Topología Diferencial

Asignatura Optativa de Segundo Ciclo

Licenciatura de Matemáticas

Prof. Fernando Etayo Gordejuela

Índice

1. Una motivación para la Topología Diferencial

1.1. Variedades

La Topología Diferencial estudia las propiedades globales de las *variedades diferenciables*. Las variedades diferenciables se pueden entender como generalización "natural" de las superficies regulares inmersas en $\mathbb{R}^3$.

La expresión superficies regulares inmersas en $\mathbb{R}^3$ consta de dos partes, que admiten generalización en diferente sentido:

- Una **superficie regular** S es un conjunto tal que *localmente es superficie simple*, esto es, tal que cada punto $p \in S$ admite un entorno $V \subset S$ y una superficie simple $f : U \to V$ con $p \in \mathrm{im}(f) = V$. Una tal superficie simple se llama una *carta* de S en p. Así, la superficie regular es una colección de cartas, que son homeomorfismos entre abiertos del plano $\mathbb{R}^2$ y abiertos de S.

  Esta idea se puede generalizar del siguiente modo: una *variedad diferenciable (abstracta) M* será un conjunto que admita una colección de cartas, que son homeomorfismos entre abiertos del espacio $\mathbb{R}^n$ y abiertos de M.

- Las superficies regulares se obtienen como **subconjuntos de** $\mathbb{R}^3$. De hecho, por ejemplo, el conjunto de ceros de una función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una superficie regular si la jacobiana tiene rango máximo siempre. Por tanto, podríamos tratar de generalizar esta noción y estudiar las *variedades diferenciables (inmersas)* como subconjuntos de los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$, sujetos a ciertas condiciones.

En el curso, merced al teorema de inmersión de Whitney, veremos que ambas nociones son equivalentes entre sí. Sin embargo nos parece preferible comenzar por la primera de ellas, porque permite dotar de estructura de variedad diferenciable a ciertos objetos matemáticos de modo mucho más sencillo que empleando la segunda definición.

1.2. ¿Por qué generalizar?

Entre los matemáticos existe la "obsesión" de generalizar, obteniendo las definiciones y los teoremas aplicables en mayor número de casos. Veamos un ejemplo histórico: nadie tiene dificultad en interpretar las siguientes expresiones matemáticas:

x	equis
x^2	equis al cuadrado
x^3	equis al cubo
x^4	equis a la cuarta
x^5	equis a la quinta

¿Cuál es el "salto mental" que se da en esa tabla? El que permite pasar de x^3 a x^4: si un segmento mide x, el área del cuadrado que lo tenga como arista será x^2 (y así a esta cantidad la llamamos "equis al cuadrado") y el cubo que tenga dicha arista tendrá como volumen x^3 (que llamaremos "equis al cubo"). Pero x^4 fue para la Humanidad, durante muchos siglos, *generalizar por generalizar*, porque en el espacio no existían objetos de mayor dimensión. De hecho, las ecuaciones de grado superior a tres no empezaron a estudiarse hasta finales de la Edad Media. Y nadie discute ya su interés para plantear y resolver mucha cuestiones matemáticas.

Hoy día los alumnos de Licenciatura de Matemáticas (y de otras disciplinas científicas y técnicas) comienzan sus estudios universitarios con la noción de espacio vectorial de dimensión finita, concepto al que la Humanidad no llegó hasta los siglos XIX y XX. Nuevamente, se veía como una generalización absurda. Está claro que estas nociones son hoy totalmente necesarias y forman parta del universo matemático con la misma realidad con que otros objetos forman parte del universo físico.

En Matemáticas se generalizan nociones y teorías por diferentes motivos, como los siguientes:

- Por necesidad de obtener nuevas herramientas para abordar problemas ya planteados previamente.
- Por comprender que nociones diferentes son casos particulares de una noción más amplia que las abarca.
- Por identificar lo que es propio de un concepto, separándolo de lo que está motivado por otras nociones.

Veamos algunos ejemplos: la teoría de variedades es imprescindible para formular la teoría de la relatividad de Einstein. Si queremos saber cómo es el Universo **tenemos que fabricarnos la noción matemática de variedad**: El Universo es un "conjunto"de dimensión 4 (espacio y tiempo están ligados entre sí), curvado (no plano como $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^n$).

Otro ejemplo: la noción de espacio topológico es mucho más general que la de espacio métrico (todo espacio métrico es topológico mientras que no todo espacio topológico es metrizable). La definición de espacio topológico extrae de la de espacio métrico lo básico para poder construir la Topología.

1.3. El precursor: Gauss

Se puede considerar que Gauss es el predecesor de la teoría de variedades. En efecto, en su trabajo "Disquisitiones generales circa superficies curvas"de 1827 definió una superficie por dos parámetros (siguiendo a **Euler**), introdujo la *primera forma fundamental*, que permitió estudiar la *geometría intrínseca* de una superficie, y la que hoy llamamos *aplicación de Gauss*, que le permitió definir la *curvatura total* o *de Gauss*. Además, demostró el *teorema egregio* (que afirma que la curvatura de Gauss es intrínseca) y dio una primera versión de lo que hoy conocemos como *teorema de Gauss-Bonnet*. Este artículo de **Gauss** es la base sobre la que se ha construido la geometría de superficies.

Su importancia no radica sólo en esto, sino en que también es la base de la teoría de variedades. Al demostrar el teorema egregio Gauss establece que nociones geométricas de la superficie (la curvatura, en este caso) son perceptibles por los "habitantes"de la superficie, sin necesidad de considerar que ésta está inmersa en $\mathbb{R}^3$. Así, por ejemplo, un plano y un cilindro son localmente iguales (localmente isométricos, en lenguaje matemático) y un habitante de la superficie no puede distinguir si se encuentra en el plano o en el cilindro. Existe, por lo tanto, una noción más básica que la de *superficie inmersa en* $\mathbb{R}^3$, que subyace: la de *superficie abstracta*. Fue Riemann el que dió el paso a dimensiones mayores.

1.4. El inventor: Riemann

La generalización de la teoría de superficies a variedades de dimensión mayor fue llevada a cabo por *Riemann* (1826-1866). En su discurso de habilitación de 1854, "Sobre las hipótesis implícitas en los fundamentos de la Geometría", que **Gauss** escuchó como miembro del Tribunal que debía juzgarlo, introdujo las variedades de dimensión arbitraria dotadas de una forma bilineal (es decir, de una *métrica riemanniana*), tomando como punto de partida el trabajo de **Gauss** de 1827.

1.5. La naturaleza de las variedades

Si a lo largo de las diferentes etapas de formación hemos ido adquiriendo nociones de curva, superficie y ahora variedad, es porque en paralelo se ha ido desarrollando el Analísis Matemático y el Álgebra Lineal pertinentes. Las variedades (incluidas curvas y superficies) son localmente como abiertos de $\mathbb{R}^n$, con lo que se les puede dotar de las técnicas y resultados propios de los espacios euclídeos:

$$\begin{array}{rcl} \text{Análisis de una variable real} & \longrightarrow & \text{Teoría de curvas} \\ \text{Análisis de varias variables reales} & \longrightarrow & \text{Teoría de superficies y de variedades} \end{array}$$

Este esquema se puede continuar con el caso complejo (habitualmente no se explica en la licenciatura nada más que el Análisis de una variable compleja)

$$\begin{array}{rcl} \text{Análisis de una variable compleja} & \longrightarrow & \text{Teoría de curvas complejas} \\ \text{Análisis de varias variables complejas} & \longrightarrow & \text{Teoría de superficies y de variedades complejas} \end{array}$$

Desde un punto de vista de *categorías y funtores* la Topología Diferencial (que es la parte de las Matemáticas que se dedica al estudio de las variedades diferenciables) está a medio camino entre la Topología General y la Geometría Diferencial. La siguiente tabla muestra la situación:

Disciplina (Categoría)	Objetos	Isomorfismos
Geometría Diferencial (Teoría de superficies)	Variedades con estructura (superficies de $\mathbb{R}^3$)	Difeomorfismos que preserven la estructura (Isometrías)
Topología Diferencial	Variedades	Difeomorfismos
Topología General	Espacios topológicos	Homeomorfismos

Así por ejemplo, desde el punto de vista de la Geometría Diferencial una esfera y un elispoide son distintos (no son isométricos) mientras que desde el de la Topología Diferencial son iguales (son difeomorfos). Por otra parte, para la Topología Diferencial el cono de una hoja y el disco son distintos (el primero no es diferenciable en el vértice) mientras que para la Topología General son iguales (son homeomorfos). Se tiene la cadena de implicaciones:

$$\text{Isometría} \Rightarrow \text{Difeomorfismo} \Rightarrow \text{Homeomorfismo}$$

Por tanto la Geometría Diferencial da una clasificación más fina que la Topología Diferencial y ésta que la Topología General.

1.6. ¿Qué resultados vamos a obtener?

Habíamos comentado que una causa para introducir la generalización de un concepto ya existente es que permita resolver cuestiones planteadas previamente. En el curso vamos a demostrar, utilizando variedades, los teoremas siguientes, en cuya formulación no aparece para nada la noción de variedad:

Teorema 1.1 (Teorema Fundamental del Álgebra) *Todo polinomio no constante en $\mathbb{C}$ tiene al menos un cero.*

Teorema 1.2 (Teorema del punto fijo de Brouwer) *Toda aplicación diferenciable del disco n-dimensional en sí mismo tiene al menos un punto fijo.*

Teorema 1.3 (Teorema de Borsuk-Ulam) *Toda aplicación diferenciable de la esfera n-dimensional S^n en $\mathbb{R}^n$ identifica al menos dos puntos antipodales.*

Corolario 1.4 *(meteorológico): sobre la superficie terrestre en todo momento existe un par de puntos antipodales que tienen las misma temperatura y la misma presión.*

Teorema 1.5 (Teorema de Lusternik-Schnirelman) *Si la esfera n-dimensional S^n está recubierta por $n + 1$ conjuntos cerrados, entonces alguno de esos cerrados contiene dos puntos antipodales.*

Además vamos a poder relacionar nociones diferentes como la de **índice de una campo vectorial** (que se estudia en *Ecuaciones Diferenciales*) con la de **índice de un camino cerrado** (que se estudia en *Variable Compleja*. Las dos provendrán de la noción de **grado** de aplicaciones entre variedades (entre esferas).

Así esperamos que la teoría de variedades cumpla con todas las expectativas expuestas en esta motivación.

2. Variedades diferenciables

Comenzamos el estudio de la teoría de variedades[1].

2.1. Definiciones básicas

Comenzamos con la definición de variedad.

Definición 2.1 *Sea M un conjunto.*

(a) Una aplicación $x : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ inyectiva y con imagen un subespacio abierto de $\mathbb{R}^n$ se llama **carta**. *A la imagen de cada elemento de M, $x(m) = (x^1(m), \ldots, x^n(m)) \in \mathbb{R}^n$ se le llama el conjunto de* **coordenadas** *de m (respecto de la carta dada). A U se le llama* **dominio** *de la carta. Haremos el abuso de notación de escribir $x : M \to \mathbb{R}^n$ aún cuando el dominio no sea todo M.*

(b) Se llama **atlas** *sobre M a una colección $\mathcal{A}$ de cartas sobre $\mathbb{R}^n$ cuyos dominios recubran todo M.*

(c) Se llama **atlas** *C^∞ a un atlas $\mathcal{A}$ tal que para cualesquiera dos cartas $x, y \in \mathcal{A}$ cuyos dominios U, V tengan intersección no vacía resulta que $x(U \cap V)$, $y(U \cap V)$ son abiertos de $\mathbb{R}^n$ y la composición $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \to y(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo C^∞. La composición $y \circ x^{-1}$ se denomina* **cambio de coordenadas**.

(d) Se dice que dos atlas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son **atlas equivalentes** *si su unión $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ es también un atlas sobre M.*

(e) Se dice que un atlas $\mathcal{A}$ es un **atlas maximal** *o* **atlas completo** *si no puede incluirse en ningún otro.*

Proposición 2.2 *Todo atlas C^∞ está contenido en un único atlas maximal.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ un atlas C^∞ de M en $\mathbb{R}^n$. Dividimos la demostración en varios pasos.

1. Definamos $\mathcal{A}^+$ como el conjunto de todas las cartas $x : M \to \mathbb{R}^n$ tales que cuando el dominio de x interseca al dominio de otra carta $x_\alpha \in \mathcal{A}$ entonces $x \circ x_\alpha^{-1}$ es un difeomorfismo. En particular $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^+$, ya que las cartas de $\mathcal{A}$ verifican la condición para estar en $\mathcal{A}^+$.

2. Probamos que $\mathcal{A}^+$ es un atlas C^∞ sobre M. En efecto, como las cartas de $\mathcal{A}$ son todas de $\mathcal{A}^+$, se tiene que los dominios de las cartas de $\mathcal{A}^+$ recubren todo el conjunto M.

   Sean dos cartas $x, y \in \mathcal{A}^+$ de dominios U, V que se intersequen. Debemos probar que $x \circ y^{-1}$ es difeomorfismo de clase C^∞. Sea $p \in y(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$. Entonces existe una carta $x_\alpha \in \mathcal{A}$ cuyo dominio contiene al punto $y^{-1}(p) \in (U \cap V) \subset M$. El dominio de esta carta x_α corta, por tanto a los dominios U y V de las cartas x e y por lo que las composiciones

   $$x \circ x_\alpha^{-1} \qquad ; \qquad x_\alpha \circ y^{-1}$$

   son difeomorfismos. Por tanto también lo es su composición $(x \circ x_\alpha^{-1}) \circ (x_\alpha \circ y^{-1})$. Así hemos probado que $x \circ y^{-1}$ es un difeomorfismo local. Pero como x e y son aplicaciones inyectivas, resulta que también lo es $x \circ y^{-1}$, con lo que es un difeomorfismo (sobre su imagen).

3. Sea $\mathcal{B}$ un atlas C^∞ que contenga al atlas inicial $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{B}$ está contenido en $\mathcal{A}^+$, ya que toda carta de $\mathcal{A}$ es de $\mathcal{B}$ con lo que $x \circ x_\alpha^{-1}$ es un difeomorfismo, para cualesquiera cartas $x \in \mathcal{B}$, $x_\alpha \in \mathcal{A}$.

[1] Seguimos el libro F. Brickell, R.S. Clark: *Differentiable Manifolds. An introduction.* Van Nostrand, London 1970. mientras no advirtamos lo contario. Posiblemente algunos comentarios no sean tomados del libro.

4. Por lo tanto, $\mathcal{A}^+$ es un atlas maximal: en efecto, si $\mathcal{C}$ es un atlas tal que $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}^+$, entonces también $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}$ (por el paso 1). Y por el paso 3 resulta que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}^+$, con lo que $\mathcal{C} = \mathcal{A}^+$, de donde resulta que $\mathcal{A}^+$ es completo.

5. Y si el atlas $\mathcal{A}$ estuviera dentro de otro atlas maximal si $\mathcal{C}$, entonces, por el paso 3 volvería a resultar que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}^+$, con lo que al ser $\mathcal{C}$ maximal resultaría $\mathcal{C} = \mathcal{A}^+$. Luego el atlas maximal que contiene al dado $\mathcal{A}$ es único.□

Con la proposición precedente se puede dar ya la siguiente definición:

Definición 2.3 *Una* **variedad diferenciable** *es un conjunto M dotado de un atlas maximal. Se llama* **dimensión** *de la variedad M a la dimensión n del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ donde toman valores las cartas.*

Observación 2.4 *De otro modo, como atlas equivalentes están contenidos en el mismo atlas maximal y atlas no equivalentes lo están en diferentes maximales, se puede decir que una variedad diferenciable es una clase de equivalencia de atlas.*

Observación 2.5 *Obsérvese que para determinar una estructura de variedad diferenciable no hace falta obtener un atlas maximal. La proposición 2.2 establece que todo atlas está contenido en un único atlas maximal, por lo que cada atlas determina sobre M una única estructura de variedad diferenciable.*

Observación 2.6 **Problema importante:** *Dado un conjunto M que admita estructura de variedad diferenciable, ¿la estructura es única? No lo es, como veremos en los problemas propuestos.*

Observación 2.7 *Conservando las definiciones precedentes si en un conjunto está dado un atlas tal que los cambios de cartas son homeomorfismos, se dice que la estructura que induce es la de* **variedad topológica***, y si los cambios de carta son difeomorfismos de clase C^k que es una* **variedad diferenciable de clase** *k. En el caso de que sean difeomorfismos analíticos (desarrollables en series de potencias) se tendrá una* **variedad analítica**.

Es obvia la cadena de implicaciones:

variedad analítica $\Rightarrow$ variedad $C^\infty \Rightarrow \ldots \Rightarrow$ variedad $C^2 \Rightarrow$ variedad $C^1 \Rightarrow$ variedad topológica.

En el curso sólo trataremos el caso de las variedades C^∞ y, a menudo, omitiremos la clase de diferenciabilidad.

También es posible ampliar el concepto de variedad permitiendo que estén modeladas sobre espacios de Banach, con lo que se obtienen las **variedades de dimensión infinita**[2].

2.2. Ejemplos

Ejemplo 2.8 **El espacio euclídeo** $\mathbb{R}^n$*. Tiene estructura de variedad a partir de la carta global identidad.*

Ejemplo 2.9 **La circunferencia** S^1*. Tomemos la circunferencia como el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $\{x^2 + y^2 = 1\}$ en el plano $\mathbb{R}^2$. Se consideran las dos cartas siguientes:*

$$x : U = \{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t),\ 0 < t < 1\} \to \mathbb{R}\ ;\ x(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = t$$

$$y : V = \{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t),\ -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}\ ;\ y(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = t$$

[2]Véanse por ejemplo:

B. Ba y G. Vinel : *Géométrie différentielle*. Masson, París, 1994.

J. Margalef-Roig y E. Outerelo Domínguez: *Differential Topology*. North-Holland, Amsterdam, 1992.

El dominio de x es $U = S^1 - \{(1,0)\}$ y el de y es $V = S^1 - \{(-1,0)\}$, con lo que cubren toda la circunferencia. La intersección de los dominios es por tanto $U \cap V = S^1 - \{(1,0),(-1,0)\}$. Las dos aplicaciones son cartas, porque son inyectivas y sus imágenes son abiertos: $x(U) = (0,1) \subset \mathbb{R}$; $y(V) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \subset \mathbb{R}$.

$\mathcal{A} = \{x, y\}$ es un atlas, porque $U \cup V = S^1$. Además es un atlas diferenciable porque:

(a) $x(U \cap V) = (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ mientras que $y(U \cap V) = (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$ que son abiertos de $\mathbb{R}$.

(b) El cambio de cartas es la función $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \subset \mathbb{R} \to y(U \cap V)) \subset \mathbb{R}$, que en nuestro caso es $y \circ x^{-1} : (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1) \subset \mathbb{R} \to (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \subset \mathbb{R}$ definida así:

- *Si $t \in (0, \frac{1}{2})$; $y \circ x^{-1}(t) = y(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = t$;*
- *Si $t \in (\frac{1}{2}, 1)$, entonces $t - 1 \in (-\frac{1}{2}, 0)$, resultando*
  $y \circ x^{-1}(t) = y(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = y(\cos(2\pi t - 2\pi), \sin(2\pi t - 2\pi)) = t - 1$

con lo que $y \circ x^{-1}$ es difeomorfismo. Por tanto, $\mathcal{A} = \{x, y\}$ es un atlas C^∞.

Ejemplo 2.10 La esfera S^2 *Mediante dos proyecciones estereográficas se consigue un atlas.*

2.3. Variedades con borde diferenciable

Las variedades con borde son una generalización natural de las variedades[3]. El ejemplo más elemental es el disco. Además nos resultarán imprescindibles para abordar ciertos resultados que probaremos en este curso (en particular, el teorema del punto fijo, que establece que toda aplicación diferenciable del disco en sí mismo tiene al menos un punto fijo).

Definición 2.11 *Una* **variedad con borde diferenciable** *M es un conjunto dotado de un atlas maximal tal que cada carta toma valores en los abiertos de $\mathbb{H}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_n \geq 0\}$. Si $p \in M$ es un punto tal que para alguna carta $x = (x^1 \ldots, x^n)$ es $x^n(p) > 0$ entonces se dice que p es un* **punto interior** *y si $x^n(p) = 0$ se dice que p es un* **punto de la frontera**. *El* **borde** *es el conjunto de puntos de la frontera y se denota por ∂M.*

Observación 2.12 *(a) En la definición precedente a fortiori p cumple una de las dos propiedades citadas (ser interior o de la frontera) para todas las cartas en cuyo dominio esté.*

(b) Si todos los puntos son interiores, entonces la frontera es vacía y la variedad es una variedad diferenciable.

