Pub. Mat. UAB
Vol. 27 Nº 2 Juny 1983

SOBRE LOS SUBGRUPOS $\mathfrak{F}$-PREFRATTINI DE UN GRUPO FINITO RESOLUBLE

Mª. Pilar Fdez.-Ferreirós Erviti

En la presente nota se consideran los subgrupos $\mathfrak{F}$-prefrattini de un grupo finito resoluble G correspondientes a una formación $\mathfrak{F}$ localmente definida y a los distintos sistemas de Sylow del grupo. Estos subgrupos fueron introducidos y estudiados por Hawkes en [3] donde prueba que, en el caso en que la formación $\mathfrak{F}$ contenga a la formación de los grupos nilpotentes, se cumple que $W^{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}) = W(\mathfrak{S})\, D^{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S})$, siendo $W(\mathfrak{S})$ y $W^{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S})$ los subgrupos prefrattini y $\mathfrak{F}$-prefrattini correspondientes a un mismo sistema de Sylow $\mathfrak{S}$ del grupo y $D^{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S})$ el $\mathfrak{F}$-normalizador de dicho sistema de Sylow.

El objetivo de este trabajo es la obtención de una relación entre un subgrupo $\mathfrak{F}$-prefrattini y el subgrupo prefrattini correspondiente, válida para cualquier formación $\mathfrak{F}$ de grupos finitos resolubles. La relación obtenida permite expresar el subgrupo $\mathfrak{F}$-prefrattini de G relativo a un sistema de Sylow $\mathfrak{S}$ en función del subgrupo prefrattini relativo a $\mathfrak{S}$, de ciertos p-subgrupos de Sylow en $\mathfrak{S}$ y de un $\mathfrak{F}'$-normalizador de $\mathfrak{S}$, siendo $\mathfrak{F}'$ una formación convenientemente elegida. Para ello, se prueba previamente una condición de permutabilidad referente al subgrupo $\mathfrak{F}$-prefrattini relativo a $\mathfrak{S}$ y a cualquier colección de p-subgrupos de Sylow en $\mathfrak{S}$, de donde se deduce además que cada sistema de Sylow se reduce en su correspondiente subgrupo $\mathfrak{F}$-prefrattini.

Todos los grupos considerados son finitos y resolubles.

1.- Resultados preliminares. [3]

Sea G un grupo finito resoluble y $\mathfrak{F}$ una formación de grupos finitos resolubles definida localmente mediante una formación f(p) para cada primo p. Un subgrupo maximal se dice p-maximal si su índice es una potencia del primo p. Un subgrupo p-maximal M de G se dice $\mathfrak{F}$-normal si $M/\mathrm{Core}\, M \in f(p)$, y se dice $\mathfrak{F}$-anormal en caso contrario. Un p-factor principal H/K de G se dice $\mathfrak{F}$-central cuando $G/C_G(H/K) \in f(p)$ y $\mathfrak{F}$-excéntrico en caso contrario.

Sea ahora $\mathfrak{S}$ un sistema de Sylow de G , p un primo fijo divisor del orden de G y S^p el p-complemento de Sylow de G en $\mathfrak{S}$. Sea $\mathcal{M}_p$ el conjunto de todos los subgrupos maximales $\mathfrak{F}$-anormales de G que contienen a S^p; si se considera ahora un subconjunto de $\mathcal{M}_p$ que contiene exactamente un complemento de cada p-factor principal $\mathfrak{F}$-excéntrico complementado de una serie principal dada de G y se denota por M_p la intersección de todos los elementos de este subconjunto, resulta que

$$M_p = \bigcap \left\{ M / \ M \text{ es maximal } \mathfrak{F}\text{-anormal y } M \geq S^p \right\}$$

Se define entonces el subgrupo $\mathfrak{F}$-prefrattini relativo a $\mathfrak{S}$, $W^{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S})$ mediante

$$W^{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}) = \bigcap_{p / |G|} M_p$$

Como propiedades destacables de estos subgrupos, citaremos las siguientes:

a) Al variar $\mathfrak{S}$, los subgrupos $\mathfrak{F}$-prefrattini de G forman una clase característiea conjugada.

b) Un subgrupo $\mathfrak{F}$-prefrattini evita cada factor principal $\mathfrak{F}$-excéntrico complementado de G y cubre el resto de los factores principales.

c) Si $\mathfrak{F}$ contiene a la formación de los grupos nilpotentes y D es el $\mathfrak{F}$-normalizador del sistema $\mathfrak{S}$, se verifica

$$W^{\mathfrak{F}}(\mathfrak{S}) = D W(\mathfrak{S})$$

2.- Propiedades de permutabilidad.

