Publicacions Matemàtiques, Vol **42** (1998), 359–382.

CLASSES CARACTÉRISTIQUES RÉELLES DE CERTAINS G-FIBRÉS VECTORIELS ET RÉSIDUS

Abdelhak Abouqateb

Abstract

This work is a contribution to study residues of real characteristic classes of vector bundles on which act compact Lie groups. By using the Čech-De Rham complex, the realisation of the usuel Thom isomorphism's permites us to illustrate localisation's technics of some topological invariants.

1. Introduction

Etant donné $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$ un fibré vectoriel sur lequel opère différentiablement un groupe de Lie compact G, tel que l'action de G sur V soit quasi-libre (c'est à dire tous les groupes d'isotropie sont discrets) , il est bien connu que les classes caractéristiques de dimension supérieure ou égale à $\dim V - \dim G + 1$ d'un tel fibré sont nulles; la raison géométrique en est l'existence d'une connexion spéciale de courbure R basique (c'est à dire $i(X)R = 0$ pour tout champ de vecteurs fondamental X).

Ce théorème d'annulation donnait naissance à un problème de résidus:

"Décrire, quand l'action n'est plus quasi-libre, la localisation des classes caractéristiques de dimension supérieure ou égale à $\dim V - \dim G + 1$ d'un G-fibré vectoriel, autour du lieu singulier $\sum_G$ qui est l'ensemble des points de V où le groupe d'isotropie n'est pas discret."

Ce problème a été résolu par P. Baum-J. Cheeger lorsque $G = S^1$ (cf. [**5**]) puis sous certaines conditions par F. Gómez lorsque G est un tore (cf. [**7**]), et en suite par N. Alamo-F. Gómez dans une situation plus générale (cf. [**2**]).

Keywords. Characteristic classes, residues, group action, Thom's isomorphism, fiber integration.

Ce qu'on se propose de faire c'est d'étudier la situation suivante:

$\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$ est un $K \times T^r$-fibré vectoriel (où K est compact connexe, et $T^r = \mathbf{R^r}/\mathbf{Z^r}$ le tore réel de dimension r) tel que:

(i) K opère quasi-librement sur V.

(ii) Il existe un vecteur non nul $h_0 \in \mathbf{R^r}, (\mathbf{R^r}$ = l'algèbre de Lie de $T^r)$, dont le champ de vecteurs fondamental associé X_{h_0} est transverse aux orbites de l'action de K sur $V - \text{Zéro}(X_{h_0})$.

Comme exemple d'une telle situation (voir 5.14).

Le papier sera organisé de la façon suivante:

Le paragraphe 2 est consacré à la réalisation de l'isomorphisme de Thom dans le complexe de Čech-De Rham, et son application à des problèmes de résidus.

Au paragraphe 3 nous faisons des rappels sur les actions différentiables de groupes de Lie sur les fibrés vectoriels, et nous démontrons un lemme technique sur l'existence d'une connexion spéciale.

Au paragraphe 5 nous donnons une formule de résidus du type P. Baum-J. Cheeger et F. Gómez; le Théorème 5.15 en sera le résultat fondamental.

Notations. L'algèbre différentielle graduée des formes différentielles C^∞ sur une variété différentiable B sera noté $\Omega^*(B)$. Un fibré localement trivial, C^∞, orienté, $(E \xrightarrow{\pi} B)$, de fibre F, sera souvent désigné par (E, π, B, F) un fibré vectoriel réel C^∞. On désignera alors par $\Omega^*_F(E)$ l'espace gradué des formes différentielles à support "compact dans la direction de la fibre" (cf. [**8**]). On note $⨍_{D^r} : \Omega^*_F(E) \to \Omega^{*-r}(B)$, où $r = \dim F$, l'opérateur d'intégration le long de la fibre (cf. [**3**], [**8**]), satisfaisant dans le cas où l'espace E est sans bord à l'égalité $⨍_F \circ d = (-1)^r d \circ ⨍_F$.

2. Isomorphisme de Thom

2.1. Cas d'un fibré vectoriel.

Soit $(M, \pi, W, \mathbf{R^r})$ un fibré vectoriel réel C^∞ orienté. On considère l'algèbre différentielle graduée $(C^*(M, M - W), D)$ définie par:

$C^*(M, M - W) = \Omega^*(M) \bigoplus \Omega^{*-1}(M - W)$ avec la différentielle $D(\beta, \gamma) = (d\beta, -d\gamma + \beta)$ et le produit $(\beta, \gamma) \smile (\beta', \gamma') = (\beta \wedge \beta', \gamma \wedge \beta')$.

(La base W du fibré étant identifiée à son image par la section nulle).

La cohomologie de cette algèbre différentielle s'identifie naturellement à la cohomologie relative $H^*(M, M - W, \mathbf{R})$, (cf. [**12**]).

Munissons le fibré vectoriel $(M, \pi, W, \mathbf{R^r})$ d'une métrique riemannienne $\langle . \rangle$, et posons pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} M_\varepsilon &= \{z \in M,\ \langle z, z\rangle \leq \varepsilon\} \\ \partial M_\varepsilon &= \{z \in M,\ \langle z, z\rangle = \varepsilon\} \\ \text{et} \quad \mathring{M}_\varepsilon &= \{z \in M,\ \langle z, z\rangle < \varepsilon\}\,. \end{aligned}$$

Ce sont les espaces totaux de fibrés C^∞ localement triviaux, canoniquement orientés, de fibres respectives D_ε, ∂D_ε et $\mathring{D}_\varepsilon$:

$$(M_\varepsilon, \pi, W, D_\varepsilon),\ (\partial M_\varepsilon, \pi, W, \partial D_\varepsilon) \quad \text{et} \quad (\mathring{M}_\varepsilon, \pi, W, \mathring{D}_\varepsilon).$$

(D_ε désigne le disque fermé de $\mathbf{R^r}$ centré en zéro, et de rayon $\sqrt{\varepsilon}$, ∂D_ε sa frontière et $\mathring{D}_\varepsilon$ son intérieur.)

Pour $\varepsilon = 1$, on pose

$$\begin{aligned} DM &= M_1, & SM &= \partial M_1 \\ D^r &= D_1 \quad \text{et} & S^{r-1} &= \partial D_1. \end{aligned}$$

Pour toute forme différentielle homogène $\beta \in \Omega^k(M)$, l'intégrale le long de la fibre D^r de la restriction de β à DM est une forme différentielle homogène sur W:

$$⨍_{D^r} (\beta_{|_{DM}}) \in \Omega^{k-r}(W).$$

De même si $\gamma \in \Omega^{k-r}(M - W)$, on a

$$⨍_{S^r} (\gamma_{|_{SM}}) \in \Omega^{k-r}(W).$$

Définition 2.1. On définit l'opérateur “d'intégration le long de la fibre”

$$⨍ : C^*(M, M - W) \to \Omega^{*-r}(W)$$

en posant

$$⨍(\beta, \gamma) = ⨍_{D^r} \beta - ⨍_{S^{r-1}} \gamma$$

c'est une application linéaire homogène de degré $-r$.

Lemme 2.2. *L'opérateur* $\fint$ *satisfait l'égalité:*

$\fint \circ D = (-1)^r d \circ \fint$, *induit donc, en cohomologie une application linéaire* $H(\fint) : H^*(M, M - W) \to H^{*-r}(W)$, *homogène de degré* $-r$.

Théorème 2.3 (Isomorphisme de Thom). $H(\fint)$ *est un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués.*

Démonstration:

1er *cas:* W est un point.

On a alors l'identification $M = \mathbf{R^r}$ et $W = \{0\}$.

On sait que

$$H^k(\mathbf{R^r}, \mathbf{R^r} - \{0\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < r \\ \mathbf{R} & \text{si } k = r \end{cases}$$

et

$$H^k(\{0\}) = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

De plus, il est facile de voir que dans ce cas, l'application $H^k(\fint)$: $H^k(\mathbf{R^r}, \mathbf{R^r} - \{0\}) \to H^{k-r}(\{0\})$ s'identifie à l'application nulle, sauf pour $k = r$.

On en déduit qu'il suffit de montrer que l'application $H^r(\fint)$: $H^r(\mathbf{R^r}, \mathbf{R^r} - \{0\}) \to \mathbf{R}$ est surjective.