Proposición 2.13 *Sea M una variedad con borde diferenciable no vacío ∂M. Entonces:*

(a) El conjunto de puntos interiores es una variedad diferenciable.

(b) El borde ∂M también es variedad diferenciable y se verifica $\dim(\partial M) = \dim(M) - 1$.

[3] Sin embargo en libros como
J. W. Milnor: *Topology from Differentiable viewpoint.* Univ. Press Virginia, Charlottesville, 1969.
E. Outerelo y J. Ruiz: *Topología Diferencial.* Addison-Wesley Iberoamericana, Madid, 1998.
las definiciones propuestas parten de la noción de variedades inmersas en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.14 *(a) $\mathbb{H}^n$ es una variedad con borde diferenciable no compacta.*

(b) El disco unidad $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ es una variedad con borde diferenciable compacta.

(c) El cuadrado unidad no es una variedad con borde diferenciable. Existe una generalización de este concepto, las llamadas **variedades con borde anguloso** *en la que sí entra este ejemplo*[4].

Introducción a las Geometría no euclídeas: Hiperbólica y Elíptica. La notación de $\mathbb{H}^n$ para designar el semiespacio superior de $\mathbb{R}^n$ se debe a que es el modelo básico de Espacio Hiperbólico.

Los *Elementos* de Euclides, del año 300 antes de Cristo, aproximadamente, constituyen el primer tratado de Geometría, en el sentido de que sienta las bases de la disciplina, desde un punto de vista axiomático. Así, en el Libro I, comienza con 23 definiciones y 5 postulados sobre las que asienta todos los resultados posteriores. Define las nociones de punto, recta, plano, circunferencia, ángulos agudo, recto y obtuso, triángulos equilátero, isósceles y escaleno,..., hasta la definición 23: *son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos.*

Después sitúa el autor los postulados: por dos puntos pasa una recta, un segmento se puede prolongar en línea recta, un círculo se puede describir conociendo su centro y su radio, todos los ángulos rectos son iguales entre sí y, por fin, el famoso quinto postulado: *si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulo internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos.*

Este quinto postulado parece, a los ojos de otros geométras, de naturaleza muy diferente a la de los cuatro precedentes. De hecho, ya Proclo cree que el postulado se puede derivar de los otros, con lo que en realidad se tratararía de un verdadero teorema [5]. Nace así la "historia"del quinto postulado o *axioma de las paralelas*, llamado así también porque resulta equivalente a decir que *dado un punto exterior a una recta existe una única recta que pasa por el punto, no corta a la recta y está contenida en el plano que ambos definen.* La historia tiene tres fases [6]:

1.- Los comentarios árabes, que siguen empeñados en una demostración directa del teorema.

2.- El intento de Saccheri (1733) de demostración por reducción al absurdo, esperando encontrar alguna contradicción. De estas dos etapas se tiene como fruto una colección de enunciados equivalentes al postulado euclidiano [7]:

- Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulo internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos.
- Dado un punto exterior a una recta existe una única recta que pasa por el punto, no corta a la recta y está contenida en el plano que ambos definen (Tolomeo; Alhazen 965-1041).
- La suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos ángulos rectos (Saccheri, 1733, aunque ya era conocida la relación con el postulado en tiempos de Aristóteles).
- Las rectas paralelas son equidistantes (atribuido a Posidonio); todos los puntos equidistantes de una línea recta, situados a un lado determinado de ella, constituyen una línea recta (Clavio, 1574).

[4] Véase por ejemplo, J. Margalef-Roig y E. Outerelo Domínguez: *Differential Topology.* North-Holland, Amsterdam, 1992.

[5] Euclides: *Elementos.* Ed. Gredos, Madrid, 1991, pág.198.

[6] Euclides: *Elementos.* Ed. Gredos, Madrid, 1991, pág. 58.

[7] Euclides: *Elementos.* Ed. Gredos, Madrid, 1991, pág 199.

- Dos rectas paralelas guardan entre sí una distancia finita (Proclo).
- Las rectas no equidistantes converegen en una dirección y divergen en la opuesta (Thabit Ibn Qurra, 826-901; Cataldi, 1603).
- Sobre un segmento siempre se puede construir un triángulo semejante a uno dado (Wallis, 1663; Legendre, 1824); existe un par de triángulo no congruentes, pero semejantes -con sus respectivos ángulos iguales- (Saccheri, 1733)[8]
- En todo cuadrilátero que tenga tres ángulos rectos, el cuarto ángulo también es recto (Clairaut, 1741; Lambert, 1766).
- Se puede construir un triángulo cuya área sea mayor que cualquier área dada (Gauss, 1799).[9]
- Dados tres puntos no alineados, siempre es posible construir un círculo que pase por todos ellos (Legendre, 1824; Bolyai, 1832).

3.- La negación del postulado y la construcción de geometrías coherentes, iniciadas por Lobatchevski (en 1829/30) y Janos Bolyai (1832), de modo independiente, constituye la tercera fase del proceso. De entrada existen dos modos de negar el postulado:

- Por el punto pasan al menos dos rectas que no cortan a la dada (con lo que todas las comprendidas en el ángulo que determinan tampoco lo hacen). Ésta es la Geometría Hiperbólica.
- Todas las rectas que pasan por el punto cortan a la dada (Geometría Elíptica).

Se llama *Geometría Absoluta* a la que depende sólo de los cuatro primeros postulados euclidianos [10]. Resulta así que las tres geometrías: de Euclides, hiperbólica y elíptica son casos particulares de la absoluta, ocupando la euclidiana una posición intermedia entre las otras dos y de hecho es la “más inestable”, pues pequeñas perturbaciones en los otros tipos de geometrías mantienen su carácter, mientras que no ocurre así en el caso euclidiano. Lobatchevski y Bolyai desarrollaron la Geometría Hiperbólica, en la que el quinto postulado se sustituye por la primera de las negaciones que hemos citado, dando origen a un cuerpo geométrico coherente. Se dice que también Gauss trabajó en la misma línea y que no publicó sus resultados por temor a no ser comprendido [11].

La importancia de la Geometría Hiperbólica se acrecentó cuando Beltrami, en su trabajo *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, de 1868, demostró que si se consideran las geodésicas de una superficie de curvatura constante negativa como “rectas de la geometría”, la superficie tiene geometría hiperbólica. Análoga consideración cabe hacer con la geometría de la esfera y la del plano proyectivo, que son modelos de geometrías elípticas.

[8] Un resultado similar no se tiene para la Geometría Hiperbólica. Obviamente al ser equivalentes todos estos enunciados al quinto postulado, resultará que ninguno de ellos se verifica en el plano hiperbólico.

[9] Los triángulos hiperbólicos tienen acotada el área.

[10] Coxeter, H.S.M.: *Fundamentos de la Geometría.* Limusa, México D.F., 1988, pág. 207

[11] Smogorzhevski, A.S.: *Acerca de la geometría de Lobachevski*, Lecciones populares de mat., Mir, Moscú, 1984 (2ª edición), pág. 16

3. Funciones y aplicaciones diferenciables

Comenzamos el estudio de aplicaciones entre variedades[12].

3.1. Definiciones básicas

Las funciones son aplicaciones sobre el cuerpo base $\mathbb{R}$, que es una variedad diferenciable de dimensión uno. Las aplicaciones diferenciables son las propias entre variedades diferenciables. Como las variedades son localmente espacios euclídeos y las definiciones que vamos a dar son locales, la idea es "trasladar"la definición de la variedad a los espacios euclídeos.

Definición 3.1 *Sean M una variedad diferenciable y $f : M \to \mathbb{R}$ una aplicación.*
(a) Se dice que f es una **función diferenciable en** *$p \in M$ si para toda carta $x : M \to \mathbb{R}^n$ cuyo dominio contenga al punto p resulta que $f \circ x^{-1}$ es diferenciable en $x(p)$. (b) Se dice que f es* función diferenciable *en M si lo es en todo punto $p \in M$.*

Definición 3.2 *Sean M y M' dos variedades diferenciables y $f : M \to M'$ una aplicación.*
(a) Se dice que f es una **aplicación diferenciable en** *$p \in M$ si para toda carta $x : M \to \mathbb{R}^n$ cuyo dominio contenga al punto p y toda carta $x' : M' \to \mathbb{R}^m$ cuyo dominio contenga al punto $f(p)$ resulta que $x' \circ f \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x(p)$.*
(b) Se dice que f es **aplicación diferenciable** *en M si lo es en todo punto $p \in M$.*
(c) Se dice que f es un **difeomorfismo** *si es una aplicación diferenciable biyectiva de inversa también diferenciable.*

Como es de esperar se tienen también las siguientes propiedades (que dejamos como ejercicio para el lector):

Observación 3.3 *Sean $f : M \to M'$ y $g : M' \to M''$ aplicaciones diferenciables entre variedades diferenciables. Entonces:*

- *La composición $g \circ f : M \to M''$ es también aplicación diferenciable.*
- *Si f y g son difeomorfismos, también lo es $g \circ f$.*

Observación 3.4 *Si dos variedades son difeomorfas entonces tienen la misma dimensión.*

3.2. Estructuras exóticas

Cada atlas C^∞ sobre un conjunto dota a éste de estructura de variedad diferenciable: la determinada por el único atlas maximal que contiene al atlas dado. Dos atlas distintos generan la misma estructura de variedad si y solamente si son equivalentes.

Definición 3.5 *Dos estructuras diferenciables $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ sobre una variedad M se dicen* **equivalentes** *si existe un difeomorfismo $f : (M, \mathcal{A}) \to (M, \mathcal{A}')$.*

Surge así la cuestión[13] de averiguar cuántas estructuras diferenciables distintas, esto es, no equivalentes puede admitir un conjunto. El primer resultado importante lo obtuvo **John Milnor** (nacido

[12] Seguimos el libro
F. Brickell, R.S. Clark: *Differentiable Manifolds*. An introduction. Van Nostrand, London 1970.
mientras no advirtamos lo contario. Posiblemente algunos comentarios no sean tomados del libro.
[13] Esta parte está tomada fundamentalmente de la hoja web
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html

en 1931) cuando probó [14] en 1956 que la esfera S^7 admitía 28 estructuras diferenciables no equivalentes (por este hecho, principalmente, recibió la Medalla Fields en 1962, en el Congreso Internacional de Matemáticos de Estocolmo). A las esferas con estructura diferenciable distinta de la standard las llamó **esferas exóticas**. De hecho, se conocen los números de estructuras diferenciables que admiten las esferas de baja dimensión:

esfera	nº de estructuras
S^n, $n \leq 6$	1
S^7	28
S^8	2
S^9	8
S^{10}	6
S^{11}	992
S^{12}	1
S^{13}	3
S^{14}	2
S^{15}	16256
S^{31}	$> 16 \cdot 10^6$

El listado de las estructuras diferenciables exóticas de las esferas hasta S^{15} está detallado en [15]. Para la última ver [16].

El número depende de los **grupos de homotopía de orden superior** de las esferas. El **grupo de homotopía de orden uno** o **grupo de Poincaré** o **grupo fundamental** $\pi_1(M)$, con base $p \in M$, de un espacio topológico M es el grupo de clases de equivalencia de caminos $\gamma : [0,1] \to M$ con $\gamma(0) = \gamma(1) = p$, módulo la relación de equivalencia de la homotopía de caminos. El grupo fundamental detecta los "agujeros"del espacio topológico M. Puede interpretarse también como el conjunto de clases de equivalencia de aplicaciones $\gamma : S^1 \to M$, con $\gamma(1,0) = p$, lo que permite su generalización a órdenes superiores. Así el grupo de orden k es el de clases de aplicaciones $\gamma : S^k \to M$. Todas estas nociones son propias de la Topología Algebraica.

Volviendo a las estructuras exóticas, en 1983 **Simon Donaldson** (nacido en 1957) probó[17] que el espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$ admite infinitas estructuras diferenciables distintas, mientras que todos los demás $\mathbb{R}^n$, $n \neq 4$ admiten sólo una. Este descubrimiento le proporcionó la Medalla Fields de 1986, que recibió en el Congreso Internacional de Berkeley.

3.3. La categoría de las variedades

Una **categoría** está formada[18] por objetos, morfismos (que son las aplicaciones entre los objetos) e isomorfismos, que son los morfismos que identifican los objetos de la categoría. La siguiente tabla muestra una colección de categorías, que deben ya ser conocidas.

[14]Milnor, John: On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Ann. of Math.* (2) 64 (1956), 399–405.
[15]W.S. Massey: *Introducción a la Topología Algebraica*, Ed. Reverté, Barcelona, 1972, p. 240.
[16]cfr. F. Brickell, R.S. Clark: *Differentiable Manifolds. An introduction.* Van Nostrand, London 1970, p. 38
[17]Donaldson, S. K.: Self-dual connections and the topology of smooth 4-manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.) 8 (1983), no. 1, 81–83.
[18]En esta sección no vamos a extremar el rigor. Queremos presentar una visión general.

Objetos	**Morfismos**	**Isomorfismos**
Conjuntos	Aplicaciones	Biyecciones
Grupos	Homomorfismos de grupos	Isomorfismos de grupos
Anillos	Homomorfismos de anillos	Isomorfismos de anillos
Cuerpos	Homomorfismos de cuerpos	Isomorfismos de cuerpos
Espacios vectoriales	Homomorfismos lineales	Isomorfismos lineales
Espacios topológicos	Aplicaciones continuas	Homeomorfismos
Superficies de $\mathbb{R}^3$	Aplicaciones diferenciables	Isometrías
Variedades diferenciables	Aplicaciones diferenciables	Difeomorfismos

La propia noción de categoría es una generalización en uno de los sentidos que habíamos comentado en la Motivación de la asignatura: se introduce para comprender que nociones diferentes son casos particulares de una más amplia que las abarca.

Las **propiedades** de una categoría son las que se conservan por los morfismos de la categoría. Así, por ejemplo, en la topológica se tienen las llamadas propiedades topológicas, como son la compacidad y la conexión (que se conservan por aplicaciones continuas).

El **problema de la clasificación** en una categoría consiste en determinar las clases de equivalencia de objetos, cuando la relación que se establece es la de que sean isomorfos en la categoría. En algunas categorías el problema está totalmente resuelto. Por ejemplo, en la de espacios vectoriales de dimensión finita, donde se sabe que dos espacios son difeomorfos si y solamente si tienen la misma dimensión.

Dentro de la categoría de variedades diferenciables existen algunas subcategorías en las que el problema de la clasificación está resuelto:

- Las variedades diferenciables de dimensión uno son (salvo difeomorfismos) dos: la circunferencia, que es compacta, y la recta real, que no es compacta.
- Las superficies (sin borde) diferenciables compactas, conexas y orientables son las esferas con g asas.

En el último caso, el número g, llamado **género** de la superficie, caracteriza a ésta.

Por último, señalemos que la Topología Diferencial, aunque parte de definiciones locales, se dedica a las propiedades globales, pues localmente dos puntos de una superficie son indistinguibles. La Geometría Diferencial sí permite distinguir unos puntos de otros (por ejemplo, en el elipsoide, donde tienen distinta curvatura de Gauss).

4. Hipersuperfices de $\mathbb{R}^n$

Las hipersuperficies del espacio euclídeo son ejemplo básico de variedades diferenciables. El resultado que vamos a enunciar es una generalización directa del correspondiente de la geometría de superficies que establece condiciones suficientes para que una subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por una ecuación implícita sea una superficie regular[19].

En la teoría de superficies regulares de $\mathbb{R}^3$ se define una **superficie regular** como una superficie localmente simple, lo cual significa que está dotada de un atlas C^∞ sobre $\mathbb{R}^2$ (de hecho, lo comprobaremos en clase de problemas). Una condición suficiente para que un subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ sea superficie regular es el dado en la siguiente

Proposición 4.1 *Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una aplicación C^∞ y sea $S = F^{-1}(0) \neq \phi$. Si el rango de la matriz jacobiana de F es 1 en todo punto $p \in S$, entonces S es una superficie regular.*$\square$

Ejemplo 4.2 *La esfera $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular porque podemos poner $S^2 = F^{-1}(0)$, siendo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. La matriz jacobiana de F es $J_F(p) = (F_x, F_y, F_z)(p) = (2x, 2y, 2z)(p)$ que se anula en un único punto de $\mathbb{R}^3$: el $(0, 0, 0) \notin S^2$. Por tanto, S^2 es una superficie regular.*

La demostración de la proposición precedente se basa en el teorema de la función implícita para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Cabe pues esperar que el mismo tipo de argumento se pueda generalizar a cualesquiera hipersuperficies del espacio euclídeo. Y así es, en efecto.

Proposición 4.3 *Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una aplicación C^∞ y sea $S = F^{-1}(0) \neq \phi$. Si el rango de la matriz jacobiana de F es 1 en todo punto $p \in S$, entonces S es una variedad diferenciable de dimensión $n - 1$.*$\square$

Ejemplo 4.4 *La esfera $S^n = \{x_1^2 + \ldots, +x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es una variedad diferenciable de dimensión n.*

Existe una generalización del resultado anterior, que permite establecer condiciones suficientes para que un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de codimensión mayor que uno sea variedad diferenciable (esto es, cuando el conjunto está dado por varias ecuaciones implícitas. Este resultado se conoce como **Teorema del Rango**).

---

[19]Seguimos el libro
F. Brickell, R.S. Clark: *Differentiable Manifolds. An introduction*. Van Nostrand, London 1970.
mientras no advirtamos lo contario. Posiblemente algunos comentarios no sean tomados del libro.

5. Topología de las variedades diferenciables

Vamos a estudiar las principales propiedades topológicas de las variedades diferenciables[20].

5.1. Topologías y bases

Recordemos algunas nociones básicas de Topología General.

Definición 5.1 *Sea M un conjunto. Se dice que $(M,\mathcal{T})$ es un* **espacio topológico** *si $\mathcal{T}$ es una familia de subconjuntos de M que verifica las siguientes propiedades:*

- *$\phi \in \mathcal{T}$ y $M \in \mathcal{T}$.*
- *Si $A_i \in \mathcal{T}$, $\forall i \in I$, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$ (esto es, la unión arbitraria de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$).*
- *Si $A_i \in \mathcal{T}$, $\forall i \in \{1,\ldots,k\}$, entonces $\bigcap_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{T}$ (esto es, la intersección finita de elementos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$).*

En tal caso, se dice también que $\mathcal{T}$ es una **topología** *en M. Los elementos de la topología se llaman* **abiertos** *y sus complementarios* **cerrados**.

Definición 5.2 *Sea M un conjunto. Se dice que una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de M es* **base de una topología** *en M si se verifican las condiciones siguientes:*

- *Para todo $p \in M$ existe $B \in \mathcal{B}$ de modo que $p \in B$.*
- *Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $p \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ de modo que $p \in B_3 \subset (B_1 \cap B_2)$.*

Se llama base de una topología porque ciertamente sirve para generar una topología, en el sentido recogido en la siguiente proposición.

Proposición 5.3 *Sea $\mathcal{B}$ una base de una topología en el conjunto M. Entonces resulta:*

- *La familia $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{\phi, M, \bigcup_{\alpha\in I; B_\alpha\in\mathcal{B}} B_\alpha\}$ define una topología en M.*
- *$\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, es decir, todos los elementos de la base son abiertos de la topología.*

La demostración puede seguirse de cualquier libro de Topología General. No vamos a repasar todos los conceptos de esta disciplina. Suponemos que el lector está familiarizado con las ideas de compacidad, conexión, axiomas de separación, etc.

5.2. Topología de una variedad diferenciable

En muchos tratados[21] de Geometría y Topología Diferencial se suele considerar que una variedad diferenciable es un espacio topológico Hausdorff dotado de un atlas C^∞. Sin embargo esa premisa es innecesaria, porque por la propia definición de variedad diferenciable el conjunto M va a estar dotado de una estructura de espacio topológico.

Veamos pues cómo cada variedad diferenciable está dotada de una estructura de espacio topológico y qué propiedades tiene como tal.

El primer resultado que establecemos es que las cartas se pueden *localizar*, es decir, que a partir de una carta podemos construir otras cuyo dominio esté contenido en el dominio de la dada.

