

LS-CATÉGORIE DE CW-COMPLEXES À 3 CELLULES EN THÉORIE HOMOTOPIQUE R -LOCALE

HANS SCHEERER ET DANIEL TANRÉ

Abstract

We study the Lusternik-Schnirelmann category of some CW-complexes with 3 cells, built on $Y = S^{2n} \cup_{k[\iota_{2n}, \iota_{2n}]} e^{4n}$. In particular, we prove that an R -local space, in the sense of D. Anick, of LS-category 3 and of the homotopy type of a CW-complex with 3 R -cells, has a cup-product of length 3 in its algebra of cohomology. This result is no longer true in the framework of mild spaces.

La LS-catégorie d'un espace X , $cat X$, a été définie par Lusternik et Schnirelmann, [10], en 1934, pour minorer le nombre de points critiques d'une variété compacte, sans bord. Elle s'est révélée être un invariant homotopique difficile à déterminer et son comportement lors de l'attachement d'une cellule est un problème ouvert.

Dans [4], Bernstein et Hilton caractérisent les CW-complexes à deux cellules de LS-catégorie 2. Nous nous intéressons ici à certains CW-complexes, de LS-catégorie 3, admettant une décomposition en 3 cellules, (éventuellement localisées). Des résultats existent déjà dans cette direction, [14], [15]. Ils concernent les espaces s'écrivant comme espace total d'un fibré de base et fibre une sphère; notons que la dualité de Poincaré s'y révèle une propriété fondamentale pour l'argumentation utilisée. La situation envisagée dans ce travail est différente; nous y étudions des CW-complexes, $Y \cup e^p$, obtenus en attachant une cellule à $Y = S^{2n} \cup_{k[\iota_{2n}, \iota_{2n}]} e^{4n}$, (où ι_j dénote l'application identité de S^j et $[,]$ le crochet de Whitehead). On remarque que Y est la cofibre, $\psi : M \vee S^{2n} \longrightarrow Y$, d'une application $\gamma : S^{4n-1} \longrightarrow M \vee S^{2n}$, où M est l'espace de Moore $M = S^{4n-1} \cup_{k\iota_{4n-1}} e^{4n}$. Dans un premier résultat, nous déterminons l'image de $\Omega\psi$:

Keywords. Lusternik-Schnirelmann category, CW-complex.
1991 Mathematics subject classifications: 55P50, 55P62.

Théorème 1. *Une fois localisé en dehors de 2 et de 3, l'espace des lacets ΩY admet une décomposition $\Omega Y = S^{2n-1} \times \Omega S^{6n-1} \times \Omega Y'$, telle que l'application $\Omega\psi$ suivie de la projection $\Omega Y \rightarrow S^{2n-1} \times \Omega Y'$ ait une inverse à droite.*

Ainsi, toute application $f : S^{p-1} \rightarrow Y$, dont l'adjointe $\tilde{f} : S^{p-2} \rightarrow \Omega Y$ est à valeurs dans $S^{2n-1} \times \Omega Y'$ se relève à travers ψ ; i.e. il existe $f' : S^{p-1} \rightarrow M \vee S^{2n}$ tel que $f = \psi \circ f'$. Dans ce cas, l'espace $Y \cup_f e^p$ a le type d'homotopie de $(M \vee S^{2n}) \cup_\gamma e^{4n} \cup_{f'} e^p$; il est de longueur en cône et de LS-catégorie ≤ 2 .

Pour que l'application $f : S^{p-1} \rightarrow Y$ donne naissance à un espace $Y \cup_f e^p$ de LS-catégorie 3, il faut donc que l'application induite en homotopie par $\tilde{f}$ ait une composante non nulle en $\pi_*(\Omega S^{6n-1})$ dans la décomposition $\pi_*(\Omega Y) = \pi_*(S^{2n-1}) \oplus \pi_*(\Omega S^{6n-1}) \oplus \pi_*(\Omega Y')$. Pour les espaces R -locaux d'Anick, [2], [3], [5], [13], nous montrons que ceci implique l'existence d'un cup-produit de longueur 3 dans l'algèbre de cohomologie:

Soit R un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ et soit r un entier fixé, $r \geq 3$, nous notons $\bar{p}$ le plus petit entier non inversible dans R et posons $m := r + 2\bar{p} - 4$. Rappelons qu'une sphère R -locale, S_R^n , $n \geq 1$, est un CW-complexe n -réduit, abélien, vérifiant $H_i(S_R^n) = 0$, $i \neq 0, n$ et $H_n(S_R^n) \cong R$. Un CW-complexe R -local, r -réduit de R -dimension m est un complexe cellulaire construit à partir d'un point par des attachements successifs de cônes sur des sphères R -locales, S_R^n , $r - 1 \leq n < m$.

Notons CW_r^m la catégorie des CW-complexes R -locaux, r -réduits et de R -dimension $\leq m$.