Or puisque $(\mathbf{R^r} - \{0\})$ se rétracte par déformations sur la sphère unité S^{r-1}, on en déduit l'existence d'une forme différentielle $\gamma \in \Omega^{r-1}(\mathbf{R^r} - \{0\})$ telle que $\fint_{S^{r-1}} \gamma = 1$. Autrement dit $H^r(\fint)\,[(0, -\gamma)] = 1$.

Ceci achève la démonstration du 1er cas. ■

2ème *cas:* $W = \mathbf{R}^n$.

Le fibré $(M, \pi, W, \mathbf{R^r})$ s'identifie alors au fibré trivial:

$(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r, \pi, \mathbf{R}^n, \mathbf{R^r})$ où π est la projection canonique.

L'injection $i = \mathbf{R^r} \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R^r}$, $i(z) = (0, z)$, induit de façon naturelle un homomorphisme différentiel $[i^*] : C^*(M, M - \{0\}) \to C^*(\mathbf{R^r}, \mathbf{R}^r - \{0\})$, tel que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^*(M - \{0\}) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i^*"] & C^*(M, M - \{0\}) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "{[i^*]}"] & \Omega^*(M) \arrow[r] \arrow[d, "i^*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^*(\mathbf{R^r} - \{0\}) \arrow[r] & C^*(\mathbf{R^r}, \mathbf{R^r} - \{0\}) \arrow[r] & \Omega^*(\mathbf{R^r}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(avec: $i(\gamma) = (0, \gamma)$ et $p(\beta, \gamma) = \beta$).

Les autres flèches sont définies de manière analogue.

Le lemme des cinq permet d'en déduire que $[i^*]$ induit un isomorphisme en cohomologie.

D'autre part, on vérifie aisement la commutativité du diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} C^*(\mathbf{R^r}, \mathbf{R^r} - \{0\}) & \xleftarrow{[i^*]} & C^*(M, M - \{0\}) \\ \int\downarrow & & \downarrow\int \\ \Omega^{*-r}(\{0\}) & \xleftarrow{i^*} & \Omega^{*-r}(\mathbf{R}^n) \end{array}$$

le symbole $\int$ désigne "l'intégration le long de la fibre" associé au fibré trivial $\mathbf{R^r} \to \{0\}$.

On en déduit, d'après le premier cas, que $\int$ induit un isomorphisme en cohomologie. Ceci achève l'étude du $2^{\text{ème}}$ cas. ■

Cas général:

Lemme 2.4. *Soit $\{U, V\}$ un recouvrement ouvert de W.*

*La suite exacte de Mayer-Vietoris (cf. [**8**]):*

$$0 \to \Omega^*(M) \to \Omega^*(M_{|_U}) \bigoplus \Omega^*(M_{|_V}) \to \Omega^*(M_{|_{U\cap V}}) \to 0$$

permet alors de construire une suite exacte courte:

$$0 \to C^* \to C^*_U \bigoplus C^*_V \to C^*_{U\cap V} \to 0$$

où: $C^* = C^*(M, M - W)$, et $C^*_\theta = C^*(M_{|_\theta}, M_{|_\theta} - W)$ pour tout ouvert θ de W. De plus, on a un diagramme commutatif naturel:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C^* & \longrightarrow & C^*_U \bigoplus C^*_V & \longrightarrow & C^*_{U\cap V} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow\int & & \downarrow\int\bigoplus\int & & \downarrow\int & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^{*-r}(W) & \longrightarrow & \Omega^{*-r}(U)\bigoplus\Omega^{*-r}(V) & \longrightarrow & \Omega^{*-r}(U\cap V) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Lemme 2.5. *Supposons $(U_\alpha)_\alpha$ une partition par des ouverts de W : $W = \amalg_\alpha U_\alpha$.*

Le diagramme suivant est alors commutatif:

$$\begin{array}{ccc} C^*(M, M - W) & \xrightarrow{\varphi} & \amalg_\alpha C^* \\ \int\downarrow & & \downarrow \amalg_\alpha\int \\ \Omega^{*-r}(W) & \xrightarrow{\psi} & \amalg_\alpha \Omega^{*-r}(U_\alpha) \end{array}$$

(φ et ψ étant les morphismes de restrictions).

La preuve des Lemmes 2.4 et 2.5 se déduit de la naturalité de l'intégration le long de la fibre.

La démonstration du théorème se déduit de la même manière que celle faite dans [**8**, p. 352 et p. 197].

Il nous reste à montrer que l'isomorphisme précédent coïncide avec l'inverse de celui de Thom (voir Proposition 2.6).

2.2. Comparaison avec autre réalisation de l'isomorphisme de Thom.

Soit $(M, \pi, W, \mathbf{R^r})$ un fibré vectoriel réel C^∞, orienté, riemannien.

On définit l'algèbre différentielle graduée:

$$C^*(M, M - M_{1/2}) = \Omega^*(M) \bigoplus \Omega^{*-1}(M - M_{1/2})$$

muni de la différentielle

$$D(\beta, \gamma) = (d\beta, -d\gamma + \beta)$$

et du produit

$$(\beta, \gamma) \smile (\beta', \gamma') = (\beta \wedge \beta', \gamma \wedge \beta').$$

Il est facile de remarquer, puisque $M - M_{1/2}$ se rétracte par déformations sur SM, que l'homomorphisme de restriction de $C^*(M, M - W)$ vers $C^*(M, M - M_{1/2})$ induit un isomorphisme d'algèbre en cohomologie.

L'intégration le long de la fibre du paragraphe 2.1 se prolonge trivialement au complexe $C^*(M, M - M_{1/2})$. D'autre part, pour tout $\varepsilon \in]0, 1/2[$ on a une injection naturelle dans ce complexe de l'algèbre différentielle des formes différentielles à support "compact dans la direction de la fibre": $j_\varepsilon : \Omega^*_{\overset{\circ}{D}_\varepsilon}(\overset{\circ}{M}_\varepsilon) \hookrightarrow C^*(M, M - M_{1/2})$, définie par $j_\varepsilon(\beta) = (\beta, 0)$ le premier facteur désigne l'extension naturelle de β par zéro.

On remarque que j_ε, commute aux différentielles, et que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^*_{\overset{\circ}{D}_\varepsilon}(\overset{\circ}{M}_\varepsilon) \arrow[rr, "j_\varepsilon"] \arrow[dr, "\fint_{\overset{\circ}{D}_\varepsilon}"'] & & C^*(M, M - M_{1/2}) \arrow[dl, "\fint"] \\
& \Omega^{*-r}(W) &
\end{tikzcd}$$

On en déduit, en particulier, que l'application j_ε induit un isomorphisme d'algèbres en cohomologie et qu'on a un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
H^*_{\overset{\circ}{D}_\varepsilon}(\overset{\circ}{M}_\varepsilon) \arrow[rr, "H(j_\varepsilon)"] \arrow[dr, "\cong", "H(\fint_{\overset{\circ}{D}_\varepsilon})"'] & & H^*(M, M-W) \arrow[dl, "\cong"', "H(\fint)"] \\
& H^{*-r}(W) &
\end{tikzcd}$$

Soit maintenant V une variété différentiable, W une sous-variété fermée de V, dont le fibré normale $(N(W), \pi, W, \mathbf{R}^r)$ est orientable ($r = \dim V - \dim W$). En utilisant l'existence d'un voisinage tubulaire de W, on en déduit que $H^*(C^*(N(W), N(W) - W))$ s'identifie à $H^*(V, V - W; \mathbf{R})$, de telle façon que l'inverse de l'isomorphisme de Thom: $H^*(V, V - W; \mathbf{R}) \overset{\cong}{\to} H^{*-r}(W; \mathbf{R})$, est induit par l'application $\fint : (\beta, \gamma) \mapsto \fint_{D^r} \beta - \fint_{S^{r-1}} \gamma$.

