

LA TRANSFORMACION INTEGRAL FINITA DE HANKEL-CLIFFORD

José Manuel Méndez Pérez

Dpto. de Ecuaciones Funcionales
Universidad de La Laguna

Sumario.- Las autofunciones de ciertos problemas de Sturm-Liouville que se plantean en relación con la ecuación diferencial $xy'' + (v+1)y' + y = 0$, son utilizadas como núcleos para definir nuevas transformaciones integrales finitas.

1. Problemas de Sturm-Liouville para la ecuación $xy'' + (v+1)y' + y = 0$.

La ecuación diferencial ordinaria

$$xy'' + (v+1)y' + \lambda y = 0 \quad (1)$$

se puede escribir en la forma

$$(L+\lambda)\phi = 0 \quad (2)$$

donde L denota el operador $L = \frac{1}{x^v} \frac{d}{dx} (x^{v+1} \frac{d}{dx})$, conforme a la notación de Sneddon ([6]) y Churchill ([1]).

La integral general de (2) es ([4]):

$$\phi(x, \lambda) = A(\lambda) C_v(\lambda x) + B(\lambda) D_v(\lambda x) \quad (3)$$

en la que

$$C_v(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^r}{r! \Gamma(v+r+1)} \quad y$$

$$D_v(x) = \frac{C_v(x) \cos v\pi - x^{-v} C_{-v}(x)}{\sin v\pi}$$

representa, respectivamente, las funciones de Bessel-Clifford de primera y segunda especie de orden v .

Entre los diversos problemas que pueden plantearse para la ecuación (2), destacamos los dos siguientes:

$$(I) (L+\lambda)\phi = 0$$

$$0 \leq x \leq a, \quad Nf = f(a) \quad ([6], p.446(a))$$

Si se consideran las raíces reales positivas de la ecuación:

$$C_v(\lambda a) = 0 \quad (4)$$

de (3) sigue que $B=0$, siendo entonces las autofunciones

$\phi_n(x) = C_v(\lambda_n x)$, a menos de una constante multiplicativa, y $\lambda = \lambda_n$, ceros de (4), los correspondientes autovalores.

Se verifica la relación de ortogonalidad ([4]):

$$\int_0^a x^v C_v(\lambda_n x) C_v(\lambda_m x) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n \\ a^{v+2} \lambda_n C_{v+1}^2(\lambda_n a), & \text{si } m=n \end{cases} \quad (5)$$

$$(II) (L+\lambda)\phi = 0$$

$$0 \leq x \leq a, Nf = f'(a) + hf(a), \quad (h \text{ constante})$$

De (3) se infiere ahora, al tomar $\lambda = \lambda_n$ como ceros positivos de la ecuación:

$$h C_v(\lambda_n a) + \lambda_n C_v'(\lambda_n a) = 0, \quad (6)$$

o bien:

$$h C_v(\lambda_n a) - \lambda_n C_{v+1}(\lambda_n a) = 0$$

que $B=0$, originándose las mismas autofunciones que en el caso anterior, aunque con autovalores $\lambda = \lambda_n$ diferentes.

La condición de ortogonalidad sería:

$$\int_0^a x^v C_v(\lambda_m x) C_v(\lambda_n x) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n \\ \frac{a^{v+1}}{\lambda_n} (a h^2 + \lambda_n^{-v} h) C_v^2(\lambda_n a), & \text{si } m=n \end{cases} \quad (7)$$

2. La transformación integral finita de Hankel-Clifford (H.C) de primera especie.

2.1 El problema (I) induce a definir la transformación finita de (H.C) de primera especie de una función $f(x)$ mediante la expresión

$$\bar{f}_{1,v}(n) = b_{1,v} [f(x); n] = \int_0^a x^v C_v(\lambda_n x) f(x) dx, \quad (8)$$

para $v \geq 0$.

Además, la relación de ortogonalidad (5), previa la oportuna normalización, conduce a la correspondiente fórmula de inversión ([6], pp. 439-443):

$$b_{1,v}^{-1} [\bar{f}_{1,v}(n); x] = f(x) = \frac{1}{a^{v+2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{f}_{1,v}(n) C_v(\lambda_n x)}{\lambda_n C_{v+1}^2(\lambda_n a)} \quad (9)$$

Recíprocamente, y al igual que para otras transformaciones integrales finitas (Fourier, Hankel, Legendre,...), (9) puede ser interpretado como un desarrollo en serie de Bessel-Clifford de la función $f(x)$ considerada, con coeficientes $A_n = \bar{f}_{1,v}(n)$ dados por (8).