Théorème 2. *Si $X \in CW_r^m$ est un CW-complexe de LS-catégorie 3, admettant une décomposition en 3 cellules R -locales, alors son algèbre de cohomologie admet un cup-produit de longueur 3.*

Le résultat énoncé ci-dessus devient évidemment faux pour des espaces plus généraux que les espaces R -locaux, comme le montre l'exemple de $Sp(2)$, [14]. Remarquons cependant que, si on localise $Sp(2)$ en dehors de 2 et de 3, cadre du Théorème 1, alors l'espace obtenu a une LS-catégorie égale à la longueur du cup-produit, à savoir 2. Se pose donc la question de l'existence d'un contre-exemple au résultat du Théorème 2 faisant intervenir un espace localisé en dehors de 2 et de 3. C'est l'objet de la dernière section; nous remarquerons également que cet exemple est un espace tempéré (mild space) au sens d'Anick, [2].

1. LS-catégorie

Les “espaces” considérés dans cette section sont des espaces pointés ayant le type d’homotopie pointée d’un CW-complexe connexe. Cette restriction, cohérente avec la suite, simplifie la présentation de la LS-catégorie. Pour tout complément, nous renvoyons le lecteur aux deux articles de synthèse, [7], [9].

Commençons par rappeler la définition de LS-catégorie sous une forme similaire à celle utilisée par Lusternik et Schnirelmann dans [10]:

Définition 3. La LS-catégorie, $\text{cat } X$, d’un espace X est le plus petit entier k , $k \geq 0$, pour lequel X peut-être recouvert par $(k + 1)$ ouverts, contractiles dans X .

Notons que les conventions diffèrent suivant les travaux. Ici, nous attribuons la valeur 0 à la LS-catégorie d’un espace contractile, (dans de nombreux articles, [7], elle est égale à 1).

Ganea a montré que cette définition équivaut à l’existence de sections dans une suite de fibrations construites inductivement. Pour $F_0 \rightarrow E_0(X) \rightarrow X$, on choisit la fibration universelle des chemins sur X , $\Omega X \rightarrow PX \rightarrow X$. Ensuite, à partir de la fibration

$$F_n \rightarrow E_n(X) \xrightarrow{p_n} X,$$

on construit $E_{n+1}(X)$ comme la cofibre de $F_n \rightarrow E_n(X)$, $E_{n+1}(X) = E_n(X) \cup_{F_n} C(F_n)$. L’espace F_{n+1} est la fibre homotopique de l’application $p_{n+1} : E_{n+1}(X) \rightarrow X$, obtenue en envoyant le cône, $C(F_n)$, sur le point de base de X .

Proposition 4 [6]. La LS-catégorie, $\text{cat } X$, d’un espace X est le plus petit entier k , $k \geq 0$, pour lequel la fibration $p_k : E_k(X) \rightarrow X$ admet une section homotopique, i.e. il existe $\sigma_k : X \rightarrow E_k(X)$, tel que $p_k \circ \sigma_k \simeq \text{id}_X$.

Rappelons également, [6], que la LS-catégorie est majorée par la longueur en cône, $\text{Cat } X$, d’un espace:

Définition 5. Soit X un espace, on pose:

- $\text{Cat } X = 0$ si X est contractile;
- $\text{Cat } X \leq k + 1$ s’il existe une cofibration entre CW-complexes, $A \rightarrow B \rightarrow C$, telle que B soit connexe, $\text{Cat } B \leq k$ et C du type d’homotopie de X .

Dans toute la suite, nous confondrons application et classe d’homotopie d’application.

2. Démonstration du Théorème 1

Remarquons d'abord que Y s'obtient comme cofibre:

$$S^{4n-1} \xrightarrow{\varphi_1 - \varphi_2} M \vee S^{2n} \xrightarrow{\psi} Y = S^{2n} \cup_{k[\iota_{2n}, \iota_{2n}]} e^{4n},$$

où:

- M est l'espace de Moore $M = S^{4n-1} \cup_{k\iota_{4n-1}} e^{4n}$;
- $\varphi_1 : S^{4n-1} \hookrightarrow M \hookrightarrow M \vee S^{2n}$ est la composition des injections canoniques;
- $\varphi_2 : S^{4n-1} \rightarrow S^{2n} \hookrightarrow M \vee S^{2n}$ est la composition de l'injection canonique avec le crochet de Whitehead $[\iota_{2n}, \iota_{2n}] : S^{4n-1} \rightarrow S^{2n}$;
- $\varphi_1 - \varphi_2$ s'obtient à partir de la structure usuelle de co-H espace de S^{4n-1} .

Proposition 6. *Nous supposons les espaces localisés en dehors de 2 et de 3. L'espace des lacets ΩY admet une décomposition*

$$\Omega Y = S^{2n-1} \times \Omega(M \vee S^{6n-1}).$$

Remarque. Avec une méthode légèrement différente, Neisendorfer et Selick, [12], établissent cette décomposition de ΩY pour les p -localisés de Y , $p > 3$.

