

ESTUDI D'UN PUNT D'ATUR SOBRE $N \times N$

M. Farré

Definirem un punt d'atur que pren valors sobre $N \times N$ i generalitza el temps d'arribada a un cert nivell del passeig aleatori ordinari.

L'objectiu d'aquest treball és demostrar que aquest punt d'atur és finit amb probabilitat 1.

0. NOTACIO, DEFINICIONS I PROPIETATS PREVIES

Sigui $\{N = 0, 1, 2, \dots\}$ el conjunt dels nombres naturals.

En $N \times N$ tindrem l'ordre natural, $\leq$, definit coordenada a coordenada.

Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espai de probabilitat. Considerem una família creixent de sub- σ -àlgebres de $\mathcal{F}$, $(\mathcal{F}_t, t \in N \times N)$. Direm que una variable aleatòria T , definida en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i a valors en $(N \times N) \cup \{\infty\}$, és un punt d'atur relativament a la família $(\mathcal{F}_t, t \in N \times N)$ si i **només** si per a tot $t \in N \times N$ el conjunt $\{T \leq t\}$ és de $\mathcal{F}_t$.

Si T és un punt d'atur es defineix:

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in N \times N\}$$

que és una sub- σ -àlgebra de $\mathcal{F}$.

Es fàcil veure que T és un punt d'atur relativament a $(\mathcal{F}_t)$ si i **només** si $\{T = t\}$ és de $\mathcal{F}_t$, per a tot $t \in N \times N$.

Si $T_1 \leq T_2$ són dos punts d'atur, aleshores $\mathcal{F}_{T_1} \subseteq \mathcal{F}_{T_2}$.

Donat $(X_t, t \in N \times N)$ un procés adaptat a la família $(\mathcal{F}_t)$ i T un punt d'atur a valors en $N \times N$, la funció X_T , definida per $(X_T)(\omega) = (X_{T(\omega)})(\omega)$, és una variable aleatòria $\mathcal{F}_T$ -mesurable.

1. CONSTRUCCIO DEL PUNT D'ATUR T

Considerem una família de v.a. independents i idènticament distribuïdes $\{X_{ij}, (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ [Nota: Quan no quedin clares les coordenades del punt indicador escriurem $X_{i,j}$]. Els imposarem que siguin de quadrat integrable i posarem $\sigma^2 = \text{Var}(X_{ij})$ i $\mu = E(X_{ij})$.

Designarem per

$$\{S_{ij}\} = \left\{ \sum_{\substack{k \leq i \\ h \leq j}} X_{kh} \right\}$$

la família de sumes parcials.

$(F_{ij}, (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ serà la família creixent de sub- σ -àlgebres associada a la família de variables X_{ij} de manera natural. Es a dir, F_{ij} és la σ -àlgebra generada per les variables $\{X_{kh}, k \leq i, h \leq j\}$.

En aquestes condicions, i recursivament, construïm la següent successió de v.a. que prenen valors en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(r_0, t_0) = (0, 0), \quad i. per \quad n \geq 0$$

$$(r_{n+1}, t_{n+1}) = (r_n + I_{\{X_{r_n t_n} \in B\}}, t_n + I_{\{X_{r_n t_n} \in B^c\}}),$$

on B és un borelià de $\mathbb{R}$ tal que

$$P(\{X_{ij} \in B\}) = p > 0 \quad i \quad P(\{X_{ij} \in B^c\}) = q > 0,$$

per a tot parell (i, j) .

Es fàcil comprovar, per inducció, que, per a tot $n \geq 0$, (r_n, t_n) és un punt d'atur sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Notem que, en suposar (r_n, t_n) punt d'atur, ja té sentit considerar la v.a. $X_{r_n t_n}$ que intervé en la definició de (r_{n+1}, t_{n+1}) .