Soit donc (U, π, W) un voisinage tubulaire de W dans V (U étant identifié à l'espace total du fibré normal $N(W)$, de telle façon que l'injection naturelle de W dans U s'identifie avec la section nulle du fibré vectoriel). On désigne par $MV(\mathcal{U})^*$ le complexe de Čech-De Rham associé au recouvrement ouvert de $V : \mathcal{U} = \{V - U_{1/2}, U\}$,

$$MV(\mathcal{U})^* = \Omega^*(V - U_{1/2}) \bigoplus \Omega^*(U) \bigoplus \Omega^{*-1}(U - U_{1/2})$$

avec la différentielle

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = (d\alpha, d\beta, -d\gamma + \beta - \alpha)$$

et la structure d'algèbre

$$(\alpha, \beta, \gamma) \smile (\alpha', \beta', \gamma') = (\alpha \wedge \alpha', \beta \wedge \beta', \gamma \wedge \beta' + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge \gamma').$$

On rappelle que l'injection canonique, $\delta_0 : \Omega^*(V) \hookrightarrow MV(\mathcal{U})^*$, $\delta_0 \Phi = (\Phi_{|V - U_{1/2}}, \Phi_{|U}, 0)$, induit un isomorphisme d'algèbre en cohomologie, $H^*(\delta_0) : H^*(V) \overset{\cong}{\to} H^*(MV(\mathcal{U})^*)$.

Notons i l'injection $C^*(U, U - U_{1/2}) \hookrightarrow MV(\mathcal{U})^*$, $i(\beta, \gamma) = (0, \beta, \gamma)$.

i commute aux différentielles, et induit donc un homomorhisme d'algèbres en cohomologie, $H^*(i) : H^*(V, V - W; \mathbf{R}) \to H^*(MV(\mathcal{U})^*)$.

On démontre alors facilement:

Proposition 2.6. *Le diagramme suivant commute:*

$$\begin{array}{ccccc}
H^{N-k}_{\overset{\circ}{D}_\varepsilon}(\overset{\circ}{U}_\varepsilon) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & H^{N-k}_{\overset{\circ}{D}_\varepsilon}(\overset{\circ}{U}_\varepsilon) & \xrightarrow{e} & H^{N-k}(V) \\
{\scriptstyle H(\oint_{\overset{\circ}{D}_\varepsilon})}\downarrow & & & & \cong\downarrow{\scriptstyle H^*(\delta_0)} \\
H^{n-k}(W) & \xleftarrow{H(\oint)} & H^{N-k}(V, V-W, \mathbf{R}) & \xrightarrow{H^*(i)} & H^{N-k}(MV(\mathcal{U})^*)
\end{array}$$

(e désigne l'extension naturelle, $\mathrm{id} =$ *identité,* $N = \dim V$*,* $n = \dim W$ *et* $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$*).*

Corollarie 2.7. *Si la classe de cohomologie* $[w]$ *d'une forme différentielle fermée* $w \in \Omega^*_{DR}(V)$*, coïncide avec la classe de cohomologie d'une hyperforme fermée* $(0, \beta, \gamma) \in MV(\mathcal{U})^*$*.*

Alors: la classe de cohomologie $[w]$ *possède un représentant dans n'importe quel voisinage de* W *dans* V*; autrement dit* $[w]$ *possède un résidu sur* W*, ou encore* $[w]$ *se localise au voisinage de* W*.*

Commentaires.

Etant donnée une sous-variété W d'une variété différentiable V dont le fibré normal est orientable. Par composition de l'isomorphisme de Thom: $H^*(W; \mathbf{R}) \overset{\cong}{\to} H^{*+r}(V, V-W; \mathbf{R})$, avec l'application naturelle: $H^{*+r}(V, V-W; \mathbf{R}) \to H^{*+r}(V, \mathbf{R})$, on aura une flèche naturelle:

$$H^*(W; \mathbf{R}) \to H^{*+r}(V, \mathbf{R}).$$

Dans certains problèmes géométriques de type "résidus" (consistant par exemple à localiser ou à calculer certains invariants topologiques de la variété ambiante V), cette flèche est utilisée pour lire certaines formules où "le lieu singulier" est lisse.

La proposition précédente nous donne deux réalisation de cette fléche à l'aide du complexe de Mayer-Vietoris. Ce qui donnera l'avantage d'éviter le choix de partition de l'unité dans les calculs.

3. Rappels sur les actions différentiables de groupes de Lie sur les fibrés vectoriels

3.1. Définitions.

Soit G un groupe de Lie opérant différentiablement à gauche sur un fibré vectoriel $\xi = (E \overset{\pi}{\to} V)$. Un tel fibré s'appellera G-fibré vectoriel.

On notera $\Gamma(\xi)$ le $C^\infty(V)$-module des sections de ξ.

Pour $g \in G$, $\sigma \in \Gamma(\xi)$, on définit $g.\sigma \in \Gamma(\xi)$ en posant:

$$(g.\sigma(x) = g\sigma(g^{-1}x) \text{ pour } x \in V.$$

Pour tout h élément de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G, on désignera par $\theta_h^\xi : \Gamma(\xi) \to \Gamma(\xi)$, l'opérateur défini par:

$$(\theta_h^\xi \sigma)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} ((\exp th).\sigma)(x), \text{ pour } x \in V.$$

S'il n'y a pas de confusion possible, cet opérateur sera noté θ_h.

Le champ de vecteurs fondamental sur V associé à $h \in \mathcal{G}$, sera désigné par $-X_h$, soit

$$(X_h)_x = -\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\exp th)x, \text{ pour } x \in V.$$

L'action de G sur V sera dite quasi-libre si en tout point $x \in V$, le groupe d'isotropie $G_x = \{g \in G / gx = x\}$ est un sous-groupe discret de G.

3.2. Propriétés (rappels).

1. $\theta_h(f\sigma) = (X_h f)\sigma + f(\theta_h\sigma)$, pour tout $h \in \mathcal{G}$, $\sigma \in \Gamma(\xi)$, et $f \in C^\infty(V)$.
2. Pour tout $h, k \in \mathcal{G}$ on a:

$$\text{i)} \quad \theta_{[h,k]} = \theta_h \circ \theta_k$$

$$\text{ii)} \quad X_{[h,k]} = [X_h, X_k]\,.$$

3. Si $\langle\ ,\ \rangle$ est une métrique riemannienne G-invariante sur ξ. Alors

$$X_h.\langle\sigma,\tau\rangle = \langle\theta_h\sigma,\tau\rangle + \langle\sigma,\theta_h\tau\rangle\,, \text{ pour tout } \sigma,\tau \in \Gamma(\xi).$$

4. i) ∇ est une connexion riemanienne si et seulement si

$$X.\langle\sigma,\tau\rangle = \langle\nabla_X\sigma,\tau\rangle + \langle\sigma,\nabla_X\tau\rangle$$

pour tout $\sigma, \tau \in \Gamma(\xi)$, et $X \in \chi(V) = \Gamma(\Gamma V)$.

ii) Si ∇ est G-invariante, alors on a:

$$\theta_h \circ \nabla_Y - \nabla_Y \circ \theta_h = \nabla_{[X_h,Y]} \text{ pour tout } Y \in \chi(V).$$

5. Pour tout ∇ connexion linéaire sur ξ, et $h \in \mathcal{G}$, on définit l'opérateur $S_h = \theta_h - \nabla_{X_h}$, on a alors:

i) $S_h \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(V)}(\Gamma(\xi))$, et par suite définit une section du fibré des endomorphismes de ξ. Soit $S_h \in \Gamma(\mathrm{End}\,\xi)$.

ii) Si la connexion ∇ préserve une métrique riemannienne G-invariante $\langle\ ,\ \rangle$, alors S_h est antisymétrique.

iii) Si ∇ est G-invariante, de courbure R, alors

$$\nabla S_h = i(X_h)R.$$

4. Lemme technique (existence d'une connexion spéciale)

Lemme 4.8. *Soit $\xi = (E \stackrel{\pi}{\to} V)$ un G-fibré vectoriel (où G est connexe) tel que l'action de G sur V soit quasi-libre.*

On suppose l'existence sur ξ:

- *d'une métrique riemannienne $\langle\ ,\ \rangle$, G-invariante,*
- *d'une connexion G-invariante ∇, préservant $\langle\ ,\ \rangle$, telle que $\nabla_{X_h} = \theta_h \quad \forall h \in \mathcal{G}$,*
- *d'une section σ de ξ partout non nulle, telle que $\theta_h\sigma = 0 \quad \forall h \in \mathcal{G}$.*

Alors il existe sur ξ une connexion G-invariante ∇°, préservant la métrique $\langle\ ,\ \rangle$, telle que:

$$\nabla^\circ_{X_h} = \theta_h \quad \forall h \in \mathcal{G}$$

et $\nabla^\circ\left(\frac{\sigma}{\|\sigma\|}\right) = 0$, *(où* $\|\sigma\| = \sqrt{\langle\sigma, \sigma\rangle}$*).*

Démonstration du lemme: G étant connexe et $\theta_h\sigma = 0$ pour tout $h \in \mathcal{G}$, on en déduit que la section σ est G-équivariante, et par suite le sous fibré vectoriel trivial de rang un $\mathcal{L} = (L \stackrel{\pi}{\to} V)$ (où $L = \amalg_{x\in V} L_x$, $L_x = \{t\sigma(x)/t \in \mathbf{R}\}$) est G-stable.

