 0$ $\forall x \in \bar{U}$, per tant $\frac{1}{g} \in A$. c,v,d.

Si b és un producte de Blaschke finit, $[z,b] = A = H^{\infty} \wedge C$ i $C = H^{\infty} \wedge C_B$, per a $B = H^{\infty} + C$. Vegem com, fora d'aquest cas, $[z,b]$ no és mai $H^{\infty} \wedge C_B$.

(4.5.) Teorema

Si b és un producte de Blaschke, amb infinits zeros, $[z,b]$ no pot ser mai $H^{\infty} \wedge C_B$, per a cap subàlgebra B de L^{∞} que contingui H^{∞}.

Demostració.- Sigui $M = S_p[z,b]$, sigui $\alpha \in T$ un punt en què s'acumulen els zeros de b. Direm $\hat{b}$ a la transformada de Gelfand de b. Sabem que la fibra M_α s'identifica amb $\bar{U}$; amb aquesta identificació resulta que, si $b_\alpha = \hat{b}_{|M_\alpha}$, $b_\alpha = z$ i $[z,b]_\alpha = \{\hat{f}_{|M_\alpha} : f \in [z,b]\} = A$

($\hat{f}$ representarà sempre la transformada de Gelfand de f)

Sigui $\{z_n\}$ una successió, de zeros de b, que s'acumuli en el punt α; sigui b' el producte de Blaschke que té zeros $\{z_{2n}\}$. Podrem escriure $b = b'.b''$, on b'' serà un altre producte de Blaschke, amb un conjunt de zeros que s'acumulen també a α. Si fos cert que $[z,b] = H^{\infty} \cap C_B$, per a una certa B, per (4.1.) sabem que b' i b'' $\in [z,b]$. Siguin ara $b'_{\alpha} = \hat{b}'|_{M_\alpha}$ i $b''_{\alpha} = \hat{b}''|_{M_\alpha}$; tindrem llavors que z =

$= b'_{\alpha}.b''_{\alpha}$, és a dir, estem en les hipòtesis de (4.4.) i per tant b'_{α} ó b''_{α} serà invertible à A. Diguem, com sempre, $\mathcal{M} = S_p(H^{\infty})$; $b'(\mathcal{M}_{\alpha}) = \bar{U}$ i per tant hi ha un caràcter de H^{∞}, X_0, amb $X_0(b') = 0$. Restringint X_0 a $[z,b]$ obtenim un caràcter, de la fibra α, en el que b' s'anul.la; per tant b' no pot ser invertible. El mateix raonament s'aplica a b'' i per tant hem arribat a una contradicció.

c.v.d.

Sabem que si $H^{\infty} \neq B \subset L^{\infty}$, llavors $\bar{z} \in B$. També hem vist a (3.4.) què si $H \cap C_B \neq D \subset C_B$, llavors $\bar{z} \in D$. Podem preguntar-nos què passa per $[z,b] \neq [z\ \bar{z},b,\bar{b}]$; per exemple podem preguntar-nos si $\bar{z} \in [z,b,\bar{b}]$. La demostració, en els casos anteriors, depèn del fet que tant H^{∞} com $H^{\infty} \cap C_B$ són log-modulars. Veurem nosaltres que, encara que $[z,b]$ no és log-modular, si és cert que $z \in [z,b,\bar{b}]$.

<u>(4.6.) Proposició</u>

Si b és un producte de Blaschke, amb infinits zeros que s'acumulen en un subconjunt E de T, de mesura zero, aleshores $[z,b]$ no és log-modular.

Demostració.- Demostrarem que hi ha caràcters de $[z,b]$

representats per més d'una mesura positiva, soportada per la frontera de Shilow Γ de $[z,b]$. Sigui $M = S_p[z,b]$, sigui $\alpha_0 \in E$ i sigui $X_0 \in M_{\alpha_0}$ el caràcter definit per $X_0(z) = \alpha_0$ i $X_0(b) = b(0) = \lambda_0$.

Anem a trobar dues mesures que el representin. Sigui dm_0 la mesura sobre Γ_{α_0}, que s'identifica amb dm, a l'identificar Γ_{α_0} amb T. Sigui $\lambda_0 = r \cdot e^{i\theta}$, sigui P_{λ_0} la funció sobre Γ_{α_0}, que s'identifica amb el nucli de Poisson $P_r(\theta - t)$. Definim les seguents mesures

$$_1\mu(f) = \int_{T\setminus E} f/_{T\setminus E}\, dm + \int_{\Gamma_{\alpha_0}} f|\Gamma_{\alpha_0}\, dm_0 \qquad f \in C(\Gamma)$$

$$_2\mu(f) = \int_{\Gamma_{\alpha_0}} P_{\lambda_0} f\, dm_0 \qquad f \in C(\Gamma)$$

Com que E és per hipòtesi de mesura zero, la integral a T E es pot considerar com una integral a T. Vegem quins valors prenem $_1$ i $_2$ a z i b.

$$_1\mu(z) = \int_T z\, dm + \int_T \alpha_0\, dm = 0 + \alpha_0 = \alpha_0$$

$$_1\mu(b) = \int_T b\, dm + \int_T z\, dm = b(0) + 0 = \lambda_0$$

$$_2\mu(z) = \int_T P_{\lambda_0}\, \alpha_0\, dm = \alpha_0$$

$$_2\mu(b) = \int_T P_r(\theta - t)\, e^{it}\, dm = \lambda_0$$

Per tant tenim les dues mesures positives sobre Γ, que representen a λ_0. c.v.d.

<u>(4.7.) Proposició</u>

Sigui b un producte de Blaschke amb infinits zeros; si $[z,b]$ és estable, aleshores $\bar{z} \in [z,b,\bar{b}]$; en canvi $\bar{b} \notin [z,\bar{z},b]$.