Démonstration de la Proposition 6: La démonstration utilise le modèle introduit par Adams et Hilton pour "représenter" l'espace des lacets d'un CW-complexe; nous renvoyons le lecteur à [1] et [8] pour la justification des propriétés suivantes:

- Le modèle d'Adams Hilton est une algèbre tensorielle différentielle graduée construite par induction suivant les attachements cellulaires. Si $Z' = Z \cup_f e^n$, avec $f : S^{n-1} \rightarrow Z$, le modèle $(T(W), \partial)$ de Z' s'obtient à partir du modèle $(T(V), \partial)$ de Z , en ajoutant à V un générateur α de degré $n-1$ dont la différentielle $\partial\alpha$ est un cycle de $(T(V), \partial)$ représentant $H_*(\Omega f)(h_{n-2})$, où h_{n-2} est l'image du générateur de $H_{n-2}(S^{n-2})$ par l'application $S^{n-2} \rightarrow \Omega S^{n-1}$, adjointe de ι_{n-1} .
- Si $(T(V), \partial)$ est le modèle d'Adams Hilton de Z , l'application de complexes de chaînes, $(T(V), \partial) \otimes (T(V), \partial) \rightarrow (T(V), \partial)$, $w_1 \otimes w_2 \mapsto w_1 w_2$, induit la structure d'algèbre de Pontrjagin de $H_*(\Omega Z)$. De même, le commutateur de $H_*(\Omega Z)$ est induit par l'application $w_1 \otimes w_2 \mapsto w_1 w_2 - (-1)^{|w_1||w_2|} w_2 w_1$.

(1): Mise en évidence de $\tilde{\varphi} : S^{6n-1} \rightarrow Y$.

Soit $M = \Sigma M' = \Sigma (S^{4n-2} \cup_{k\iota_{4n-2}} e^{4n-1})$, nous notons:

- $j_1 : M' \rightarrow \Omega \Sigma M' \rightarrow \Omega \Sigma (M' \vee S^{2n-1})$,
- $j_2 : S^{2n-1} \rightarrow \Omega \Sigma S^{2n-1} \rightarrow \Omega \Sigma (M' \vee S^{2n-1})$,

les flèches obtenues avec l'adjonction (Ω, Σ) et les injections canoniques. Le commutateur pour la loi de H -espace est noté:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Omega(M \vee S^{2n}) \times \Omega(M \vee S^{2n}) \rightarrow \Omega(M \vee S^{2n}).$$

L'application composée

$$M' \times S^{2n-1} \xrightarrow{j_1 \times j_2} \Omega(M \vee S^{2n}) \times \Omega(M \vee S^{2n}) \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} \Omega(M \vee S^{2n})$$

a une restriction à $M' \vee S^{2n-1}$ homotopiquement triviale; elle induit donc une application

$$\langle j_1, j_2 \rangle : M' \wedge S^{2n-1} \rightarrow \Omega(M \vee S^{2n}).$$

Le composé $S^{4n-2} \wedge S^{2n-1} \rightarrow M' \wedge S^{2n-1} \xrightarrow{\langle j_1, j_2 \rangle} \Omega(M \vee S^{2n}) \xrightarrow{\Omega\psi} \Omega Y$ s'écrit $\Omega\psi \langle \tilde{\varphi}_1, j_2 \rangle$, où $\tilde{\varphi}_1$ est l'adjointe de φ_1 ; il est égal à $\Omega\psi \langle \tilde{\varphi}_2, j_2 \rangle$, car $\Omega\psi(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2) = 0$. Remarquons que $\Omega\psi \langle \tilde{\varphi}_2, j_2 \rangle$ est le composé de l'adjoint de $[\iota_{2n}, [\iota_{2n}, \iota_{2n}]]$ suivi de $\Omega S^{2n} \rightarrow \Omega(M \vee S^{2n})$. L'entier 3 étant inversé, le crochet de Whitehead itéré est homotopiquement trivial et l'application $\Omega\psi \langle j_1, j_2 \rangle$ s'étend à la cofibre de $S^{4n-2} \wedge S^{2n-1} \rightarrow M' \wedge S^{2n-1}$ en une application

$$\varphi : S^{6n-2} \cong S^{4n-1} \wedge S^{2n-1} \rightarrow \Omega Y.$$

Un modèle d'Adams Hilton de $M' \wedge S^{2n-1}$ est $(T(\tilde{\alpha}, \alpha), \partial)$, $|\alpha| = |\tilde{\alpha}| + 1 = 6n - 2$; $\partial\alpha = k\tilde{\alpha}$; un modèle de Y est donné par $(T(a, b), \partial)$; $|a| = 2n - 1$; $|b| = 4n - 1$; $\partial b = k[a, a]$. L'application $(T(\tilde{\alpha}, \alpha), \partial) \rightarrow (T(a, b), \partial)$, qui correspond à l'adjoint de $\Omega\psi \langle j_1, j_2 \rangle$, applique $\tilde{\alpha}$ sur zéro et α sur $[a, b]$. Par conséquent, le modèle de l'adjoint $\tilde{\varphi} : S^{6n-1} \rightarrow Y$ de φ est le suivant:

$$\mathcal{A}(\tilde{\varphi}) : (T(\alpha), 0) \rightarrow (T(a, b), \partial); |\alpha| = 6n - 2; \mathcal{A}(\tilde{\varphi})(\alpha) = [a, b].$$

(2): ΩY a le type d'homotopie de $S^{2n-1} \times \Omega(M \vee S^{6n-1})$.