D'où l'existence d'un fibré vectoriel $\xi_0 = (E_0 \stackrel{\pi}{\to} V)$ supplémentaire orthogonal relatif à la métrique $\langle\ \ \rangle$, qui est G-stable, soit

$$\xi = \xi_0 \bigoplus \mathcal{L}.$$

On désignera alors par $p : \Gamma(\xi) \to \Gamma(\xi_0)$ l'opérateur de projection associé à cette décomposition.

Définissions ensuite ∇° connexion linéaire sur ξ, en posant:

$\nabla^\circ_X\tau = p(\nabla_X\tau)$ pour $X \in \chi(V)$ et $\tau \in \Gamma(\xi_0)$, et $\nabla^\circ_X\left(\frac{\sigma}{\|\sigma\|}\right) = 0.$

On vérifie facilement que ∇° préserve la métrique $\langle\ \ \rangle$. Montrer ensuite que ∇° est G-invariante revient à vérifier les deux propositions suivantes:

i)
$$\theta_h(\nabla^\circ_Y\tau) - \nabla^\circ_Y(\theta_h\tau) = \nabla^\circ_{[X_h,Y]}\tau$$
pour tout $h \in \mathcal{G}$, $Y \in \chi(V)$ et $\tau \in \Gamma(\xi_0)$

ii)
$$\theta_h\left(\nabla^\circ_Y\left(\frac{\sigma}{\|\sigma\|}\right)\right) - \nabla^\circ_Y\left(\theta_h\left(\frac{\sigma}{\|\sigma\|}\right)\right) = \nabla^\circ_{[X_h,Y]}\left(\frac{\sigma}{\|\sigma\|}\right).$$

La première proposition est satisfaite puisque ∇ est G-invariante et que l'opérateur θ_h commute avec p (ξ_0 et $\mathcal{L}$ sont G-stables).

Pour affirmer ii) il suffit de montrer que $\theta_h\left(\frac{\sigma}{\|\sigma\|}\right) = 0$ pour tout $h \in \mathcal{G}$.

Or nous avons

$$\theta_h\left(\frac{\sigma}{\|\sigma\|}\right) = X_h.\left(\frac{1}{\|\sigma\|}\right)\sigma$$

(car $\theta_h\sigma = 0$). D'où

$$\theta_h\left(\frac{\sigma}{\|\sigma\|}\right) = -\frac{1}{2\|\sigma\|^3}((X_h.\langle\sigma,\sigma\rangle)\sigma) = 0$$

(car ∇ préserve la métrique $\langle\ ,\ \rangle$ et $\nabla_{X_h}\sigma = \theta_h\sigma = 0$). ■

Remarque 4.9. L'application de ce lemme se verra au paragraphe suivant.

Corollaire 4.10. *Soit $\xi = E \xrightarrow{\pi} V$ un G-fibré vectoriel (où G est compact connexe), tel que l'action de G sur V soit quasi-libre.*

On suppose l'existence d'une section $\sigma \in \Gamma(\xi)$ partout non nulle et G-équivariante.

Alors il existe une métrique riemannienne $\langle\ ,\ \rangle$ G-invariante sur ξ, et une connexion riemannienne ∇ G-invariante, telles que: $\nabla\left(\frac{\sigma}{\|\sigma\|}\right) = 0$ et $\nabla_{X_h} = \theta_h$ pour tout $h \in \mathcal{G}$.

Exemple 4.11. Soit G un groupe de Lie compact opérant différentiablement sur une variété différentiable V; et soit W une sous-variété fermée de V, qui est G-stable.

Il existe alors ([**4**]) un voisinage tubulaire G-stable de W dans V, noté (U, π, W).

(On appelle ainsi les données:

- d'un voisinage ouvert G-stable U de W dans V,
- d'une métrique riemannienne G-invariante sur $N(W)$ fibré normal de W dans V,
- d'un difféomorphisme G-équivariant de $N(W)$ sur U échangeant la section nulle de $N(W)$ et l'inclusion naturelle de W dans U, $\pi : U \to W$ désignant la "rétraction locale" correspondante à la projection du fibré $N(W) \to W$ par ce difféomorphisme).

Désignons par η la restriction à $U - W$ du fibré tangent vertical $\mathrm{Ker}(d\pi)$. η est un G-fibré vectoriel possédant une section partout non nulle et G-équivariante. En effet, soit Z le champ de vecteurs transversal défini par le groupe à un paramètre $(t, z) \mapsto e^t.z$ de $\mathbf{R} \times (U - W)$ dans $(U - W)$, (le produit externe provient de la structure vectorielle existante sur les fibres de U). Z définit une section de η partout non nulle, qui est G-équivariante, puisque pour tout $g \in G$ et $z \in (U - W)$ on a:

$$Z_{gz} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (e^t(g.z)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (g.(e^t z)) = g.Z_z.$$

5. Formule de résidus et actions de groupes de Lie compacts

Soient K un groupe de Lie compact connexe de dimension s, $T^r = \mathbf{R^r}/\mathbf{Z^r}$ le tore réel de dimension r, $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$ un $K \times T^r$-fibré vectoriel, tels que:

(i) K opère quasi-librement sur V,

(ii) il existe un vecteur non nul $h_0 \in \mathbf{R^r}$, ($\mathbf{R^r}$ = l'algèbre de Lie de T^r), dont le champ de vecteurs fondamental associé X_{h_0} est transverse aux orbites de l'action de K sur $(V - \mathrm{Zéro}(X_{h_0}))$.

Remarque 5.12. Dans cette situation on démontre le théorème ci-dessous, qui lorsque K est le groupe unité on retrouve le résultat de Baum-Cheeger [**5**].

Remarque 5.13. Comme nous a été signalé par F. Gómez, les données ci-dessus sont aussi équivalentes à la donnée d'un $K \times T^q$-fibré vectoriel $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$ tel que:

(i) K groupe de Lie compact connexe opérant quasi-librement sur V,

(ii)' $\dim(K \times T^q)_x < q$, pour tout $x \in V - V^{T^q}$ (V^{T^q} étant le lieu des points fixes par l'action du tore T^q).

En effet,

Soit $h_0 \in \mathbf{R}^q$ tel que $\{\exp th_0 / t \in \mathbf{R}\}$ soit dense dans T^q. Alors $\mathrm{Zéro}(X_{h_0}) = V^{T^q}$ et X_{h_0} est transverse aux orbites de K dans $V - V^{T^q}$; puisque si X_{h_0} est tangent en x à l'orbite $K.x$, il en sera ainsi en tout point y de $K.x$, et par suite la courbe $t \mapsto \exp(th_0).x$ est continue dans $K.x$, d'où $T^q.x \subset K.x$, ce qui implique $(K \times T^q).x = K.x$; or $\dim(K.x) = \dim K$, on obtient alors $\dim(K \times T^q)_x = q$ ce qui contredit (ii)'.

Réciproquement, l'hypothèse (ii) implique l'existence d'un sous tore T^q de T^r tel que $\{\exp th_0/t \in \mathbf{R}\}$ soit dense dans T^q, et X_{h_0} est transverse aux orbites de K sur $V - V^{T^q}$. On a alors $\dim(K \times T^q)_x < q$ pour tout $x \in V - V^{T^q}$; en effet, l'action de K sur V étant quasi-libre, on en déduit que pour $x \in V - V^{T^q}$ on a $\dim(K \times T^q)_x \leq q$, supposons que $\dim(K \times T^q)_x = q$ alors $\dim(K \times T^q).x = \dim(K.x)$, d'où $(K \times T^q).x = K.x$, en particulier $T^q.x \subset K.x$, ce qui contredit le fait que X_{h_0} est transverse à $K.x$.