Demostració.- Vegem que δ_0 no s'estén a $[z,b,\bar{b}]$. Suposem el contrari, és a dir que δ_0 s'estén a $[z,b,\bar{b}]$. Sabem que, a $[H^\infty, \bar{b}]$, les expressions del tipus $\bar{b}^m \cdot f$, amb $f \in H^\infty$, són denses. Definim $X(\bar{b}^m, f) = \delta_0(\bar{b}^m) \cdot \delta(f)$, s'estén a un caràcter de $[H^\infty, \bar{b}]$ ja que $|X(\bar{b}^m . f)| \overset{0}{=}$ $|\delta_0(\bar{b})|^m \cdot |f(0)| = |f(0)| \leq \|f\| = \|\bar{b}^m \cdot f\|$

Així doncs, igual que a (3.4.), resulta que $[H^\infty, \bar{b}] = H^\infty$; que és absurd. Per altra banda, apart de δ_0, z no pot anul.lar-se a cap caràcter de $[z,b,\bar{b}]$; sinó restringint-lo a $[z,b]$ resultaria que $[z,b]$ no és estable. Per tant, com que δ_0 no s'estén, z no s'anul.la a l'espectre de $[z,b,\bar{b}]$, d'ací que z és invertible a $[z,b,\bar{b}]$ i així $\bar{z} \in [z,b,\bar{b}]$.

Observem que $\bar{b} \notin [z,\bar{z},b]$, perquè sinó b seria invertible a $[H^\infty, \bar{z}]$ i ací només són invertibles els productes de Blaschke finits. c.v.d.

Anem a veure ara com són les funcions de $[z,b]$ i com són les funcions internes, en el cas de ser b un producte de Blaschke, amb infinits zeros i que s'acumulen a un punt de T, α.

<u>(4.8.) Teorema</u>

Amb les hipòtesis anteriors, es compleix:

a) $f \in [z,b]$ si i només si $f = h \circ b + k$, amb $h, k \in A$ i $k(\alpha) = 0$

b) Si a més f és interna, aleshores h és un producte de Blaschke finit.

Demostració.- a) Sigui $M = S_p[z,b]$. En el nostre cas $M = (\bar{U} - \{\alpha\}) \cup M_\alpha$ i M és homeomorf a $\bar{U}$. Sigui $f \in [z,b]$

i $f_\alpha = \hat{f}_{|M_\alpha}$; f_α s'identifica amb una funció $h \in A$. Com que els polinomis en z són densos a A, existirà una successió $(P_n(z))$ amb $(P_n(z)) \longrightarrow h(z)$ uniformement. Considerem la successió $(P_n \circ b)$, llavors $(P_n \circ b)(z) \longrightarrow (h \circ b)(z)$ uniformement i per tant $h \circ b \in [z,b]$. Si considerem ara $(h \circ b)_\alpha$, resulta que $(h \circ b)_\alpha = f_\alpha$, es a dir, $f - h \circ b$ és una funció de $[z,b]$ nul.la a M_α . Com que b és continu a $T - \{\alpha\}$, $f - h \circ b$ resulta ser contínua a T i així $f - h \circ b = k \in A$, amb $k(\alpha) = 0$. El recíproc és inmediat.

b) Al ser f interna, sabem de [8] que $\hat{f}(M_\alpha) = \bar{U}$, és a dir, si h és la funció de A amb què s'identifica f_α ; $h(\bar{U}) = \bar{U}$. Així h és una funció interna de A i per tant un producte de Blaschke, amb un número finit de zeros. c.v.d.

Hem vist a (4.5.) com, al descomposar b en dos productes de Blaschke, amb infinits zeros, $b = b'.b''$, resultava que $b',b'' \notin [z,b]$. És clar, però, que els productes de Blaschke finits són a $[z,b]$ i també hi són els productes que resulten de treure-li a b un nombre finit de zeros, ja que $[z,b]$ és estable. Podria pensar-se que aquests són els únics productes de Blaschke de $[z,b]$ .Vegem que no és així .

(4.9.) Proposició

Si b és un producte de Blaschke, amb infinits zeros; aleshores a $[z,b]$ hi ha productes de Blaschke que prenen el valor zero en infinits punts, en els quals b és diferent de zero.

Demostració.- Si h és un producte, amb un nombre finit de zeros, aleshores $h \circ b$ és una funció interna de $[z,b]$ En particular, $h \circ b$ és interna si $h = \dfrac{\lambda - z}{1 - \bar{\lambda} z}$, i $\lambda \in U$.

Sabem de [16] pag. 176, que existeix una successió (λn), amb $(\lambda n) \longrightarrow 0$, de manera que, si $h_n = \dfrac{\lambda_n - z}{1 - \bar{\lambda}_n z}$, $h_n \circ b$ és un producte de Blaschke. Tenim doncs, per a cada λ_n, un producte de Blaschke, de $[z,b]$, que té per zeros els infinits punts en què b pren el valor λ_n.

Hem estudiat àlgebras generades per z i per un sol producte de Blaschke b. Anem a considerar ara àlgebras generadas per z i per dos productes de Blaschke.

Siguin b_1 i b_2 dos productes de Blaschke amb zeros que s'acumulen a E_1 i E_2 respectivament. Si E_1 i E_2 són de mesura zero i $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, a l'igual que en el cas d'un sol producte, l'espectre de $[z,b_1,b_2]$ està format per $\bar{U} \setminus E_1 \cup E_2$, junt amb fibres M_α per a $\alpha \in E_1 \cup E_2$, amb M_α homeomorfa a $\bar{U}$. En aquest cas es compleix també la Propietat de la Corona.

En el cas en què $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, no sabem ja quin és l'espectre de $[z,b_1,b_2]$, ni sabem tampoc si es compleix ó no la Propietat de la Corona. Considerem $E_1 = E_2 = \{\alpha\}$ i definim:

$C(\alpha,b_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists\, (z_n)$ successió de U amb : $(z_n) \rightarrow \alpha \wedge b_1(z_n) \longrightarrow \lambda\}$.

$C(\alpha,\alpha_1,b_2) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists\, (z_n)$ successió de U amb : $(z_n) \longrightarrow \alpha \wedge b_1(z_n) \longrightarrow \alpha_1 \wedge b_2(z_n)\ \lambda\}$.

