

EMV CUANDO SE RESTRINGE EL ESPACIO PARAMETRICO, CASO NORMAL

Bonifacio Salvador González

Dpto. de Estadística  
Universidad de Valladolid

Abstract

This paper deals with the problem of the calculation of the maximum likelihood estimate for the parameter  $u=(u_1, \dots, u_p)$  where  $u_i$  is the mean of a normal distribution with unknown variance for every  $1 \leq i \leq p$ , under the assumption that the true value of the parameter belongs to the region of  $R^p$   $k_1 u_1 \leq \dots \leq k_p u_p$  being  $k_i$  a positive real number for every  $1 \leq i \leq p$ .

The problem is reduced to one of regression which is solved; An algorithm to build the solution is also given.

INTRODUCCION

En BARLOW, BARTHOLOMEW, BREMER y BRUNK, (1.972); se resuelve el problema de calcular el EMV para el parámetro  $\theta=(\theta_1, \dots, \theta_p)$  donde  $\theta_i$  es el parámetro desconocido de una distribución de la familia exponencial,  $i=1, \dots, p$ , cuando se sabe que el verdadero valor del parámetro pertenece a una región del espacio paramétrico, definida mediante relaciones de orden entre los parámetros, reduciendo lo al problema de regresión isotónica.

En este trabajo se plantea el problema de calcular el EMV para el parámetro  $u=(u_1, \dots, u_p)$  donde  $u_i$  cuando  $i=1, \dots, p$ , son las medias desconocidas de poblaciones normales con varianzas conocidas, cuando se sabe que el verdadero valor del parámetro, pertenece a una región de  $R^p$  definida por:

$$k_1 u_1 \leq k_2 u_2 \leq \dots \leq k_p u_p$$

donde  $k_i \in R^+$   $i=1, 2, \dots, p$ .

En la primera sección, se reduce el problema a uno de regre

sión y en la segunda, se resuelve este, dando un algoritmo para construir la solución, que consiste en una reducción del algoritmo de Theil and Van of Panne para programación cuadrática.

1.- Sean  $X_1, X_2, \dots, X_p$ ; variables aleatorias independientes con distribución  $N(u_i, \sigma_i^2)$   $i=1, \dots, p$ , respectivamente, donde  $u_i$  son desconocidas y  $\sigma_i^2$  conocidas  $i=1, \dots, p$ .

Se quiere calcular el EMV para el parámetro  $u=(u_1, \dots, u_p)$  cuando se sabe que el verdadero valor del parámetro, pertenece a la región  $\mathcal{R}$  de  $R^p$ , definida por:  $k_i u_i \leq k_{i+1} u_{i+1}$   $i=1, 2, \dots, p-1$  donde  $k_i$   $i=1, \dots, p$ , son números reales positivos dados; para ello se dispone de muestras tomadas de cada población de tamaños  $n_i$   $i=1, \dots, p$  respectivamente. Sean  $\bar{X}_i$   $i=1, \dots, p$  las correspondientes medias muestrales.

### TEOREMA 1.1

El EMV  $u^*=(u_1^*, \dots, u_p^*)$  para  $u=(u_1, \dots, u_p)$  cuando se sabe que  $u \in \mathcal{R}$ , coincide con la solución al problema de:

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^p (\bar{X}_i - u_i)^2 n_i / \sigma_i^2$$

sujeto a las restricciones:

$$k_i u_i \leq k_{i+1} u_{i+1} \quad i=1, \dots, p-1$$

### Demostración

Basta observar que:

$$\begin{aligned} -2 \ln L(X_{11}, \dots, X_{1n_1}, \dots, X_{p1}, \dots, X_{pn_p} / u, \sigma) &= 2 \sum_{i=1}^p -n_i \ln(\sqrt{2\pi} \sigma_i) \\ + \sum_{i=1}^p (\sigma_i^2)^{-1} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 &+ \sum_{i=1}^p (\bar{X}_i - u_i)^2 n_i / \sigma_i^2 \end{aligned}$$

y que los dos primeros sumatorios, no dependen de  $u$ .

### 2.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE REGRESION

Sea  $X = \{1, 2, \dots, p\}$ , dada una aplicación  $w$  de  $X$  en  $R^+$ , dados  $k_i$   $i=1, \dots, p$ , números reales positivos, sea  $H(k_1, \dots, k_p) = \{f : \text{de } X \text{ en } R / k_i f(i) \leq k_{i+1} f(i+1) \ i=1, \dots, p-1\}$ , a partir de ahora escribiremos  $f_i$  en lugar de  $f(i)$ .