Exemple 5.14. Soit $T^q \times W \to W$ une action d'un tore T^q sur une variété différentiable W telle que sur $W - W^{T^q}$ l'action soit quasi-libre (c'est notamment le cas si $q = 1$). Soit H un sous groupe de Lie fini de T^q, et soit K un groupe de Lie compact connexe contenant H. Considérons alors l'espace topologique quotient de $K \times W$ par la relation d'equivalence:

$$(k, x) \sim (kh, h^{-1}.x) \text{ pour } h \in H, \quad (k \in K \text{ et } x \in W).$$

Posons alors $V = K \times_H W$ l'ensemble de ces classes d'equivalences $\overline{(k, x)}$. V est une variété différentiable, c'est en fait l'espace total d'un fibré localement trivial de fibre W et de base K/H. Le groupe de Lie $K \times T^q$ opère sur V par

$$(a, t).\overline{(k, x)} = \overline{(ak, tx)} \text{ pour } a \in K \text{ et } t \in T^q.$$

Il est alors facile de voir qu'une telle action est bien définie et qu'elle satisfait au conditions i) et ii) ci-dessus. On prendra alors pour $(E \xrightarrow{\pi} V)$ n'importe quel G-fibré au dessus de V, par exemple le fibré tangent à V.

Rappels. Soit V une variété différentiable orientée, sur laquelle un tore H opère différentiablement. Il est bien connu que chaque composante connexe du lieu des points fixes V^H est munie d'une structure de sous variété fermée orientée différentiable. (Il suffit, pour le voir, de penser à l'utilisation de cartes géodésiques associées à une métrique riemannienne H-invariante sur V, ou plus généralement le modèle de Koszul. Ils permettent en effet de décrire l'action à partir de représentations linéaires de groupes, respectivement au voisinage d'un point ou au voisinage d'une orbite.) De plus, on peut vérifier que la codimension de telles sous-variétés est paire, et ceci en exhibant pour x élément de V^H, un automorphisme antisymétrique de l'espace vectoriel normal en x à la composante connexe de V^H contenant ce point.

Théorème 5.15. *Soit $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$ un $K \times T^r$-fibré vectoriel comme ci-dessus (où V est supposée orientée, non nécessairement compacte, de dimension N). Alors*

a) *Les classes caractéristiques du fibré ξ de dimension supérieure ou égale à $(N - s + 1)$ sont nulles.*

b) *Les classes caractéristiques de dimension égale à $(N - s)$ ont un résidu sur Zéro(X_{h_0}).*

c) *Si $\varphi(\xi) \in H^{2l}(V)$ désigne une classe caractéristique du fibré vectoriel ξ, de dimension $2l = N - s$, alors*

$$\varphi(\xi) = \sum_{i\in I} T_i^* \left[\left(\frac{\varphi^{h_0}(\xi_i)}{\chi_{m_i}^{h_0}(N_i)} \right)_{2l-2m_i} \right]$$

(avec: $-N = \dim V$,

- *Zéro$(X_{h_0}) = \amalg_{i\in I} W_i$, W_i composante connexe de Zéro(X_{h_0}) de dimension égale à $N - 2m_i$.*
- *$(\beta)_{2l-2m_i}$ désigne la composante de degré $2l - 2m_i$ de la forme différentielle fermée β.*
- *$[(\beta)_{2l-2m_i}]$ désigne la classe de cohomologie de ce cocycle.*
- *$T_i^* : H^{*-2m_i}(W_i) \to H^*(V)$ est la composée de l'isomorphisme de Thom $H^{*-2m_i}(W_i) \to H^*(V, V - W_i)$ et de la flèche naturelle $H^*(V, V - W_i) \to H^*(V)$.*
- *$\varphi^{h_0}(\xi_i)$ désigne l'homorphisme de Chern-Weil généralisé (cf. [**7**]) associé au T^r-fibré vectoriel ξ_i = restriction de ξ à W_i.*
- *χ_{m_i} est le polynôme pfaffien défini sur l'algèbre de Lie des matrices antisymétriques $so(2m_i)$.*
- *N_i = le fibré vectoriel normal de W_i dans V).*

Démonstration: a) se déduit immédiatement de (i).

Posons $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K} \bigoplus \{th_0/t \in \mathbf{R}\}$, c'est une sous algèbre de Lie de $\mathcal{K} \bigoplus \mathbf{R^r}$ = algèbre de Lie de $K \times T^r$, elle engendre donc un groupe de Lie connexe K_0 immergé dans $K \times T^r$ de dimension égale à $s + 1$.

Pour tout $x \in V$, on vérifie aisément que

$$\dim(K_0)_x = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in V - \text{Zéro}(X_{h_0}) \\ 1 & \text{si } x \in \text{Zéro}(X_{X_{h_0}}). \end{cases}$$

L'action de K_0 sur le fibré ξ étant induite par celle de $K \times T^r$, on en déduit l'existence de métriques et connexions invariantes par K_0 sur ξ. Et par suite, les classes caractéristiques de ξ de dimension $N - \dim K_0 + 1 = N - s$ se localisent sur Zéro(X_{h_0}) c'est à dire on a b).

c) La décomposition de Zéro(X_{h_0}) en composantes connexes s'écrit:

Zéro$(X_{h_0}) = \amalg_{i \in I} W_i$, (chaque W_i est une sous variété connexe, orientée, fermée dans V, de codimension $2m_i$).

On remarque que Zéro(X_{h_0}) est $K \times T^r$-stable, et que chaque composante connexe W_i l'est aussi puisque $K \times T^r$ est connexe. Désormais, on pose: $G = K \times T^r$.

Pour tout $i \in I$, on désignera par (U_i, π_i, W_i) un G-voisinage tubulaire de W_i dans V (voir 4.11).

On suppose que les ouverts U_i sont disjoints deux à deux. (De tels données existent toujours dès lors que G est compact et W_i G-stable, voir [**4**].)

On a ainsi un recouvrement naturel de V par deux ouverts G-stables: $\mathcal{U} = \{U^\circ, U^1\}$ avec

$$U^\circ = V - \text{Zéro}(X_{h_0})$$
$$U^1 = \coprod_{i \in I} U_i.$$

Le complexe de Mayer-Vietoris associé à ce recouvrement est donné par:

$$MV(\mathcal{U})^* = \Omega^*(U^\circ) \bigoplus \Omega^*(U^1) \bigoplus \Omega^{*-1}(U^\circ \cap U^1)$$
$$\left[= \Omega^*(V - \text{Zéro}(X_{h_0})) \bigoplus \Big(\bigoplus_{i \in I} \Omega^*(U_i) \Big) \bigoplus \Big(\bigoplus_{i \in I} \Omega^{*-1}(U_i - W_i) \Big) \right]$$

avec la différentielle

$$D(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_{\circ 1}) = (d\lambda_\circ, d\lambda_1, -d\lambda_{\circ 1} + \lambda_1 - \lambda_0)$$

(d désignant la différentielle de De Rham).

Ce complexe différentiel permet de réaliser la cohomologie singulière réelle de V. Un élément de $MV(\mathcal{U})^*$ sera appelé "hyperforme de degré $*$", relativement au recouvrement $\mathcal{U}$.

Notons $I^*0(q)$ l'algèbre des polynômes sur l'algèbre de Lie des matrices antisymétriques $so(q)$, invariants par la représentation adjointe $adO(q)$, (où $q = \operatorname{rang} \xi$), graduée en dimension paire.

Pour tout couple de connexions $\{\nabla^\circ, \nabla^1\}$:
∇° connexion riemannienne sur le fibré vectoriel riemannien

$$\xi^\circ = (E_{|U^\circ} \xrightarrow{\pi} U^\circ).$$

∇^1 connexion riemannienne sur le fibré vectoriel riemannien

$$\xi^1 = (E_{|U^1} \xrightarrow{\pi} U^1).$$

On désignera par

$$\mu_{w^\circ w^1}(\varphi) = (\triangle_{w^\circ}(\varphi), \triangle_{w^1}(\varphi), \triangle_{w^\circ w^1}(\varphi))$$

(où $\triangle_{w^\alpha}$ désigne l'homomorhisme de Chern-Weil usuel, $(\alpha = 0, 1)$. $\triangle_{w^\circ w^1}$ c'est l'opérateur différence de Bott associé au couple de connexions $\{\nabla^\circ, \nabla^1\}$; il satisfait l'égalité $d \circ \triangle_{w^\circ w^1} = \triangle_{w^1} - \triangle_{w^\circ}$ (cf. [**3**])).