$M_\alpha = \{ X \in S_p[z,b_1] \mid X(z) = \alpha \}$.

$M_{\alpha\alpha_1} = \{X \in S_p[z,b_1,b_2] \mid X(z) = \alpha \wedge X(b_1) = \alpha_1 \}$.

Dawson [8] demostra que $b_1(M_\alpha) = C(\alpha,b_1) = \bar{U}$ i així es determina l'espectre de $[z,b_1]$ i es demostra la Propietat de la Corona. Per a l'àlgebra $[z,b_1,b_2]$, la Propietat de la Corona és equivalent a veure que $b_2(M_{\alpha\alpha_1}) = C(\alpha,\alpha_1,b_2)$; però tampoc no hem pogut demostrar aquesta condició.

Hem vist a (4.5.) que $[z,b]$ no és mai $H^\infty \cap C_B$ i per tant, tampoc és mai H^∞_E. En el proper capítol, demostrarem que H^∞_E no pot estar generat per un conjunt numerable de productes de Blaschke. El camí que seguirem no serà estudiar les àlgebras $[z,b_1,\ldots b_n,\ldots]$ directament, sinó que estudiarem les àlgebras $H^\infty + L_E$ i la seva relació amb H^∞_E.

5. Relació entre B i $H^{\infty} \cap C_B$

En aquest capítol, ens proposem d'estudiar la relació que hi ha entre l'espectre d'una subàlgebra B de L^{∞}, que conté H^{∞} i l'espectre de $H^{\infty} \cap C_B$ (on C_B és, com sempre, la C^*- àlgebra generada pels productes de Blaschke invertibles a B). Tractarem també altres qüestions, com ara és la caracterització dels productes de Blaschke, invertibles en l'àlgebra $[H^{\infty}, \bar{b}]$ (on $\bar{b}$ és el conjugat d'un producte de Blaschke b) i també, la no separabilitat de H^{∞}_E, per un subconjunt E de T.

De Chang [6] es dedueix que un producte de Blaschke b_1 és invertible a l'àlgebra $[H^{\infty}, \bar{b}]$ si i només si es compleix:

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{z \in G_\delta} | b_1(z) . \bar{b}_1 (z) - 1 | = 0 \quad \text{on}$$

$$G_\delta = G_\delta (b) = \{ z \in U : | b(z)| \geqslant 1 - \delta \} ;$$

això és equivalent a que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, de manera que $G_\delta (b) \subset G_\varepsilon (b_1)$. Anem a donar ara una demostració directa d'aquest fet, junt amb d'altres caracteritzacions.

<u>(5.1.) Teorema</u>

Si b, b_1, són dos productes de Blaschke, aleshores són equivalents:

(1) $\bar{b}_1 \in [H^\infty, \bar{b}]$, és a dir, b_1 és invertible a $[H^\infty, \bar{b}]$

(2) $|\hat{b}_1(X)| = 1$, per a tot $X \in S_p[H^\infty, \bar{b}]$

(3) $S_p[H^\infty, \bar{b}] \subset S_p[H^\infty, \bar{b}_1]$

(4) Per a tota successió (z_n) de U, tal que $|b(z_n)| \longrightarrow 1$ es compleix $|b_1(z_n)| \longrightarrow 1$

(5) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que $G_\delta(b) \subset G_\varepsilon(b_1)$

Demostració.- (2) $\Longrightarrow$ (1). Es inmediat, ja que $\hat{b}_1$ no s'anul.la a l'espectre de $[H^\infty, \bar{b}]$. (1) $\Longrightarrow$ (2). És també inmediat a partir de que $X(b_1 \cdot \bar{b}_1) = 1$ i $|X(b_1)| \leq 1$, $|X(\bar{b}_1)| \leq 1$

(2) $\Longleftrightarrow$ (3). Cal només tenir present que $S_p[H^\infty, \bar{b}] = \{X \in S_p H^\infty : |X(b)| = 1\}$ i anàlogament per a $S_p[H^\infty, \bar{b}_1]$.

(2) $\Longrightarrow$ (4). Suposem no (4), és a dir, suposem que tenim una successió (z_n) de punts de U, de manera que $|b(z_n)| \to 1$ i $|b_1(z_n)| \not\to 1$. $(b_1(z_n))_{n \in N}$ tindrà una parcial convergent a algún punt $\underline{a}$ amb $|a| < 1$. Sigui (z_n^1) aquesta parcial. Podem trobar una altra parcial (z_n^2) de manera que $(b(z_n^2)) \longrightarrow \alpha$ amb $|\alpha| = 1$ i també $(b_1(z_n^2)) \longrightarrow a$. Sigui ara:

$$I = \{ f \in H^\infty \mid (f(z_n^2)) \longrightarrow 0 \};$$

I és un ideal propi de H^∞ i per tant existirà un caràcter X_0, de H^∞, de manera que $I \subset \operatorname{Ker} X_0$ Aleshores tindrem $X_0(b) = \alpha$, $X_0(b_1) = a$ i $X_0 \in S_p[H^\infty, \bar{b}]$; però $|\hat{b}_1(X_0)| = |a| = 1$

(4) $\Rightarrow$ (5) Suposem no (5). Aleshores existeix $\varepsilon > 0$ i una successió (z_n) amb $z_n \in G_{1/n}$ (b), però, $z_n \notin G_\varepsilon$ (b_1) ; per tant $(|b(z_n)|) \to 1$, però $(|b_1(z_n)|) \not\to 1$

(5) $\Rightarrow$ (2). Sigui $X_0 \in S_p[H^\infty, \bar{b}]$; pel Teorema de la Corona existirà una red (z_α), de punts de U, convergent a X_0. Volem demostrar $|b_1(X_0)| = 1$ o el que és igual, $\forall \varepsilon > 0$, $1 - |X_0(b_1)| \leq \varepsilon$. Donat $\varepsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ de manera que $G_\delta(b) \subset G_\varepsilon(b_1)$; com que $(z_\alpha) \longrightarrow X_0$, tenim que $(b(z_\alpha)) \longrightarrow X_0(b)$; així puc trobar α_0 de manera que $\forall \alpha > \alpha_0$ $|b(z_\alpha)| > |X_0(b)| - \delta = 1 - \delta$. Aleshores $\forall \alpha > \alpha_0$, $z_\alpha \in {}_\delta$, per tant $|b_1(z_\alpha)| > 1 - \varepsilon$ i passant al límit $|X_0(b_1)| \geqslant 1 - \varepsilon$ c.v.d.