Notons:

- $g_1 : S^{2n-1} \rightarrow \Omega Y$, l'adjointe de $S^{2n} \hookrightarrow M \vee S^{2n} \xrightarrow{\psi} Y$;
- $g_2 = \tilde{\varphi} : S^{6n-1} \rightarrow Y$, l'application construite dans (1);
- $g_3 : M \rightarrow Y$, égale au composé $M \hookrightarrow M \vee S^{2n} \xrightarrow{\psi} Y$.

Nous considérons maintenant le composé:

$$\Omega(M \vee S^{6n-1}) \times S^{2n-1} \xrightarrow{\mu} \Omega Y \times \Omega Y \xrightarrow{\nu} \Omega Y$$

où ν est la loi de H -espace de ΩY et $\mu = \Omega(g_3 + g_2) \times g_1$. Pour justifier que $\nu \circ \mu$ est une équivalence d'homotopie, nous en construisons un modèle dans la catégorie des complexes de chaînes:

- $g_3 + g_2$ a pour modèle d'Adams-Hilton

$$\mathcal{A}(g_3 + g_2) : (T(\beta, \hat{\beta}, \alpha), \partial) \rightarrow (T(a, b), \partial)$$

$$\begin{aligned} |\hat{\beta}| &= 4n - 2; |\beta| = 4n - 1; |\alpha| = 6n - 2; |a| = 2n - 1; \partial\beta = k\hat{\beta}; \\ \partial\alpha &= \partial a = 0; \partial b = k[a, a]; \mathcal{A}(g_3 + g_2)(\beta) = b; \mathcal{A}(g_3 + g_2)(\hat{\beta}) = \\ &= [a, a]; \mathcal{A}(g_3 + g_2)(\alpha) = [a, b]. \end{aligned}$$

- ν a pour modèle la multiplication $T(a, b) \otimes T(a, b) \rightarrow T(a, b)$.
- L'injection $(\mathbb{Z}[1/2, 1/3] a, 0) \rightarrow (T(a, b), \partial)$ est un modèle de g_1 .

Nous en déduisons le modèle de complexes de chaînes cherché:

$$(T(\beta, \hat{\beta}, \alpha), \partial) \otimes (\mathbb{Z}[1/2, 1/3] a, 0) \rightarrow (T(a, b), \partial).$$

Cette flèche est évidemment surjective. Déterminons, [8], les séries de Poincaré de la source et du but:

$$P(T(a, b)) = \frac{1}{1 - t^{2n-1} - t^{4n-1}};$$

$$P(T(\beta, \hat{\beta}, \alpha) \otimes \mathbb{Z}[1/2, 1/3] a) = \frac{1}{1 - t^{4n-2} - t^{4n-1} - t^{6n-2}} \cdot (1 + t^{2n-1}).$$

L'égalité de ces deux séries implique que la flèche est un isomorphisme au niveau des complexes de chaînes, donc induit un isomorphisme en homologie. ■

Exemple. Notons $f : S^{10n-3} \rightarrow Y$ le crochet de Whitehead de $S^{6n-1} \rightarrow Y$ et de $\psi \circ \varphi_1 : S^{4n-1} \rightarrow Y$. La Proposition 6 implique en particulier que

$$S^{2n} \cup_{k[\iota_{2n}, \iota_{2n}]} e^{4n} \cup_f e^{10n-2}$$

est de longueur de cône (et de LS-catégorie) 2.

Démonstration du Théorème 1: Nous allons décomposer cette preuve en 4 étapes qui reprennent un pas de la démonstration du Théorème

de Hilton-Milnor, telle qu'elle apparaît dans [17]; nous effectuerons des rappels suffisants pour une lecture autonome du texte.

Etape 1: Rappel d'une décomposition utilisée dans la démonstration du Théorème de Hilton-Milnor, [17].

Si A et B sont des CW-complexes (pointés), on a une équivalence d'homotopie

$$\Omega\Sigma(A \vee B) \simeq \Omega\Sigma A \times \Omega\Sigma \left(\bigvee_{i=0}^{\infty} B \wedge A^{(i)} \right)$$

où $A^{(i)}$ désigne le smash-produit itéré i -fois, et $B \wedge A^{(0)} = B$ par convention. Cette équivalence est donnée par une suite d'applications:

$$v_n : B \wedge A^{(n)} \rightarrow \Omega\Sigma(A \vee B).$$

Notons j_A (resp. j_B) l'injection $A \hookrightarrow A \vee B$ (resp. $B \hookrightarrow A \vee B$). On définit v_0 comme le composé de $\Omega\Sigma(j_B)$ avec la counité de l'adjonction (Ω, Σ) :

$$v_0 : B \rightarrow \Omega\Sigma B \rightarrow \Omega\Sigma(A \vee B).$$

Supposons avoir construit v_n , l'application

$$v_{n+1} : B \wedge A^{(n+1)} \simeq (B \wedge A^{(n)}) \wedge A \rightarrow \Omega\Sigma(A \vee B)$$

s'obtient en factorisant par le smash-produit l'application

$$(B \wedge A^{(n)}) \times A \xrightarrow{v_n \times w_0} \Omega\Sigma(A \vee B) \times \Omega\Sigma(A \vee B) \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} \Omega\Sigma(A \vee B),$$

où $w_0 : A \rightarrow \Omega\Sigma A \rightarrow \Omega\Sigma(A \vee B)$ est défini de manière analogue à v_0 . Il reste ensuite à prendre la "somme" de ces applications

$$\tilde{v} = +_i v_i = \bigvee_{i=0}^{\infty} B \wedge A^{(i)} \rightarrow \Omega\Sigma(A \vee B)$$