La classe de cohomologie $[\mu_{w^\circ w^1}(\varphi)] \in H^{2l}(V)$ est indépendante du choix du couple (∇°, ∇^1), et permet de définir la classe caractéristique $\varphi(\xi) \in H^{2l}(V)$ du fibré vectoriel ξ associée au polynôme φ.

S'il est possible de choisir ∇° comme φ-connexion (c'est à dire $\triangle_{w^\circ}(\varphi) = 0$), alors (cf. 2.2) on aura:

$$\varphi(\xi) = \sum_{i \in I} T_i^* \left[\left(\fint_{D^{2m_i}} \triangle_{w^1}(\varphi) - \fint_{S^{2m_i}} \triangle_{w^\circ w^1}(\varphi) \right) \right],$$

- $(-T_i^* : H^{*-2m_i}(W_i) \to H^*(V)$ est la composée de l'isomorphisme de Thom $H^{*-2m_i}(W_i) \to H^*(V, V - W_i)$ et de la flèche naturelle $H^*(V, V - W_i) \to H^*(V)$.
- $\fint_{D^{m_i}}$ désigne l'opérateur d'intégration le long de la fibre associé au fibré en disques fermés du fibré vectoriel riemannien $(U_i \xrightarrow{\pi_i} W_i)$.
- $\fint_{S^{m_{i-1}}}$ l'opérateur associé au fibré en sphères du fibré vectoriel riemannien $(U_i \xrightarrow{\pi_i} W_i)$).

Ainsi pour résoudre la question c), il suffit de faire un choix judicieux des connexions ∇° et ∇^1 de façon que:

$$(*) \qquad \triangle_{w^\circ}(\varphi) = 0$$

$$(**) \quad \left[\left(\fint_{D^{m_i}} \triangle_{w^1}(\varphi) - \fint_{S^{m_{i-1}}} \triangle_{w^\circ w^1}(\varphi) \right) \right] = \left[\left(\frac{\varphi^{h_0}(\xi_i)}{X_{m_i}^{h_0}(N_i)} \right)_{2l-2m_i} \right]$$

pour tout $i \in I$, c'est ce qu'on va établir.

Pour tout $i \in I$, on se donne désormais un isomorphisme G-équivariant

$$\Phi_i = \xi_{U_i} \overset{\cong}{\to} \pi_i^1(\xi_i)$$

(où $\xi_{U_i} = (E_{|U_i} \xrightarrow{\pi} U_i)$ et $\xi_i = \xi_{|W_i}$), tel que par restriction des deux membres de l'isomorphisme à ξ_i on obtienne l'identité.

Munissons ensuite le fibré vectoriel $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$ d'une métrique riemannienne G-invariante $\langle\ ,\ \rangle$, dont la restriction à ξ_{U_i} coïncide, via l'isomorphisme Φ_i, avec l'image réciproque par π_i de sa restriction à ξ_i (ce qui est possible: un argument de partition G-invariante de l'unité le montre).

Munissons ξ d'une connexion riemannienne G-invariante ∇^1, dont la restriction à ξ_{U_i} coïncide, via l'isomorphisme Φ_i avec l'image réciproque par π_i de sa restriction à ξ_i, et telle que $\nabla^1_{X_k} = \theta_k$ pour tout $k \in \mathcal{K}$.

Choisissons d'autre part une métrique riemannienne G-invariante $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ sur le fibré tangent à U°, telle que X_{h_0} soit orthogonal à X_k pour tout $k \in \mathcal{K}$, et définissons $\alpha \in \Omega^1(U^\circ)$ par:

$$\alpha(X) = \frac{\langle\langle X, X_{h_0}\rangle\rangle}{\langle\langle X_{h_0}, X_{h_0}\rangle\rangle} \text{ pour } X \in \chi(U^\circ).$$

Désignons par ∇° la connexion linéaire sur $\xi^\circ = (E_{/U^\circ} \xrightarrow{\pi} U^\circ)$ définie par:

$$\nabla^\circ = \nabla^1 + \alpha \bigotimes S^1_{h_0}$$

(où $S^1_{h_0} = \theta_{h_0} - \nabla^1_{X_{h_0}}$) (c'est à dire pour $X \in \chi(U^\circ)$, et $\sigma \in \Gamma(\xi^\circ)$ on a

$$\nabla^\circ_X \sigma = \nabla^1_X \sigma + \alpha(X)(\theta_{h_0}\sigma - \nabla^1_{X_{h_0}}\sigma)).$$

- ∇° préserve la métrique $\langle\ \rangle$: pour $X \in \chi(U^\circ), \sigma, \tau \in \Gamma(\xi^\circ)$ on a l'égalité

$$X.\langle\sigma,\tau\rangle = \langle\nabla^\circ_X\sigma,\tau\rangle + \langle\sigma,\nabla^\circ_X\tau\rangle$$

en effet, si X est orthogonal à X_{h_0} alors $\nabla^\circ_X = \nabla^1_X$ et l'égalité est vérifiée puisque ∇^1 est riemannienne. Et pour $X = X_{h_0}$, l'égalité est encore satisfaite puisque $\nabla^\circ_{X_{h_0}} = \theta_{h_0}$ et la métrique $\langle\ \rangle$ est G-invariante.

- ∇° est G-invariante: pour $h \in g$, $X \in \chi(U^\circ)$ on a

$$(\varepsilon) \qquad [\theta_h, \nabla^\circ_X] = \nabla^\circ_{[X_h,X]}$$

en effet, si X est orthogonal à X_{h_0} alors $[X_h, X]$ l'est aussi puisque la métrique $\langle\ \rangle$ est G-invariante et $[X_h, X_{h_0}]$ est nul, d'où $\nabla^\circ_{[X_h,X]} =$

$\nabla^1_{[X_h,X]}$ et $\nabla^\circ_X = \nabla^1_X$ et par suite (ε) en découle puisque ∇° est G-invariante. Et pour $X = X_{h_0}$, l'égalité (ε) est encore satisfaite puisque h_0 appartient au centre de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$.

- ∇° est une φ-connexion: ∇° étant G-invariante, on en déduit que $\nabla^\circ(\theta_h - \nabla^\circ_{X_h}) = i(X_h)R^\circ$ pour tout $h \in g$ (R° désigne la courbure de ∇°) d'où $i(X_{h_0})R^\circ = 0$ et $i(X_h)R^\circ = 0$ pour tout $k \in \mathcal{K}$, ceci implique que $i(X_{h_0}) \triangle_{w^\circ}(\varphi) = 0$ et $i(X_k) \triangle_{w^\circ}(\varphi) = 0$ pour tout $k \in \mathcal{K}$.

On en déduit que $\triangle_{w^\circ}(\varphi) = 0$ (puisque $\dim \triangle_{w^\circ}(\varphi) = \dim V - \dim \mathcal{K}$).

D'autre part, étant donnée la naturalité de l'homomorphisme de Chern-Weil, la restricton de la forme différentielle $\triangle_{w^\circ}(\varphi)$ à U_i, $i \in I$, coïncide avec l'image réciproque par π_i de sa restriction à W_i. On en déduit que $\fint_{D^{2m_i}} \triangle_{w^1}(\varphi) = 0$ pour tout $i \in I$.

Ainsi le problème revient à démontrer:

$$\left[\fint_{S^{2m_i-1}} (-\triangle_{w^\circ w^1}(\varphi))\right] = \left[\left(\frac{\varphi^{h_0}(\xi_i)}{X^{h_0}_{m_i}(N_i)}\right)_{2l-2m_i}\right],$$

pour tout $i \in I$.

Or l'opérateur différence de Bott est donné par:

$$-\triangle_{w^\circ w^1}(\varphi) = \fint_{[0,1]} \varphi(\widetilde{R}, \widetilde{R}, \dots, \widetilde{R}).$$

$\widetilde{R}$ désignant la courbure de la connexion $\widetilde{\nabla} = t\nabla^\circ + (1-t)\nabla^1$ définie sur le fibré vectoriel

$$\xi_{(U_i-W_i)} \times [0,1] = (E_{|(U_i-W_i)} \times [0,1] \overset{\pi\times\mathrm{id}}{\to} (U_i - W_i) \times [0,1]);$$
$$\text{on a: } \widetilde{\nabla} = \nabla^1 + t(\nabla^\circ - \nabla^1) = \nabla^1 + t\alpha \bigotimes S^1_{h_0},$$

d'où $\widetilde{R} = R^1 + d(t\alpha) \bigotimes S^1_{h_0}$ (car $\nabla^1 S^1_{h_0} = i(X_{h_0})R^1 = i(X_{h_0})\pi_i^*\overline{R}^1$, où $\overline{R}^1$ désignant la courbure de la connexion $\overline{\nabla}^1$ = restriction de ∇^1 à W_i, et par suite $\nabla^1 S^1_{h_0} = 0$ puisque X_{h_0} est projetable sur 0).