Sigui B una subàlgebra qualsevol de L^∞, que conté H^∞, sigui Z el seu espectre. A partir de la solució del Problema de Douglas, Z es pot caracteritzar com el subconjunt de $\mathcal{M} = S_p(H^\infty)$, format pels caràcters que són de mòdul 1 sobre els productes de Blaschke invertibles a B. Per altre banda, un producte de Blaschke b_1 és invertible a B si i només si b_1 és de mòdul 1 a Z.

Donat un producte de Blaschke b, amb infinits zeros, varem veure a (4.1.) que a $[H^\infty, \bar{b}]$ eren invertibles els divisors de b. Ens preguntem ara "quants productes de Blaschke hi ha invertibles a $[H^\infty, \bar{b}]$"; veurem que no n'hi ha masses.

Sigui E un subconjunt mesurable de T als punts del qual b s'estén continuament. Sigui L^∞_E la subàlgebra de L^∞, de les funcions que la seva transformada de Gelfand és constant a les fibres X_α, per a $\alpha \in$ E. Sabem que $H^\infty + L^\infty_E$ és una àlgebra tancada i que en ella són invertibles els productes de Blaschke continus a E; es compleix el següent:

(5.2.) Proposició

Amb les notacions anteriors es compleix

$$[H^\infty, \bar{b}] \subsetneq H^\infty + L^\infty_E .$$

Demostració.- Amb el que acabem de dir queda clar que $[H^\infty, \bar{b}] \subset H^\infty + L^\infty_E$; anem a veure que la inclusió és estricta. Sigui $\alpha \in T \setminus E$, un punt en que b no és contínua-ment, aleshores $\hat{b}(\mathcal{M}_{\alpha 0}) = \bar{U}$. Per tant existeix $X_0 \in Z =$ $= S_p[H^\infty, \bar{b}]$. Podem trobar una successió (z_n) de punts de U, amb $(z_n) \longrightarrow \alpha_0$ i $(b(z_n)) \longrightarrow X_0(b) = 1$ sigui llavors:

$$I = \{ f \in H^\infty \mid (f(z_n)) \longrightarrow 0 \} .$$

I és un ideal propi de H^∞ i per tant contingut en un ideal maximal Ker X_1. Sigui b_1 el producte de Blaschke que té per zeros (z_n) (que es pot suposar que és una successió de Blaschke). Aleshores $b_1 \in I$, per tant $X_1(b_1) = 0$ i així $X_1 \in Z$, per altre banda $(1-b) \in I$, per tant $X_1(b)=1$. Com que, per construccció, b_1 és continu a $T-\{\alpha_0\}$; tenim que $\bar{b}_1 \in H^\infty + L^\infty_E$, però, $\bar{b}_1 \notin [H^\infty, \bar{b}]$.

(5.3.) Corol.lari

Sigui C_B la C^*-àlgebra generada pels productes de Blaschke invertibles a $B = [H^\infty, \bar{b}]$. Amb les notacions anteriors es compleix $H^\infty \wedge C_B \subsetneq H^\infty_E$.

Demostració.- Immediata a partir de (5.2.)

Anem a generalitzar aquest resultat, pel cas en que B estigui generada per H^∞ i un conjunt numerable de conjugats de productes de Blaschke.

(5.4.) Lema

Sigui $\{b_1, \ldots, b_n \ldots\}$ un conjunt numerable de productes de Blaschke, algun dels quals té un conjunt infinit de zeros. Sigui α un punt de T i $\mathcal{M}_\alpha$ la fibra en el punt α de l'espectre de H^∞. Donat un caràcter $X \in \mathcal{M}_\alpha$, existeix una successió (z_n) de punts de U, amb $(z_n) \longrightarrow \alpha$ i amb $b_i(z_n) \longrightarrow X(b_i)$, $\forall i \in N$.

Demostració.- Considerem l'àlgebra generada per $\{z, b_1, \ldots b_n \ldots\}$, $R = [z, b_1, \ldots b_n, \ldots]$. L'espectre $S_p(R)$ serà metritzable i contindrà a U. Tindrem també que $X_{|R} \in S_p(R)$. Pel Teorema de la Corona, podrem trobar una red (z_r) de punts de U, convergent a X en $\mathcal{M}$; considerant z_r com a caràcters de R, tindrem que $(z_{r|R}) \longrightarrow X_{|R}$. Així doncs tenim que $X_{|R}$ és adherent a U en $S_p(R)$ i com que aquest és metritzable, existirà una successió (z_n), de punts de U, convergent a $X_{|R}$ és a dir, $(z_n) \to \alpha$ i $(b_i(z_n)) \longrightarrow X(b_i)$ per a tot $i = (1, 2, \ldots, n, \ldots)$

(5.5.) Proposició

Sigui $\{b_1, \ldots, b_n, \ldots\}$ un conjunt de productes de Blaschke, algun dels quals té infinits zeros, que s'estenen continuament a un subconjunt E de T; aleshores :

$[H^\infty, b_1, \ldots, b_n, \ldots] \subsetneq H^\infty + L^\infty_E$.