La successió $\{(r_n, t_n), n \geq 0\}$ és una trajectòria aleatòria que surt de l'origen de coordenades i , per a tot $n \geq 0$, (r_n, t_n) és un punt de la recta $x+y=n$. En cada pas es decideix el camí segons una variable

aleatòria de Bernouilli de paràmetre p .

1.1. Proposició

Les variables aleatòries $(X_{r_n t_n})$ són independents i idènticament distribuïdes amb la mateixa llei que les (X_{ij}) .

Demostració: Per a tot borelià C , i per a tot $n \geq 0$ tindrem

$$P[X_{r_{n+1} t_{n+1}} \in C / F_{r_n t_n}] = \sum_{i=0}^n (P[r_n = i, X_{i, n-i} \in B, X_{i+1, n-i} \in C / F_{r_n t_n}] + \\ + P[r_n = i, X_{i, n-i} \in B^C, X_{i, n-i+1} \in C / F_{r_n t_n}]) = P\{X_{00} \in C\};$$

ja que, per cada i , les σ -àlgebres $F_{r_n t_n}$ i $F_{i, n-i}$ tenen la mateixa traça sobre el conjunt $\{r_n = i\}$. ■

Aquest resultat es pot obtenir també com a conseqüència d'un teorema degut a Krengel i Sucheston ([1], p.211, teorema 3.1) formulat utilitzant el concepte de tàctica. Més precisament, la família de parts de F , $\{H_{st}, s, t \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, s \leq t\}$ definida per $H_{s, s+(1,0)} = \{X_s \in B\}$, $H_{s, s+(0,1)} = \{X_s \in B^C\}$, $H_{st} = \emptyset$ altrament, és una tàctica en el sentit de Krengel i Sucheston.

Sigui $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$. Definim:

$$v = \inf\{n \geq 0 : |S_{r_n t_n}| > a, (v = \infty \text{ si el conjunt és buit}).$$

Diem $T = (r_v, t_v)$ si $v \neq \infty$, i $T = \infty$ si $v = \infty$.

1.2. Proposició.

T és un punt d'atur a valors en $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup \{\infty\}$.

Demostració: Per tot $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ anomenarem r una aplicació injectiva i creixent de $\{0, 1, \dots, m+n\}$ dins $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cap [(0, 0), (m, n)]$. El nombre d'aplicacions injectives distintes és $(m+n)!/m!n!$.

Podem escriure:

$$\{T=(m,n)\} = \bigcup_r \{ \{ |S_{mn}| > a \} \cap \{ (r_i, t_i) = r(i), i=0, \dots, m+n \} \cap \{ \bigcap_{i=0}^{m+n-1} \{ |S_{r(i)}| \leq a \} \} \}$$

que ens dóna el conjunt $T=(m,n)$ com a unions i interseccions finites d'elements de F_{mn} . ■

T és el primer punt en què el valor absolut de les sumes parcials S_{ij} arriba a un cert nivell a , en considerar aquestes sumes en els punts de la successió creixent $\{(r_n, t_n), n \geq 0\}$.

2. TEOREMA: T ES QUASI SEGURAMENT FINIT

El següent resultat ens demostra que el punt d'atur T és finit amb probabilitat 1, tal com podem esperar degut a l'analogia que guarda amb el passeig aleatori ordinari.

2.1. Teorema

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{v > n\}) = 0$$

Demostració: Distingirem dos casos A) $\mu=0$; B) $|\mu| > 0$.

A) $\mu=0$.