2.2 Propiedades

1) En relación con la derivación:

$$b_{1,v}[f^{(r)}(x);n] = (-1)^r \int_0^a x^{v-r} C_{v-r}(\lambda_n x) f(x) dx + \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^{r-k} a^{v-r+k} C_{v-r+k}(\lambda_n a) f^{(k-1)}(a), \quad v > r-1$$

Si $f^{(k-1)}(a) = 0$ ($k=1,2,3,\dots,r-1$), se tiene:

$$b_{1,v}[f^{(r)}(x);n] = (-1)^r \int_0^a x^{v-r} C_{v-r}(\lambda_n x) f(x) dx$$

2) En relación con el operador integral I si $I^k f(a) = 0$ ($k=1,2,\dots,r$):

$$b_{1,v}[I^r f(x);n] = (-1)^r \int_0^a x^{v+r} C_{v+r}(\lambda_n x) f(x) dx.$$

3) De 1) sigue además, si $f(a)=0$ y $v>0$ (o $f(0)=f(a)=0$ y $v \geq 0$), de importancia en determinadas aplicaciones:

$$b_{1,v}[x f''(x) + (v+1) f'(x);n] = -\lambda_n b_{1,v}[f(x);n] \quad (10)$$

2.3 Aplicaciones

1) Ecuaciones del tipo Kepinski-Myller-Lebedev ([8], pp.99)

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (v+1) \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad u = u(x,t) \quad (11)$$

$$u(a,t) = 0, \quad u(x,0) = f(x)$$

Si se pone $\bar{u}(n,t) = b_{1,v}[u(x,t);x \rightarrow n]$ y $\bar{f}_v(n) = b_{1,v}[f(x);n]$

se deduce: $-\lambda_n \bar{u}(n,t) - \mu \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(n,t) = 0$,

de la que resulta la solución:

$$u(x,t) = \frac{1}{a^{v+2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{f}_v(n) C_v(\lambda_n x) e^{-\frac{\lambda_n}{\mu} t}}{\lambda_n C_{v+1}(\lambda_n a)}$$

2) Formas particulares de la ecuación del calor

El tipo de ecuaciones:

$$g(t) \frac{\partial u}{\partial t} - x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} - h(t)u = f(x,t),$$

a constante, $a=v+1$, se transforma mediante la aplicación de (10) en lineales de la forma:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \left[\frac{\lambda_n - h(t)}{g(t)} \right] \bar{u} = \frac{\bar{f}(n,t)}{g(t)}$$

3) Problemas en que comparece el operador de Laplace n-dimensional

Como se sabe, en coordenadas polares, se tiene:

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{du}{dr} = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{(n-2)+1}{r} \frac{du}{dr},$$

no siendo factible su estudio a través de la transformación de Hankel, salvo en el caso $n=2$ ([3], pp.82). Sin embargo, se hace posible en muchos casos su resolución con el uso de la transformación introducida, para todo $n \geq 2$.

3. Transformación integral finita de Hankel-Clifford de segunda especie.

El problema (II) y las condiciones de ortogonalidad (7) permiten introducir, de forma similar al caso anterior, el siguiente paso de fórmulas definidoras de la transformación finita de segunda especie:

$$b_{2,v}[f(x);n] = \bar{f}_{2,v}(n) = \int_0^a x^v C_v(\lambda_n x) f(x) dx \quad (12)$$

$$b_{2,v}^{-1}[\bar{f}_{2,v}(n);x] = f(x) = \frac{1}{a^{v+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n C_v(\lambda_n x) \bar{f}_{2,v}(n)}{(ah^2 + \lambda_n^2 - vh) C_v^2(\lambda_n a)} \quad (13)$$

Obsérvese que la identidad de las (8) y (12) es aparente, toda vez que definen transformaciones diferentes, al ser los autovalores $\lambda = \lambda_n$ respectivamente, soluciones de las ecuaciones distintas (4) y (6).

De igual manera, cabe obtener propiedades y aplicaciones de esta transformación.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R.V. CHURCHILL, "Operational Mathematics" McGraw-Hill, 1.958.
- [2] G. CINELLI, "An extension of the finite Hankel transform and applications" Int. J. Engng., Vol. 3, pp 539-559, 1.965.
- [3] S. COLOMBO, "Les transformations de Mellin et de Hankel" C.N.R.S., Paris, 1.959.
- [4] N. HAYEK, "Estudio de la ecuación diferencial $xy'' + (v+1)y' + y = 0$ y de sus aplicaciones" Collectanea Mathematica, Vol. XVIII, 1966-67.
- [5] ———, "Sobre la transformación de Hankel" Actas de la Octava Reunión Anual de Matemáticos Españoles.
- [6] I.N. SNEDDON, "The use of integral transforms" McGraw-Hill, 1.972.
- [7] SHENG HSIUNG LIN, "Method of generalized finite Hankel transform" Kleine Mitteilungen, 51, 311-313 (1.971).
- [8] G.N. WATSON, "A Treatise on the Theory of Bessel Functions". Cambridge University Press, 1.958.