Demostració.- Sigui α_0 un punt de $T \setminus E$ ($E \neq T$ doncs hi ha infinits zeros). Sigui X_0 un caràcter de la fibra α_0 de l'espectre de $[H^\infty, \bar{b}_1, \ldots \bar{b}_n, \ldots]$, Z, de manera que

X_0 $(b_i) = a_i$ $(i=1,2,\ldots,n\ldots)$ amb $|a_i| = 1$ (per exemple un caràcter de L^∞). Per (5.4.) podem trobar una successió (z_n) de U amb $(z_n) \longrightarrow \alpha$ i b_i $(z_n) \longrightarrow \alpha_i$ (n=1,2,....) Sigui $I = \{ f \in H^\infty \mid (f\ (z_n)\ ) \longrightarrow 0 \}$; de la mateixa manera que a (5.2.), existirà un caràcter de H^∞ , X_1, amb $I \subset \operatorname{Ker} X_1$

Sigui b el producte de Blaschke amb zeros (z_n) (que puc suposar que formen una successió de Blaschke), aleshores $b \in I$. Tenim també que $(b_i - a_i) \in I$ $(i=1,2,\ldots)$; per tant X_1 $(b) = 0$ i X_1 $(b_i) = a_i$. Així doncs $X_1 \in Z$ i llavors $\bar{b} \notin [H^\infty, \bar{b}_1, \ldots, b_n, \ldots]$ c.v.d.

<u>(5.6.) Corol.lari</u>

Si $\{ b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots \}$ és un conjunt numerable de productes de Blaschke, algun dels quals té un conjunt infinit de zeros, aleshores, no hi ha cap subconjunt E de T, tal que $[z, b_1, \ldots, b_n \ldots] = H^\infty_E$.

Demostració.- Si $[z, b_1, \ldots b_n, \ldots] = H^\infty_E$ aleshores $\{ b_1, \ldots, b_n, \ldots \}$ s'estenen contínuament a E. Per (4.3.) tindrem $[H^\infty, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n, \ldots] = H^\infty + L^\infty_E$ en contra de (5.5.)

<u>(5.7.) Corol.lari</u>

Si $E \subsetneq T$, aleshores H^∞_E no és separable.

Demostració.- Si H^∞_E fóra separable, existiria un conjunt numerable de funcions de H^∞_E, $\{ f_1, \ldots f_n, \ldots \}$, de manera que $H^\infty_E = [z_1 , f_1 , \ldots, f_n, \ldots]$. Com que H^∞_E està generat per productes de Blaschke (algun dels quals tindrà infinits zeros); podriem aproximar cada f_i per una successió de combinacions finites de productes de Blaschke. En definitiva es podria trobar un conjunt numerable de productes de Blaschke, $\{ b_1, \ldots b_n, \ldots \}$ de manera que $[z, b_1, \ldots, b_n, \ldots] = H^\infty_E$ en contra de (5.6.).

Fixem-nos que per a $E = T$, $H^\infty_E = A$ que sí és separable. Queda demostrat a (5.7.) que per $E = T - \{\alpha\}$ amb α un punt de T, H^∞_E ja no és separable; aquest és el cas " menys favorable" já que al reduir E augmenta H^∞_E. És sabut també que A no és un dual per contenir a l'espai de Banach c_0, de les succesions de límit zero i per ser separable; la demostració per tant no es pot estendre a H^∞_E si $E \neq T$.

Si tenim una àlgebra tancada B, $H^\infty \subset B \subset L^\infty$ i diem $\mathcal{M} = S_p(H^\infty)$, $Z = S_p(B)$, $\mathcal{X} = S_p(L^\infty)$, s'obté $\mathcal{M} \supset Z \supset \mathcal{X}$ i per a cada $\alpha \in T$ les corresponents fibres compleixen: $\mathcal{M}_\alpha \supset Z_\alpha \supset \mathcal{X}_\alpha$; anem a veure què es pot dir en el cas en què $\mathcal{M}_\alpha = Z_\alpha$, ó bé en que $Z_\alpha = \mathcal{X}_\alpha$, per a cert α.

(5.8.) Proposició

Sigui E, un obert de T i $Z_\alpha = \mathcal{X}_\alpha$, per a tot $\alpha \in E$. Si $f \in L^\infty$ i $f_{|T-E} = g_{|T-E}$ amb $g \in B$ aleshores $f \in B$.

Demostració.- Vegem primer aquest resultat per a $\bar{b} \in L^\infty$, amb b un producte de Blaschke. Sigui $\bar{b}_{|T-E} = g_{|T-E}$ amb $g \in B$; ens cal veure que $|b(X)| = 1$ $X \in Z$. Considerem en primer lloc, $X_1(z) = \alpha_1 \in T - E$; si $b_\alpha = \hat{b}_{|\mathcal{X}_\alpha}$ i $\bar{b}_\alpha = \hat{\bar{b}}_{|\mathcal{X}_\alpha}$, tenim que b_α i $\bar{b}_\alpha \in B_\alpha$ i $b_\alpha \cdot \bar{b}_\alpha = 1$, per tant $\bar{b}_\alpha$ és invertible a B_α, així $|X_1(b)| = 1$. Si $X_2(z) = \alpha_2 \in E$, com que $\mathcal{X}_\alpha = Z_\alpha$, obviament $|X_2(b)| = 1$.

Sigui ara $f \in L^\infty$, una funció qualsevol, amb $f|_{T-E} = g|_{T-E}$ per a una $g \in B$. Sabem que f es pot aproximar per combinacions de productes de Blaschke i d'inversos d'aquestes [12] ; aquestes combinacions són de B, pel que acabem de demostrar; aleshores, resulta que f és adherent a B; per tant de B c.v.d.

Ens podem també preguntar una qüestió semblant per el cas en què $Z_\alpha = \mathfrak{M}_\alpha$ per a tot α d'un obert de T, E. Ha de coincidir tota funció $f \in B$ amb una funció $g \in H^\infty + C$ sobre E (Tinguem present que $(S_p(H^\infty + C))_\alpha = \mathfrak{M}_\alpha$ Vegem amb un exemple que no es compleix aquesta propietat.

(5.9.) Exemple

Sigui b un producte de Blaschke, amb zeros (z_n) i $(z_n) \longrightarrow \alpha \in T$. $\bar{b} \in H^\infty + L^\infty_{T-\{\alpha\}}$; si $\bar{b}|_{T-\{\alpha\}} = g|_{T-\{\alpha\}}$ amb $g \in H^\infty + C$, llavors $\bar{b} = g$, quasi per a tot, és a dir $\bar{b} \in H^\infty + C$. Això és absurd, ja que ací només són invertibles els productes de Blaschke finits.