[20]Seguimos el libro F. Brickell, R.S. Clark: *Differentiable Manifolds. An introduction.* Van Nostrand, London 1970. mientras no advirtamos lo contario. Posiblemente algunos comentarios no sean tomados del libro.

[21]Véase, por ejemplo, F. Warner: *Foundations of Differentiable Manifolds.* Scott, Foresmann and Co., Glenview, Ill., 1971, pág. 5.

Proposición 5.4 *Sea $x : M \to \mathbb{R}^n$ una carta con dominio U en una variedad diferenciable M. Si $W \subset U$ es un subconjunto de U tal que $x(W) \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces $x|_W$ es también una carta de la variedad (i.e., una carta del atlas maximal).*

Demostración. Como x es inyectiva también lo es su restricccción a W. Por hipótesis la imagen $x(W)$ es abierto, así que $X|_W$ es una carta. Lo que nos queda por probar es que es carta de la misma estructura diferenciable de la variedad, esto es, que está en el atlas completo que define dicha estructura. Sea y otra carta de la variedad cuyo dominio V interseque a W. Como $W \subset U$ resultará entonces que también $V \cap U \neq \phi$ y, por tanto, $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$ es un difeomorfismo. Como $x(W)$ es abierto resulta que $y \circ x|_W^{-1} : x|_W(W \cap V) \to y(W \cap V)$ es la restricción de un difeomorfismo a un abierto, por lo que también es un difeomorfismo.

Luego $\mathfrak{m} \cup \{x|_W\}$ es un atlas, siendo $\mathfrak{m}$ el atlas maximal de la variedad y, por la maximalidad de $\mathfrak{m}$, resulta que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cup \{x|_W\}$, con lo que $x|_W \in \mathfrak{m}$, que es lo que queríamos probar.□

La topología en M se introduce del siguiente modo:

Proposición 5.5 *La colección de dominios de cartas (del atlas maximal) de M constituye una base de una topología en M.*

Demostración. La primera condición de base (que todo punto de M esté en un elemento de la base) se cumple trivialmente, porque los dominios de todas las cartas de un atlas cubren la variedad (por definición de atlas).

Veamos la segunda condición. Sea $p \in U \cap V$ un punto perteneciente a la intersección de dos dominios de carta $x : U \to \mathbb{R}^n$; $y : V \to \mathbb{R}^n$. Entonces $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$ es un difeomorfismo. Como $x(U \cap V)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ resulta que $W = U \cap V$ está en las condiciones del resultado precedente: $x|_W$ es una carta y $p \in W = U \cap V$, por lo que existe un dominio de carta que incluye al punto y está contenido en la intersección de los dos dominios de carta dados.□

Consideraremos siempre que la variedad está dotada de la topología engendrada por la base formada por los dominios de carta. Así, como los dominios de carta son elementos de la base de la topología, resulta que son abiertos de la topología de M. Veamos que además las cartas son homeomorfismos.

Proposición 5.6 *Las cartas son homeomorfismos.*

Demostración. Tenemos que probar que cada carta $x : U \subset M \to x(U) \subset \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo. Por construcción es biyectiva. Bastará pues probar que es una aplicación continua y abierta.

- x es continua: Sea $V \subset x(U)$ un conjunto abierto. Llamemos $W = x^{-1}(V)$. Entonces por la Proposición 5.4 $x|_W : W \to V$ es una carta, con lo que W es un dominio de carta y, por tanto, un abierto básico de la topología. Así que la contraimagen del abierto V es una abierto W. Por tanto x es continua.

- x es abierta: Si U' es un dominio básico contenido en U, es decir, si existe una carta $y : U' \to \mathbb{R}^n$ con $U' \subset U$, entonces el cambio de carta es un difeomorfismo $y \circ x^{-1} : x(U \cap U') \to y(U \cap U')$ entre dos abiertos de $\mathbb{R}^n$: $x(U \cap U') = x(U')$; $y(U \cap U') = y(U')$. Así que $x(U')$ es un abierto.

  Y si tenemos un abierto cualquiera $W \subset U$, entonces W se expresa como unión de abiertos básicos cuyas imágenes son abiertos, por lo que acabamos de probar: $W = \bigcup_{i \in I} U_i$, con U_i abiertos básicos, por lo que $x(W) = x(\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} x(U_i)$, que es abierto, por ser unión de abiertos.□

Como es de esperar, las aplicaciones diferenciables entre variedades son continuas:

Proposición 5.7 *Las aplicaciones diferenciables entre variedades son continuas.*

Demostración. Sean $f : M \to M'$ una aplicación diferenciable entre dos variedades y $p \in M$. Tomemos sendas cartas alrededor de los puntos p y $f(p)$: las cartas $x : U \to \mathbb{R}^n$, $y : U \to \mathbb{R}^m$, con $p \in U \subset M$ y con $f(p) \subset U' \subset M'$. Entonces la función $y \circ f \circ x^{-1}$ es diferenciable, y, por tanto, continua. Por el resultado precedente las cartas x, y son homeomorfismos, con lo que f es continua en p. Como esta construcción se realiza para todo $p \in M$ resulta que f es continua.□

Observación 5.8 *Las definiciones locales son la obvias, y así se puede hablar de difeomorfismos locales. Obviamente se tienen las siguientes implicaciones:*

$$\begin{array}{ccc} \text{difeomorfismo} & \Longrightarrow & \text{homeomorfismo} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{difeomorfismo local} & \Longrightarrow & \text{homeomorfismo local} \end{array}$$

5.3. Estructura diferenciable en un espacio topológico

En esta sección queremos abordar el siguiente problema: si dotamos de estructura de variedad diferenciable a un conjunto que ya tenía una estructura de espacio topológico, ¿cuándo coincide la estructura topológica preexistente con la topología inducida por la variedad?

Este problema se suscita de modo natural: casi todos los ejemplos que hemos presentado son estructuras diferenciables sobre espacios topológicos.

Proposición 5.9 *Sea M un espacio topológico dotado de una estructura de variedad diferenciable. La topología inducida en M por la estructura de variedad diferenciable coincide con la previa de M si y solamente las cartas de un atlas de M son homeomorfismos respecto de la topología preexistente.*

Demostración. Las cartas son homeomorfismos respecto de la topología inducida, como vimos en la Proposición 5.6. Por tanto, si las topologías coinciden entonces las cartas también son homeomorfismos respecto de la topología preexistente.

Así que lo que nos queda probar es que si las cartas de algún atlas son homeomorfismos para la topología preexistente, entonces las dos topologías coinciden. Sean $\mathcal{T}$ la topología dada en M y $\mathcal{T}^{\text{dif}}$ la topología inducida por la estructura diferenciable en M. Debemos probar que $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\text{dif}}$. Lo hacemos por doble contenido.

- $\mathcal{T}^{\text{dif}} \subset \mathcal{T}$: sea $V \in \mathcal{T}^{\text{dif}}$. Tomemos una carta $x : W \to \mathbb{R}^n$ con $V \cap W \neq \phi$. Entonces $V \cap W \in \mathcal{T}^{\text{dif}}$, ya que tanto V como el dominio de carta W son abiertos de dicha topología. Como x es un homeomorfismo para dicha topología, resulta $x(V \cap W) \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto. Y como por hipótesis también es x un homemorfismo para la topología $\mathcal{T}$ resulta que $(V \cap W) = x^{-1}(x(V \cap W))$ también está en la topología $\mathcal{T}$. Es decir, tenemos:

  $$\begin{array}{ccccc} (W, \mathcal{T}^{\text{dif}}) & \xrightarrow{x} & (x(W), T_u) & \xrightarrow{x^{-1}} & (W, \mathcal{T}) \\ (V \cap W) & \mapsto & x(V \cap W) & \mapsto & (V \cap W) \end{array}$$

  donde x y x^{-1} son homemorfismos que llevan abiertos en abiertos. Por tanto $(V \cap W) \in \mathcal{T}$.

  Como V siempre se puede poner como unión de intersecciones de V con dominios de carta (los dominios cubren toda la variedad M) resulta que $V \in \mathcal{T}$.

- $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^{\text{dif}}$: Sea $U \in \mathcal{T}$. Tomamos, como antes, una carta $x : W \to \mathbb{R}^n$ con $U \cap W \neq \phi$. Entonces, $W = x^{-1}(x(W)) \in \mathcal{T}$, ya que $x(W)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$, por definición de carta, y

x es homeomorfismo respecto de $\mathcal{T}$ por hipótesis (también podíamos haber usado el contenido que ya hemos demostrado: $W \in \mathcal{T}^{\text{dif}} \subset \mathcal{T}$) .

Por lo tanto, $(U \cap W) \in \mathcal{T}$, de donde $x(U \cap W)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Considerando ahora que la carta x es homemorfismo respecto de la topología inducida por la estructura diferenciable $\mathcal{T}^{\text{dif}}$, obtenemos que $(U \cap W) \in \mathcal{T}^{\text{dif}}$. Es decir, tenemos,

$$\begin{array}{ccccc} (W, \mathcal{T}) & \xrightarrow{x} & (x(W), T_u) & \xrightarrow{x^{-1}} & (W, \mathcal{T}^{\text{dif}}) \\ (U \cap W) & \mapsto & x(U \cap W) & \mapsto & (U \cap W) \end{array}$$

donde x y x^{-1} son homemorfismos que llevan abiertos en abiertos. Por tanto $(U \cap W) \in \mathcal{T}^{\text{dif}}$.

Como U se puede expresar como unión de intersecciones de U con dominios de carta (los dominios cubren toda la variedad M) resulta que $U \in \mathcal{T}^{\text{dif}}$.

El teorema queda así demostrado.$\square$

Ejemplo 5.10 *En particular, en las hipersuperficies diferenciables de $\mathbb{R}^n$ coinciden ambas topologías. Recordemos que estas hipersuperficies son las dadas por los ceros de una función diferenciable $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cuya matriz jacobiana tiene rango máximo en todos los puntos de $F^{-1}(0)$. Para demostrar este resultado hay que utilizar expresamente la demostración de que en estas hipótesis $F^{-1}(0)$ es una variedad diferenciable.*

Ejemplo 5.11 *Si M es una variedad diferenciable y $M' \subset M$ es un subconjunto abierto de M, entonces M' tiene también estructura de variedad diferenciable de la misma dimensión. Se dice que M' es una* **subvariedad abierta** *de M.*

5.4. Propiedades topológicas de las variedades diferenciables

Hasta ahora hemos estudiado cómo dotar a una variedad diferenciable de estructura topológica. Veamos qué propiedades tiene esta topología.

Observación 5.12 *Por la propia naturaleza de las variedades diferenciables, que son localmente euclídeas, verifican todos los axiomas locales que verifica $\mathbb{R}^n$ dotado de la topología usual. En general, un espacio topológico verifica una propiedad topológica localmente si cada punto admite una base de entornos que verifican la propiedad.*

5.5. Axiomas de numerabilidad

Comencemos recordando las definciones correspondientes.

Definición 5.13 *Un espacio topológico $(M, \mathcal{T})$ verifica*

- *el* **primer axioma de numerabilidad** *(I.A.N.) si cada punto admite una base numerable de entornos[22];*
- *el* **segundo axioma de numerabilidad** *(II. A.N.) si la topología admite una base numerable.*

Se tiene la siguiente

Proposición 5.14 *Sea M una variedad diferenciable. Entonces:*

[22] Una base de entornos de p es una familia de abiertos $\{U_i\}$, que contienen a p y tales que para todo abierto V que contenga a p existe algún abierto de la base que verifica $p \in U_i \subset V$.

- *M verifica el primer axioma de numerabilidad;*
- *si M admite un atlas numerable entonces M verifica el segundo axioma de numerabilidad.*

Demostración. Probamos cada una de las partes:

- Sean $p \in M$ un punto de la variedad y $x : U \to \mathbb{R}^n$ una carta con $p \in U$. Tomemos una base numerable de entornos $\{V_i, i \in \mathbb{N}\}$ del punto $x(p) \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\{x^{-1}(V_i)\}$ es una base de entornos de p. En efecto, sea W cualquier abierto de M que contenga al punto p. Entonces, como los dominios de carta son abiertos, resulta que $W \cap U$ es un abierto que contiene a p. Como las cartas son homemorfismos, resulta entonces que $x(W \cap U)$ es una abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene al punto p. Por tanto, $x(W \cap U) \supset V_i$, para algún entorno de la base y así $W \supset (W \cap U) \supset x^{-1}(V_i)$, que es lo que queríamos probar.
- Supongamos ahora que M está dotada de un atlas numerable $\mathcal{A} = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$. Sea U_i el dominio de cada carta x_i. Entonces, para cada índice es $x_i(U_i)$ un abierto de $\mathbb{R}^n$. Tomando en $\mathbb{R}^n$ una base numerable de la topología usual resulta que podemos expresar cada abierto de $x_i(U_i)$ como unión numerable de abiertos de la base de la topología, digamos $\cup V_i^j$. Por lo tanto, como las cartas son homeomorfismos, cada abierto de U_i es unión numerable de abiertos $x_i^{-1}(\cup V_i^j) = \cup x_i^{-1}(\cup V_i^j)$. Llamando $U_i^j = x^{-1}(V_i^j)$ resulta que la colección numerable $\{U_i^j\}$ es una base de la topología de M.

  En efecto, todo abierto U de M es unión numerable de abiertos $U \cap U_i$, (porque los dominios de carta cubren M y la cantidad es numerable porque el atlas es numerable), y cada uno de estos abiertos $U \cap U_i$ es una abierto de U_i y, por la construcción precedente, es unión numerable de abiertos $\{U_i^j\}$.$\square$

Observación 5.15 *En la situación de la proposición precedente están la mayoría de los ejemplos conocidos de variedades diferenciables. De hecho, para muchos conocemos atlas finitos. Sin embargo, no es cierto en general que toda variedad diferenciable admita el segundo axioma de numerabilidad, aunque los contraejemplos son difíciles de mostrar.*

5.6. Axiomas de separación

Comencemos repasando algunas nociones de Topología General, conocidas con el nombre genérico de *axiomas de separación*:

Definición 5.16 *Sea $(M, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Se dice que verifica*

- *el axioma T_0 si para cualesquiera puntos distintos $p, q \in M$ existen un abierto U en M o un abierto V en M que verifican las condiciones*

$$p \in U,\ q \notin U \qquad ; \qquad q \in V,\ p \notin V$$

- *el axioma T_1 si para cualesquiera puntos distintos $p, q \in M$ existen un abierto U en M y un abierto V en M que verifican las condiciones*

$$p \in U,\ q \notin U \qquad ; \qquad q \in V,\ p \notin V$$

- *el axioma T_2 o de* **Hausdorff** *si para cualesquiera puntos distintos $p, q \in M$ existen un abierto U en M y un abierto V en M que verifican las condiciones*

$$p \in U \qquad ; \qquad q \in V \qquad ; \qquad U \cap V = \phi$$

Observación 5.17 *Obviamente se tiene la cadena de implicaciones $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$. Estos axiomas separan puntos entre sí. La cadena de implicaciones se puede continuar con los axiomas de regularidad (que separan puntos de cerrados) y los de normalidad que separan cerrados entre sí. Todo espacio métrico topológico verifica todos los axiomas de separación. En particular, $\mathbb{R}^n$ dotado de la topología usual.*

Teniendo en cuenta la observación precedente parecería plausible la idea de que toda variedad diferenciable, que es localmente euclídea, debería de admitir todos los axiomas de separación. Sin embargo, no es así. Siempre admite el T_1 como vamos a probar en la siguiente

Proposición 5.18 *La topología inducida en una variedad diferenciable satiface el axioma T_1*

Demostración. Sean p, q puntos de la variedad M. Si existe una carta $x : U \to \mathbb{R}^n$ cuyo dominio contenga a los dos puntos, $p, q \in U$, entonces separamos los puntos $x(p), x(q) \in x(U) \subset \mathbb{R}^n$ mediante sendos abiertos A, B , esto es, $x(p) \in A, q \in B, A \cap B = \phi$, y $V = x^{-1}(A), W = x^{-1}(B)$ son abiertos (porque las cartas son homemorfismos) que separan a los dos puntos.

Si no existe una carta cuyo dominio contenga a los dos puntos, entonces como los dominios de carta cubren toda la variedad existen sendas cartas de dominios $U,\ V$ con $p \in U,\ q \in V$. Y estos dominios de carta son abiertos que satisfacen la condición requerida en el axioma T_1, lo que prueba el teorema.□

Sin embargo, las variedades diferenciables no tienen por qué satisfacer el axioma de Hausdorff. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 5.19 La recta con un punto doble. *Consideremos el conjunto $M = (\infty, 0) \cup (0, \infty) \cup \{p, q\}$ dotado del atlas $\mathcal{A} = \{x, y\}$ definido del siguiente modo:*

$$
\begin{aligned}
x &: U = (\infty, 0) \cup (0, \infty) \cup \{p\} \to \mathbb{R};\ x(t) = t,\ \text{si } t \neq p;\ x(p) = 0; \\
y &: V = (\infty, 0) \cup (0, \infty) \cup \{q\} \to \mathbb{R};\ x(t) = t,\ \text{si } t \neq q;\ x(q) = 0.
\end{aligned}
$$

Cada aplicación x, y es una carta, porque son evidentemente biyectivas y además $x(U) = y(V) = \mathbb{R}$ son abiertos de $\mathbb{R}$. Y con las dos cartas se tiene un atlas C^∞, $\mathcal{A} = \{x, y\}$, porque el cambio de cartas $y \circ x^{-1} : (\infty, 0) \cup (0, \infty) \to (\infty, 0) \cup (0, \infty)$ es la identidad.

Con esta estructura diferenciable el conjunto M recibe el nombre de **recta con origen doble**. *Una base de entornos del punto p es de la forma $(\frac{1}{n}, 0) \cup \{p\} \cup (0, \frac{1}{n})$ y una base de entornos del punto q es de la forma $(\frac{1}{n}, 0) \cup \{q\} \cup (0, \frac{1}{n})$. Evidentemente, los puntos p y q no se pueden separar.*

Esta variedad también se puede definir como variedad cociente de las rectas $\{y = 0\}, \{y = 1\}$ módulo la relación de equivalencia $(t, 0) \equiv (t, 1); \forall t \neq 0$.

5.7. Axiomas de conexión

Las variedades diferenciables obviamente no tienen por qué ser conexas: dos discos abiertos disjuntos del plano constituyen un abierto de $\mathbb{R}^2$ y forman, por tanto, una variedad diferenciable. Tampoco, por el mismo motivo, tiene por qué ser una variedad conexa por caminos[23].

De modo trivial sí son las variedades localmente conexas y localmente conexas por caminos.

[23] Recordemos que un espacio topológico es **conexo** cuando no puede ser descompuesto en dos abiertos disjuntos y que es **conexo por caminos** cuando para cualesquiera dos puntos $p, q \in X$ del espacio existe un camino que los une, i.e., una aplicación continua $\gamma : [0, 1] \to X$ con $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$. Se verifica siempre que "conexo por caminos"$\Rightarrow$ "conexo", pero el recírpoco no es cierto. De igual modo, "localmente conexo por caminos"$\Rightarrow$ "localmente conexo", no siendo cierto el recíproco.

Observación 5.20 *Las componentes conexas de una variedad diferenciable son abiertos* [24] *y son, por tanto, subvariedades de la variedad.*

Observación 5.21 *Como las variedades son localmente conexas por caminos también son localmente semisimplemente conexas*[25] *y, por tanto, admiten recubrimiento universal. De hecho, el recubrimiento universal es también una variedad diferenciable.*

5.8. Axiomas de recubrimiento

El principal axioma de recubrimiento es el de compacidad. Un espacio topológico es **compacto** cuando de todo recubrimiento por abiertos del espacio se puede extraer un subrecubrimiento finito. Obviamente ésta es una propiedad global y como tal no tiene por qué verificarla una variedad diferenciable. De hecho, es muy fácil poner contraejemplos: el propio espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es variedad diferenciable no compacta.

Respecto de la compacidad local, entendiéndola como existencia de una base de entornos compactos es obvio que la verifica toda variedad, ya que la verifica $\mathbb{R}^n$.