(2.1) Proposición: Sea $\mathfrak{F}$ una formación localmente definida por $\{f(p)\}$ y sea $\mathfrak{F}'$ la formación definida localmente por

$$g(p) = \mathcal{S} \quad \text{si} \quad p \in \pi$$
$$g(p) = f(p) \quad \text{si} \quad p \notin \pi$$

donde $\mathcal{S}$ es la clase de todos los grupos finitos resolubles y π un conjunto de números primos. Entonces,

$$w^{\mathfrak{F}}(\mathcal{G}) \prod_{p\in\pi} S_p = w^{\mathfrak{F}'}(\mathcal{G}) \qquad (S_p \text{ en } \mathcal{G})$$

Demostración:

Por definición de $w^{\mathfrak{F}'}(\mathcal{G})$, es claro que $S_p \leq w^{\mathfrak{F}'}(\mathcal{G})$ para todo $p\in\pi$ puesto que G no posee p-factores principales $\mathfrak{F}'$-excéntricos para todo $p\in\pi$. Además, un p-factor principal con $p\notin\pi$ es $\mathfrak{F}$-excéntrico si y solo si es $\mathfrak{F}'$-excéntrico. Por tanto, $w^{\mathfrak{F}}(\mathcal{G}) \leq w^{\mathfrak{F}'}(\mathcal{G})$.

Resulta así que

$$\langle w^{\mathfrak{F}}(\mathcal{G}), \prod_{p\in\pi} S_p \rangle \leq w^{\mathfrak{F}'}(\mathcal{G}) .$$

Vamos a comparar ahora el número de elementos del conjunto $w^{\mathfrak{F}}(\mathcal{G}) \prod_{p\in\pi} S_p$ con el orden de $w^{\mathfrak{F}'}(\mathcal{G})$:

El orden de $w^{\mathfrak{F}'}(\mathcal{G})$ es el producto de los órdenes de todos los factores principales $\mathfrak{F}'$-centrales y de todos los $\mathfrak{F}'$-excéntricos no complementados.

Por otra parte,

$$\left| w^{\mathfrak{F}}(\mathcal{G}) \prod_{p\in\pi} S_p \right| = \frac{\left| w^{\mathfrak{F}}(\mathcal{G})\right| \left| \prod_{p\in\pi} S_p \right|}{\left| w^{\mathfrak{F}}(\mathcal{G}) \cap (\prod_{p\in\pi} S_p) \right|} \qquad (1)$$

y, como $w^{\mathfrak{F}}(\mathcal{G}) \cap (\prod_{p\in\pi} S_p)$ evita todos los q-factores ($q\notin\pi$) y todos los factores $\mathfrak{F}$-excéntricos complementados, su orden es a lo sumo, el producto de los órdenes de los factores principales que no evita, es decir, el producto de los órdenes de los p-factores ($p \in \pi$) que son, bien $\mathfrak{F}$-centrales o bien $\mathfrak{F}$-excéntricos no complementados.

Resulta entonces, que el número de elementos del conjunto $W^{\mathfrak{F}}(G)\prod_{p \in \pi} S_p$ es, al menos, el producto de los órdenes de los factores $\mathfrak{F}'$-centrales y de los factores $\mathfrak{F}'$-excéntricos no complementados, es decir, el orden de $W^{\mathfrak{F}'}(G)$. Para comprobar esto, basta tener en cuenta que el producto que aparece en el numerador en (1), es el producto de los órdenes de los factores $\mathfrak{F}$-centrales, de los $\mathfrak{F}$-excéntricos no complementados y de los p-factores con $p \in \pi$, y dicho producto coincide con el producto de los órdenes de los factores $\mathfrak{F}'$-centrales y de los $\mathfrak{F}'$-excéntricos no complementados.

Se tiene así que

$$W^{\mathfrak{F}}(G)\prod_{p \in \pi} S_p = W^{\mathfrak{F}'}(G)$$

y $W^{\mathfrak{F}}(G)\prod_{p \in \pi} S_p$ es subgrupo de G.

(2.2) Consecuencias:

a) $W^{\mathfrak{F}}(G)S_p = S_p W^{\mathfrak{F}}(G)$ para todo S_p en G. Con esto, y el resultado de Gillam dado en ([2], teorema 3.2), puede ser caracterizado un subgrupo $\mathfrak{F}$-prefrattini mediante su propiedad cubre-evita y la condición anterior.

b) Todo sistema de Sylow se reduce en su correspondiente subgrupo $\mathfrak{F}$-prefrattini.

Demostración:

De la proposición anterior se deduce que $W^{\mathfrak{F}}(G)\, S_p = W^{\mathfrak{F}'}(G)$ siendo $\mathfrak{F}'$ la formación definida por $\begin{cases} g(p) = \mathfrak{I} \\ g(q) = f(q) \\ \quad q \neq p \end{cases}$

Como el orden de $W^{\mathfrak{F}'}(G)$ es el producto de los órdenes de los factores $\mathfrak{F}'$-centrales y de los $\mathfrak{F}'$-excéntricos no complementados, se tiene que

$$|W^{\mathfrak{F}}(G)\cap S_p| = \frac{|W^{\mathfrak{F}}(G)|\,|S_p|}{|W^{\mathfrak{F}'}(G)|}$$

y este último es el producto de los órdenes de los p-factores $\mathfrak{F}$-centrales y de los p-factores $\mathfrak{F}$-excéntricos no complementados. Entonces,

$$|W^{\mathfrak{F}}(G) : W^{\mathfrak{F}}(G)\cap S_p| = \frac{|W^{\mathfrak{F}'}(G)|}{|S_p|} \quad \text{es primo con } p .$$

Resulta así que $W^{\mathfrak{F}}(G)\cap S_p$ es un p-subgrupo de Sylow de $W^{\mathfrak{F}}(G)$ que tiene la propiedad de evitar todos los q-factores ($q\neq p$) y todos los p-factores $\mathfrak{F}$-excéntricos complementados y de cubrir el resto de los factores de cualquier serie principal de G .