Donada B, $H^\infty \subset B \subset L^\infty$, diguem $\mathfrak{M}^B = S_p(H^\infty \wedge C_B)$ i com sempre $Z = S_p(B)$; el resultat al que volem arribar és que $Z_\alpha = \mathfrak{M}_\alpha$ si i només si $\mathfrak{M}^B_\alpha = \{\delta_\alpha\}$ (on δ_α significa l'avaluació al punt α) i $Z_\alpha = X_\alpha$ sí i només si $\mathfrak{M}^B_\alpha = \mathfrak{M}_\alpha$. Per això necessitarem conèixer quina relació hi ha entre una fibra i les del seu voltant.

Donat $\alpha_0 = e^{i\theta_0} \in T$, siguin :

$E^+ = \{\alpha = e^{i\theta} \in T \mid \theta_0 < \theta < \theta_0 + \pi\}$,

$E^- = \{\alpha = e^{i\theta} \in T \mid \theta_0 - \pi < \theta < \theta_0\}$,

$\mathfrak{M}_{E^+} = \{X \in \mathfrak{M} \mid X(z) \in E^+\}$, anàlogament $\mathfrak{M}_{E^-}$,

$\mathcal{M}_0^+ = \{ X \in \mathcal{M}_{\alpha_0} \mid X$ adherent a $\mathcal{M}_{E^+}\}$, anàlogament $\mathcal{M}_0^+$,
$\mathcal{M}_0^o = \mathcal{M}_{\alpha_0} \setminus (\mathcal{M}_{\alpha_0}^+ \cup \mathcal{M}_{\alpha_0}^-)$.

Sabem de [16] pag.166, que tant $\mathcal{M}_0^+$,com $\mathcal{M}_0^-$ són diferents del buit. Vegem què és el que es pot dir per a $\mathcal{X}=Sp(L^\infty)$

Sigui $\mathcal{X}_{E^+} =\{ X \in \mathcal{X} \mid X(z) \in E^+\}$ i anàlogament X_{E^-} , sigui $\mathcal{X}_{\alpha_0}^+ =\{ X \in \mathcal{X}_{\alpha_0} \mid X$ adherent a $\mathcal{X}_{E^+} \}$ i anàlogament $\mathcal{X}_{\alpha_0}^-$; aleshores es verifica:

(5.10.) Proposició

Amb les notacions anteriors es compleix:

$\mathcal{X}_{\alpha_0} = \mathcal{X}_{\alpha_0}^+ \cup \mathcal{X}_{\alpha_0}^-$, i tots dos subconjunts són diferents del buit.

Demostració.- Siguin ϕ_{E^+} i ϕ_{E^-} les funcions característiques de E^+ i E^- respectivament, es compleix $\phi_{E^+} + \phi_{E^-} = 1$ i $\phi_{E^+} \cdot \phi_{E^-} = 0$. D'aci es dedueix si $X_0 \in \mathcal{X}_{\alpha_0}$; o bé $X_0 (\phi_{E^+}) = 1$ o bé $X_0(\phi_E)= 1$. Suposarem el primer cas i vegem que llavors $X_0 \in \overline{\mathcal{X}}_{E^+}$ (anàlogament si $X_0(\phi_{E^+})=1$). Fem la demostració per reducció a l'absurd. Si $X_0 \notin \overline{\mathcal{X}}_{E^+}$, existirà un entorn que no contindrà cap caràcter de $\mathcal{X}_{E^+}$. Podem considerar aquest entorn del tipus $\{X \mid X(\phi_\theta)=1 \}$, amb ϕ_θ funció característica de $\theta \subset T$; θ mesurable. A més, com que $X_0(\phi_{E^+})=1$, $X_0(\phi_{E^+ \cap \theta})=1$ i per tant substituint θ per $\theta \cap E^+$ puc suposar $\theta \subset E^+$, per altre banda $m(\theta) > 0$, sinó $\phi_\theta = 0$; així existeix $\beta \in \theta$, de manera que $\forall\ \theta_\beta$ entorn de β, $m(\theta_\beta) > 0$ (si no fos així, θ es podria recobrir per un conjunt numerable d'entorns de mesura nul.la, en contra de que $m(\theta) > 0$). Llavors tenim:

$$m((|\phi_{\theta}(z)-1|<\varepsilon)\cap\theta_\beta)>0\ ,\ \forall\theta_\beta \text{ i } \forall\varepsilon\ ;$$

per tant existeix $X\in\chi_\beta$ amb $X(\phi_\theta)=1$, en contra del que suposavem.

Per veure que $\chi^+_{\alpha_0}$ i $\chi^-_{\alpha_0}$ no són buits es pot repetir la demostració de [16] per a $\mathcal{M}^+_{\alpha_0}$ i $\mathcal{M}^-_{\alpha_0}$ c.v.d.

(5.11.) Proposició

Amb les notacions anteriors $\mathcal{M}^+_{\alpha_0}\supsetneq\chi^+_{\alpha 0}$ i $\mathcal{M}^-_{\alpha_0}\supsetneq\chi^-_{\alpha_0}$.

Demostració.- Les inclusions són evidents; vegem que són estrictes.

Sigui (α_n) una succeció de punts de E^+ (anàlogament es faria per E^-) convergent a α_0. Sigui b un producte de Blaschke, de manera que els seus zeros s'acumulin al conjunt $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n,\ldots\}$; aleshores $\forall n$ existeix $X_n\in\mathcal{M}_{\alpha n}$ amb $X_n(b)=0$. El conjunt $\overline{\{X_n : n\in\mathbb{N}\}}$ és un compacte de l'espectre $\mathcal{M}$ de H^∞. Si Π és la projecció de $\mathcal{M}$ a $\bar{U}$, $\Pi(\{X_n : n\in\mathbb{N}\})$ és un compacte de T que conté $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\ldots\}$ i per tant a α_0 . Així doncs, existeix $X_0\in\mathcal{M}_{\alpha 0}$ adherent a $\{X_n : n\in\mathbb{N}\}$ i per tant $X_0(b)=0$; aleshores $X_0\notin\chi_{\alpha 0}$.