Aquí surge un problema de definición, pues diferentes nociones reciben el mismo nombre. Se tienen tres acepciones diferentes de **compacidad local**:

Definición 5.22 *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice* **localmente compacto** *si:*

- **Primera definición**[26]*: para todo $p \in X$ existe una base de entornos compactos.*
- **Segunda definición**[27]*: para todo $p \in X$ existe un entorno compacto.*
- **Tercera definición**[28]*: para todo $p \in X$ existe un entorno abierto U de p de adherencia $\overline{U}$ compacta.*

Estas tres definiciones no son equivalentes entre sí en general. Evidentemente la primera implica la segunda y ambas son satisfechas por toda variedad diferenciable. Sin embargo, la tercera es independiente y existen variedades que no la satisfacen, como veremos a continuación. En el caso de un espacio topológico Hausdorff las tres propiedades son equivalentes[29].

Ejemplo 5.23 Variedad que no es localmente compacta con la definición 3.

Antes de ver el contraejemplo, pensemos cómo se podría intentar probar el resultado y veamos dónde falla la demostración. Evidentemente, $\mathbb{R}^n$ verifica la definicón, pues para cada punto $p \in \mathbb{R}^n$ podemos tomar como abierto cualquier bola $V = B(p,r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \| x - p \| < r\}$ cuya adherencia es la bola cerrada $\overline{V} = \overline{B}(p,r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \| x - p \| \leq r\}$.

Sea ahora M una variedad diferenciable y sea $p \in M$. Tomamos una carta $x : U \to \mathbb{R}^n$ con $p \in U$ y podemos construir

$$V = B(x(p), r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \| x - p \| < r\} \subset x(U)$$

de modo que

[24] En un espacio localmente conexo por caminos, como es una variedad, las componentes conexas y las conexas por caminos coinciden y son abiertas (cfr. e.g., James R. Munkres: *Topology. A First course* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975, Th. 3.4.2.y 3.4.3).

[25] Ésta es una condición técnica que significa que todo punto $p \in X$ del espacio topológico posee un entorno U de modo que el homomorfismo inducido entre los correspondientes grupos de homotopía $\pi_1(U,p) \to \pi_1(X,p)$ por la inclusión $U \hookrightarrow X$ es trivial (cfr. W. S. Massey: *Introducción a la Topología Algebraica*, Reverté, Barcelona, 1972, pág. 172).

[26] cfr. J. Margalef, E. Outerelo, J.L. Pinilla: *Topología* (5 vol.). Ed. Alhambra, Madrid, 1975-1982, tomo 2, pág. 226.

[27] cfr. J.R. Munkres: *Topology. A first course*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., New Jersey, 1975.

[28] cfr. F. Brickell, R. S. Clark: *Differentiable Manifolds. An Introduction.* Van Nostrand ,London, 1970.

[29] cfr. J. Margalef, E. Outerelo, J.L. Pinilla: *Topología* (5 vol.). Ed. Alhambra, Madrid, 1975-1982, tomo 2, pág. 226.

$$\overline{V} = \overline{B}(x(p), r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \| x - p \| \le r\} \subset x(U)$$

que es un compacto. Aplicamos ahora que la carta es homeomorfismo y tenemos

$$p \in \underset{\text{abierto}}{W = x^{-1}(V)} \subset \underset{\text{compacto}}{x^{-1}(\overline{V})} \subset U$$

pero lo que no sabemos es que $\overline{x^{-1}(V)} = x^{-1}(\overline{V})$*. Y de hecho, esta igualdad no es cierta en general, por lo que no podemos seguir la demostración.*

Vamos a construir el contraejemplo, definiendo la recta con un punto repetido una cantidad numerable de veces. Para ello consideramos la familia de rectas horizontales de ordenada un número entero $\cup\{y = k, k \in \mathbb{Z}\}$ *e identificamos todos los puntos de igual abscisa salvo los que están sobre la recta* $\{x = 0\}$*, i.e.,* $(x, j) \equiv (x, k)$, $\forall x \neq 0$, $\forall j, k \in \mathbb{Z}$.

Sea M *la variedad resultante tras esa identificación.* M *se puede considerar como la recta real con infinitos orígenes: los puntos* $p_k = (0, k)$*. Llamemos* $U_k = (-\infty, 0) \cup \{p_k\} \cup (o, \infty)$*, esto es la recta real con origen el punto* p_k*.*

Si W *es un entorno del punto* $p_0 = (0, 0)$*, entonces todo entorno de cada punto* p_k *corta a* W*, con lo que todos los puntos* p_k *están en la adherencia de* W*. Veamos que* $\overline{W}$ *no es compacto. Para ello hemos de construir un recubrimiento abierto que no admita subrecubrimientos finitos. Consideremos el recubrimiento formado por los abiertos* U_k*: cada abierto corta a* $\overline{W}$ *en al menos el punto* p_k *y el punto* p_k *sólo está en el abierto* U_k*, por lo que si quitamos uno sólo de los abiertos ya no se recubre el conjunto* $\overline{W}$*. Por tanto, es imposible extraer un subrecubrimiento finito.*

Observación 5.24 *Recuérdese que si la variedad es Hausdorff entonces es localmente compacta, con cualquiera de las tres definiciones.*

Observación 5.25 *Hemos probado que las variedades diferenciables que no son Hausdorff ni II.A.N son "malas". Vamos a ver en la sección siguiente que las que verifican ambas propiedades no sólo no son malas sino que son "muy buenas".*

5.9. Particiones de la unidad y metrazibilidad

Un espacio topológico es **metrizable** cuando se puede definir en él una distancia que tiene como topología asociada la topología que tenia *a priori*. Los espacios topológicos métricos gozan de todos los axiomas de separación[30]. Por tanto es importante saber si las variedades son espacios métricos.

La respuesta es negativa, pues conocemos ejemplos de variedades que no son Hausdorff. Sin embargo, añadiendo la condición de Hausdorff y el II Axioma de Numerabilidad se llega a que el espacio es metrizable. No sólo a eso, sino también a que admite **particiones de la unidad**, que constituyen una herramienta muy útil para realizar muchas construcciones en las variedades diferenciables.

Vamos a comenzar con una serie de definiciones:

Definición 5.26 *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico.*

- *Si* $f : X \to \mathbb{R}$ *es una función continua se llama* **soporte** *de* f *a la adherencia (o clausura) de* $\{x \in X / f(x) \neq 0\}$*.*
- *Dada una familia* $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}$ *de subconjuntos de* X *se dice que* $\mathcal{F}$ *es* **localmente finita** *si para cada* $x \in X$ *existe un entorno abierto* U *de* x *que sólo interseca a una cantidad finita de subconjuntos de la familia* $\mathcal{F}$*.*

[30] Recuérdese que se tiene una cadena de implicaciones: métrico $\Rightarrow \ldots \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$, donde el axioma T_4 es el que permite separar cerrados entre sí (espacio **normal**) y el T_3 el que permite separar un punto de un cerrado (espacio **regular**)

Observación 5.27 *Si la familia es finita, evidentemente es localmente finita. Pero también existen familias infinitas que son localmente finitas.*

Definición 5.28 *Sea M una variedad diferenciable. Se llama* **partición de la unidad** *a una colección $\{\varphi_\alpha : M \to [0,1]\}$ de funciones no idénticamente nulas tales que*

- *La colección de soportes $\{C_\alpha\}$ es localmente finita;*
- *para cada $p \in M$ es $\sum_\alpha \varphi_\alpha(p) = 1$.*

La última propiedad es la que justifica el nombre de partición de la unidad. Obsérvese que el sumatorio $\sum_\alpha \varphi_\alpha(p) = 1$ involucra sólo una cantidad finita de términos (es una suma finita, no una serie), porque para cada $p \in M$ es $\varphi_\alpha(p) = 0$, para todos los índices α salvo una cantidad finita.

Observación 5.29 *Si $\{U_\alpha\}$ es un recubrimiento abierto de un variedad M se dice que una partición diferenciable de la unidad $\{\varphi_\alpha\}$ está* **subordinada al recubrimiento** *$\{U_\alpha\}$ si verifica que para cada α la función φ_α se anula idénticamente en $M - U_\alpha$.*

Resulta que todo recubrimiento abierto admite una partición diferenciable de la unidad subordinada a él [31].

Las particiones de la unidad se utilizan en la teoría de Variedades para extender construcciones locales a construcciones globales. Si un concepto se introduce empleando coordenadas, esto es, usando cartas, para poder definirlo en toda la variedad se necesita poder "ensamblar"de algún modo las construcciones efectuadas en cada carta. Así, por ejemplo, cada punto p de una variedad M tiene un entorno U homemorfo a una abierto de $\mathbb{R}^n$: el dominio de una carta $x : U \to \mathbb{R}^n$. En el espacio euclídeo se puede definir un producto escalar de modo canónico, que mediante x^{-1} podemos trasladar al dominio U. Si hacemos esto en todos los dominios de carta de un atlas sobre M, ¿tenemos definido un producto escalar sobre M? No, porque si un punto pertenece al dominio de varias carta no sabemos definir el producto escalar en el punto. Pero si consideramos una partición de la unidad asociada al atlas entonces sí podemos definir un producto escalar *global* sobre la variedad.

Ligado a los conceptos anteriores aparece el de **paracompacidad**, aunque como su propio nombre sugiere ésta es una propiedad de recubrimiento.

Definición 5.30 *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ un recubrimiento abierto de X, esto es, una colección de abiertos cuya unión es todo el espacio X.*

- *Otro recubrimiento abierto $\{V_\beta, \beta \in B\}$ de X se dice que es un* **refinamiento** *del anterior si para cada abierto V_β existe un $\alpha \in A$ de modo que $V_\beta \subset U_\alpha$.*
- *$(X, \mathcal{T})$ se llama* **paracompacto** *si todo recubrimiento abierto del mismo posee un refinamiento localmente finito.*

Ejemplo 5.31 *Consideremos el espacio topológico $((0,1), \mathcal{T}_u)$. Entonces $\{U_1 = (0, 2/3), U_2 = (1/3, 1)\}$ es un recubrimiento abierto y $\{V_1 = (0, 7/12), V_2 = (1/2, 2/3), V_2 = (1/3, 1)\}$ es un refinamiento abierto del anterior ya que $V_1 \subset U_1$; $V_2 \subset U_1 \cap U_2$; $V_3 \subset U_2$. Evidentemente los refinamientos no son únicos ni único debe ser el abierto del primer recubrimiento en el que está contenido cada abierto del refinamiento.*

Observación 5.32 *De modo obvio resulta que todo espacio topológico compacto es paracompacto.*

[31] cfr. E. Outerelo y J. Ruiz: *Topología Diferencial.* Addison-Wesley Iberoamericana, Madid, 1998, Teorema 3.2

La relación entre paracompacidad, particiones de la unidad y metrizabilidad[32] está dada por el siguiente:

Teorema 5.33 *Sea M una variedad diferenciable Hausdorff que verifica el II Axioma de Numerabilidad. Entonces:*

- *M admite particiones de la unidad*
- *M es paracompacta*
- *M es metrizable.*

Demostración. Los argumentos son de Topología General y requieren resultados de esta disciplina.

- Al ser M Hausdorff es localmente compacta.
- Todo espacio localmente compacto y T_2 es T_3.
- Todo espacio T_3 y II. A. N. es pseudometrizable (por el Teorema de Urysohn) y de hecho metrizable (por ser T_2).
- Todo espacio metrizable es paracompacto (por el Teorema de Stone).
- Todo espacio paracompacto admite particiones de la unidad.

La demostración está concluida.□

Observación 5.34 *De hecho también es cierto que en toda variedad diferenciable Hausdorff que verifica el II Axioma de Numerabilidad resulta que todo recubrimiento abierto admite una partición diferenciable de la unidad subordinada al recubrimiento.*

Todas las variedades diferenciables que consideremos a partir de ahora serán Hausdorff y verificarán el II. A. N.

[32] Recordemos las siguientes definiciones básicas: Una **distancia** en un conjunto X es una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in M$
2. $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in M$ (simetría)
3. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (propiedad triangular)

Si se cambia la 3 propiedad por la siguiente:
3'. $d(x, x) = 0$
se tiene la noción de **pseudodistancia** (cfr. J. Margalef, E. Outerelo, J.L. Pinilla: *Topología* (5 vol.). Ed. Alhambra, Madrid, 1975-1982, tomo 1, pág. 11 y 26). Las distancias y pseudodistancias definen una topología (que tiene como base las bolas abiertas) y si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico se dice que es **metrizable** (resp. **pseudometrizable**) si su topología $\mathcal{T}$ coincide con la la topología inducida por alguna distancia (resp. pseudodistancia) definida en X. Todo espacio pseudometrizable y T_1 es metrizable.

5.10. Relaciones entre la geometría y la topología de una variedad diferenciable

El presente curso trata de estudiar las propiedades topológicas de las variedades diferenciables. Queremos señalar las relaciones entre las propiedades topológicas y las geométricas de una variedad. Existen dos tipos de relación:

1. Propiedades topológicas se pueden demostrar empleando herramientas geométricas auxiliares.
2. Dotar a una variedad de ciertas propiedades geométricas puede implicar restricciones topológicas sobre la variedad.

Veamos ejemplos de las dos situaciones. Del primer tipo tenemos las siguientes:

- El **teorema de Gauss-Bonnet** afirma que para una superficie compacta M inmersa en $\mathbb{R}^3$ es $\int_M K\,dA = 2\pi\kappa(M)$, esto es la integral a lo largo de la superficie de la curvatura de Gauss es 2π veces la característica de Euler. Este resultado prueba que un invariante topológico, la característica de Euler, puede ser obtenido a partir de herramientas geométricas: $\kappa(M) = \frac{1}{2\pi}\int_M K\,dA$.
- La estructura de espacio topológico métrico en una variedad diferenciable. En efecto, mediante particiones de la unidad se puede obtener una métrica riemanniana sobre la variedad. Se puede definir entonces la distancia ente dos puntos como el ínfimo de las longitudes de todas las curvas que unen los dos puntos. La topología asociada a esta métrica coincide con la de la variedad.

  Más aún, la compleción métrica (*toda sucesión de Cauchy es convergente*) y la compleción geométrica (*toda geodésica puede extender su dominio de definición a toda la recta real* $\mathbb{R}$) son equivalentes por el **teorema de Hopf-Rinow**[33]. Pero lo que marca la diferencia entre las estructuras topológica y geométrica es que ese modo de asignar la distancia no es canónico. Las propiedades que dependan de la métrica escogida son geométricas; las que no, son topológicas.

Veamos ahora cómo propiedades geométricas sobre una variedad pueden acarrear restricciones topológicas.

- Si una superficie compacta de $\mathbb{R}^3$ tiene curvatura de Gauss positiva en todo punto [condición geométrica] entonces es difeomorfa a una esfera [condición topológica]. En efecto, basta aplicar el teorema de Gauss-Bonnet antes mencionado: $\int_M K\,dA > 0 \Rightarrow \kappa(M) > 0 \Rightarrow M$ es difeomorfa a una esfera.
- El **Teorema de rigidez de la esfera** afirma que una superficie de $\mathbb{R}^3$ compacta y conexa de curvatura de Gauss constante (*a fortiori* positiva) es una esfera[34].
- El **teorema de Hadamard** afirma que toda variedad con una métrica riemanniana (i.e., un producto escalar en cada punto que varía de modo diferenciable), completa (en cualquiera de los dos sentidos comentados antes), simplemente conexa y de curvatura seccional no positiva es difeomorfa al espacio euclídeo[35]. En particular, las superficies de $\mathbb{R}^3$ que sean completas, simplemente conexas y con $K \leq 0$ en todo punto. Por ejemplo, el paraboloide hiperbólico (o silla de montar).

  El recíproco evidentemente no es cierto: el paraboloide elíptico (en particular el de revolución) es completo, simplemente conexo y difeomorfo al plano euclídeo $\mathbb{R}^2$, pero tiene $K > 0$ en todo punto.

[33] Véase, por ejemplo, do Carmo, M. P.: *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Boston, 1992, pág. 147.
[34] M. P. do Carmo: *Geometría Diferencial de curvas y superficies*, Alianza Editorial, Madrid, 1990, pág. 319.
[35] M. P. do Carmo: *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Boston, 1992, pág. 149.

- El **Teorema de la esfera** afirma que si una variedad riemanniana compacta simplemente conexa verifica que en todo punto la curvatura seccional está comprendida entre $\frac{1}{4}K_{\max}$ y $K_{\max}$, entonces la variedad es homeomorfa a una esfera[36].
- Si una variedad es **holomorfa** (esto es, si admite una estructura diferenciable como las que hemos definido en el curso, cambiando $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{C}^n$ y diferenciable C^∞ por holomorfo) entonces como variedad diferenciable (real) es de dimensión par y como espacio topológico es orientable.

Observación 5.35 *Como comentario final de esta sección enunciamos el siguiente "principio filosófico":* curvatura $\Rightarrow$ topología*. En efecto, hemos dicho que la Topología Diferencial sólo se ocupa de propiedades globales (dos puntos de una variedad siempre admiten entornos difeomorfos, por lo que son topológicamente indistinguibles). De entre los resultados mostrados destaquemos los teoremas de Gauss-Bonnet, de rigidez de la esfera, de Hadamard y de la esfera. Los cuatro tienen en común como hipótesis alguna condición sobre la curvatura y como tesis alguna condición global topológica. Estos cuatro teoremas son una muestra del principio filosófico mencionado.*

[36]M. P. do Carmo: *Riemannian Geometry.* Birkhäuser, Boston, 1992, pág. 265.

6. Campos vectoriales, inmersiones y subvariedades

En este capítulo estudiaremos las nociones correspondientes a la idea de aplicación *inyectiva* entre variedades[37]. Para hablar de inmersión y de subvariedad es necesario conocer los elementos básicos de la teoría de campos vectoriales. Los vamos a presentar primero junto con otras nociones estrechamente relacionadas: las ecuaciones diferenciales y las formas diferenciales.

6.1. Campos vectoriales

Suponemos que el lector está familiarizado con la noción de **campo vectorial** sobre una variedad[38], no obstante lo cual, repetimos aquí las construcciones básicas[39].

Observación 6.1 *El conjunto $\mathfrak{F}(M)$ de funciones diferenciables de una variedad diferenciable es una anillo respecto de las operaciones de suma y producto de funciones.*

Definición 6.2 *Sean M una variedad diferenciable y $x : U \to \mathbb{R}^n$ una carta. Designemos las funciones coordenadas por x^i, esto es, $x(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$. Se llama* **derivada parcial** *$\partial/\partial x^i$ al operador*

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}(U)$$

definido por $(\frac{\partial}{\partial x^i})(f)(p) = \left(\frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial t^i}\right)_{x(p)}$, siendo $(t^1, \ldots, , t^n)$ las coordenadas en $\mathbb{R}^n$.

Observación 6.3 *En particular, las propias funciones coordenadas de la carta se pueden derivar:*

$$(\frac{\partial}{\partial x^i})(x^j) = \left(\frac{\partial(x^j \circ x^{-1})}{\partial t^i}\right) = \frac{\partial t^j}{\partial t^i} = \delta_i^j$$

Definición 6.4 *Sea M una variedad diferenciable. Un campo vectorial X sobre M es una aplicación:*

$$X : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$$

que verifica las siguientes propiedades:

- *Es $\mathbb{R}$-lineal: $X(\alpha f + \beta g) = \alpha X(f) + \beta X(g)$, para cualesquiera $f, g \in \mathfrak{F}(M)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*
- *Verifica la ley de Leibnitz: $X(fg) = X(f)g + fX(g)$, para cualesquiera $f, g \in \mathfrak{F}(M)$.*

El conjunto de campos vectoriales se denota por $\mathfrak{X}(M)$.

Se verifican las siguientes propiedades que no vamos a demostrar:

- El conjunto de campos vectoriales $\mathfrak{X}(M)$ sobre una variedad M es un módulo sobre el anillo de funciones de la variedad $\mathfrak{F}(M)$.

[37]Seguimos fundamentalmente la exposición de campos vectoriales, inmersiones y subvariedades del libro F. Brickell R.S. Clark: *Differentiable Manifolds. An introduction.* Van Nostrand, London, 1970.
Las demás partes del capítulo se estudiarán siguiendo las obras que se indiquen en cada momento.