Fixem $\delta > 1$, $\delta \in \mathbb{R}$, i considerem les corbes del pla:

$$x = y^\delta \quad \text{i} \quad y = x^\delta.$$

Cada punt aleatori (r_n, t_n) , per n prou gran, pot trobar-se entre les dues corbes o entre una d'elles i l'eix. Fent disjunció de casos i majorant s'obté:

$$P(v > n) \leq P(r_n > t_n^\delta) + P(t_n > r_n^\delta) + P(\{t_n^{1/\delta} \leq r_n \leq t_n^\delta\} \cap \{v > n\}). \quad (1)$$

Degut a la simetria entre els dos primers sumands de (1) serà suficient veure que

$$P(\{t_n^{1/\delta} \leq r_n \leq t_n^\delta\} \cap \{v > n\}) \rightarrow 0, \quad \text{i que} \quad P(r_n > t_n^\delta) \rightarrow 0.$$

Escrivim:

$$P(r_n > t_n^\delta) = P(n > t_n + t_n^\delta) = P(1 > (t_n/n) + (t_n/n)^\delta n^{\delta-1}). \quad (2)$$

Donat que

$$t_n = \sum_{i=0}^n (I_{\{X_{r_i t_i} \in B^c\}});$$

tenint en compte la proposició 1.1 i per la Llei Forta dels Grans Nombres es té que $(t_n/n) \rightarrow q$ (q.s.), aplicant-ho a (2) s'obté

$$P\{r_n > t_n^\delta\} \rightarrow 0.$$

Ens queda per comprovar que $P(A_n) \rightarrow 0$, on

$$A_n = \{\nu > n\} \cap \{t_n^{1/\delta} \leq r_n \leq t_n^\delta\}.$$

Direm $K_n = \{k = (0, k_1, k_2, \dots, k_n) : k_{i+1} - k_i = 0 \text{ o } 1\}$, aleshores

$$\begin{aligned} P(A_n) &= \sum_{k \in K_n} P[A_n \cap \{|S_{r_n t_n}| \leq a\} \cap \{r_0=0, r_1=k_1, \dots, r_n=k_n\}] = \\ &= \sum_{k \in K_n} P[A_n \cap \{|S_{k_n, n-k_n}| \leq a\} \cap G_k], \end{aligned}$$

on $G_k = \{r_0=0, \dots, r_n = k_n\}$.

Si considerem la següent descomposició de α : per $\alpha > 0$

$$\alpha = \{ \sum_{i=0}^n X_{k_i, i-k_i} \leq n^{\frac{1}{2}+\alpha} \} \cup \{ \sum_{i=0}^n X_{k_i, i-k_i} > n^{\frac{1}{2}+\alpha} \} \quad (3)$$

i diem:

$$S'_{k_n, n-k_n} = S_{k_n, n-k_n} - \sum_{i=0}^n X_{k_i, i-k_i} ;$$

això ens permet escriure

$$\begin{aligned} P(A_n) &\leq \sum_{k \in K_n} P[A_n \cap G_k \cap \{|S'_{k_n, n-k_n}| \leq a + n^{\frac{1}{2}+\alpha}\} \cap \{ \sum_{i=0}^n X_{k_i, i-k_i} \leq n^{\frac{1}{2}+\alpha} \}] + \\ &+ \sum_{k \in K_n} P[A_n \cap G_k \cap \{|S_{k_n, n-k_n}| \leq a\} \cap \{ \sum_{i=0}^n X_{k_i, i-k_i} > n^{\frac{1}{2}+\alpha} \}] \quad (4) \end{aligned}$$

Pel segon sumatori, que notarem $\sum_2^n$, fem l'afitació:

$$\sum_2^n \leq \sum_{k \in K_n} P[G_k \cap \{ \sum_{i=0}^n X_{k_i, i-k_i} > n^{\frac{1}{2}+\alpha} \}] \leq$$

$$\leq (1/(n^{1+2\alpha})) \cdot \sum_{k \in K_n} \int_{G_k} \left| \sum_{i=0}^n x_{k_i, i-k_i} \right|^2 dP = (1/(n^{1+2\alpha})) (n+1) \sigma^2, \quad (5)$$

deguda al fet que les v.a. (X_{ij}) són i.i.d., centrades, amb variància σ^2 , i que els G_k són dos a dos disjunts i recobreixen Ω .

L'afitació (5) demostra que el sumatori, $\sum_2^n$, convergeix cap a zero quan n tendeix a infinit.