à l'étendre en une application de H -espaces

$$v : \Omega\Sigma \left(\bigvee_{i=0}^{\infty} B \wedge A^{(i)} \right) \rightarrow \Omega\Sigma(A \vee B)$$

et à composer avec la multiplication ν de $\Omega\Sigma(A \vee B)$:

$$\begin{aligned} \Omega\Sigma A \times \Omega\Sigma \left(\bigvee_{i=0}^{\infty} B \wedge A^{(i)} \right) &\xrightarrow{\Omega\Sigma j_A \times v} \Omega\Sigma(A \vee B) \times \Omega\Sigma(A \vee B) \\ &\xrightarrow{\nu} \Omega\Sigma(A \vee B). \end{aligned}$$

Le fait que ce composé induise une équivalence d'homotopie est le but du "Step IV page 527" de [17] dont ces lignes sont extraites.

Etape 2: L'application $\rho : S^{2n-1} \wedge M' \wedge M' \rightarrow S^{2n-1} \wedge S^{4n-1} \wedge M'$, induite par l'application de pincement $M' \rightarrow S^{4n-1}$, admet une section homotopique.

Soit $M' = S^{4n-2} \cup_{k\iota_{4n-2}} e^{4n-1}$, Neisendorfer a exhibé une équivalence d'homotopie [11, Corollary 6.6 p. 36]:

$$\Delta + i : (S^{8n-4} \cup_{k\iota_{8n-4}} e^{8n-3}) \vee (S^{8n-3} \cup_{k\iota_{8n-3}} e^{8n-2}) \rightarrow M' \wedge M'.$$

On en déduit que

$$S^{8n-3} \cup_{k\iota_{8n-3}} e^{8n-2} \rightarrow M' \wedge M' \rightarrow S^{4n-1} \wedge M'$$

est une équivalence d'homotopie. Par conséquent, $M' \wedge M' \rightarrow S^{4n-1} \wedge M'$ et $\rho : S^{2n-1} \wedge M' \wedge M' \rightarrow S^{2n-1} \wedge S^{4n-1} \wedge M'$ ont des sections homotopiques.

Par itération de cet argument, on obtient, pour tout $i \geq 2$, une section homotopique à

$$S^{2n-1} \wedge M'^{(i)} \wedge (S^{2n-1} \wedge M')^{(j)} \rightarrow S^{6n-2} \wedge M'^{(i-1)} \wedge (S^{6n-2})^{(j)}.$$

Etape 3: Décomposition de la source et du but de $\Omega\psi : \Omega\Sigma(M' \vee S^{2n-1}) \rightarrow \Omega Y$.

En appliquant l'étape 1, nous obtenons une équivalence d'homotopie:

$$\begin{aligned} \Omega\Sigma(M' \vee S^{2n-1}) &\simeq \Omega\Sigma M' \times \Omega\Sigma \left(\bigvee_{i=0}^{\infty} S^{2n-1} \wedge M'^{(i)} \right) \\ &\simeq \Omega\Sigma M' \times \Omega\Sigma S^{2n-1} \\ &\quad \times \Omega\Sigma \left(\bigvee_{i=1, j=0}^{\infty} S^{2n-1} \wedge M'^{(i)} \wedge (S^{2n-1})^{(j)} \right). \end{aligned}$$

La Proposition 6 donne

$$\begin{aligned} \Omega Y &\simeq S^{2n-1} \times \Omega\Sigma (M' \vee S^{6n-2}) \\ &\simeq S^{2n-1} \times \Omega\Sigma M' \times \Omega\Sigma \left(\bigvee_{i=0}^{\infty} S^{6n-2} \wedge M'^{(i)} \right) \\ &\simeq S^{2n-1} \times \Omega\Sigma M' \times \Omega\Sigma S^{6n-2} \\ &\quad \times \Omega\Sigma \left(\bigvee_{i=1, j=0}^{\infty} S^{6n-2} \wedge M'^{(i)} \wedge (S^{6n-2})^{(j)} \right). \end{aligned}$$

Pour comprendre comment $\Omega\psi$ se comporte relativement à cette décomposition, rappelons de la démonstration de la Proposition 6 que

$$\begin{aligned}\Omega\Sigma M' \rightarrow \Omega(M \vee S^{2n}) &\xrightarrow{\Omega\psi} \Omega Y \simeq S^{2n-1} \times \Omega\Sigma(M' \vee S^{6n-2}) \\ &\rightarrow \Omega\Sigma(M' \vee S^{6n-2})\end{aligned}$$

est donné par l'injection $M' \hookrightarrow M' \vee S^{6n-2}$.