[38]Esta noción se imparte en la asignatura Geometría Diferencial del mismo curso

[39]No vamos a seguir en concreto ningún libro. Todo cuanto digamos está expuesto en la mayoría de los textos introductorios de Geometría Diferencial

- En cada carta $x : U \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial admite una expresión única como

$$X = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot X^i$$

donde $X^i \in \mathfrak{F}(U)$, y la expresión está sumada en i según el convenio de Einstein[40], lo que significa que

$$X(f) = (\frac{\partial}{\partial x^i} \cdot X^i)(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot X^i$$

- El espacio vectorial real de dimensión n que tiene como base las derivadas parciales en un punto p de una variedad M se denomina **espacio tangente** de la variedad en el punto y se denota por T_pM. Sus elementos se llaman **vectores tangentes**.

  Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo vectorial en M, $p \in M$ y $x : U \to \mathbb{R}^n$ es una carta con $p \in U$, entonces $X(p) = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot X^i(p)$ es un vector tangente.

- Los vectores tangentes tienen una interpretación como **velocidad de una curva**. Sean $p \in M$ un punto de una variedad diferenciable y $x : U \to \mathbb{R}^n$ una carta con $x \in U$. Consideremos una curva cuya imagen esté en U y que pase por p, es decir, una aplicación diferenciable $\alpha : (a, b) \to U$, donde (a, b) es un intervalo de la recta real $\mathbb{R}$ y de modo que $p = \alpha(t_0)$, para un cierto $t_0 \in (a, b)$. Entonces, componiendo

$$x \circ \alpha : (a, b) \to U \to \mathbb{R}^n$$

  tenemos definida una aplicación entre espacios euclídeos. Llamemos $\alpha^i = x^i\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}$, esto es, la correspondiente función coordenada. Pues bien, definimos el **vector tangente a la curva** α en el punto p como

$$\alpha'(t_0) = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{d\alpha^i}{dt}$$

  donde t indica el parámetro de la recta real.

  Evidentemente, curvas distintas pueden dar lugar al mismo vector tangente en un punto. Esto permite definir una relación de equivalencia entre curvas que pasan por el punto p y se puede definir el espacio tangente T_pM como el conjunto de clases de equivalencia resultantes.

  Una **curva integral** u **órbita** de un campo vectorial X es una curva $\gamma : \mathbb{R} \to M$ tal que $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$, para todo t. Por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales por cada punto pasa una única curva integral maximal.

- La **ley del cambio de carta** es la que permite cambiar de carta. Todas las construcciones anteriores son independientes de la carta escogida. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo vectorial y si las expresiones locales de X en dos cartas $x : U \to \mathbb{R}^n$, $y : V \to \mathbb{R}^n$ son

$$X = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot X^i; \; X = \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \cdot Y^\alpha$$

  entonces la relación entre las funciones coordenadas del campo X en una y otra carta es:

[40] Según el **convenio de sumación de Einstein** siempre que un índice se repita dos veces, una situado como subíndice y la otra como superíndice se entiende que se están sumando todas las cantidades que se obtienen al variar el índice entre todos los valores posibles (en el caso presente entre 1 y n).

$$X^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} Y^\alpha$$

- El conjunto $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$ de vectores tangentes a una variedad diferenciable se denomina **fibrado tangente de la variedad**. TM también tiene estructura de variedad diferenciable, de dimensión doble de la de M. Además, como variedad es siempre orientable. De modo natural se establece la proyección $\pi : TM \to M$, que a cada vector tangente le hace corresponder el punto en que es tangente.

  Una sección σ del fibrado tangente es una aplicación $\sigma : M \to TM$ tal que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_M$. Es decir, es una aplicación que a cada punto p le hace corresponder un vector $\sigma(p) \in T_pM$. Así, un campo vectorial sobre una variedad no es más que una sección diferenciable del fibrado tangente de la variedad.

- La **aplicación tangente** o **diferencial** de una aplicación $\varphi : M \to N$ entre variedades se define del siguiente modo geométrico: al vector $v = \alpha'(t_0) \in T_pM$ le hace corresponder el vector $\varphi_*(v) = (\varphi \circ \alpha)'(t_0) \in T_{\varphi(p)}N$, esto es, componiendo la curva α con la aplicación φ se obtiene una nueva curva en N y la aplicación tangente hace corresponder a la velocidad de la primera curva (esto es, al vector v) la velocidad de la segunda curva.

  Resulta que es un homomorfismo de espacios vectoriales y que es isomorfismo si la aplicación es un difeomorfismo. Más aún, se tiene el recíproco, que es el *teorema de la función inversa para variedades*[41]: si la aplicación tangente es isomorfismo en p entonces la aplicación φ es un difeomorfismo en un entorno de p.

  La aplicación tangente se puede definir así entre los fibrados tangentes $\varphi_* : TM \to TN$ y verifica las siguientes propiedades:

  1. $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$, siempre que se tenga $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$.
  2. $\mathrm{id}_* = \mathrm{id}$, siendo $\mathrm{id} : M \to M$ la identidad.

  por lo que no es más que un funtor covariante[42] de la categoría de variedades diferenciables en la categoría de fibrados tangentes.

  La expresión en coordenadas locales es la siguiente:

$$\varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}$$

[41] Ver F. W. Warner: *Foundations of Differential maps and Lie groups* . Scott, Foresman and Co., Glenview, Ill., 1971, p. 24.

[42] Un **funtor** F es, hablando de modo coloquial, una correspondencia entre categorías, que asigna a cada objeto A de la primera un objeto $F(A)$ de la segunda y a cada morfismo $f : A \to B$ de la primera un morfismo de la segunda $F(f)$ entre los correspondientes objetos, de modo que si f es la identidad también lo es $F(f)$ y que

- si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ y si $F(f) : F(A) \to F(B)$, $F(g) : F(B) \to F(C)$, entonces $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ (y ese dice que es un **funtor covariante**);
- y si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ y si $F(f) : F(B) \to F(A)$, $F(g) : F(C) \to F(B)$, entonces $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ (y ese dice que es un **funtor contravariante**).

Entre la categoría de variedades diferenciables y la de fibrados tangentes se tiene un funtor covariante, que hace corresponder a cada variedad (objeto) su fibrado tangente y a cada aplicación entre variedades (morfismo) su aplicación tangente entre los fibrados tangentes a las variedades. Las propiedades que hemos enunciado de la aplicación tangente son las que demuestran el carácter funtorial de esta construcción.

Por otra parte, también es inmediato comprobar que el funtor que a cada variedad le hace corresponder su anillo de funciones es un funtor contravariante: basta asociar a cada aplicación diferenciable $\varphi : A \to B$ la aplicación entre los anillos $\varphi^* : \mathcal{F}(B) \to \mathcal{F}(A)$ dada por $\varphi^*(h) = h \circ \varphi$, $\forall h \in \mathcal{F}(B)$.

siendo

$x : U \to \mathbb{R}^m$, $x(p) = (x^1(p), \ldots, x^m(p))$, una carta de M,

$y : V \to \mathbb{R}^n$, $y(q) = (y^1(q), \ldots, y^n(q))$ una carta de N,

$\varphi^\alpha = y^\alpha \circ \varphi$.

Así, en coordenadas se tiene la matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}$$

Es claro que si $\varphi_* : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ es un isomorfismo de espacios vectoriales entonces la matriz jacobiana es cuadrada ($m = n$) y de determinante no nulo. Como las cartas son difeomorfismos, la aplicación jacobiana de $y \circ \varphi \circ x^{-1} : x(U) \to y(V)$ también tiene determinante no nulo en el punto $x(p)$. Aplicando el teorema de la función inversa del Análisis, existen entornos U' de $x(p)$ y V' de $y(\varphi(p))$ tales que $y \circ \varphi \circ x^{-1}|_{U'} \to V'$ es un difeomorfismo. Entonces $\varphi|_{x^{-1}(U')} : x^{-1}(U') \to y^{-1}(V')$ es un difeomorfismo. Con esto hemos probado el teorema de la función inversa para variedades.

Algebraicamente, la aplicación tangente actúa sobre los campos vectoriales haciendo corresponder a cada campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial $\varphi_*(X) \in \mathfrak{X}(N)$ que queda definido por su actuación sobre las funciones de N del siguiente modo[43]:

$$\varphi_*(X)(h) = X(h \circ \varphi), \ \forall h \in \mathfrak{F}(N)$$

6.2. Ecuaciones diferenciales

Para simplificar la situación vamos a considerar como variedad ambiente el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$. Los campos vectoriales tienen **órbitas**: dado un campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ y un punto $p \in \mathbb{R}^2$ existe una única (salvo reparametrización) curva maximal $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t_0) = p$ $(d\gamma/dt)|_{t_0} = X_p$. La existencia y unicidad de esta curva viene dada por el correspondiente teorema de existencia y unicidad de solución de ecuaciones diferenciales (el llamado **problema de Cauchy**). Vamos a ver cómo podemos pasar de campos vectoriales a ecuaciones diferenciales y viceversa. Es éste un proceso reversible, que permite establecer un *diccionario* entre los dos ámbitos. (En muchos libros se puede encontrar esta información[44]).

Vamos a verlo con una serie de ejemplos.

Ejemplo 6.5 *Sea*

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (t, t^2)$$

---

[43]Hablando con rigor podría ocurrir que $\varphi_*(X)$ no fuera realmente un campo vectorial. En efecto, si dos puntos $p, q \in M$ tienen la misma imagen $\varphi(p) = \varphi(q) = r \in N$ puede ocurrir que $\varphi_*(X_p) \neq \varphi_*(X_p)$, con lo que no es posible definir $(\varphi_*(X))_r$. Cuando sí es posible definir $\varphi_*(X)$, esto es, cuando $\varphi_*(X_p) = \varphi_*(X_p)$ siempre que $\varphi(p) = \varphi(q)$ se dice que X y $\varphi_*(X)$ son campos φ-relacionados. Esto ocurre en particular cuando φ es un difeomorfismo.

La actuación sobre funciones está bien definida cuando se restringe a gérmenes de funciones.

Puede consultarse todo lo aquí relatado en el capítulo primero de:

F. W. Warner: *Foundations of Differential maps and Lie groups* . Scott, Foresman and Co., Glenview, Ill., 1971.

[44]Por ejemplo:

- F. Ayres, Jr.: *Ecuaciones Diferenciales*, McGraw-Hill, 2001 (serie Schaum).
- M. L. Krasnov, A. I. Kiseliov. G. I. Makárenko, Ie. V. Shikin, V. I. Zaliapin: *Curso de Matemáticas Superiores*, tomo 4 (Ecuaciones diferenciales ordinarias. Estabilidad) Editorial URSS, Moscú, 2003.

una curva en paramétricas. De hecho, es una parábola . Entonces su vector tangente es

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, 2t)$$

que nos permite definir dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \frac{\partial x}{\partial t} & = & x'(t) & = & 1 \\ \frac{\partial y}{\partial t} & = & y'(t) & = & 2t \end{array} \right\}$$

que, si no imponemos valores iniciales, tiene como soluciones todas las parábolas

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & = & t + a \\ y & = & t^2 + b \end{array} \right\}$$

Estas parábolas llenan todo el plano real $\mathbb{R}^2$. Así que, partiendo de la curva hemos llegado a la ecuación diferencial. (En este caso, no definen las parábolas un campo vectorial, porque hay "demasiadas", puesto que por cada punto no pasa una única parábola).

Ejemplo 6.6 *Sea ahora*

$$\{y = x^2\}$$

la misma curva en explícitas. Entonces formamos la ecuación diferencial de primer orden determinada por dirección tangente

$$y' = \frac{\partial y}{\partial x} = 2x$$

cuyas soluciones son las parábolas

$$y = x^2 + c$$

Son algunas de las parábolas que en el caso anterior. Y la ecuación diferencial define el campo tangente a las órbitas.

Ejemplo 6.7 *Consideremos ahora*

$$\{f(x, y) = 0\} = \{y - x^2 = 0\}$$

que es la misma parábola como curva en implícitas. La recta tangente en $p = (p_1, p_2)$ está dada por

$$\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p (x - p_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_p (y - p_2) = 0 \right\} = \{(-2x)_p(x - p_1) + (1)_p(y - p_2) = 0\}$$

que define el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial x} & = & -2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & 1 \end{array} \right\}$$

cuyas soluciones son las mismas parábolas que en los casos anteriores,

$$f(x, y) = -x^2 + y + c$$

Ejemplo 6.8 *Continuando el ejemplo, podemos llegar a una ecuación diferencial total. Una ecuación diferencial total en dos variables x, y es una expresión*

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

La ecuación se dice exacta *si existe una función f tal que*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

en cuyo caso $f(x,y) = c$ son las soluciones de la ecuación diferencial total. La condición necesaria y suficiente para que una diferencial total sea exacta es que[45]

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Puede ocurrir que la ecuación no sea exacta pero que existe una función $\mu(x,y)$ de modo que

$$\mu(x,y)\,P(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,Q(x,y)\,dy = 0$$

sí sea exacta. En tal caso se dice que $\mu(x,y)$ es un factor integrante *y la nueva ecuación admite soluciones. En el caso de dos variables esto siempre ocurre:* toda ecuación diferencial total en dos variables es integrable[46].

[45]Ver, por ejemplo, M. L. Krasnov, A. I. Kiseliov. G. I. Makárenko, Ie. V. Shikin, V. I. Zaliapin: *Curso de Matemáticas Superiores*, tomo 4 (Ecuaciones diferenciales ordinarias. Estabilidad) Editorial URSS, Moscú, 2003, p.43

[46]Esto no es válido para formas en más variables: una forma o ecuación total en x, y, z necesita unas condiciones de integrabilidad para admitir solución (ver F. Ayres, Jr.: *Ecuaciones Diferenciales*, McGraw-Hill, 2001 (serie Schaum), p.164 y p.171.) Estas condiciones son las que en variedades da el Teorema de Frobenius. Si

$$P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = 0$$

es la ecuación diferencial total en tres variables la condición de integrabilidad es

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

como en el caso de dos variables puede ocurrir que la ecuación sea exacta, esto es, que coincida con la diferencial de una función, o que se consiga que sea exacta multiplicando todos los términos de la ecuación por un factor integrante.

Estas condiciones son las que en variedades da el Teorema de Frobenius. En efecto (cfr. F. W. Warner: *Foundations of Differential maps and Lie groups.* Scott, Foresman and Co., Glenview, Ill., 1971, pp. 74 y 78), una distribución es integrable $\mathcal{D}$ si y sólo si el ideal de formas que se anulan sobre ella $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ es diferencial, esto es, la diferencial de una forma del ideal es del ideal. En el caso de que el ideal esté generado por una 1-forma $\omega = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = 0$ en una variedad tridimensional (en particular en $\mathbb{R}^3$) la condición de integrabilidad es que existe una 1-forma α tal que $d\omega = \alpha \wedge \omega$. Veamos cómo esta condición coincide exactamente con la condición de integrabilidad de la ecuación diferencial total determinada por ω. En efecto:

- La diferencial de ω es

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz$$

- La 2-forma $\alpha \wedge \omega$ tendrá una expresión:

$$\begin{gathered} \alpha \wedge \omega = (Adx + Bdy + Cdz) \wedge (Pdx + Qdy + Rdz) = \\ (AQ - PB)dx \wedge dy + (AR - PC)dx \wedge dz + (BR - CQ)dy \wedge dz \end{gathered}$$

- Las dos expresiones coinciden si se verifican las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y} &= AQ - PB \\ \tfrac{\partial R}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial z} &= AR - PC \\ \tfrac{\partial R}{\partial y} - \tfrac{\partial Q}{\partial z} &= BR - CQ \end{aligned}$$

- Multiplicando la primera igualdad por $-R$, la segunda por Q y la tercera por $-P$ y sumando se obtiene

Consideremos la ecuación diferencial total ligada al ejemplo de la parábola que estamos tratando todo el rato. Diferenciando la ecuación implícita de la parábola obtenemos

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = -2x\,dx + dy$$

que nos da lugar a la siguiente ecuación diferencial total, obviamente exacta:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = -2x\,dx + dy = 0$$

Para resolver esta ecuación diferencial volvemos al sistema anterior:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial x} & = & -2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & 1 \end{array} \right\}$$

Observación 6.9 *Los anteriores ejemplos ponen de manifiesto que diferentes tipos de ecuaciones diferenciales se pueden corresponder con la misma realidad matemática (las rectas tangentes a la familia de parábolas $y = x^2 + c$, en el caso de los ejemplos) del mismo modo como diferentes tipos de ecuaciones (paramétricas, explícitas e implícitas) corresponden a una misma curva.*

Y ponen también de manifiesto cómo campos vectoriales y ecuaciones diferenciales son dos modos de expresar y estudiar una misma realidad matemática.

6.3. Formas diferenciales

En los tratados de Geometría y Topología Diferencial se suelen introducir las formas diferenciales como construcción dual de los campos vectoriales. Nosotros también lo veremos así, aunque comenzaremos con un ejemplo, continuación de los de la sección precedente, que hace ver que también podemos llegar a las formas mediante las ecuaciones diferenciales. Dicho de modo abreviado: *forma diferencial = ecuación diferencial total.*

Ejemplo 6.10 *Consideremos el primer término de una ecuación diferencial total en dos variables*

$$\omega = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

Podemos pensar que para cada punto $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ es

$$\omega_{(p,q)} : T_{(p,q)}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

una aplicación lineal definida así:

$$\omega_{(p,q)}\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right) = P(p, q)\,a + Q(p, q)\,b$$

Es una aplicación lineal (porque las parciales son base del plano tangente). Por lo tanto, su núcleo $\ker \omega_{(p,q)} \subset T_{(p,q)}\mathbb{R}^2$ *es un espacio vectorial. Y si variamos el punto, tenemos una* **distribución**, *esto es, una familia de subespacios de los espacios tangentes, que varían diferenciablemente.*

Hagamos las cuentas con el ejemplo que consideramos en la sección precedente.

$$\omega = -2x\,dx + dy$$

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

que es la expresión deseada.

Entonces,

$$\omega_{(p,q)} : T_{(p,q)}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

está definida como

$$\omega_{(p,q)}\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right) = -2p\,a + b$$

con lo que

$$\ker \omega_{(p,q)} = \{-2p\,a + b = 0\} \subset T_{(p,q)}\mathbb{R}^2$$

que es una recta vectorial $\{-2p\,x+y = 0\} = \{y = 2p\,x\}$ *de* $T_{(p,q)}\mathbb{R}^2$. *Al variar el punto* (p,q) *obtenemos la familia de rectas tangentes a las parábolas* $\{y = x^2 + c\}$

Por ejemplo, en el punto $(3,9)$ *de* $\{y = x^2\}$ *la recta tangente tiene pendiente* $y' = 2 \cdot 3 = 6$*, es decir, la ecuación de su recta vectorial asociada es* $\{y = 6x\}$*, que es lo que habíamos obtenido antes.*

Como conclusión tenemos que a cada ecuación diferencial total $P(x,y)dx+Q(x,y)dy = 0$ **le podemos asociar una forma diferencial** $\omega = P(x,y)dx+Q(x,y)dy$**, que puede ser interpretada como una familia de aplicaciones lineales de los espacios tangentes en** $\mathbb{R}$**. El núcleo de cada aplicación será así un hiperplano vectorial del espacio tangente y las soluciones de la ecuación diferencial total, si existen, son las hipersuperficies que tienen como espacio tangente en cada punto el núcleo de la correspondiente aplicación lineal.**

No siempre existe solución: en dos variables sí existe, pero en tres se necesitan las condiciones de integrabilidad de las que hablamos en la sección precedente. En variedades tales condiciones se conocen bajo el nombre de teorema de Frobenius.

En el ámbito de la Topología y la Geometría Diferencial estas familias diferenciables de aplicaciones lineales del espacio tangente en el cuerpo real se denominan **1-formas** o **formas de Pfaff** (el nombre de 1-formas proviene del hecho de que existen formas de grados superiores).

Vamos a repasar las propiedades fundamentales de las formas diferenciales siguendo la presentación que hicimos de los campos vectoriales.