El primer sumatori, $\sum_1^n$, el majorem de la següent manera:

$$\sum_1^n \leq \sum_{k \in K_n} P[\{|S'_{k_n, n-k_n}| \leq a+n^{\frac{1}{2}+\alpha}\} \cap G_k \cap \{t_n^{1/\delta} \leq r_n \leq t_n^\delta\}]. \quad (6)$$

Si indiquem per β_k^n el nombre de variables aleatòries que sumem dins $S'_{k_n, n-k_n}$, és fàcil comprovar que fixat n , i quan ens mantenim dins la regió $\{t_n^{1/\delta} \leq r_n \leq t_n^\delta\}$, aquest nombre està comprès (uniformement respecte k) entre els següents límits:

$$(n/2)^{(1/\delta)+1} \leq \beta_k^n \leq (n/2)^2; \quad (7)$$

de manera que per a tot $\epsilon > 0$ es pot trobar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$ es compleixi:

$$(a+n^{\frac{1}{2}+\alpha})/\sqrt{\beta_k^n} < \epsilon, \quad \text{sempre que } 1/(2^\delta) > \alpha > 0.$$

Per tant, per a tot $n \geq n_0$, i per α i δ que satisfacin l'anterior relació, es compleix:

$$\sum_1^n \leq \sum_{k \in K_n} P[\{|S'_{k_n, n-k_n}|/\sqrt{\beta_k^n}\} < \epsilon] \cdot P(G_k), \quad (8)$$

ja que les variables que sumen dins $S'_{k_n, n-k_n}$ són independents de les variables aleatòries que determinen el conjunt G_k .

Fixat $\epsilon' > 0$, el Teorema Central del Límit ens diu que existeix un

n_1 tal que per tot $n \geq n_1$ i per tot conjunt $U_n \in N^2$ de Card. = n ,

$$P\left\{\left|\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{(i,j) \in U_n} x_{ij}\right| < \epsilon\right\} \leq \Phi(\epsilon) - \Phi(-\epsilon) + \epsilon',$$

on Φ representa la funció de distribució d'una llei $N(0, \sigma^2)$.

Degut a l'afitació uniforme respecte k donada per (7) tindrem: per a tot $n \geq m_0 = \text{Max}(n_0, 2\lceil [n_1^{(1/8+1)^{-1}}] + 1 \rceil)$ es compleix:

$$P\left\{\left|S'_{k,n-k_n}\right| / \sqrt{B_k} < \epsilon\right\} \leq \Phi(\epsilon) - \Phi(-\epsilon) + \epsilon'.$$

En conseqüència,

$$\sum_1^n \leq \Phi(\epsilon) - \Phi(-\epsilon) + \epsilon', \text{ per a tot } n \geq m_0.$$

Com ϵ i ϵ' són arbitraris, queda demostrada la convergència cap a zero de $\sum_1^n$, i per tant de $P(A_n)$.

B) $|\mu| > 0$.

L'esquema general de la demostració és anàleg al del cas $\mu=0$. No obstant cal precisar certs detalls que hem de tractar de manera diferent.

La partició donada per (3) no és ara adequada, ja que a (5) obtindriem, per $|\mu| > 0$:

$$(1/(n^{1+2\alpha}))((n+1)\sigma^2 + n(n+1)\mu^2)$$

que no convergeix cap a 0. Considerem la següent partició:

$$\Omega = \left\{ \left| \sum_{i=0}^n x_{k_i, i-k_i} \right| \leq n^{1+\lambda/2} \right\} \cup \left\{ \left| \sum_{i=0}^n x_{k_i, i-k_i} \right| > n^{1+\lambda/2} \right\}, \quad \lambda > 0.$$

