Pub. Mat. UAB
N° 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

SOBRE L'AXIOMATICA DE KEISLER DE L'ANALISI NO-STANDARD

Josep Pla Carrera

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

Abstract:

This work deals with the axiomatic system of KEISLER on the hyperreals numbers. The main result is to prove that the expressions S of type

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \in X \quad R(x_1,\ldots,x_n)$$

give an star -transform *S

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \in {}^*X \quad {}^*R(x_1,\ldots,x_n)$$

and

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \in X \, \exists y \in k \quad R(x_1,\ldots,x_n,y)$$

give an star-transform

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \in {}^*X \, \exists y \in K \quad {}^*R(x_1,\ldots,x_n,y).$$

We use this result to prove that $k=\mathbb{R}$.

L'axiomàtica de Keisler consta de cinc axiomes , que són:

1. k és un cos arquimedià;
2. K és una extensió pròpia de k;
3. Tot element finit de K (i.e. $x \in O_K$) admet una <u>part standard</u> $st(x) \in k$ tal que $x - st(x)$ és un infinitèsim de K (i.e.: $x - st(x) \in o_K$);
4. Tota funció $f: X \subseteq k^n \to k$ admet una <u>extensió natural</u> ${}^*f: Z \subseteq K^n \to K$;
5. Si dos sistemes S_1 i S_2 tenen les mateixes solucions en k, ${}^*S_1$ i ${}^*S_2$ tenen les mateixes solucions en k.

Hom pot veure "Elementary Calculus" i "Foundations of Infinitesimal Calculus" per una millor descripció dels termes.

El nostre objectiu consisteix en veure que, si les expressions del tipus

$$\text{(i)}\ \forall x_1 \in X \ldots \forall x_n \in X \quad R(x_1,\ldots,x_n) \qquad (X \subseteq k);$$
$$\text{(ii)}\ \forall x_1 \in X \ldots \forall x_n \in X \quad \exists y \in k \quad R(x_1,\ldots,x_n,y) \quad (X \subseteq k);$$
$$\text{(iii)}\ \exists x_1 \in X \ldots \exists x_n \in X \quad R(x_1,\ldots,x_n) \qquad (X \subseteq k)$$

són valides llegides en k, aleshores les seves *- transformades són valides en K.

A tàl fi veiem:

a. Per cada $X \subseteq k^n$, existeix l'<u>extensió natural</u> $^*X \subseteq K^n$ (cf.op.cit.) i es compleixen les propietats seguents:

$$X \subseteq Y \quad \text{implica} \quad {}^*X \subseteq {}^*Y;$$

$${}^*(X-Y) = {}^*X - {}^*Y \ ; \quad {}^*(X \cap Y) = {}^*X \cap {}^*Y \ ; \quad {}^*(X \cup Y) = {}^*X \cup {}^*Y \ ;$$

$${}^*k = K; \quad {}^*(X x Y) = {}^*X \ x \ {}^*Y.$$

b. Per cada funció $f: X \subseteq k^n \longrightarrow k$ la seva extensió natural satisfà:

$$* \text{dom } f = \text{dom } * f \quad \text{i} \quad * \text{rang } f = \text{rang } *f.$$

c. Si $X \subseteq k^n$, aleshores $* 1_X = 1_{{}^*X}$.

d. $* \{ x_1, \ldots, x_n \} = \{ x_1, \ldots, x_n \}$ amb $x_1, \ldots, x_n \in k$.

De totes aquestes consideracions el nostre objectiu es immediat . Apliquem el nostre resultat a demsotrar el <u>teorema de valor mig</u> i que $k = \mathbb{R}$.

El teorema del valor mig. Si f és continua en $[a,b]$ i $f(a) < y < f(b)$, $y \in k$, existeix un $a < c < b$ tal que $f(c) = y$.

Per cada $n \in \mathbb{N}$, considerem l'aplicació

$$\theta(n) = \min \{ m < n : f(a+mt) \leq y < f(a + (m+1)t), \ t = \frac{b-a}{n} \}$$

Això significa que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists m \in \mathbb{N} \quad f(a + m \frac{b-a}{n}) \leq y < f(a + (m+1) \frac{b-a}{n})$$

és k-valida i el teorema del valor mig queda demsotrat.

$k = \mathbb{R}$. Suposem que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és una successió de Cauchy de k, Sabem que, per tot $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1 \longrightarrow |a_n - a_{n_1}| < 1$.

Això garanteix que existeix $st(a_H)$ per tot $H \in {}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$. Veure que $L = st(a_H)$, on H designa un natural infinit, és el límit de a_n és trivial.

Es fàcil finalment demostrar que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/U$, on U designa un ultrafiltre no principal de $\mathbb{N}$, constitueix un model de l'axiomàtica de Keisler. Si hom parteix de $\mathbb{Q}$ en lloc de partir de $\mathbb{R}$ obté $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/U$, on U és un ultrafiltre no principal de $\mathbb{N}$. Es demostra que, si O, o designen respectivament, els elements finits, els elements infinitèsims del cos no arquimedià $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/U$, aleshores O/o és el cos complet dels nombres reals; i.e. la successió

$$\theta \longrightarrow o \longrightarrow O \xrightarrow{st} \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

és exacta. La conjectura que plantejem, i que fins ara no hem estat hàbils per a demsotrar, consisteix en saber si el cos $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/U$ és un model de l'axiomàtica de Keisler.

Bibliografia:

KEISLER,H.J. "Elementary Calculus".Pridle ,Weber and Schmidt,Inc.1976.

"Foundations of Infinitesimal Calculus".Idem 1977.

STROYAN,K.D. and LUXEMBURG,W.A.J. "Introduction to the Theory of Infinitesimals". A.P. 1976.