Enfin, le composé de $\Omega\psi$ avec la projection sur $S^{2n-1} \times \Omega\Sigma M'$ ayant un inverse à droite, il nous suffit d'étudier le composé, $\Omega(\psi)'$, de $\Omega\psi$ avec la projection canonique:

$$\begin{aligned}\Omega(\psi)' : \Omega\Sigma(M' \vee S^{2n-1}) &\xrightarrow{\Omega\psi} \Omega Y \\ &\rightarrow \Omega\Sigma \left(\bigvee_{i=1, j=0}^{\infty} S^{6n-2} \wedge M'^{(i)} \wedge (S^{6n-2})^{(j)} \right).\end{aligned}$$

Etape 4: Construction d'une section homotopique:

$$\begin{aligned}\Omega\Sigma \left(\bigvee_{i=1, j=0}^{\infty} S^{6n-2} \wedge M'^{(i)} \wedge (S^{6n-2})^{(j)} \right) \\ \rightarrow \Omega\Sigma \left(\bigvee_{i=1, j=0}^{\infty} S^{2n-1} \wedge M'^{(i)} \wedge (S^{2n-1})^{(j)} \right).\end{aligned}$$

Avant d'aborder cette dernière étape, rappelons quelques résultats déjà obtenus:

- L'application $S^{2n-1} \wedge M' \rightarrow \Omega Y$ factorise par l'application de pincement $S^{2n-1} \wedge S^{4n-1} \rightarrow \Omega Y$, qui définit la classe d'homotopie construite dans la Proposition 6; i.e. $S^{2n-1} \wedge S^{4n-1} \rightarrow \Omega\Sigma(M' \vee S^{6n-2}) \simeq \Omega(M \vee S^{6n-1})$ est donnée par l'injection $S^{6n-1} \hookrightarrow M \vee S^{6n-1}$.
- Sur les éléments $S^{2n-1} \wedge M'^{(i)} \wedge (S^{2n-1})^{(j)}$, $i \geq 1$, l'application, de but $\Omega\Sigma(M' \vee S^{6n-2})$ est déterminée par les crochets de Samelson (étape 1).

Pour démontrer l'étape 4, commençons par fixer i et j .

A $Z = S^{6n-2} \wedge M'^{(i)} \wedge (S^{6n-2})^{(j)}$, on associe $Z_1 = S^{2n-1} \wedge M'^{(i+j+1)} \wedge (S^{2n-1})^{(j)}$. Posons $Z_2 = S^{2n-1} \wedge M' \wedge M'^i \wedge (M' \wedge S^{2n-1})^{(j)}$; l'associativité et la commutativité du smash-produit fournissent une équivalence

d'homotopie entre Z_1 et Z_2 . Il faut noter que cette équivalence modifie le plongement dans $\Omega(M \vee S^{2n})$; le parenthésage des crochets de Samelson est modifié en

$$\langle \cdots \langle j_1, j_2 \rangle, \overbrace{j_2, \rangle}^{i \text{ fois}}, \cdots \overbrace{j_2 \rangle}^{j \text{ fois}}, \langle j_1, j_2 \rangle, \cdots \langle j_1, j_2 \rangle \rangle$$

avec les notations de la démonstration de la Proposition 6. Considérons la restriction $\Omega(\psi)''$ de $\Omega(\psi)'$ à un sous-bouquet:

$$\begin{array}{c} \Omega\Sigma \left(\bigvee_{i=1, j=0} S^{2n-1} \wedge M' \wedge M'^{(i)} \wedge (M' \wedge S^{2n-1})^{(j)} \right) \\ \downarrow \Omega(\psi)'' \\ \Omega\Sigma \left(\bigvee_{i=1, j=0} S^{6n-2} \wedge M'^{(i)} \wedge (S^{6n-2})^{(j)} \right). \end{array}$$

Il est bien clair que si $\Omega(\psi)''$ a un inverse à droite, il en est de même pour $\Omega(\psi)'$. Comme nous l'avons constaté, $\Omega(\psi)''$ factorise par les applications de pincement en:

$$\begin{array}{c} \Omega\Sigma \left(\bigvee_{i=1, j=0} S^{2n-1} \wedge M' \wedge M'^{(i)} \wedge (M' \wedge S^{2n-1})^{(j)} \right) \\ \downarrow \mu_1 \\ \Omega\Sigma \left(\bigvee_{i=1, j=0} S^{2n-1} \wedge S^{4n-1} \wedge M'^{(i)} \wedge (S^{4n-1} \wedge S^{2n-1})^{(j)} \right) \\ \downarrow \mu_2 \\ \Omega\Sigma \left(\bigvee_{i=1, j=0} S^{6n-2} \wedge M'^{(i)} \wedge (S^{6n-2})^{(j)} \right). \end{array}$$

Le résultat annoncé se déduit maintenant de:

- l'application μ_1 admet un inverse à droite d'après l'étape 2;
- l'application μ_2 est un isomorphisme; ce dernier point provient de la connaissance de $\Omega(\psi)'$ et de la modification de parenthésage entre Z_1 et Z_2 . ■

3. Démonstration du Théorème 2

Rappelons, [16], que si Z est un CW-complexe simplement connexe de R -localisé Z_R , alors $\text{cat } Z_R \leq \text{cat } Z$.