També obtindrem la separació de $P(A_n)$ en dos sumatoris:

$$P(A_n) = \sum_1^n + \sum_2^n.$$

i la convergència cap a zero del segon, $\sum_2^n$, es demostra utilitzant els mateixos arguments que en l'apartat A). No és així pel primer sumatori:

$$\sum_1^n \leq \sum_{k \in K_n} P\{|S'_{k_n, n-k_n}| \leq a+n^{1+\lambda/2}\} \cap G_k \cap \{t_n^{\lambda\delta} \leq r_n \leq t_n^\delta\},$$

que estudiarem considerant el conjunt

$$\{|S'_{k_n, n-k_n}| / (\beta_k^n)^d \leq (a+n^{1+\lambda/2}) / (\beta_k^n)^d\},$$

on $d < 1$ ha de ser tal que

$$d > ((2+\lambda)\delta / 2(1+\delta)), \quad \delta > 1, \lambda > 0.$$

Amb la condició anterior, i per l'afitació uniforme (7):

$$\lim_n [(a+n^{1+\lambda/2}) / (\beta_k^n)^d] = 0.$$

Aleshores, per a tot $\epsilon > 0$, i per n més gran o igual que un cert n_0 obtenim:

$$\begin{aligned} \sum_1^n &\leq \sum_{k \in K_n} [P\{|S'_{k_n, n-k_n}| / (\beta_k^n)^d < \epsilon\} \cdot P(G_k)] = \\ &= \sum_{k \in K_n} [P\{|S'_{k_n, n-k_n}| / \beta_k^n < \epsilon (\beta_k^n)^{d-1}\} \cdot P(G_k)] \leq \\ &\leq \sum_{k \in K_n} [P\{|S'_{k_n, n-k_n}| / \beta_k^n < \epsilon (2/n)^{(1-d)(\delta+1)/\delta}\} \cdot P(G_k)]; \end{aligned} \quad (9)$$

aquí hem aplicat altre cop l'afitació uniforme (7) i els arguments d'independència de les S'_{ij} respecte els G_k que ja utilitzàrem pel cas μ nul·la.

Per la Llei Feble dels Grans Nombres sabem que: $\forall \epsilon' > 0, \forall \gamma > 0$,
 $\exists m_0$ tal que $\forall m \geq m_0$ i per a tot conjunt $U_m \subset N \times N$ de cardinal m

$$P\{|\mu| - \epsilon' \leq (1/m) \cdot \left| \sum_{(i,j) \in U_m} X_{ij} \right| \leq |\mu| + \epsilon'\} \geq 1 - \gamma.$$

Si prenem $n \geq 2(\lfloor m_0^{(1/\delta + 1)^{-1}} \rfloor + 1) = n_1$, es satisfà que $\beta_k^n \geq m_0$,
 per tant

$$P\{|S'_{k,n,n-k_n}| / \beta_k^n < |\mu| - \epsilon'\} < \gamma. \quad (10)$$

D'altra banda, per a tot $\epsilon' > 0, \epsilon' < |\mu|$, a partir d'un cert n_2 ,
 $\forall n \geq n_2$:

$$\epsilon(2/n)^{(1-d)(\delta+1)/\delta} < |\mu| - \epsilon'. \quad (11)$$

Per tant, per a tot $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$, aplicant simultàniament
 (9), (10) i (11) s'obté:

$$\sum_1^n < \gamma \sum_{k \in K_n} P(G_k) = \gamma, \quad \gamma > 0 \text{ arbitrari.}$$

I això acaba la demostració. ■

REFERÈNCIES

- [1] Krengel, U. and Sucheston, L. "Stopping Rules and Tactics for Processes Indexed by a Directed Set". Journal Mult. Anal. 11, 199-299 (1981).

- [2] Walsh, John B. "Stopping Points and Optional Increasing Paths". Lecture Notes in Math. 863 (172-201). Proceedings, Paris 1980.

Rebut el 13 d'octubre del 1984

Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques
Departament d'Estadística Matemàtica.
Plaça Universitat
Barcelona - 7
ESPANYA