On en déduit:

$$\int\!\!\!\!\!\!/_{[0,1]} \varphi(\widetilde{R}, \widetilde{R}, \dots, \widetilde{R})$$
$$= \int\!\!\!\!\!\!/_{[0,1]} (\textstyle\sum_{j=0}^{l} C_l^i \varphi(\underbrace{R^1, \dots, R^1}_{j}, \underbrace{S_{h_0}^1, \dots, S_{h_0}^1}_{l-j}) \wedge (dt \wedge \alpha + t.d\alpha)^{l-j})$$
$$= \int\!\!\!\!\!\!/_{[0,1]} (\textstyle\sum_{j=0}^{l} C_l^i \varphi(\underbrace{R^1, \dots, R^1}_{j}, \underbrace{S_{h_0}^1, \dots, S_{h_0}^1}_{l-j}) \wedge (l-j)dt \wedge \alpha \wedge (t.d\alpha)^{l-j-1})$$
$$= \int\!\!\!\!\!\!/_{[0,1]} (\textstyle\sum_{j=0}^{l} C_l^i (l-j)t^{l-j-1} dt \wedge (\varphi(\underbrace{R^1, \dots, R^1}_{j}, \underbrace{S_{h_0}^1, \dots, S_{h_0}^1}_{l-j})) \wedge \alpha \wedge (d\alpha)^{l-j-1})$$
$$= \textstyle\sum_{j=0}^{l} C_l^i \varphi(\underbrace{R^1, \dots, R^1}_{j}, \underbrace{S_{h_0}^1, \dots, S_{h_0}^1}_{l-j}) \wedge \alpha \wedge (d\alpha)^{l-j-1}$$

autrement dit, $-\triangle_{w^\circ w^1}(\varphi)$ est la composante de degré $(2l-1)$ de la forme différentielle hétérogène

$$\varphi(R^1 + S_{h_0}^1, \dots, R^1 + S_{h_0}^1) \wedge \left(\frac{\alpha}{1 - d\alpha}\right)$$

c'est à dire

$$-\triangle_{w^\circ w^1}(\varphi) = \left(\varphi(R^1 + S_{h_0}^1) \wedge \left(\frac{\alpha}{1 - d\alpha}\right)\right)_{2l-1}.$$

L'opérateur $S_{h_0}^1$ en tant que section du fibré vectoriel des endomorphismes de ξ_{U_i} coïncide, via l'isomorphisme Φ_i, avec l'image réciproque par π_i de sa restriction $\overline{S}_{h_0}^1$ au fibré des endomorphismes de ξ_i, en effet:

Les deux sections $S_{h_0}^1$ et $\pi^*\overline{S}_{h_0}^1$ coïncident en-dessus de W_i, de plus on a

$$\nabla^1 S_{h_0}^1 = i(X_{h_0})R^1 = 0 \text{ sur } U_i,$$

et $\nabla^1(\pi_i^*\overline{S}_{h_0}^1) = \pi_i^*\overline{\nabla}^1.\pi_i^*\overline{S}_{h_0}^1 = \pi_i^*(\overline{\nabla}^1\overline{S}_{h_0}^1) = \pi_i^*(0) = 0$ ($\overline{\nabla}^1$ désignant la restriction de ∇^1 à W_i). Le transport par parallélisme induit par la connexion ∇^1 implique que les deux sections coïncident partout.

Finalement, on peut écrire:

$$(E) \qquad -\triangle_{w^\circ w^1}(\varphi) = \left(\left(\frac{\alpha}{1 - d\alpha}\right) \wedge \pi^*\varphi(\overline{R}^1 + \overline{S}_{h_0}^1)\right)_{2l-1}$$

d'où

$$\left[\fint_{S^{2m_i-1}}(-\triangle_{w^\circ w^1}(\varphi))\right] = \left[\left(\varphi(\overline{R}^1+\overline{S}^1_{h_0})\wedge\left(\fint_{S^{2m_i-1}}\frac{\alpha}{1-d\alpha}\right)\right)_{2l-2m_i}\right]$$
$$= \left(\varphi^{h_0}(\xi_i).\left[\fint_{S^{2m_i-1}}\frac{\alpha}{1-d\alpha}\right]\right)_{2l-2m_i}.$$

Remarque 5.16. La forme différentielle $\fint_{S^{2m_i-1}}\frac{\alpha}{1-d\alpha}$ est fermée, en effet $i(X_{h_0})d\alpha = 0$ car α est G-invariante et $i(X_{h_0})\alpha = 1$, d'où $\fint_{S^{2m_i-1}}\frac{\alpha}{1-d\alpha} = 0$ puisque le champ de vecteur X_{h_0} est tangent aux fibres de $(U_i \overset{\pi_i}{\to} W_i)$, et partout non nul sur $U_i - W_i$.

Lemme 5.17.

$$\left[\fint_{S^{2m_i-1}}\frac{\alpha}{1-d\alpha}\right] = \frac{1}{\chi_{m_i}(R^{N_i}+\theta^{N_i}_{h_0})}.$$

R^{N_i} désignant la courbure d'une connexion riemannienne G-invariante sur N_i = fibré normale à W_i dans V. ($\theta^{N_i}_{h_0}$ est section du fibré des endomorphismes antisymétriques de N_i, puisque le tore engendré par h_0 opère trivialement sur W_i.)

Démonstration du lemme: F. Gómez avait donné une démonstration de ce lemme en utilisant la partition de l'unité, le théorème de Stokes et la démonstration du théorème de Gauss-Bonnet-Chern. Nous montrons en fait, sans partition de l'unité, qu'en utilisant l'opérateur différence de Bott que ce lemme se déduit du théorème de Gauss-Bonnet-Chern.

Il s'agit d'établir l'égalité suivante:

$$\left[\fint_{S^{2m_i-1}}\left(\frac{\alpha}{1-d\alpha}\wedge\pi_i^*\chi_{m_i}(R^{N_i}+\theta^{N_i}_{h_0})\right)\right] = 1$$

ou encore les 2 identités suivantes:

i) $\left[\fint_{S^{2m_i-1}}\left(\frac{\alpha}{1-d\alpha}\wedge\pi_i^*\chi_{m_i}(R^{N_i}+\theta^{N_i}_{h_0})\right)_{2m_i-1}\right] = 1,$

ii) $\left[\fint_{S^{2m_i-1}}\left(\frac{\alpha}{1-d\alpha}\wedge\pi_i^*\chi_{m_i}(R^{N_i}+\theta^{N_i}_{h_0})\right)_{2j+1}\right] = 0$, pour tout $j \geq m_i$.

Désignons par η_i la restriction à $U_i - W_i$ du fibré tangent vertical $\mathrm{Ker}(d\pi_i)$. Il s'identifie canoniquement au fibré image réciproque de N_i par l'application $\mathring{\pi}_i = \pi_i|_{(U_i-W_i)}$.

Le G-fibré vectoriel η_i posséde Z_i (= champ de vecteurs transversal) comme section partout non nulle et G équivariante, (cf. 4.11). Après avoir muni ce G-fibré vectoriel de la métrique riemannienne image réciproque de celle existante sur N_i, on peut le munir de 3 connexions riemanniennes G-invariante:

$(*)$ $\nabla^i = \overset{\circ}{\pi}_i \nabla^{N_i}$, connexion image réciproque d'une connexion riemannienne G-invariante ∇^{N_i} choisie sur N_i,

$(**)$ $\nabla^{i\circ} = \nabla^i + \alpha \bigotimes S^i_{h_0}$, avec $S^i_{h_0} = \theta^{\eta_i}_{h_0} - \nabla^i_{X_{h_0}}$,

$(***)$ ∇^{Z_i}, connexion riemannienne G-invariante préservant le champ de vecteurs transversal normalisé $\frac{Z_i}{|Z_i|}$, telle que $\nabla^{Z_i}_{X_{h_0}} = \theta^{\eta_i}_{h_0}$, (ce dernier choix est possible car K_0 opère quasi-librement sur $U_i - W_i$, cf. Lemme 4.8).