(5.12.) Corol.lari

Sigui B una subàlgebra de L^∞, que conté H^∞ i sigui Z el seu espectre. Si per a un punt α de T, $Z_\alpha=\chi_\alpha$, aleshores $H^\infty+L^\infty_E\subsetneq B$, on $E=T-\{\alpha\}$.

Demostració.- Vegem primer que B conté els generadors de $H^\infty+L^\infty_E$. Sigui $\bar{b}$ el conjugat d'un producte de Blaschke b, continu a E; aleshores si $X\in Z\setminus Z_\alpha$, com que b és

continu a $X(z)$, $X(b) = 1$. Si $X \in Z_\alpha$, com que $Z_\alpha = {}_\alpha$
resulta també $\left|X(b)\right| = 1$; així doncs $H^\infty + L^\infty_E \subset B$.

Vegem que la inclusió és estricta. Com que $(S_p(H^\infty + L^\infty_E))_\beta = \mathfrak{M}_\beta$, per a $\beta \neq \alpha$, els punts de $\mathfrak{M}_\alpha$ adherents a $\mathfrak{M}_E$ serán de $S_p(H^\infty + L^\infty_E)$, és a dir ,

$$\mathfrak{M}_\alpha^+ \cup \mathfrak{M}_\alpha^- \subset S_p(H^\infty + L^\infty_E)_\alpha \quad \text{i per tant}$$

$$Z_\alpha = X_\alpha \subsetneq S_p(H^\infty + L^\infty_E)_\alpha \quad \text{c.v.d.}$$

Anem ja a veure les relacions, que haviem enunciat entre l'espectre de B i el de $H^\infty \cap C_B$.

<u>(5.13.) Teorema</u>

Sigui B una subàlgebra de L^∞ que conté H^∞ , sigui $Z = S_p(B)$ i $\mathfrak{M}^B = S_p(H^\infty \cap C_B)$; aleshores es compleix:

a) Per a un punt α de T, $Z_\alpha = \mathfrak{M}_\alpha$ si i només si $\mathfrak{M}^B_\alpha = \{\delta_\alpha\}$ (on δ_α significa l'avaluació a punt α)

b) Si per a un punt α_0 és $Z_{\alpha_0} = X_{\alpha_0}$, aleshores hi ha un entorn $\mathcal{O}$ de α_0, de manera que per a tot α de $\mathcal{O}$ sigui $Z_\alpha = X_\alpha$

c) Per a un punt α de T, $Z_\alpha = X_\alpha$ si i només si $\mathfrak{M}^B_\alpha = \mathfrak{M}_\alpha$

Demostració.- a) Suposem primer que $\mathfrak{M}^B_\alpha = \{\delta_\alpha\}$; aleshores tota funció de $H^\infty \cap C_B$ s'estén contínuament a α En particular, tot producte de Blaschke b, invertible a B, s'estén contínuament a α. Així doncs per a tot $X \in Z_\alpha$ tenim que $|X(b)| = 1$, és a dir, $Z_\alpha = \mathfrak{M}_\alpha$.

Recíprocament: suposem que $Z_\alpha = \mathfrak{M}_\alpha$. En aquest cas tindrem que, per a tot producte de Blaschke b, invertible

a B, es compleix que $|b(X)| = 1$; per a tot $X \in \mathfrak{M}_\alpha = Z_\alpha$.
Aleshores necessàriament b s'estén continuament a α , ja que sinó podriem trobar un caràcter $X_0 \in \mathfrak{M}_\alpha = Z_\alpha$ amb $|X_0(b)| = 0$. Tenim doncs que $\mathfrak{M}^B_\alpha = \{\delta_\alpha\}$.

b) Farem la demostració per reducció a l'absurd. Suposarem que no hi ha cap entorn Θ de α_0 de manera que $Z_\alpha = \chi_\alpha$ per a tot $\alpha \in \Theta$). Aleshores podrem trobar una successió (α_n) , de punts de T convergent a α_0, de manera que $Z_{\alpha n} \neq \chi_{\alpha n}$. Per a cada n, sigui $X_n \in Z_{\alpha n} \setminus \chi_{\alpha n}$ i sigui b_n un producte de Blaschke amb $X_n(b_n) = 0$. Podrem escriure $b_n = c_n . d_n$ amb c_n un producte de Blaschke, amb un nombre finit de zeros i d_n un producte de Blaschke, amb zeros $\{z_{nj} \mid j \in \mathbb{N}\}$ cumplint $\sum_j (1 - |z_n|) < \frac{1}{2^n}$. Sigui ara b, el producte de Blaschke amb zeros $\{z_{nj} \mid (n,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$; aleshores podrem escriure per a cada n, $b = h_n \cdot d_n$, amb h_n també un producte de Blaschke Com que $0 = |X_n(b_n)| = |X_n(c_n)|\ |X_n(d_n)| = |X_n(d_n)|$; resulta que $|X_n(b)| = |X_n(h_n)|\ |X_n(d_n)| = 0$. Tal com varem fer a (5.11.), podem trobar $X_0 \in Z_{\alpha_0}$, amb X_0 adherent a $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, llavors també $X_0(b) = 0$, per tant $X_0 \in Z_{\alpha_0} \setminus X_{\alpha_0}$. c.v.d.

c) Suposem primer que $\mathfrak{M}_\alpha = \mathfrak{M}^B_\alpha$. Sigui $\Pi : \mathfrak{M}_\alpha \longrightarrow \mathfrak{M}^B_\alpha$, la aplicació que consisteix en restringir els caràcters de $H^\infty \cap C_B$ a H^∞. Considerem els següents diagrames:

$$\begin{tikzcd} C_B \arrow[r, hook] & L^\infty \\ H^\infty \cap C_B \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & H^\infty \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{M}_\alpha \arrow[r, "\Pi_\alpha"] \arrow[d, hook] & \mathfrak{M}^B_\alpha \arrow[d, hook] \\ \chi_\alpha \arrow[r, "\Pi_\alpha|\chi_\alpha"] & \chi^B_\alpha \end{tikzcd}$$