Notons e_R^n le cône construit sur la sphère R -locale S_R^{n-1} . Soit $X = S_R^{n_1} \cup_{f_1} e_R^{n_2} \cup_{f_2} e_R^{n_3}$, $n_1 \leq n_2 \leq n_3$, une décomposition R -cellulaire de X . L'attachement d'un cône augmentant la catégorie d'au plus une unité, il faut que $X' = S_R^{n_1} \cup_{f_1} e_R^{n_2}$ soit de LS-catégorie 2.

Jusqu'à la dimension m , les groupes d'homotopie de la sphère R -locale, $S_R^{n_1}$, s'injectent dans les groupes d'homotopie du rationalisé $S_{\mathbb{Q}}^{n_1}$. La seule possibilité pour que X' ne soit pas une suspension est donc $n_1 = 2n$ et $f_1 = k[\iota_{2n}, \iota_{2n}]$, soit, avec les notations de la Proposition 6, $X' = Y_R$. Considérons maintenant l'attachement de la dernière cellule:

$$\begin{array}{ccc} & M_R \vee S_R^{2n} & \\ & \downarrow \psi & \\ S_R^{n_3-1} & \xrightarrow{f_2} & Y_R \end{array}.$$

Si $f_2 \in \text{Im } \pi_*(\psi)$, notons $\tilde{f}_2 : S_R^{n_3-1} \rightarrow M_R \vee S_R^{2n}$ un relevé de f_2 . Il est alors facile de constater que X est un 2-cône, (donc de LS-catégorie ≤ 2):

$$S_R^{n_3-1} \vee S_R^{4n-1} \xrightarrow{g} M_R \vee S_R^{2n} \rightarrow X,$$

où $g = (\varphi_1 - \varphi_2) + \tilde{f}_2$.

Pour avoir un espace X de LS-catégorie 3, la seule possibilité est donc que la classe d'homotopie f_2 soit de la forme $l[a, b] + \mu$, $l \neq 0$, $\mu \in \text{Im } \pi_*(\psi)$, où $[a, b]$ est le crochet relatif représenté par $S_R^{6n-1} \rightarrow Y_R$ et décrit dans la démonstration de la Proposition 6. Le cocycle associé à $S_R^{n_1}$ dans la cohomologie de X a une puissance troisième non nulle, car égale à $lk(e_R^{n_3})^*$, où $(e_R^{n_3})^*$ désigne la classe de cohomologie associée à $e_R^{n_3}$. ■

Remarque. En rationnel, il est assez facile de voir que le résultat du Théorème 2 s'étend aux CW-complexes de LS-catégorie k admettant une décomposition en k cellules rationnelles; cette propriété est-elle conservée en R -local?

i.e.: si $X \in CW_r^m$ est un CW-complexe de LS-catégorie k , admettant une décomposition en k cellules R -locales, son algèbre de cohomologie admet-elle un cup-produit de longueur k ?

4. Un exemple tempéré

Dans cette section, tous les espaces considérés sont localisés en dehors de 2 et de 3.

Soit $Y = S^6 \cup_{[\iota_6, \iota_6]} e^{12}$, on sait que ΩY a le type d'homotopie de $S^5 \times \Omega(S^{17})$, (cf Proposition 6). Notons $\rho : S^{17} \rightarrow Y$ la classe d'homotopie correspondant à cette décomposition et β le générateur d'ordre 5 de $\pi_{24}(S^{17})$.

Proposition 7. *Le CW-complexe $Z = Y \cup_{\rho \circ \beta} e^{25}$ est de LS-catégorie 3, sa longueur de cup-produit est 2.*

Remarque. Dans [2], [3], D. Anick introduit une généralisation des espaces R -locaux, les espaces tempérés, (“mild space”). Notons $\bar{p}$ le plus petit entier non inversible dans R ; dans le cadre tempéré, la catégorie CW_r^m est remplacée par la catégorie CW_r^q des CW-complexes R -locaux, r -réduits et de R -dimension $\leq q$ avec $q = (r - 1)\bar{p}$.

Remarquons que Z est 6-réduit, de dimension 25; on peut donc choisir 5 comme premier entier non inversible dans R . L'espace Y est donc tempéré au sens ci-dessus.

Démonstration: Pour justifier l'affirmation sur la LS-catégorie, considérons l'espace, $V = Y \cup_{\rho} e^{18}$, également obtenu comme cofibre $S^{17} \cup_{\beta} e^{25} \rightarrow Z \rightarrow V$, ainsi que le montre le diagramme:

$$\begin{array}{ccccc}
 S^{24} & \xlongequal{\quad} & S^{24} & \longrightarrow & * \\
 \downarrow \beta & & \downarrow \rho \circ \beta & & \downarrow \\
 S^{17} & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & Y & \longrightarrow & V \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 S^{17} \cup_{\beta} e^{25} & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & V
 \end{array}$$

dans lequel la ligne du bas et la colonne de droite sont constituées des cofibres. Notons:

- $p_{2,Z} : E_2 Z \rightarrow Z$ et $p_{2,V} : E_2 V \rightarrow V$ les fibrations de Ganea associées à Z et V respectivement,
- $E_2 Z \rightarrow Z \xrightarrow{\tau_Z} Z/E_2 Z$ et $E_2 V \rightarrow V \xrightarrow{\tau_V} V/E_2 V$ les cofibrations associées à $p_{2,Z}$ et $p_{2,V}$ respectivement.

