Pub. Mat. UAB
N°20 Set. 1980
Actes VII JMHL

EXTENSIONES ESPECIALES EN LA COHOMOLOGIA DE GRUPOS

P. Jara Martínez

Dpto. de Algebra y Fundamentos
Universidad de Granada

ABSTRACT. In this work we define n-fold special extensions and (G,n)-fold special extensions, and we prove that the quotient set are groups for a determined equivalence relations. Also we buil an exact sequence wich contains to these groups and wich is an extension of the 5-term exact sequence of cohomology of groups.

(A M S Subject Classification. 18G99, 20J05).

Dada una sucesión exacta cortaide grupos $N \overset{\tau}{\twoheadrightarrow} G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Q$ y un Q-módulo A existe una sucesión exacta natural en A y en sucesiones exactas cortas $N \overset{\tau}{\twoheadrightarrow} G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Q$

$$H^1(Q,A) \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} H^1(G,A) \overset{\beta}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_G(N_{ab},A) \overset{\delta}{\longrightarrow} H^2(Q,A) \overset{\alpha}{\longrightarrow} H^2(G,A)$$

Definición: Una (G,n)-extensión e special de N por A es una sucesión exacta corta de G-grupos

$$H: \quad A \overset{}{\twoheadrightarrow} H_1 \longrightarrow H_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_{n-1} \longrightarrow H \overset{\phi}{\twoheadrightarrow} N$$

que verifica:

i) N es un subgrupo normal de G ($N \overset{\tau}{\twoheadrightarrow} G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Q$ es exacta cort a)

ii) A, $H_1, \ldots, H_{n-1}$ son Q-módulos.

iii) La acción de N sobre H, cumple $\phi(h).H' = h\,h'\,h^{-1}$

Dos (G,n)-extensiones especiales de N por A H y H' estan relacionadas si existen $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ morfismos de Q-módulos y ψ morfismo de G-grupos haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{lccccccc} H: & A & \rightarrowtail & H_1 & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & H_{n-1} & \longrightarrow & H \twoheadrightarrow N \\ & \| & & \downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_{n-1} & & \downarrow \psi \quad \| \\ H': & A & \rightarrowtail & H'_1 & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & H'_{n-1} & \longrightarrow & H' \twoheadrightarrow N \end{array}$$

Se define $\mathrm{Sext}^n_G(N,A)$ igual al conjunto de clases de equivalencia de (G,n) extensiones especiales, para la relación de equivalencia engendrada por la anterior relación.

Definición: Una n-extensión especial de G por A, siendo A un G-módulo, es una sucesión exacta de E-grupos

$$E: A \rightarrowtail H_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_{n-2} \longrightarrow H \xrightarrow{\phi} E \xrightarrow{\pi} G$$

que verifica:

i) $A, H_1, \ldots, H_{n-2}$ son G-módulos.

ii) La acción de E sobre $A, H_1, \ldots, H_{n-2}$ es la inducida por π.

iii) La acción de E sobre H cumple: $\phi(h).h' = h\,h'\,h^{-1}$.

Dos n-extensiones especiales de G por A E y E' están relacionadas si existen $\psi_1, \ldots, \psi_{n-2}$ morfismos de G-módulos, ψ' morfismo de E-grupos y ψ morfismo de grupos haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{lccccccccc} E: & A & \rightarrowtail & H_1 & \longrightarrow \cdots & H_{n-2} & \longrightarrow & H & \longrightarrow & E \twoheadrightarrow G \\ & \| & & \downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_{n-2} & & \downarrow \psi' & \downarrow \psi & \| \\ E': & A & \rightarrowtail & H'_1 & \longrightarrow \cdots & H'_{n-2} & \longrightarrow & H' & \longrightarrow & E' \twoheadrightarrow G \end{array}$$

Se define $\mathrm{Sext}^n(G,A)$ igual al conjunto de clases de equivalencia de n-extensiones, para la relación de equivalencia generada por la relación anterior.

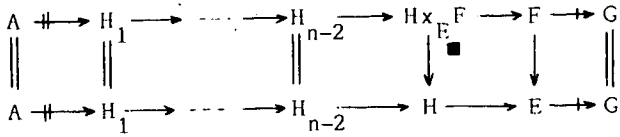
Teorema. 1. Si $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_n \longrightarrow I_{n+1} \longrightarrow \cdots$ (con $I_n \twoheadrightarrow D_n \rightarrowtail I_{n+1}$)

es una resolución inyectiva de G-módulos de A y $R \rightarrowtail F \twoheadrightarrow G$ es una presentación libre del grupo G, entonces en cada clase de n-extensiones especiales de G por A existe un único representante con $H_i = I_i$ para i igual a $1, 2, \ldots, n-2$, y con $E = F$.

Esquema de la demostración. Dado un representante de la clase (E)

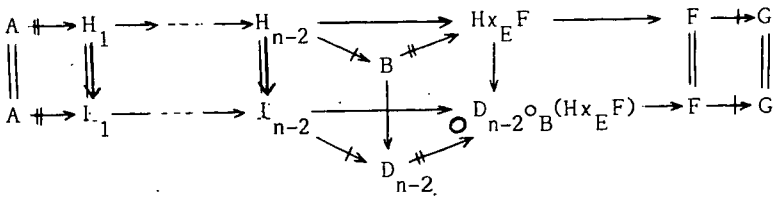
$$E: A \rightarrowtail H_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_{n-2} \longrightarrow H \longrightarrow E \twoheadrightarrow G$$

se considera la construcción siguiente



Hemos realizado el cuadrado cartesiano de los morfismos $F \longrightarrow E$ y $H \longrightarrow E$, la sucesión superior es una sucesión exacta.