Definición 6.11 *Sean* M *una variedad diferenciable y* $x : U \to \mathbb{R}^n$ *una carta. Designemos las funciones coordenadas por* x^i*, esto es,* $x(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$*. Se llama* **codiferencial** dx^i *al operador dual de* $\frac{\partial}{\partial x^i}$*, esto es,*

$$dx^i : T_pM \to \mathbb{R}$$

definido por

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Definición 6.12 *Sea* M *una variedad diferenciable. Una 1-forma diferencial o forma de Pfaff* ω *sobre* M *es una aplicación* $\mathfrak{F}(M)$*-lineal:*

$$\omega : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$$

El conjunto de formas diferenciales se denota por $\Lambda(M)$*.*

Se verifican las siguientes propiedades que no vamos a demostrar:

- El conjunto de formas diferenciales $\Lambda(M)$ sobre una variedad M es un módulo sobre el anillo de funciones de la variedad $\mathfrak{F}(M)$.
- En cada carta $x : U \to \mathbb{R}^n$ una forma diferencial admite una expresión única como

$$\omega = \omega_i \, dx^i$$

donde $\omega_i \in \mathfrak{X}(U)$, y la expresión está sumada en i según el convenio de Einstein. Esto significa que

$$\omega(X) = (\omega_i \, dx^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \cdot X^j \right) = \omega_i X^i$$

con lo que $\omega(X) \in \mathfrak{F}(M)$, es una función de M.

- El espacio vectorial real de dimensión n que tiene como base las codiferenciales en un punto p de una variedad M se denomina **espacio cotangente** de la variedad en el punto y se denota por T_p^*M. Sus elementos se llaman **covectores**.
- La **ley del cambio de carta** es la que permite cambiar de carta. Todas las construcciones anteriores son independientes de la carta escogida. Si $\omega \in \Lambda(M)$ es una forma diferencial y si las expresiones locales de ω en dos cartas $x : U \to \mathbb{R}^n, \ y : V \to \mathbb{R}^n$ son

$$\omega = \omega_i \, dx^i = \omega_\alpha \, dy^\alpha$$

entonces la relación entre las funciones coordenadas de la forma ω en una y otra carta es:

$$\omega_i = \omega_\alpha \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}$$

- El conjunto $T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$ de covectores de una variedad diferenciable se denomina **fibrado cotangente de la variedad**. T^*M también tiene estructura de variedad diferenciable, de dimensión doble de la de M. Además, como variedad es siempre orientable. De modo natural se establece la proyección $\pi : T^*M \to M$, que a cada covector le hace corresponder el punto en que se aplica.

  Una sección ω del fibrado cotangente es una aplicación $\omega : M \to T^*M$ tal que $\pi \circ \omega = \mathrm{id}_M$. Es decir, es una aplicación que a cada punto p le hace corresponder un covector $\omega(p) \in T_p^*M$. Así, una forma diferencial sobre una variedad no es más que una sección diferenciable del fibrado cotangente de la variedad.

- La **aplicación cotangente** o **codiferencial** de una aplicación $\varphi : M \to N$ entre variedades es la aplicación

$$\varphi^* : T^*(N) \to T^*(M)$$

dada por

$$(\varphi^*(\omega))_p(X_p) = \omega_{\varphi(p)}(\varphi_*(X_p))$$

De modo algebraico, y con las mismas observaciones que hicimos para los campos vectoriales,

$$\varphi^* : \Lambda(N) \to \Lambda(M)$$

que se define como:

$$\varphi^*(\omega)(X) = \omega(\varphi_*(X))$$

La aplicación cotangente verifica las siguientes propiedades (por las que es un funtor contravariante entre la categoría de variedades y la de fibrados cotangentes):

1. $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$, siempre que se tenga $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$.
2. $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$, siendo $\mathrm{id} : M \to M$ la identidad.

6.4. Inmersiones y subvariedades

Comenzamos con las definiciones básicas:

Definición 6.13 *Sean M y N dos variedades diferenciables y $f : M \to N$ una aplicación diferenciable. Se dice que:*

- *f es una* **inmersión** *si la aplicación tangente $f_* : T_pM \to T_{f(p)}N$ es inyectiva, para todo $p \in M$.*
- *f es un* **embedding**[47] *si es una inmersión inyectiva.*
- *M es una* **subvariedad** *de N si $M \subset N$ y que la inyección natural $f : M \to N$ es una inmersión.*
- *M es una* **subvariedad regular** *de N si es una subvariedad y la topología de M coincide con la restricción de la de N.*
- *f es un* **embedding regular** *si es un embedding y $f(M)$ es una subvariedad regular de N. En tal caso, $f : M \to f(M)$ es homeomorfismo y también difeomorfismo.*

Ejemplo 6.14 *Veamos una serie de ejemplos que ponen de manifiesto las diferencias entre las nociones que acabamos de introducir.*

- *La aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (t, 0)$ es un embedding regular. En efecto, la aplicación tangente en un punto p está dada por*

$$(f_*)_p \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{f(p)} \left(\frac{\partial f^1}{\partial t}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{f(p)} \left(\frac{\partial f^2}{\partial t}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{f(p)}$$

  que es obviamente inyectiva. El resto de las comprobaciones son triviales.
- *La aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ cuya imagen tiene la forma de la curva α es una inmersión no inyectiva (no es embedding).*
- *La aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ cuya imagen tiene la forma de la lemniscata de Bernoulli recorrida sólo una vez es un embedding no regular, porque la topología de $f(\mathbb{R})$ no es la heredada de $\mathbb{R}^2$.*
- *Toda hipersuperficie de $\mathbb{R}^n$ dada por los ceros de una función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cuya matriz jacobiana no se anula en la hipersuperficie es una subvariedad regular de $\mathbb{R}^n$.*

[47] Este término inglés no ha tenido una traducción al español totalmente aceptada. Literalmente significa “encamamiento”, y quiere expresar que M se introduce en N como un cuerpo en una cama: la cama se adopta totalmente a la geometría del cuerpo. La traducción más difundida es la de “embebimiento”, quizá por su similtud fonética y porque da la idea de que la variedad N embebe a la variedad M. Nosotros emplearemos la expresión inglesa.

7. El Teorema de inmersión de Whitney

Vamos a estudiar en esta sección el teorema que establece que toda variedad se puede sumergir en un espacio euclídeo real[48].

H. Whitney demostró 1936 el siguiente trascendental resultado:

Teorema 7.1 *(***Whitney***) Toda variedad diferenciable (Hausdorff y que verifique el II. A. N.) de dimensión n admite un embedding regular en $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Más aún, se puede probar que el resultado permanece válido cambiando $2n+1$ por $2n$ y también que toda variedad admite una inmersión, no inyectiva en general, en $\mathbb{R}^{2n-1}$. Estas cotas no se pueden rebajar más: el **plano proyectivo real** es una superficie compacta no orientable que admite una inmersión en $\mathbb{R}^3$ con autointerseccciones y un embedding en $\mathbb{R}^4$, pero no lo puede admitir en $\mathbb{R}^3$. Lo mismo le ocurre a la **botella de Klein**. En efecto, estas afirmaciones son consecuencia del siguiente resultado[49]:

Teorema 7.2 *Una variedad topológica compacta y no orientable, de dimensión $n-1$, no puede admitir un embedding en la esfera S^n.*

Como consecuencia resulta que una superficie compacta y no orientable no admite un embedding en S^3, y tampoco en $\mathbb{R}^3$ (pues $\mathbb{R}^3 \subset S^3$ vía la proyección estereográfica: S^3 es la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{R}^3$).

Existen otros resultados que prueban que ciertos embeddings no son posibles. Quizá el más famoso de ellos sea el sigiuente teorema[50] que Hilbert probó en 1901:

Teorema 7.3 (Hilbert) *Una superficie completa y de curvatura constante negativa no admite ningún embedding isométrico en $\mathbb{R}^3$.*

Observación 7.4 *El teorema de inmersión de Whitney parece hacer ocioso el estudio de la variedades "abstractas"(definidas a partir de la noción de atlas), ya que toda variedad es subvariedad de algún espacio euclídeo. Este es el punto de partida de muchos libros*[51].

Sin embargo definir las variedades a partir de un atlas tiene una motivación clara: en muchas ocasiones es más fácil, y más natural, dotar de estructura a un conjunto mediante un atlas que mediante su inmersión en un espacio euclídeo. Por ejemplo, el plano proyectivo real $P_2(\mathbb{R})$ hereda, por paso al cociente, la estructura diferenciable de la esfera S^2. Su expresión como subvariedad de $\mathbb{R}^4$ es mucho más costosa y menos natural.

La versión débil del teorema de Whitney que vamos a probar es la que afirma que las variedades diferenciables compactas son siempre difeomorfas a subvariedades de un espacio euclídeo de dimensión suficientemente grande. Evidentemente, esto es mucho menos fuerte que el teorema general, pero puede servir para dar una idea de cómo se realiza la demostración general.

[48] Seguimos el libro
F. Brickell, R.S. Clark: *Differentiable Manifolds. An introduction.* Van Nostrand, London 1970.
aunque algunos comentarios serán tomados de otras fuentes que se citarán.

[49] W. S. Massey: *Singular Homology Theory.* Springer, N. York, 1980, ejercicio 6.2, pág. 223.

[50] cfr. e.g., M. P. do Carmo: *Geometría Diferencial de curvas y superficies*, Alianza Editorial, Madrid, 1990, pág. 442.

[51] Véanse, por ejemplo,

- J. W. Milnor: *Topology from Differentiable viewpoint.* Univ. Press. Virginia, Charlottesville, 1969.
- E. Outerelo y J. Ruiz: *Topología Diferencial.* Addsion-Wesley Iberoamericana. Madrid, 1998.

Teorema 7.5 *Sea M una variedad diferenciable compacta de dimensión n. Entonces existe algún embedding regular $g : M \to \mathbb{R}^N$, para algún N suficientemente grande.*

Demostración. Como el desarrollo es un tanto complejo lo dividimos en varios pasos.

1. Hemos de construir $g; M \to \mathbb{R}^N,\ p \mapsto (g^1(p), \dots, g^N(p))$. Para que g sea inyectiva deberá ocurrir que $g^a(p) = g^a(q)$, para todo $a \in \{1, \dots, N\}$ implique $p = q$. Vamos a preocuparnos en primer lugar de construir una tal aplicación g inyectiva.
2. Sea $p \in M$ y sea $x : U \to \mathbb{R}^n$ una carta con $p \in U$. Entonces, como M es Hausdorff y verifica el II Axioma de Numerabilidad, M admite particiones diferenciables de la unidad y podemos asegurar que existen funciones globales
$$X^1, \dots, X^n : M \to \mathbb{R}^n$$
tales que $X^i|_V = x^i|_V$, para algún entorno V de p, con $p \in V \subset U$.
3. Además, por el mismo razonamiento, podemos asegurar que existen una función continua $f : M \to \mathbb{R}$ y un entorno abierto W de p con $p \in W \subset \overline{W} \subset V$, de modo que $f \equiv 1$ en $\overline{W}$ y $f \equiv 0$ en $M - V$. (La función f es lo que se denomina una **función meseta**).
4. Así obtenemos que los $\{W\}$ definidos forman un recubrimiento abierto de M. Como M es compacto, admite un subrecubrimiento finito $\{W_1, \dots W_s\}$. Y para cada $\alpha \in \{1, \dots, s\}$ tenemos definidas las funciones $\{x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha\}$, $\{X^1_\alpha, \dots, X^n_\alpha\}$, $\{f_\alpha\}$. Sea $N = (n+1)s$. Definimos $g : M \to \mathbb{R}^N$ mediante
$$g(p) = (f_1(p), \dots, f_s(p), X^1_1(p), \dots, X^n_1(p), \dots, X^1_s(p), \dots, X^n_s(p)\}.$$
5. Veamos que g es inyectiva. Supongamos que $g(p) = g(q)$. Como $M = \bigcup_{\alpha=1}^s W_\alpha$ y $p \in M$ existirá $\beta \in \{1, \dots, s\}$ de modo que $p \in W_\beta$. Por tanto, como $W_\beta \subset \overline{W_\beta}$ se tiene que $f_\beta(p) = 1$. Y como $g(p) = g(q)$ resultará en particular que $f_\beta(q) = 1$, con lo que $q \notin M - V_\beta$, esto es, $q \in V_\beta$.

   Así que $p \in W_\beta \subset V_\beta$ y $q \in V_\beta$ están en el mismo abierto. Por tanto, al ser $g(p) = g(q)$ resulta que $X^1_\beta(p) = X^1_\beta(q), \dots, X^n_\beta(p) = X^n_\beta(q)$ con lo que también $x^1_\beta(p) = x^1_\beta(q), \dots, x^n_\beta(p) = x^n_\beta(q)$. Esto es, p y q están en la misma carta y tienen las mismas coordenadas: luego coinciden.
6. Veamos ahora que g es un embedding. Como hemos probado que g es inyectiva sólo nos resta probar que también es inmersión, esto es, que $(g_*)_p : T_pM \to T_{g(p)}\mathbb{R}^N$ es inyectiva, para todo $p \in M$.

   La aplicación $(g_*)_p$ es una aplicación lineal entre un espacio vectorial de dimensión n y un espacio vectorial de dimensión $N = (n+1)s > n$. Por lo tanto, para que sea inyectiva basta probar que la matriz de la aplicación tenga rango n. Razonando como en el apartado 5 al ser $M = \bigcup_{\alpha=1}^s W_\alpha$ y $p \in M$ existirá $\beta \in \{1, \dots, s\}$ de modo que $p \in W_\beta$, con lo que $p \in W_\beta \subset \overline{W_\beta} \subset V_\beta \subset U_\beta$.

   Como $p \in U_\beta$ la matriz de $(g^*)_p$ es la matriz jacobiana
$$\left(\frac{\partial g^\lambda}{\partial x^i_\beta}\right)_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial g^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g^N}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial g^N}{\partial x^n} \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X^n_s}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial X^n_s}{\partial x^n} \end{pmatrix}_p$$
   que contiene en particular

$$\left(\frac{\partial X^i_\beta}{\partial x^j_\beta}\right)_p = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

ya que $X^i_\beta = x^i_\beta$ en V_β. Así que $(g_*)_p$ tiene rango máximo n con lo que g es embedding.

7. Veamos ahora que $g : M \to g(M)$ es un embedding regular. Para ello basta que veamos que g es homeomorfismo sobre su imagen. Ahora bien, ya sabemos que g es una aplicación inyectiva y continua definida de un compacto a un espacio Hausdorff. Por tanto es también aplicación cerrada[52]. Luego $g : M \to g(M) \subset \mathbb{R}^N$ es una aplicación biyectiva, continua y cerrada. Por tanto, es un homeomorfismo.

La demostración está concluida. $\square$

[52]Si F es cerrado en M, entonces es compacto (todo cerrado en un compacto es compacto) y como la imagen directa de un compacto es compacto resulta que $g(F)$ es también compacto. Finalmente, como $g(F)$ es subconjunto de un espacio Hausdorff, resulta que $g(F)$ es cerrado.

8. Valores críticos y regulares

En esta sección vamos a desarrollar la teoría de valores críticos y regulares siguiendo fundamentalmente el libro clásico de Milnor[53]. Entramos ya de lleno en el núcleo de la Topología Diferencial. Conocido ya el lenguaje de las variedades y sus principales propiedades vamos a desarrollar herramientas que nos van a permitir resolver problemas importantes.

8.1. Puntos y valores críticos y regulares

Comenzamos con las definiciones básicas.

Definición 8.1 *Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable. se dice que:*

- *la contraimagen $f^{-1}(q)$ de un punto $q \in N$ se denomina la* **fibra** *de q;*
- *f es una* **submersión** *si la aplicación tangente $f_* : T_pM \to T_{f(p)}N$ es suprayectiva para todo $p \in M$;*
- *un punto $p \in M$ es* **punto regular** *si $f_* : T_pM \to T_{f(p)}N$ es suprayectiva;*
- *un punto $p \in M$ es* **punto crítico** *si no es punto regular;*
- *un punto $q \in N$ es* **valor regular** *si $f_* : T_pM \to T_qN$ es suprayectiva para todo $p \in f^{-1}(q)$, esto es, la fibra no contiene puntos críticos;*
- *un punto $q \in N$ es* **valor crítico** *si no es valor regular, esto es, la fibra contiene algún punto crítico.*

Observación 8.2 *Las siguientes conclusiones son obvias:*

- *Si $q \in N$ es tal que $f^{-1}(q) = \emptyset$, entonces q es valor regular.*
- *Si f es submersión, entonces todos los puntos de M son puntos regulares y todos los de N son valores regulares (entre éstos puede haberlos de fibra vacía, porque ser submersión no conlleva ser aplicación suprayectiva).*
- *Si $\dim(M) < \dim(N)$, entonces f no puede ser submersión.*
- *Si $\dim(M) < \dim(N)$, entonces en M no existe ningún punto regular ni en N ningún valor regular con fibra no vacía.*

El siguiente resultado requiere demostración[54]:

Proposición 8.3 *Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable.*

- *El conjunto $C(M)$ de puntos críticos es un cerrado.*

[53] Seguiremos estos libros:

- J. W. Milnor: *Topology from Differentiable viewpoint.* Univ. Press Virginia, Charlottesville, 1969.
- E. Outerelo y J. Ruiz: *Topología Diferencial.* Addison-Wesley Iberoamericana, Madid, 1998.

Estos libros presentan las variedades diferenciables como subconjuntos del espacio eucídeo $\mathbb{R}^n$. Como sabemos, el teorema de inmersión de Whitney revela que todas las variedades definidas por atlas son subvariedades de algún espacio euclídeo, por lo que todos los teoremas ciertos para un tipo de variedades lo son para las otras. Sin embargo, omitiremos en el presente curso algunas demostraciones desarrolladas en estos dos libros, que se apartan del planteamiento que hemos dado a la materia al utilizar expresamente el hecho de que las variedades están inmersas.

[54] Véase E. Outerelo y J. Ruiz: *Topología Diferencial.* Addison-Wesley Iberoamericana, Madid, 1998, pág. 79.

- *Si la aplicación es cerrada, entonces el conjunto de valores regulares es un abierto en N.*

Idea de la Demostración. La dividimos en varios pasos:

1. Para la primera parte se prueba que el conjunto de puntos regulares, $M - C(M)$, es abierto. Para ello, hay que ver que $M - C(M)$ es entorno de todos sus puntos, esto es, que dado un punto $p \in M - C(M)$ existe un entorno abierto de p totalmente contenido en $M - C(M)$. Dicho de modo breve, que alrededor de cada punto regular sólo hay puntos regulares.
2. Sea p un punto regular. Entonces$f_* : T_pM \to T_{f(p)}N$ es suprayectiva. Consideremos sendas cartas alrededor de los puntos p y $f(p)$:

   $$x : U \to \mathbb{R}^m;\ p \in U \subset M \qquad\qquad y : V \to \mathbb{R}^n;\ f(p) \in V \subset N$$

   Entonces:
   - $\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x^m})_p\}$ es una base de T_pM
   - $\{(\frac{\partial}{\partial y^1})_{f(p)}, \ldots, (\frac{\partial}{\partial y^n})_{f(p)}\}$ es una base de $T_{f(p)}N$
   - La matriz de f_* respecto de dichas bases es $\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}_p$
   - Como f_* es suprayectiva el rango de la matriz anterior es máximo (igual a n ya que debe ser $m \geq n$) y, por lo tanto existe un menor $n \times n$ no nulo en dicha matriz.
   - Si movemos *un poco* el punto p el menor anterior seguirá siendo no nulo, con lo que el rango de la matriz de f_* seguirá siendo máximo, es decir, el punto sigue siendo regular, que es lo que queríamos probar.
3. La segunda parte se sigue muy fácilmente de la observación siguiente: el conjunto de valores críticos es $f(C(M))$, ya que los valores críticos son aquéllos que en su fibra tienen puntos críticos. Por tanto, si f es cerrada, por el apartado primero del teorema $C(M)$ también es cerrado y se sigue el resultado.

Así concluye la demostración. □

Observación 8.4 *La idea que hemos esbozado de la demostración precedente sugiere unas nociones de especial importancia en la Topología Diferencial. Se dice que P es una* **propiedad abierta** *si el conjunto de puntos que la verifican forman un abierto. En particular, hemos visto que la propiedad "ser punto regular" es abierta.*

El siguiente resultado[55] pone de manifiesto la propiedad fundamental de las fibras de un valor regular: son siempre variedades diferenciables:

Proposición 8.5 *Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable. Si $q \in N$ es un valor regular de fibra no vacía entonces la fibra $f^{-1}(q)$ es una variedad diferenciable que verifica* $\dim(f^{-1}(q)) = \dim(M) - \dim(N)$.

Ejemplo 8.6 *Veamos una colección de ejemplos.*

[55] J. W. Milnor: *Topology from Differentiable viewpoint.* Univ. Press Virginia, Charlottesville, 1969, página 11.