Si nous montrons que l'application $\Sigma\tau_Z$ n'est pas homotopiquement triviale, il est alors facile de constater que $p_{2,Z}$ n'a pas de section homotopique, (i.e. $\text{cat } Z \geq \text{conil } Z \geq 3$). Pour cela, il nous suffit de démontrer que le composé

$$\Sigma Z \rightarrow \Sigma V \xrightarrow{\Sigma\tau_V} \Sigma(V/E_2V)$$

n'est pas homotopiquement trivial, car il factorise par $\Sigma\tau_Z : \Sigma Z \rightarrow \Sigma(Z/E_2Z)$.

Si W est un CW-complexe, notons $W_{[k]}$ son squelette de dimension k et remarquons que pour le problème étudié, il suffit de déterminer $E_2(V)_{[26]}$. Avec un raisonnement analogue à celui effectué pour décomposer $\Omega\mathbb{CP}^3$, on obtient $\Omega V = S^5 \times \Omega(S^{23})$, d'où l'on déduit:

$$\begin{aligned} (\Sigma\Omega V)_{[26]} &= S^6 \vee S^{23} \\ (\Omega V * \Omega V)_{[26]} &= S^{11} \\ (E_2V)_{[26]} &= (S^6 \cup_{[\iota_6, \iota_6]} e^{12}) \vee S^{23} = Y \vee S^{23}. \end{aligned}$$

La flèche

$$\Sigma Z = S^7 \vee S^{13} \vee S^{26} \rightarrow \Sigma V = S^7 \vee S^{13} \vee S^{19} \rightarrow (\Sigma(V/E_2V))_{[27]} = S^{19} \vee S^{24}$$

"contient" $\Sigma^2\beta : S^{26} \rightarrow S^{19}$ qui n'est pas homotopiquement triviale. ■

Références

1. F. ADAMS AND P. HILTON, On the chain algebra of a loop space, *Comment. Math. Helv.* **30** (1956), 305–330.
2. D. ANICK, Hopf algebras up to homotopy, *J. Amer. Math. Soc.* **2** (1989), 417–543.
3. D. ANICK, R -local homotopy theory, in "Homotopy Theory and Related Topics," Proceedings of the International Conference held in Kinosaki, August 19–24, 1988 (M. Mimura, ed.), Lecture Notes in Math. **1418**, Springer-Verlag, 1990, pp. 78–85.
4. I. BERSTEIN AND P. HILTON, Category and generalized Hopf invariants, *Illinois J. Math.* **4** (1960), 437–451.
5. W. G. DWYER, Tame homotopy theory, *Topology* **18** (1979), 321–338.
6. T. GANEA, Lusternik-Schnirelmann category and strong category, *Illinois J. Math.* **11** (1967), 417–427.
7. I. M. JAMES, On category in the sense of Lusternik-Schnirelmann, *Topology* **17** (1978), 331–348.

8. J.-M. LEMAIRE, “*Algèbres connexes et Homologie des espaces de lacets*,” Lecture Notes in Math. **422**, Springer-Verlag, 1974.
9. J.-M. LEMAIRE, Lusternik-Schnirelmann category: an introduction, in “*Algebra, Algebraic Topology and their Interactions*,” Proceedings of a conference held in Stockholm, August 3–13, 1983, and later developments (J.-E. Roos, ed.), Lecture Notes in Math. **1183**, 1986, pp. 259–276.
10. L. LUSTERNIK AND L. SCHNIRELMANN, “*Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*,” Hermann, Paris, 1934.
11. J. NEISENDORFER, Primary homotopy theory, *Mem. Amer. Math. Soc.* **232** (1980), 67 pp.
12. J. NEISENDORFER AND P. SELICK, Some examples of spaces with or without exponents, in “*Current trends in Algebraic Topology, Part I*,” (London, Ont., 1981), CMS Conf. Proc. **2**, Amer. Math. Soc., 1982, pp. 343–357.
13. H. SCHEERER AND D. TANRÉ, R -local homotopy theory, *Bull. London Math. Soc.* **22** (1990), 591–598.
14. P. SCHWEITZER, Secondary cohomology operations induced by the diagonal mapping, *Topology* **3** (1965), 337–355.
15. W. SINGHOF, Generalized higher order cohomology operations induced by the diagonal mapping, *Math. Z.* **162** (1978), 7–26.
16. G. H. TOOMER, Topological localization, category and cocategory, *Canad. J. Math.* **27** (1975), 319–322.
17. G. W. WHITEHEAD, “*Elements of homotopy theory*,” Springer Verlag GTM **61**, 1978.

Hans Scheerer:
 Freie Universität Berlin
 Mathematisches Institut
 Arnimallee 2-6
 D-14195 Berlin
 ALLEMAGNE

Daniel Tanré:
 U.R.A. CNRS 0751
 U.F.R. de Mathématiques
 Université des Sciences et Technologies
 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
 FRANCE

Primera versió rebuda el 2 de Setembre de 1996,
 darrera versió rebuda el 18 de Febrer de 1997