Pub. Mat. UAB
N° 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

TRIPLES ASOCIADOS

J.M. Barja Pérez, J.L. Freire Nistal

Dpto. de Algebra y Fundamentos
Universidad de Santiago de Compostela

Abstract Two triple structures on a functor T, $\mathbb{T}=(T,\eta,\mu)$ y $\mathbb{T}^*=(T,\eta^*,\mu^*)$ are to be called associated, $E(\mathbb{T},\mathbb{T}^*)$, if $\mu\cdot\mu^*T=\mu^*\cdot T\mu$. $E(\mathbb{T},\mathbb{T}^*)$ it is characterized by:existence of the superior degree triple structures, lifts to the respective algebras and Kleisli categories and, in this latter case, the existence of a pair of adjoint functors between them.

Comunicación:

Dos triples $\mathbb{T}=(T,\eta,\mu)$ y $\mathbb{T}^*=(T,\eta^*,\mu^*)$ sobre un mismo funtor T en una categoría K, se llaman asociados $E(\mathbb{T},\mathbb{T}^*)$, si se verifica la ley del"triple producto": $\mu\cdot\mu^*T = \mu^*\cdot T\mu$.

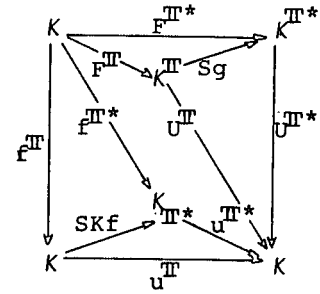
Si $f:T\longrightarrow T$, $g:T\longrightarrow T$ son transformaciones naturales, tales que $f\cdot\eta=\eta^*$, $g\cdot\eta^*=\eta$, y verifican la "ley de naturalidad": $\mu\cdot T\mu\cdot gT^2 = \mu^*\cdot T\mu^*\cdot T^2 f$, entonces $E(\mathbb{T},\mathbb{T}^*)$ y, reciprocamente, $f=\mu\cdot\eta T$ y $g=\mu^*\cdot T\eta$ son dos únicos morfismos de triples que cumplen la ley de naturalidad.

Los triples $\mathbb{T}$ y $\mathbb{T}^*$ se llaman trivialmente asociados si f ó g son isomorfismos. Si $E(\mathbb{T},\mathbb{T}^*)$, entonces f isomorfismo $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow E(\mathbb{T}^*,\mathbb{T})$ $\Leftrightarrow$ g isomorfismo.

También, $E(\mathbb{T},\mathbb{T}^*)$ $\Leftrightarrow$ $(T,T,\eta\eta^*,\mu^*\cdot\mu T)$ es un triple de grado superior $\Leftrightarrow$ $(T,T,\eta\eta^*,\mu\cdot T\mu^*)$ es un triple de grado superior. (Triple de grado superior, de grado 3, en sentido de Maranda |7|).

$E(\mathbb{T},\mathbb{T}^*)$ es equivalente a que la elevación a las categorías de álgebras $Sg:K^{\mathbb{T}}\longrightarrow K^{\mathbb{T}^*}$, verifique:$F^{\mathbb{T}^*}=Sg\cdot F^{\mathbb{T}}$, y asimis-

mo que $SKf: K_{\mathbb{T}} \longrightarrow K_{\mathbb{T}^*}$, elevación a las categorías de álgebras de Kleisli, verifique: $u^{\mathbb{T}} = u^{\mathbb{T}^*} \cdot SKf$.
Se obtiene así el diagrama conmutativo:



Si $\mathbb{T}$ y $\mathbb{T}^*$ son asociados, para los monomorfismos de triples $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}^*$, $g: \mathbb{T}^* \longrightarrow \mathbb{T}$, se cumple que $SKg: K_{\mathbb{T}^*} \longrightarrow K_{\mathbb{T}}$, $SKf: K_{\mathbb{T}} \longrightarrow K_{\mathbb{T}^*}$ son funtores adjuntos, $SKg \dashv SKf$. Reciprocamente, si $\mathbb{T}$ y $\mathbb{T}'$ son triples en K, $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$, $g: \mathbb{T}' \longrightarrow \mathbb{T}$ morfismos de triples tales que $SKg \dashv SKf$, entonces existe un triple $\mathbb{T}^*$ isomorfo a $\mathbb{T}'$, asociado con $\mathbb{T}$.

Si $E(A,B)$ es un álgebra de Kleisli ($|2|$) sobre el conjunto E, entonces $\mathbb{T} = (Ex-, ax-, {}^{\cdot}x-)$, $\mathbb{T}^* = (Ex-, bx-, {}_{*}x-)$ son triples asociados en la categoría de conjuntos; y así, existen triples no trivialmente asociados. Reciprocamente, si $E(\mathbb{T}, \mathbb{T}^*)$, en el conjunto de operaciones unarias de T queda definida una estructura de álgebra de Kleisli.

Para A anillo conmutativo con 1 y $(E, {}^{\cdot}, a, *, b)$ álgebra de Kleisli no trivial en Conjuntos, las álgebras de polinomios $A[E]$ correspondientes a los monoides del álgebra de Kleisli, determinan triples asociados no triviales en al categoría de A-módulos.

El original completo de este trabajo aparecerá publicado en Alxebra 26. Depto. Algebra y Fund. Santiago.

Bibliografía

|1| Barja Pérez, J.M. Teoremas de Morita para triples en categorías cerradas. Alxebra 20 (1979). Dpto. Algebra y Fund. Santiago.

|2| Barja Pérez, J.M.; G-Rodeja F.E. Algebras de Kleisli. (En esta publicación)

|3| Caruncho Castro, J.R. Teoría de Triples. Alxebra 5 (1971) Dpto. Algebra y Fund. Santiago.

|4| Freire Nistal,J.L.Propiedades Universales en triples de grado superior. Alxebra 11 (1972) Dpto. Algebra y Fund. Santiago.

|5| Manes,E.G. Algebraic Theories. Springer (1976).

|6| Maranda, J.M. On fundamental construction and adjoint functors.Bull.Can.Math.V9(1966)581-591.

|7| Maranda,J.M. Constructions fondamentales de dégré supérieur.J.Reine Angew Math.243(1970) 1-16.