- *La primera proyección* $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *es una submersión, todos los puntos de* $\mathbb{R}^2$ *son regulares y todas los valores de* $\mathbb{R}$ *son regulares. Todas las fibras son variedades diferenciables de dimensión uno. Este ejemplo se generaliza de modo trivial a cualquier proyección en un espacio producto.*
- *En la sección 4 establecimos el siguiente resultado: "Sea* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una aplicación* C^∞ *y sea* $S = F^{-1}(0) \neq \phi$*. Si el rango de la matriz jacobiana de* F *es 1 en todo punto* $p \in S$*, entonces* S *es una variedad diferenciable de dimensión* $n-1$*". Este resultado también lo podemos obtener ahora como consecuencia de la proposición 8.5, ya que la condición del rango de la jacobiana es exactamente lo mismo que decir que la aplicación tangente es suprayectiva.*

  En efecto, si $p \in \mathbb{R}^n$*, entonces* $(F_*)_p : T_p \to T_{F(p)}\mathbb{R}$ *es una aplicación lineal entre un espacio de dimensión* n *y uno de dimensión 1. Por lo tanto es el homomorfismo nulo o es suprayectiva. Una base de* T_pM *está dada por* $\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x^n})_p\}$ *y una de* $T_{F(p)}\mathbb{R}$ *por* $\{(\frac{\partial}{\partial t})_{F(p)}\}$*. La aplicación tangente verifica:*

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{F(p)} \frac{\partial F}{\partial x^1}\,; \ldots\,;\, F_*\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{F(p)} \frac{\partial F}{\partial x^n}$$

  El hecho de que el rango de la matriz jacobiana sea uno en un punto p *significa, por tanto, que la aplicación* $(F_*)_p$ *es suprayectiva. La hipótesis de que esto ocurra en todos los puntos de* $F^{-1}(0)$ *significa que todos los puntos de* $F^{-1}(0)$ *son puntos regulares y, por tanto,* $0 \in \mathbb{R}$ *es un valor regular. Aplicando la proposición precedente resulta así que* $F^{-1}(0)$ *es una variedad diferenciable de dimensión igual a* $\dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\mathbb{R}) = n-1$*, como ya sabíamos.*
- *Consideremos la siguiente aplicación* $\pi : S^2 = \{x^2+y^2+z^2 = 1\} \to \mathbb{R}$ *dada por* $\pi(x,y,z) = z$*. Estudiemos los puntos y los valores críticos y regulares.*
  - *Todos los* $r \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \subset \mathbb{R}$ *son valores regulares, porque su fibra es vacía.*
  - *Para estudiar los puntos críticos y los regulares debemos ver los puntos* p *de* S^2 *para los que la aplicación tangente* $(\pi_*)_p : T_pS^2 \to T_{\pi(p)}\mathbb{R}$ *es suprayectiva (y* p *será regular) o no (y* p *será crítico). Como* $\dim(T_pS^2) = 2$ *y* $\dim(T_{\pi(p)}\mathbb{R}) = 1$ *la aplicación* $(\pi_*)_p$ *es suprayectiva o es el homomorfismo nulo.*
  - *Si extendemos la aplicación* π *a* $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *de modo que* $\pi(x,y,z) = z$ *resulta que la aplicación tangente* π_* *verifica:*

$$\pi_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \pi}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \pi_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \pi}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \pi_*\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \pi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t}.$$

    Por lo tanto, al restringirnos a la esfera, en aquellos puntos p *de la esfera en los que el plano tangente* T_pS^2 *sólo depende de las dos primeras derivadas parciales resultará que* $(\pi_*)_p$ *será el homomorfismo nulo y, por tanto, no será aplicación suprayectiva. Y esto ocurre en exactamente dos puntos: los polos* $(0,0,\pm1)$*. Sus imágenes, los puntos* -1 *y* $+1$*, son pues valores críticos.*
  - *Por lo tanto, podemos concluir:*
    - *Puntos críticos:* $(0,0,\pm1)$*. Puntos regulares: todos los demás de la esfera* S^2*.*
    - *Valores críticos:* ±1*. Valores regulares:* $(-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty) \subset \mathbb{R}$*.*
    - *Fibra en los valores regulares: vacía en* $r \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \subset \mathbb{R}$ *y una circunferencia* $S^2 \cap \{z = r\}$ *en* $r \in (-1,1)$*.*
- *Consideremos finalmente el siguiente ejemplo: la aplicación* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ *tiene como valores regulares todos los puntos de* $\mathbb{R} - \{0\}$*. En efecto, los negativos tienen fibra vacía, y para los positivos basta observar que*

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x}=2x\frac{\partial}{\partial t}\quad ; \quad f_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial y}=2y\frac{\partial}{\partial t}\quad ; \quad f_*\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial z}=2z\frac{\partial}{\partial t},$$

que hace que f_* solamente se anule en el punto $(0,0,0)$. La fibra de cada punto $r \in (0,\infty)$ es una esfera (que es una variedad de dimensión $2 = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathbb{R})$.

8.2. El Teorema de Sard

Sea f: $M \to N$ una aplicación diferenciable. El problema que nos planteamos ahora es el de saber si existen "muchos o pocos"valores regulares. Esto tiene interés, porque sabemos que para todo valor regular q de fibra no vacía es la fibra una variedad diferenciable. Así, por ejemplo, si f es suprayectiva y todos los valores son regulares resulta que podemos escribir $M = \bigcup_{q\in N} f^{-1}(q)$, esto es, podemos descomponer M como unión de subvariedades. Esto nos permitirá estudiar la variedad M a partir de la variedad N y de la aplicación f. De hecho, esta situación la estudiaremos a menudo en casos en que $N = \mathbb{R}$.

En el Ejemplo 8.6 hemos visto varios casos en que el conjunto de valores es toda la variedad N o "casi". Se puede pensar que esto ocurrirá en general. En efecto, la versión más general del llamado teorema de Sard (demostrada por él en 1942, pero parte del cual había sido ya probado por Brown en 1935) establece lo siguiente:

Teorema 8.7 (Sard) *Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable de clase $r \geq 1$, con $r > \dim(M) - \dim(N)$. Entonces el conjunto de valores regulares de f es denso en N.*

Observación 8.8 *Si $\dim(M) < \dim(N)$ entonces la hipótesis $r > \dim(M) - \dim(N)$ se cumple trivialmente. En este caso, los valores regulares son los del conjunto $N - \mathrm{im}(f)$ (los que tienen fibra vacía, como notamos en la observación 8.2) y el teorema de Sard afirma que ese conjunto es denso en N. La clave está en que a f se le pide siempre ser diferenciable de clase al menos uno, lo que no permite hacer construcciones como la de la curva de Peano (que define una aplicación suprayectiva del intervalo unidad en el cuadrado unidad).*

Observación 8.9 *Si nos restringimos[56] a trabajar con aplicaciones C^∞ las dos hipótesis $r \geq 1$, y $r > \dim(M) - \dim(N)$ se verifican siempre, con lo que el enunciado se reduce a que el conjunto de valores regulares es denso en N, para toda función $f : M \to N$.*

Idea de la demostración del Teorema de Sard. Como en ocasiones anteriores, vamos a numerar los pasos esenciales de la demostración.

1. La primera observación es la de que la densidad es una propiedad local: A es denso en B si para todo $b \in B$ y para todo entorno abierto U^b de b resulta que $A \cap U^b \neq \phi$.
2. El conjunto de valores regulares se puede expresar como $N - f(C(M))$, siendo $C(M)$ el conjunto de puntos críticos de f, pues basta tener en cuenta que los valores regulares son los que tienen fibra vacía o compuesta sólo por puntos regulares.

[56]En muchas cuestiones de Topología Diferencial se plantea estudiar problemas ligados a la clase de diferenciabilidad de las aplicaciones involucradas. Sin embargo, en un contexto de introducción a la materia como el propuesto en este curso nos parece más adecuado restringirnos al caso C^∞.

3. Por lo tanto, empleando sendas cartas de $p \in M$ y de $f(p) \in N$ podemos reducir la demostración del teorema de Sard a la de la siguiente versión local en la que designamos $\dim(M) = m$; $\dim(N) = n$:

   “Sean U un abierto de $\mathbb{R}^m$ y $f : U \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase $r \geq 1$ con $r < m - n$. Entonces $f(C(U))$ tiene medida nula”.

   En tal caso, el complementario será conjunto denso.

4. Por lo tanto se ha ha llevado toda la cuestión a probar un resultado sobre la medida de Lebesgue en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. La demostración detallada puede seguirse ahora en varios libros[57]$\square$

8.3. El caso $\dim(M) = \dim(N)$

Como hemos comentado ya reiteradamente, el caso de $f : M \to N$ con $\dim(M) < \dim(N)$ no es relevante para la teoría de que estamos estudiando, pues no hay puntos ni valores regulares (de fibra no vacía). En el caso de que las dimensiones de las variedades coincidan se tienen algunas propiedades significativas. Para empezar, es lo que ocurre cuando se tiene un difeomorfismo entre variedades: todos los puntos y todos los valores son regulares. Más aún, se verifica el siguiente

Teorema 8.10 *Sean $f : M \to N$ una aplicación diferenciable entre dos variedades de igual dimensión, M compacta, $q \in N$ un valor regular. Entonces:*

(a) $f^{-1}(q)$ es un conjunto finito.

(b) El cardinal $\sharp f^{-1}(q)$ de $f^{-1}(q)$ es localmente constante, esto es, existe un entorno V^q del punto q en N tal que para cualquier valor regular $q' \in V^q$ resulta $\sharp f^{-1}(q') = \sharp f^{-1}(q)$.

Demostración. Separemos los dos apartados.

(a) Sea $q \in N$ un valor regular. Desglosemos la demostración.

- $\{q\}$ es un compacto.
- Como N es Hausdorff, resulta también que $\{q\}$ es un subconjunto cerrado de N.
- Como f es continua, $f^{-1}(q)$ es un cerrado en M.
- Como M es compacto, $f^{-1}(q)$ es compacto.
- Como q es valor regular, para todo $p \in f^{-1}(q)$ es p un punto regular, esto es, $(f_*)_p : T_pM \to T_qN$ es aplicación suprayectiva.
- Como $\dim(M) = \dim(N)$, $(f_*)_p : T_pM \to T_qN$ es isomorfismo.
- Por el Teorema de la Función Inversa, existen entonces entornos U^p de $p \in M$ y V^q de $q \in N$ tales que $f|_{U^p} : U^p \to V^q$ es un difeomorfismo.
- Realizamos esa construcción en todos los puntos $p \in f^{-1}(q)$, obteniendo un recubrimiento abierto $\bigcup_{p \in f^{-1}(q)} U^p$ de la fibra $f^{-1}(q)$.
- Como la fibra es compacta, podemos extraer un subrecubrimiento finito: $f^{-1}(q) \subset U^{p_1} \cup \cdots \cup U^{p_k}$.

[57]Por ejemplo, en

- J. W. Milnor: *Topology from Differentiable viewpoint.* Univ. Press Virginia, Charlottesville, 1969, pág. 16-19.
- E. Outerelo y J. Ruiz: *Topología Diferencial.* Addison-Wesley Iberoamericana, Madid, 1998, pág. 81-84.
- T. Bröcker y K. Jänich: *Introducción a la Topología Diferencial.* Ed. A. C., Madrid, 1977, pág. 58-63.

- Tomemos $W^q = \bigcap_{i=1,\ldots k} V_i^q$ como la intersección de los entornos de q correspondientes a los distintos puntos $p_1, \ldots, p_k$. También restrinjamos los U^{p_i} correspondientes de modo que $f|_{U^{p_i}} : U^{p_i} \to W^q$ sea un difeomorfismo, para todo $i = 1, \ldots k$.
- Veamos, para acabar, que la fibra $f^{-1}(q)$ tiene exactamente k puntos. En efecto, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ resulta que $f|_{U^{p^i}} : U^{p_i} \to W^q$ es un difeomorfismo, con lo que en cada abierto U^{p_i} existe exactamente un punto de la fibra. Y no existen más, porque $f^{-1}(q) \subset U^{p_1} \cup \cdots \cup U^{p_k}$.

(b) También lo desglosamos en pasos, continuando con la notación utilizada en la demostración del apartado precedente.

- Como M es una variedad es Hausdorff, dada la colección finita de puntos $\{p_1, \ldots, p_k\} = f^{-1}(q)$ podemos tomar los abiertos U^{p_i} disjuntos dos a dos.
- Podría pensarse que W^q va a servir como el entorno buscado. Es cierto que si $q' \in W^q$, entonces en cada abierto U^{p_i} existe un único punto p_i' que se aplica en q' y que, como estos abiertos son disjuntos dos a dos, los puntos p_i' son todos distintos entre sí y, por tanto, existen al menos k puntos en la fibra $f^{-1}(q')$. Hemos probado que la fibra $f^{-1}(q)$ está compuesta exactamente por k puntos, pero no hemos probado que la fibra $f^{-1}(q')$ esté contenida en $U^{p_1} \cup \cdots \cup U^{p_k}$. Podría ocurrir que existieran puntos de $M - (U^{p_1} \cup \cdots \cup U^{p_k})$ que se aplicaran en q'. Por eso hemos de realizar la siguiente construcción.
- Definamos $V = W^q - f(M - U^{p_1} - \ldots - U^{p_k})$.
- $(M - U^{p_1} - \ldots - U^{p_k})$ es cerrado, porque $U^{p_1} \cup \ldots \cup U^{p_k}$ es abierto.
- Como M es compacto, también lo es $(M - U^{p_1} - \ldots U^{p_k})$.
- Y por tanto, también es compacto $f(M - U^{p_1} - \ldots U^{p_k})$.
- Como N es Hausdorff, $f(M - U^{p_1} - \ldots U^{p_k})$ es cerrado.
- Por tanto, V es abierto con $q \in V$.
- Finalmente, si $q' \in V$, entonces $f^{-1}(q') \subset U^{p_1} \cup \cdots \cup U^{p_k}$ con una contraimagen en cada U^{p_i}, por lo que $\sharp f^{-1}(q') = k = \sharp f^{-1}(q)$

La demostración está terminada. □

Ejemplo 8.11 *Veamos una colección de ejemplos.*

- *Si $f : M \to N$ es un difeomorfismo, entonces* $\dim(M) = \dim(N)$, *todos los valores de N son regulares y las fibras tienen todas un punto. Estas propiedades se verifican aunque M no sea compacta.*
- *La aplicación $\pi : S^2 \to P_2(\mathbb{R})$ dada por $\pi(p) = < \vec{op} >$ está en las condiciones del teorema precedente: es una aplicación entre variedades de igual dimensión, la primera de las cuales es compacta y con todos los valores regulares. La fibra de cada punto está formada por dos puntos. De hecho, este es un ejemplo de* **espacio recubridor**, *en el sentido de la Topología Algebraica*[58].

[58] Un **espacio recubridor** es una aplicación continua entre espacios topológicos conexos por caminos y localmente conexos por caminos, $f : M \to N$ tal que para cada $q \in N$ existe un entorno W de modo que cada componente conexa por caminos de $f^{-1}(W)$ se aplica mediante f sobre W homeomórficamente. (Véase, por ejemplo, W. S. Massey: *Introducción a la Topología Algebraica*. Ed. Reverté, Barcelona, 1972, pág. 145). En los espacios recubridores las fibras tienen todas el mismo cardinal, finito o infinito (pág. 153 del libro citado).

- *Consideremos la aplicación $f : [0, 3\pi] \to S^1$ dada por $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Todos los valores son regulares, pero no todos ellos tienen fibras de igual cardinal: los valores de la semicircunferencia superior abierta $S^1 \cap \{y > 0\}$ tienen dos contraimágenes: $t \in (0, \pi)$ y $t + 2\pi \in (2\pi, 3\pi)$; mientras que los de la semicircunferencia inferior cerrada $S^1 \cap \{y \leq 0\}$ tienen una contraimagen: $t \in [\pi, 2\pi]$.*

  Obsérvese que, sin embargo, este ejemplo no está en las condiciones del teorema, porque $M = [0, 3]$ no es una variedad (es una variedad con borde diferenciable).

- *Vamos a construir un ejemplo en que se esté en la situación del teorema de modo que las fibras no tengan todas el mismo cardinal (en particular, no será espacio recubridor). Tomemos como variedad M la formada por las dos circunferencias de centro $(0, 0)$ y radios 1 y 2, esto es, $M = \{x^2 + y^2 = 1\} \cup \{x^2 + y^2 = 4\}$, como N la recta real y definamos como f la primera proyección: $f(x, y) = x$. Entonces se obtiene fácilmente:*
  - *Puntos regulares: Los de $M - \{(-2, 0), (-1, 0), (1, 0), (2, 0)\}$.*
  - *Puntos críticos: $\{(-2, 0), (-1, 0), (1, 0), (2, 0)\}$.*
  - *Valores regulares de fibra vacía: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.*
  - *Valores regulares de fibra dos puntos: $(-2, -1) \cup (1, 2)$.*
  - *Valores regulares de fibra cuatro puntos: $(-1, 1)$.*
  - *Valores críticos: $\{-2, -1, 1, 2\}$.*

  Es claro que el cardinal de los puntos de la fibra es localmente constante y no globalmente.

8.4. El Teorema de Brouwer

El más conocido teorema que vamos a probar en esta sección es el llamado **Teorema del punto fijo de Brouwer** en una versión diferenciable: Toda aplicación diferenciable del disco unidad en sí mismo tiene al menos un punto fijo. Para establecer este resultado es obvio que debemos tratar el caso de las variedades con borde diferenciable, pues el disco $D^n = \{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad con borde diferenciable igual a S^{n-1}. Así que lo primero que necesitamos es adaptar algunos de los resultados sobre valores regulares a la situación de variedades con borde. El primero, el que establece que si la fibra de un valor regular es no vacía, entonces se trata de una variedad diferenciable de dimensión la diferencia de las dimensiones de las variedades. Pues bien, lo que ahora se obtiene es:

Proposición 8.12 *Sean M una variedad con borde diferenciable, N una variedad (sin borde), con $\dim(M) > \dim(N)$, y sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable. Si $q \in N$ es un valor regular de fibra no vacía, entonces $f^{-1}(q)$ es una variedad de dimensión igual a $\dim(M) - \dim(N)$, con borde diferenciable igual $f^{-1} \cap \partial M$.*

Observación 8.13 *Sea M una variedad con borde ∂M. Si $\dim(M) = m$, entonces ∂M es una variedad diferenciable con $\dim(\partial M) = m - 1$. Por tanto, para todo $p \in \partial M$ se entiende que T_pM es un espacio vectorial de dimensión m, siendo $T_p(\partial M)$ un espacio vectorial de dimensión $m - 1$. Así que, aunque p sea un punto del borde, se sigue entendiendo que es punto regular si $(f_*)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es suprayectiva.*

Ejemplo 8.14 *Consideremos la primera proyección $f : D^2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = x$. Entonces todos los valores de $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$ son regulares. Los de $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ tienen fibra vacía y los $q \in (-1, 1)$ tienen como fibra el segmento $f^{-1}(q) = \{x = q\} \cap D^2$ que tiene como borde dos puntos: $\partial f^{-1}(q) = \{x = q\} \cap S^1$.*

El siguiente resultado tiene interés en sí mismo:

Teorema 8.15 *Sea M una variedad compacta con borde diferenciable ∂M no vacío. Entonces no puede existir una aplicación diferenciable $f : M \to \partial M$ tal que $f|_{\partial M}$ sea la identidad.*

Demostración. Como en otras ocasiones, dividimos en pasos la demostración:

- Supongamos que existe una tal aplicación. Por el Teorema de Sard aplicado, muy en particular, a $f|_{M-\partial M} : M - \partial M \to \partial M$, se puede afirmar que por lo menos existe un valor regular $q \in \partial M$. Como los puntos del borde se quedan todos quietos, podemos afirmar que $f^{-1}(q) = (f|_{M-\partial M})^{-1}(q) \cup \{q\}$, con lo que q es valor regular de f y $f^{-1}(q)$ es no vacía ya que al menos $q \in f^{-1}(q)$.
- Por la proposición precedente, $f^{-1}(q)$ es una variedad diferenciable de dimensión igual a $\dim(M) - \dim(\partial M) = 1$, y con borde $f^{-1} \cap \partial M = \{q\}$.
- Como f es continua, $f^{-1}(q)$ es un cerrado y como M es compacta, $f^{-1}(q)$ es también compacta.
- Por los dos pasos anteriores resulta que $f^{-1}(q)$ es una variedad compacta de dimensión 1 con un único punto en el borde. Pero esto es imposible, porque las únicas variedades de dimensión 1 compactas conexas son la circunferencia (que no tiene borde) y el segmento (que tiene dos puntos en el borde), mientras que las compactas no conexas son las uniones disjuntas de variedades de los dos tipos anteriores, por lo que tienen un número par de puntos en el borde, con lo que no pueden dar lugar a una variedad 1-dimensional compacta con un único punto en el borde[59].