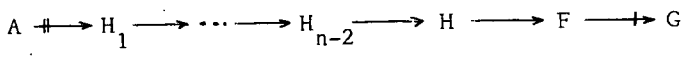
Se construye el diagrama siguiente:



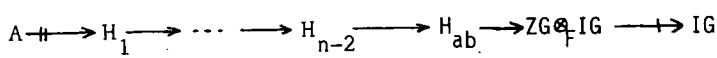
Se obtiene asi una n-extensión especial de G por A, habiendose realizado el cuadrado casi cocartesiano de los morfismos $B \longrightarrow Hx_E F$ y $B \longrightarrow D_{n-2}$ Se demuestra que este elemento es independiente de la elección de los morfismos $F \longrightarrow E$ y $H_i \longrightarrow I_i$ para $i = 1,2, \ldots, n-2$.

Teorema. 2. Existe una biyección natural entre los conjuntos $Sext^n(G,A)$ y $N^{n+1}(G,A)$.

Por esta biyección la imagen de la clase de la n-extensión especial

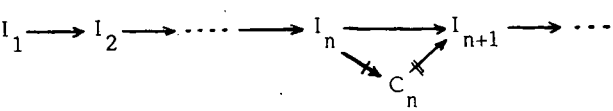


es la clase de



Por tanto en $Sext^n(G,A)$ existe una operación que le da estructura de grupo abeliano.

Teorema. 3. Si



es una resolución injectiva de Q-módulos de A, entonces en cada clase de (G,n)-extensiones especiales de N por A existe un representante con $H_i = I_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Corolario. 4. Existe una biyección natural entre los conjuntos $\mathrm{Sext}^n_G(N,A)$ y $\mathrm{Sext}^1_G(N,C_{n-1})$. Y como $\mathrm{Sext}^1_G(N,C_{n-1})$ es un grupo abeliano, tambien lo es $\mathrm{Sext}^n_G(N,A)$.

Vamos a construir una sucesión exacta que contiene a estos grupos y que es una extensión de la sucesión exacta de cinco términos, vamos a definir los morfismos que la forman, omitiendo las comprobaciones necesarias.

La sucesión exacta es:

$$H^1(Q,A) \overset{\alpha_1}{\twoheadrightarrow} H^1(G,A) \overset{\beta_1}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_G(N_{ab},A) \overset{\delta_1}{\rightarrowtail} H^2(Q,A) \overset{\alpha 2}{\longrightarrow} H^2(G,A)$$
$$\overset{\beta 2}{\longrightarrow} \mathrm{Sext}^1_G(N,A) \overset{\delta 2}{\longrightarrow} H^3(Q,A) \overset{\alpha_3}{\longrightarrow} \ldots\ldots \overset{\alpha n}{\longrightarrow} H^n(G,A) \overset{\beta n}{\longrightarrow}$$
$$\overset{\beta n}{\longrightarrow} \mathrm{Sext}^{n-1}_G(N.A) \overset{\delta n}{\longrightarrow} H^{n+1}(Q,A) \overset{\alpha n+1}{\longrightarrow} H^{n+1}(G,A) \longrightarrow \ldots$$

Se considera $\underline{I}$ una resolución inyectiva de Q-módulos de A

$$\underline{I}: I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow I_n \longrightarrow I_{n+1} \longrightarrow \ldots$$
$$\text{con } I_n \twoheadrightarrow D_n \rightarrowtail I_{n+1}$$

y una resolución inyectiva de G-módulos de A, de forma que cada J_i sea un Q-módulo y la estructura de G-módulo sea la inducida por π.

$$\underline{J}: J_1 \longrightarrow J_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow J_n \longrightarrow J_{n+1} \longrightarrow \ldots$$
$$\text{con } J_n \twoheadrightarrow C_n \rightarrowtail J_{n+1}$$

Se consideran dos morfismos de complejos $\underline{\psi}: \underline{I} \longrightarrow \underline{J}$ y $\underline{\psi}': \underline{J} \longrightarrow \underline{I}$ que levantan la identidad de A. Entonces las dos composiciones son homotópicas a la identidad.

La definición de α es conocida.

Para definir β_i, $i \geq 2$, basta con definir β_2 y utilizar los isomorfismos $H^n(G,A) \cong H^2(G,C_{n-2})$ y $\mathrm{Sext}^{n-1}_G(N.A) \cong \mathrm{Sext}^1_G(N,D_{n-2})$. La imagen de la clase de la sucesión $C_{n-2} \twoheadrightarrow E \twoheadrightarrow G$ por β_2 es $A \twoheadrightarrow \mathrm{Ex}_G N \twoheadrightarrow N$.

Para definir δ_i, $i \geq 2$, basta con definir δ_2 y utilizar isomorfismos análogos a los anteriores. La imagen de la clase de la sucesión $A \twoheadrightarrow H \twoheadrightarrow N$ es la clase de la sucesión $A \twoheadrightarrow H \twoheadrightarrow G \twoheadrightarrow Q$.

BIBLIOGRAFIA

1. GARFINKEL, G. S., WU, Y.-C.. Cohomology and special extensions of groups.

2. JARA, P.. Una nota sobre cuadrados universales de grupos.

3. LODAY, J. L.. Cohomologie et groupe de Steinberg relatifs. J. Algebra, 54, 178-202, (1978).

4. WU, Y.-C.. Some applications of group obstructions.