Tenim que: Π_α és epijectiva, pel Teorema de la Corona a $H^\infty \cap C_B$, [7]; $\Pi_{\alpha|\mathcal{X}_\alpha}$ és també epijectiva, per ser C_B una C^* - àlgebra i $Z_\alpha = \Pi_\alpha^{-1}(\mathcal{X}_\alpha)$,ja que són els caràcters de $\mathcal{M}_\alpha$ que són de modul 1, per a tot producte de Blaschke de C_B . Si suposem $\mathcal{X}_\alpha \subsetneq Z_\alpha$, existirà $X'' \in \mathcal{M}_\alpha \setminus \mathcal{X}_\alpha$ amb $\Pi_\alpha(X'') = X \in \mathcal{X}_\alpha^B$. Com que també $\Pi_{\alpha|\mathcal{X}_\alpha}$ és epijectiva, existira $X' \in \mathcal{X}_\alpha$ amb $\Pi_\alpha(X') = X$. Així doncs Π_α no pot ser injectiva, és a dir, $\mathcal{M}_\alpha^B \neq \mathcal{M}_\alpha$.

Vegem ara el recíproc: Suposem que en un punt α_0 de T, tenim $\mathcal{X}_{\alpha_0} = Z_{\alpha_0}$. Per (b), podrem trobar un arc Θ, que contingui α_0 , de manera que $\mathcal{X}_\alpha = Z_\alpha$, per a tot $\alpha \in \Theta$. Anem a veure que Π_{α_0} és injectiva, o el que és el mateix, que les funcions de $H^\infty \cap C_B$ separen els caràcters de H^∞ , de la fibra α_0 . Donats dos caràcters X_1 i X_2 de $\mathcal{M}_{\alpha_0}$ sempre hi ha un producte de Blaschke b, que pren sobre ells valors diferents. Es tracte doncs d'aproximar, sobre la fibra α_0, els productes de Blaschke, per funcions de $H^\infty \cap C_B$

Per [27] es pot trobar, donat un producte de Blaschke b, un producte de Blaschke, amb $|b - b_1| < \varepsilon$, en un entorn de α que no talli $T \setminus \Theta$, amb b_1 continu a $T \setminus \Theta$. Així doncs, es pot aproximar b per un producte de Blaschke b_1, que serà invertible a B i per tant de $H^\infty \cap C_B$ c.v.d.

BIBLIOGRAFIA

1. S.Axler. Factorization of L^{∞} functions, Annals of Mathematics, 106 (1977), 567-572

2. L.Carleson. An Interpolation Problem for bounded analytic functions, Amer. J. Math; 80 (1958),921-930

3. L.Carleson. Interpolations by bounded analitic funtions and the Corona Problem, Ann.Math; 76 (1962), 547-559

4. L.Carleson. The Corona Teorem, Proceedings of the 15 th Scandinavian Congress, Oslo 1968. Lecture Notes in Mathematics, Vol.118, Springer-Verlag.

5. J.Cufí. Restricciones de las álgebras H^{∞}_{E}, apareixerà a Collectanea Mathematica.

6. S.Y. Chang. A characterization of Douglas Subalgebras, Acta Math. 137 (1976), 81-89

7. S.Y. Chang and D.Marshall. Some algebras of bounded analytic functions containing the disc algebra,Lecture Notes in Mathematics Vol.604 Springer-Verlag (1976)

8. D.Dawson. Stable subalgebras of H^{∞}, thesis, Indiana University (1975)

9. A Davie. T Gamelin and J. Garnett, Distance estimates and pointwise bounded density, Trans.Amer.Math. Sec. 175 (1973), 37-38

10. J.Detraz. Algebres de fonctions analytiques dans le disque, Ann. Scient. Ec.Norm.Sup.4^{e} Seine t.3,(1970) 313-352

11. R.Douglas. Banach Algebra Techniques in Operator Theory Academic Press, New-York and London (1972)

12. R.Douglas and W.Rudin, Approximation by inner functions, Pacific J.Math. 31 (1969),313-320

13. P.Duren. H^P spaces. Academic Press, New-York, 1970

14. J.Garnett. Interpolating sequences for boundad harmonic functions, Revista de la Unión Matematica Argentina, Vol.25 (197o)

15. A.Heard and J.Wells, An interpolation problem for subalgebras of H^∞ . Pacific J.Math.Vol.28 (1969) 543-553.

16. K. Hoffman. Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1962

17. I.Suciu. Function Algebras, Editura Academics Republicii Socialiste Romania.

18. D.Marshall. Blaschke products generate H^∞ , Bull, Amer. Math.Soc. 82 (1976), 494-496

19. D.Marshall. Subalgebras of L^∞ containing H^∞ , Acta Math. 137 (1976), 91-98

20. D.J. Newman. Interpolation in H^∞ Trans. Amer.Math.Soc. Vol.92 (1959) 501-507

21. W.Rudin. Boundary values of continuons analytic functions, Proc. A.M.S. Vol.7 (1956)

22. D.Sarason. Algebras of functions on the unit circle, Bull. Amer Math. Soc. 79 (1973), 286-299

23. D.Sarason. Functions of vanishing mean oscillation, Trans. Amer. Math. Soc. 207 (1975), 391-405

24. Shapiro and Shields. On some interpolation problems for analytic functions. Amer. Jour Math.Vol.3 (1961) 513-532.

25. D.Stegenga. Sums of invariant subspaces, Pacifics J. of Math. Vol.70 M.2, (1977) -

26. E.Stout. The Theory of Uniform Algebras, Bogden Quigley, Inc.Tarrytown-on Hudson N.Y. (1971)

27. A.Stray. Approximation and interpolation Pac.J.Math- Vol.40 N°2 (1972) 463-473.

28. W.Zelazko. Banach Algebras , Elsevier Publishing Company Amsterdam-London - New-York (1973).

Secció de Matemàtiques ,

Universitat Autònoma de Barcelona.

Bellaterra, Desembre del 1978.