3.- Determinación de $W^{\mathfrak{F}}(G)$ en función de $W\;(G)$:

Como ya se ha mencionado en la introducción, este problema está resuelto en el caso en que $\mathfrak{F}$ contiene a la formación de los grupos nilpotentes, es decir, cuando $f(p) \neq \emptyset$ para todo primo p .

En lo que sigue, $\mathfrak{F}$ será una formación definida localmente mediante

$f(p) = \emptyset$ para todo primo p de un conjunto de primos π .

$f(p) \neq \emptyset$ si $p \notin \pi$.

Antes de probar el resultado que hemos citado en la introducción, enunciaremos el siguiente

(3.1) Lema: $W\;(G)\prod_{p\in\pi} S_p$ es subgrupo de G , para cualquier colección de p-subgrupos de Sylow de G en G , y coincide con $W^{\mathfrak{F}'}(G)$ siendo $\mathfrak{F}'$ la formación dada por

$$g(p) = \mathfrak{S} \qquad (p \in \pi)$$
$$g(p) = \emptyset \qquad (p \notin \pi)$$

Demostración:

Es inmediata sin más que aplicar la proposición (2.1) al caso en que $\mathfrak{F}$ venga dada por $f(p) = \emptyset$ para todo primo p .

<u>**(3.2) Proposición**</u>: Si $\mathfrak{F}'$ es la formación definida por $g(p) = \mathfrak{S}$ cuando $p \in \pi$ y $g(p) = f(p)$ si $p \notin \pi$, se tiene:

$$W^{\mathfrak{F}}(\mathcal{G}) = W(\mathcal{G}) D^{\mathfrak{F}'}(\mathcal{G}) \cap W(\mathcal{G}) \prod_{p \notin \pi} S_p$$

siendo $\mathfrak{F}$ la formación definida al comienzo de este párrafo.

<u>Demostración</u>:

Ya que cada factor $\mathfrak{F}'$-excéntrico es $\mathfrak{F}$-excéntrico y es un p-factor con $p \notin \pi$, se tiene que $W^{\mathfrak{F}}(\mathcal{G}) \leq W^{\mathfrak{F}'}(\mathcal{G})$.

Por otra parte, $W^{\mathfrak{F}}(\mathcal{G}) \leq W(\mathcal{G}) \prod_{p \notin \pi} S_p$, pues éste último es, por el lema anterior, el subgrupo prefrattini relativo a la formación dada por

$$\begin{cases} h(p) = \mathfrak{S} & (p \notin \pi) \\ h(p) = \emptyset & (p \in \pi) \end{cases}$$

Entonces,

$$W^{\mathfrak{F}}(\mathcal{G}) \leq W^{\mathfrak{F}'}(\mathcal{G}) \cap W(\mathcal{G}) \prod_{p \notin \pi} S_p .$$

Comparando ahora los órdenes de ambos subgrupos por el procedimiento utilizado anteriormente, se tiene la igualdad:

En efecto, resulta que el orden de $W^{\mathfrak{F}'}(\mathcal{G}) \cap W(\mathcal{G}) \prod_{p \notin \pi} S_p$ es, a lo sumo, el producto de los órdenes de los factores principales siguientes:

p-factores no complementados con $p \in \pi$

$\mathfrak{F}$-centrales y $\mathfrak{F}$-excéntricos no complementados con $p \notin \pi$

y este producto coincide con el producto de los órdenes de los $\mathfrak{F}$-excéntricos no complementados y de los $\mathfrak{F}$-centrales, es decir, con el orden de $W^{\mathfrak{F}}(\mathcal{G})$.

BIBLIOGRAFIA:

[1] Gaschütz, W. "Praefrattinigruppen". Arch. Math. 13 (1962) 418-426.

[2] Gillam, J.D. "Cover-avoid subgroups in finite solvable groups". J. Algebra 29 (1974), 324-329.

[3] Hawkes, T. "Analogues of prefrattini subgroups". Proc. Inter. Conf. Theory of Groups. (Canberra, 1965), 145-150. Gordon and Breach, New York, 1967.

Rebut el 8 d'agost del 1983

Mª. Pilar Fdez.-Ferreirós Erviti
Departamento de Geometria y Topologia
Facultad de Ciencias
Universidad de Santander
SANTANDER
ESPAÑA