En désignant par $\triangle_{w^i w^{i\circ}}$ (resp. $\triangle_{w^{i\circ} w^{Z_i}}$ et $\triangle_{w^{Z_i} w^i}$) l'opérateur différence de Bott associé au couple de connexions $\{\nabla^i, \nabla^{i\circ}\}$ (resp. $\{\nabla^{i\circ}, \nabla^{Z_i}\}$ et $\{\nabla^{Z_i}, \nabla^i\}$), on a: $\triangle_{w^i w^{i\circ}}(\chi_{m_i}) + \triangle_{w^{i\circ} w^{Z_i}}(\chi_{m_i}) + \triangle_{w^{Z_i} w^i}(\chi_{m_i})$ est un cobord, d'où

$$\left[⨍_{S^{2m_i-1}} (\triangle_{w^i w^{i\circ}}(\chi_{m_i}) + \triangle_{w^{i\circ} w^{Z_i}}(\chi_{m_i}) + \triangle_{w^{Z_i} w^i}(\chi_{m_i}) \right] = 0,$$

or d'après le théorème de Gauss-Bonnet-Chern ([**9**]) on a:

$$⨍_{S^{2m_i-1}} \triangle_{w^i w^{Z_i}}(\chi_{m_i}) = 1.$$

D'autre part, le même calcul qui nous a permis de déduire la formule (E), nous permet d'affirmer que:

$$\triangle_{w^i w^{i\circ}}(\chi_{m_i}) = \left(\frac{\alpha}{1 - d\alpha} \wedge \pi_i^* \chi_{m_i}(R^{N_i} + \theta^{N_i}_{h_0}) \right)_{2j-1}.$$

Pour établir i), il suffit donc de montrer que:

$$⨍_{S^{2m_i-1}} \triangle_{w^{i\circ} w^{Z_i}}(\chi_{m_i}) = 0,$$

en effet

$$\triangle_{w^{i\circ} w^{Z_i}}(\chi_{m_i}) = ⨍_{[0,1]} \chi_{m_i}((m_i \underbrace{\widetilde{R}, \dots, \widetilde{R}}).$$

$\widetilde{R}$ désignant la courbure de la connexion $\widetilde{\nabla} = t\nabla^{i\circ} + (1-t)\nabla^{Z_i}$ définie sur le fibré vectoriel $p^{-1}(\eta_i)$ = fibré image réciproque de η_i par la projection naturelle $p : (U_i - W_i) \times [0,1] \to U_i - W_i$.

En munissant la variété $(U_i - W_i) \times [0,1]$ de l'action $g.(x,t) = (g.x,t)$ pour $g \in G$, $x \in (U_i - W_i)$, et $t \in [0,1]$, et le fibré $p^{-1}(\eta_i)$ de l'action image réciproque; on en déduit que la projection p devient G-équivariante et la connexion $\widetilde{\nabla}$ devient G-invariante et préservant la métrique image réciproque. De plus, on a: $\widetilde{\nabla}_{X_{h_0}} = \theta(h_0)$ car $\nabla^{i\circ}_{X_{h_0}} = \theta_{h_0}$ et $\nabla^{Z_i}_{X_{h_0}} = \theta_{h_0}$, d'où $i(X_{h_0})\widetilde{R} = 0$ et par suite $i(X_{h_0})\chi_{m_i}(\widetilde{R}) = 0$ et $i(X_{h_0}) \triangle_{w^{i\circ}w^{Z_i}} (\chi_{m_i}) = 0$ (car $i(X_{h_0}) \circ \fint_{[0,1]} = \fint_{[0,1]} \circ i(X_{h_0})$).

Le champ de vecteurs X_{h_0} étant tangent aux fibres de la fibration $(U_i - W_i) \xrightarrow{\pi_i} W_i$, partout non nul sur $U_i - W_i$, on en déduit que

$$\fint_{S^{2m_i-1}} \triangle_{w^{i\circ}w^{Z_i}}(\chi_{m_i}) = 0.$$

Il reste à vérifier ii).

La courbure $R^{i\circ}$ de la connexion $\nabla^{i\circ}$ est donnée par:

$$R^{i\circ} = R^i + d\alpha \bigotimes S^i_{h_0}$$

d'où $\chi_{m_i}(R^{i\circ}) = \chi_{m_i}(R^i + S^i_{h_0}) \wedge \left(\frac{1}{1-d\alpha}\right)_{2m_i}$ et par suite

$$\chi_{m_i}(R^{i\circ}) \wedge \frac{\alpha}{1-d\alpha} = \sum_{j \geq m_i} \left(\frac{\alpha}{1-d\alpha} \wedge \pi_i^* \chi_{m_i}(R^{N_i} + \theta^{N_i}_{h_0})\right)_{2j+1}$$

ainsi ii) est équivalente à

$$\left[\fint_{S^{2m_i-1}} \left(\triangle_{w^{i\circ}}(\chi_{m_i}) \wedge \frac{\alpha}{1-d\alpha}\right)\right] = 0$$

or

$$\triangle_{w^{i\circ}}(\chi_{m_i}) = d \triangle_{w^{i\circ}w^{Z_i}} (\chi_{m_i})$$

d'où

$$\left[\fint_{S^{2m_i-1}} \left(\triangle_{w^{i\circ}}(\chi_{m_i}) \wedge \frac{\alpha}{1-d\alpha}\right)\right] = \left[\fint_{S^{2m_i-1}} \left(\triangle_{w^{i\circ}w^{z_i}}(\chi_{m_i}) \wedge \frac{d\alpha}{1-d\alpha}\right)\right],$$

d'autre part, puisque $i(X_{h_0}) \triangle_{w^{i\circ}w^{z_i}} (\chi_{m_i}) = 0$ et $i(X_{h_0})d\alpha = 0$, on en déduit que le second membre de l'égalité ci-dessus est nul.

Ceci achève la démonstration du lemme. ■

Remerciements. Je tiens à exprimer ici ma reconnaissance au Professeur D. Lehmann, pour avoir suivi la progression de ce travail. Mes remerciements vont aussi au Professeur F. Gómez pour les remarques intéressantes qu'il m'a faites sur le manuscrit.

Références

1. A. Abouqateb, Isomorphisme de Thom et Théorème de De Rham sur les variétés stratifiées, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **313** (1991), 611–614.
2. N. Alamo et F. Gómez, Smooth toral actions on principal bundles and characteristic classes, in "*Differential Geometry*," (Proceedings, Peñíscola, 1988), Lecture Notes in Math. **1410**, 1989, pp. 1–26.
3. R. Bott, "*Lectures on characteristic classes and foliations*," Notes by Laurence Conlon, Springer, Lecture Notes in Math. **279**, 1972.
4. G. E. Bredon, "*Introduction to compact transformation Groups*," Academic Press, New York, 1972.
5. P. Baum et J. Cheeger, Infinitesimal isometries and Pontryagin numbers, *Topology* **8** (1969), 173–193.
6. R. Bott et LW. Tu, "*Differential forms in algebraic topology*," Graduate texts in Mathematics, Springer, 1982.
7. F. Gómez, A residue formula for characteristic classes, *Topology* **21(I)** (1982), 101–124.
8. W. Greub, S. Halperin et R. Vanstone, "*Connections, curvature, and cohomology*," Vol. I, Academic Press, 1972.
9. W. Greub, S. Halperin et R. Vanstone, "*Connections, curvature, and cohomology*," Vol. II, Academic Press, 1973.
10. G. Hochschild, "*The structure of Lie groups*," Holden-Day, San Francisco, London, Amsterdam, 1965.
11. D. Lehmann, Classes caractéristiques résiduelles. Differential Geometry and its applications, Proc. Conf. August 27-September 2, 1989, Brno, Czechoslovakia, World Scientific, Singapore, 1990, pp. 85–108.
12. D. Lehmann, Variétés stratifiées C^∞, Intégration de Čech-De Rham et théorie de Chern-Weil. Geometry and Topology of submanifolds, II. Poc. Conf., 30 May-3 June, 1988, Avignon, France, World Scientific, 1990.

13. E. H. Spanier, “*Algebraic topology*,” McGraw Hill, 1966.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences et Techniques
B.P. 618 Gueliz
Marrakech
MAROC

e-mail: fstg@cybernet.net.ma (subject: Abouqateb)

Primera versió rebuda el 10 d'abril de 1997,
darrera versió rebuda el 12 de juny de 1997