El problema consiste en lo siguiente: Dada una aplicación  $g$  de  $X$  en  $R$ , encontrar la función de la clase  $H(k_1, \dots, k_p)$  que minimice en dicha clase la expresión:

$$\sum_{i=1}^p (g_i - f_i)^2 w_i$$

El problema puede plantearse también en la forma:

Minimizar  $\sum_{i=1}^p (g_i - f_i)^2 w_i$ , sujeto a las p-1 restricciones:  
 $k_i f_i \leq k_{i+1} f_{i+1} \quad i=1, \dots, p-1.$

denotaremos por (i) a la i-esima restricci3n  $i=1, \dots, p-1.$

### DEFINICION 2.1

Diremos que la restricci3n (i) es ENTRANTE, cuando la soluci3n al problema, que llamaremos  $g^*$ , la verifique con la igualdad; es decir  $k_i g_i^* = k_{i+1} g_{i+1}^*$

### DEFINICION 2.2

Diremos que la funci3n sobre X "f" es realizable cuando  $f \in H(k_1, \dots, k_p).$

-Representaremos por  $A_0$ , el conjunto de restricciones que no verifica la funci3n "g" dada, esto es:

$$(i) \in A_0 \text{ cuando } k_i g_i > k_{i+1} g_{i+1}$$

-Si A es un conjunto de restricciones, representaremos por  $i_A$  el m3nimo de A y por  $i^A$  el maximo de A.

-Diremos que un conjunto de restricciones A es un bloque cuando:  $\forall j / i_A \leq j \leq i^A \Rightarrow (j) \in A.$

### DEFINICION 2.3

Sea  $A \subset A_0$  un bloque de restricciones; por ARREGLAR las restricciones de A entenderemos obtener la funci3n  $g^A$  que minimize la expresi3n

$$\sum_{i=1}^p (g_i - f_i)^2 w_i$$

sujeto a las restricciones  $k_i f_i = k_{i+1} f_{i+1} \quad \forall (i) \in A.$

### PROPOSICION 2.1

La funci3n  $g^A$  de la definici3n 2.3 verifica:

$$g_j^A = g_j \quad \forall j / (j) \notin A, j \neq i^A + 1$$

$$g_{i_A}^A = \frac{\sum_{i=i_A}^{i^A+1} (k_{i_A} / k_i) g_i w_i}{\sum_{i=i_A}^{i^A+1} (k_{i_A} / k_i)^2 w_i}$$

$$g_j^A = (k_{i_A} / k_i) g_{i_A}^A \quad \forall j / i_A \leq j \leq i^A + 1$$

### Demostraci3n

Es consecuencia inmediata de la definici3n 2.3

Utilizaremos, para resolver el problema, el algoritmo de

Theil and Van of Panne ; BOOT (1.968), basado en la idea de que al menos una de las restricciones de  $A_0$  es entrante. El teorema siguiente nos permite reducir el algoritmo considerablemente, pues nos asegura que todas las restricciones de  $A_0$  son entrantes.

### TEOREMA 2.1

(i)  $\in A_0 \Rightarrow$  (i) ENTRANTE

#### Demostración

Basta con demostrar que  $\forall A$  subconjunto propio de  $A_0$ ; la función  $g^A$  no verifica las restricciones de  $A_0 - A$ , y puesto que todo subconjunto de  $A_0$ , puede descomponerse en unión de bloques disjuntos, basta demostrar lo anterior cuando  $A$  es un bloque; resultado -- que se desprende de la proposición 2.1.

#### Algoritmo 1

Dada  $g$ ; si  $A_0 = \emptyset$  entonces  $g$  es la solución, si  $A_0 \neq \emptyset$  obtenemos  $g^{A_0}$ , si  $g^{A_0} \in H(k_1, \dots, k_p)$  es la solución, en caso contrario sea  $A_1$  el conjunto de restricciones que no verifica  $g^{A_0}$ ; obtenemos entonces  $g^{A_0 \cup A_1}$ . Si  $g^{A_0 \cup A_1}$  es realizable, es la solución, en caso contrario se continua este procedimiento hasta encontrar por primera vez una función realizable, que será la solución.

Los teoremas siguientes prueban que, la función construida mediante el Algoritmo 1 es la solución.

### TEOREMA 2.2

Si  $g^*$  es la función construida mediante el algoritmo 1, verifica:

a)  $G_i^* \leq G_i \quad \forall i=1, \dots, p$

b)  $G_p^* = G_p$

c)  $\forall i / G_i^* < G_i \Rightarrow$  (i) entrante

siendo  $G_i^* = \sum_{j=1}^i (g_j^* / k_j) w_j$  y  $G_i = \sum_{j=1}^i (g_j / k_j) w_j \quad i=1, \dots, p$

### TEOREMA 2.3

Toda función realizable, que verifique las propiedades b) y c) del teorema anterior, es la solución; la solución es única.

Por lo tanto el EMV buscado, coincide con la solución al problema de regresión donde  $g_i = \bar{X}_i$  y  $w_i = (n_i / \sigma_i^2) \quad i=1, \dots, p$ .

### BIBLIOGRAFIA

- (1) BARLOW y otros. Statistical Inference under order restrictions  
Wiley, 1.972
- (2) BOOT J.C.G. Programation quadratique. Dunod 1.968.