La demostración está concluida.□

En particular, podemos deducir el siguiente

Corolario 8.16 *La aplicación identidad en la esfera $S^{n-1} = \{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ no puede ser extendida a una aplicación diferenciable $g : D^n \to S^{n-1}$.*

Y de aquí podemos deducir el Teorema del Punto Fijo:

Teorema 8.17 (del Punto Fijo de Brouwer: versión diferenciable). *Toda aplicación diferenciable $f : D^n \to D^n$ tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Supongamos que el resultado no es cierto y que existe $f : D^n \to D^n$ diferenciable sin puntos fijos. Entonces para cada $p \in D^n$ resulta que $p \neq f(p)$, con lo que $< p, f(p) >$ es una recta que corta a ∂D^n en dos puntos $\{a(p), b(p)\}$. Así los cuatro puntos $a(p), b(p), p, f(p)$ están en un segmento que tiene como extremos los puntos $a(p)$ y $b(p)$. Tomemos $a(p)$ y $b(p)$ en la recta $< p, f(p) >$ de modo que los puntos $a(p), p, f(p), b(p)$ estén en este orden. Se dan cuatro situaciones posible:

- $p \notin S^{n-1}, f(p) \notin S^{n-1}$: entonces $a(p) \neq p \neq f(p) \neq b(p)$.
- $p \notin S^{n-1}, f(p) \in S^{n-1}$: entonces $a(p) \neq p \neq f(p) = b(p)$.
- $p \in S^{n-1}, f(p) \notin S^{n-1}$: entonces $a(p) = p \neq f(p) \neq b(p)$.

[59] Las variedades conexas no compactas de dimensión 1 son el intervalo abierto (variedad sin borde) y el semiabierto (variedad con borde).

- $p \in S^{n-1}, f(p) \in S^{n-1}$: entonces $a(p) = p \neq f(p) = b(p)$.

Podemos definir entonces

$$g : D^n \to \partial D^n = S^{n-1}$$

dada por $g(p) = a(p)$. En particular, $g(p) = p$, si $p \in \partial D^n$.

La aplicación $g : D^n \to S^{n-1}$ es diferenciable y $g|_{S^{n-1}}$ es la identidad. Pero esto es imposible por el corolario precedente. □

Observación 8.18 *La diferenciablidad de g se puede demostrar con rigor, pues se tiene que*

$$g(p) = p + \left(-p \cdot u + \sqrt{1 - (p \cdot p) + (p \cdot u)^2}\right) u \qquad ; \qquad \text{con } u = \frac{p - f(p)}{\| p - f(p) \|}$$

donde $\cdot$ denota el producto escalar standard de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 8.19 (del Punto Fijo de Brouwer: versión general). *Toda aplicación continua $f : D^n \to D^n$ tiene al menos un punto fijo.*

Idea de la demostración. El **Teorema de aproximación de Weierstrass** asegura que toda aplicación continua $F : D^n \to D^n$ puede aproximarse por aplicaciones polinomiales (que en particular son diferenciables). Pongamos pues $F = \lim_{n\in\mathbb{N}} F_n$, siendo cada F_n una aplicación polinómica. Entonces cada F_n tiene al menos un punto fijo. Como D^n es compacto podemos extraer uns subsucesión convergente a un punto que será *a fortiori* punto fijo de F.□

Observación 8.20 *El haber podido demostrar el teorema en su versión general es muy importante: demuestra que con argumentos de Topología Diferencial podemos probar resultados de Topología General.*

8.5. Funciones de Morse

Seguimos los libros de Wallace[60]y Hirsch[61], aunque muchos de los conceptos están explicados en otros libros. Pretendemos en esta sección estudiar las **funciones de Morse**, que son un tipo especialmente distinguido de funciones de una variedad M en la recta real $\mathbb{R}$. Las funciones de Morse se utilizan en diferentes ramas de la Matemática. Nosotros indicaremos como aplicación el **teorema de clasificación de superficies compactas**, del que presentaremos una idea de la demostración.

El estudio que vamos a realizar se basa en la clasificación de los puntos críticos de una función. Comenzamos con las definiciones:

Definición 8.21 *Sean M una variedad diferenciable y $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable.*

(a) Se dice que $p \in M$ es un **punto crítico no degenerado** *si su determinante hessiano*

$$\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right)_p$$

[60]A. H. Wallace: *Differential Topology. First steps.* Benjamin, N. York, 1968.
[61]M. W. Hisch: *Differential Tpology.* Springer, N. York, 1976.

es no nulo, siendo $x = (x^1, \dots, x^n)$ una carta cualquiera para el punto p. (La definición no depende de la carta considerada).

(b) Se dice que f es una **función de Morse** *si todos sus puntos críticos son no degenerados.*

Proposición 8.22 (Lema de Morse). *Si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función de Morse, todos los puntos críticos son aislados y si $p \in M$ es uno de tales puntos, entonces f admite en un entorno de p una expresión del tipo*

$$f = f(p) + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} x^i x^j$$

Ejemplo 8.23 *Consideremos el toro de revolución T obtenido al girar la circunferencia de centro $(2,0,0)$ y radio 1 contenida en el plano $\{y = 0\}$ respecto del eje z y las funciones*

$$f : T \to \mathbb{R} \qquad ; \qquad g : T \to \mathbb{R}$$

dadas por $f(x,y,z) = z$; $g(x,y,z) = x$

Para f sólo hay cuatro puntos críticos, que son no degenerados. En cambio para g debe haber puntos críticos degenerados, pues si nos los hubiera la función g sería de Morse con puntos críticos no aislados, lo cual es imposible, por el siguiente resultado:

Observación 8.24 *Sea $p \in M$ un punto crítico no degenerado de una función $f : M \to \mathbb{R}$. Definamos la aplicación*

$$H_p f : T_p M \times T_p M \to M$$

dada por

$$H_p(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right)_p u^i u^j$$

siendo $\vec{u} = (u^1, \dots, u^n)$ y $\vec{v} = (v^1, \dots, v^n)$ respecto de la base $\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p \}$ de T_pM. El valor $H_p(\vec{u}, \vec{v})$ es independiente de la carta tomada en p.

Por otra parte, como las derivadas segundas son iguales, por el lema de Schwarz, resulta que H_p es una aplicación bilineal simétrica.

Ahora bien, como existe una biyección entre aplicaciones bilineales simétricas y formas cuadráticas, podemos asociar al punto p la forma cuadrática $Q_p : T_pM \to \mathbb{R}$, dada por $Q_p(\vec{u}) = H_p(\vec{u}, \vec{u})$. Más aún, podemos dar la siguiente definición:

Definición 8.25 *Sean M una variedad diferenciable y $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Se llama* **índice** *de un punto crítico no degenerado $p \in M$ al índice de Q_p, esto es, al número de veces que aparece el valor -1 en una expresión diagonal de Q_p:*

$$Q_p = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Observación 8.26 *El lema de Morse lo podemos reescribir así: Si $p \in M$ es un punto crítico no degenerado de índice k de una aplicación $f : M \to \mathbb{R}$ entonces existe una carta φ alrededor de p de modo que*

$$(f \circ \varphi^{-1})(u^1, \ldots, u^n) = f(p) - \sum_{i=1}^{k} (u^i)^2 + \sum_{i=k+1}^{n} (u^i)^2$$

8.6. Hacia la clasificación de las superficies compactas

En esta sección queremos indicar pasos que llevan hacia la clasificación de las superficies compactas. Lo que realmente vamos a probar es una mínima parte de lo necesario para establecer el teorema de clasificación. Vamos a ver cómo conocer el índice de los puntos críticos de una función de Morse definida sobre una superficie compacta permite obtener información sobre la topología de ésta y vamos a establecer una relación entre la característica de Euler de la superficie y los índices de los puntos críticos.

La construcción que vamos a realizar se basa en hechos (que a menudo son fáciles de observar en ejemplos concretos) que se dan para toda función de Morse $f : M \to \mathbb{R}$ de una superficie compacta en la recta real:

- La superficie M se puede escribir como $M = \cup_{r \in \mathbb{R}} f^{-1}(r)$, por lo que si se conocen las fibras de los valores regulares y de los valores críticos se puede obtener información sobre M. Además, todas las fibras son subconjuntos compactos de M ya que son contraimagen de un cerrado.
- Si la fibra de un valor regular es no vacía entonces es una variedad diferenciable compacta de dimensión igual a $\dim(M) - 1$. En particular, al ser M una superficie, tal fibra es una variedad compacta de dimensión uno, esto es, una familia finita de circunferencias. En particular, la componente conexa de un punto de la fibra de un valor regular es siempre una cirunferencia.
- La topología de las fibras de los puntos regulares cambia cuando atravesamos un valor crítico.
- El lema de Morse permite obtener información sobre la fibra de los puntos críticos.

Las observaciones precedentes se pueden generalizar a variedades de mayor dimensión, pero nos restringiremos al caso de las superficies. Vamos a precisar estos hechos y ver cómo conociendo los puntos críticos de una función de Morse y el índice que tienen podemos reconstruir la topología de la variedad M, paso clave para demostrar el teorema de clasificación.

Si $p \in M$ es un valor crítico, entonces a puede ser de índice 2, 1, o 0. Por el lema de Morse sabemos, en cada caso, cómo es una expresión local de f en un entorno de p:

- índice 2: $f(x^1, x^2) = f(p) - (x^1)^2 - (x^2)^2$
- índice 1: $f(x^1, x^2) = f(p) - (x^1)^2 + (x^2)^2$
- índice 0: $f(x^1, x^2) = f(p) + (x^1)^2 + (x^2)^2$

Por lo tanto, si $q \in f^{-1}(f(p))$ es un punto próximo a p (que está en la carta mencionada) resulta que $f(q) = f(p)$, con lo que el resto se anula: $\pm(x^1(q))^2 \pm (x^2(q))^2 = 0$; es decir, se puede demostrar que la componente conexa de $f^{-1}(f(p)$ es parecida a la parte cuadrática correspondiente:

- índice 2: $\{-(x^1)^2 - (x^2)^2 = 0\}$: un punto;
- índice 1: $\{-(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0\}$: par de rectas secantes;
- índice 0: $\{(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0\}$: un punto.

El siguiente ejemplo muestra cómo podemos reconstruir la topología de la variedad.

Ejemplo 8.27 *Tenemos una función de Morse f de una superficie compacta y conexa M en la recta real de la que sabemos tiene cuatro puntos críticos $\{a, b, c, d\}$ y cuatro valores críticos distintos $\{f(a) > f(b) > f(c) > f(d)\}$, con esta distribución de índices:*

- *índice de a= 2*
- *índice de b= 1*
- *índice de c= 1*
- *índice de d= 0*

Además, se sabe que $f(M) = [f(d), f(a)]$ (en cualquier caso, como M es compacta y conexa debe ser $f(M) \subset \mathbb{R}$ un compacto conexo: un punto o un intervalo cerrado). Un punto no puede ser, porque todos los puntos serían críticos con lo que f no sería función de Morse. Se trata de averiguar qué variedad es M.

Pues bien, comencemos situando M verticalmente*:*

- *Por encima de $\{z = f(a)\}$ no hay puntos de la superficie.*
- *Entre $f(a)$ y $f(b)$ todos los valores son regulares, con lo que la fibra de cada uno de ellos es una circunferencia.*
- *El punto b es crítico de índice uno, así que localmente $f^{-1}(f(b))$ es como dos rectas. De hecho, como las fibras son todas compactas, es como una lemniscata.*
- *Entre $f(b)$ y $f(c)$ todos los valores son regulares: la fibra de cada uno de ellos es la unión de dos circunferencias.*
- *El punto c es crítico de índice uno, así que localmente $f^{-1}(f(c))$ es como dos rectas. Como en el caso de b, resulta que $f^{-1}(f(c))$ es como una lemniscata.*
- *Entre $f(c)$ y $f(d)$ todos los valores son regulares, con lo que la fibra de cada uno de ellos es una circunferencia.*
- *Por debajo de $\{z = f(d)\}$ no hay puntos de la superficie.*

Por tanto, la superficie M es un toro. Lo que hemos hecho no es una demostración rigurosa, pero deja de manifiesto que el carácter de cada punto crítico limita el del siguiente. En el ejemplo propuesto no hay más posibilidades que la que hemos indicado. El siguiente teorema va en la misma línea.

Proposición 8.28 *Si una variedad compacta M de dimensión n admite una función de Morse con sólo dos puntos críticos, entonces la variedad es homeomorfa a la esfera S^n.*

Observación 8.29 *En el contexto en que estamos trabajando de Topología Diferencial se esperaría que el resultado anterior estableciera que M fuera difemorfa a S^n y no sólo homeomorfa. Sin embargo esto no se podrá obtener en general, pues en S^n, para $n \geq 7$ pueden definirse diferentes estructuras diferenciables no difeomorfas entre sí (las* **esferas exóticas de Milnor***), con lo que no puede garantizarse que M sea difeomorfa a una de ellas concreto.*

El siguiente resultado[62] asegura que existen siempre *muchas* funciones de Morse. Para demostrarlo hace falta definir una topología en el conjunto de funciones diferenciables $\{f : M \to \mathbb{R}\}$, pero vamos a omitir los detalles.

Proposición 8.30 *El conjunto de funciones de Morse de una variedad en* $\mathbb{R}$ *es un abierto denso en el conjunto de funciones diferenciables de clase* $s \geq 2$ *dotado de la topología fuerte.*

Observación 8.31 *Demostraremos más adelante que existe relación entre las funciones de Morse y la característica de Euler de una variedad compacta. De hecho, probaremos que*

$$\kappa(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \nu_k$$

siendo $n = \dim(M)$ *y* ν_k *el número de puntos de índice k:*

Así, en concreto, en el Ejemplo 8.27 tenemos $\kappa(M) = (-1)^0 \cdot 1 + (-1)^1 \cdot 2 + (-1)^2 \cdot 1 = 1 - 2 + 1 = 0$, *esto es,* M *es un toro.*

Y en el caso de la esfera, uno de los puntos críticos es de índice 2 y el otro de índice 0 con lo que se tiene $\kappa(S^2) = (-1)^0 \cdot 1 + (-1)^1 \cdot 0 + (-1)^2 \cdot 1 = 1 - 0 + 1 = 2$, *como debía ocurrir.*

Observación 8.32 *Una demostración del Teorema de Clasificación de Superficies, puede encontrarse a lo largo de los capítulo 6 y 7 del libro citado de Wallace*[63].

8.7. El Teorema Fundamental del Álgebra.

En esta sección vamos a probar este teorema (el que afirma que todo polinomio complejo de grado n tiene n raices) empleando los conceptos introducidos de puntos y valores críticos y regulares. Más en particular, emplearemos todo lo establecido en la sección 8.3

Vamos a demostrar el Teorema Fundamental del Álgebra, que es el que establece que todo polinomio de grado n con coeficientes en el cuerpo complejo tiene exactamente n raíces. De hecho, basta probar que tiene una, porque si $\{P(x) = 0\}$ es la ecuación definida por el polinomio y si $a \in \mathbb{C}$ es una raiz del mismo, entonces podemos descomponer $P(x) = Q(x)(x - a)$, donde $Q(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$, al que podemos aplicarle otra vez el resultado.

La técnica que vamos a utilizar para dar la demostración de este teorema se basa solamente en las nociones de puntos y valores críticos y regulares, lo que demuestra una vez más la potencia de las técnicas de la Topología Diferencial. En concreto, necesitaremos los resultados establecidos en la sección 8.3: dada una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables de igual dimensión, $f : M \to N$, con M compacta el cardinal de la fibra en los valores regulares es finito y localmente constante. Eso sí, necesitamos algunos resultados conocidos de Álgebra y Variable Compleja, con los que comenzamos:

Lema 8.33 (algebraico). *Un polinomio de grado k tiene a lo más k raíces, sea cual sea el cuerpo.*

Demostración. Podemos considerar que el polinomio es mónico (si no lo es, dividimos por el coeficiente director y el nuevo polinomio tiene las mismas raíces). Si $P(x)$ tuviera n raíces $a_1, \ldots, a_n$, entonces $P(x) = (x - a_1) \ldots (x - a_n) Q(x)$, con lo que a fortiori debe ser $n \leq k$.$\square$

[62] M. W. Hirsch: *Differential Topology.* Springer, N. York, 1976, pág. 147.
[63] Seguimos A. H. Wallace: *Differential Topology. First steps.* Benjamin, N. York, 1968.

Proposición 8.34 (Condiciones de Cauchy-Riemann). *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por $f(z) = f(x+iy) = u(x+iy) + v(x+iy) = (u(x,y), v(x,y))$. Entonces la función f es holomorfa si y sólo si se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\}$$

Además:

$$\frac{df}{dz} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) - i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Corolario 8.35 *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *a es un punto crítico de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*
- *La aplicación tangente $(f_*)_a : T_a\mathbb{R}^2 \to T_{f(a)}\mathbb{R}^2$ es el homomorfismo nulo.*
- $\frac{df}{dz}(a) = 0$

Demostración. La dejamos como ejercicio.

Teorema 8.36 (Fundamental del Álgebra). *Todo polinomio no constante sobre $\mathbb{C}$ tiene al menos un cero.*

Demostración. Vamos a dividirla en varios apartados:

1. Sea $P(z)$ el polinomio. Para poder aplicar el resultado antes mencionado (dada una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables de igual dimensión, $f : M \to N$, con M compacta el cardinal de la fibra en los valores regulares es finito y localmente constante) necesitamos que el dominio sea una variedad compacta. Por eso consideremos la esfera de Riemann $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, compactificación de Alexandroff de $\mathbb{C}$.
2. Ahora necesitamos extender el polinomio a toda la esfera, es decir, debemos definir $P(\infty)$. Pues bien definimos $f : S^2 \to S^2$ dado por:

   $$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = (h^{-1} \circ P \circ h)(x), \text{ si } x \neq (0,0,1) \\ f(0,0,1) = (0,0,1) \end{array} \right\}$$

   siendo h la proyección estereográfica desde el punto $(0,0,1)$ sobre el plano ecuatorial. Se puede probar que f es una aplicación diferenciable.
3. Vamos a determinar los puntos críticos de f. Comenzamos con los de P. Teniendo en cuenta el corolario 8.35 los puntos críticos de P son las raices del polinomio derivada primera P', que es de grado $n-1$. Y por el lema 8.33 sabemos que el número de raices de este polinomio es finito (de hecho menor o igual que $n-1$). Como P no es constante P' no es el polinomio nulo.

   Por lo tanto, el número de puntos críticos de f es también finito (a lo más habría que añadir a los puntos críticos de P el polo norte $(0,0,1)$.
4. Por tanto, los valores críticos de f también forman un conjunto finito (ya que son la imagen mediante f de los puntos críticos). Y así resulta que el conjunto de valores regulares es S^2 menos un conjunto finito de puntos. Es por tanto un abierto conexo de S^2.

5. La función que a cada valor regular le hace corresponder el cardinal de su fibra es localmente constante. Como el conjunto de valores regulares es conexo la función es constante, esto es, el cardinal de todas las fibras es el mismo.
6. Ese cardinal no es nulo, pues si no $im(P)$ sería sólo el conjunto de valores críticos, que es finito, y eso no puede ser porque un polinomio no constante de variable compleja toma infinitos valores.
7. Por lo tanto todas las fibras son no vacías, tanto para los valores regulares como para los valores críticos. Así que $f : S^2 \to S^2$ es suprayectiva.
8. En particular, por tanto, existirá $a \in S^2$ con $f(a) = (0, 0, -1)$. Como $f(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ resulta que $a \neq (0, 0, 1)$. Por tanto, $(0, 0, -1) = f(a) = h^{-1}Ph(a) \Rightarrow Ph(a) = 0$, con lo que $h(a) \in \mathbb{C}$ es el punto buscado.

La demostración está terminada.□

8.8. Singularidades de curvas planas y gráficas de funciones

Sea $\{f(x, y) = 0\}$ la ecuación implícita de una curva plana en el plano $\mathbb{R}^2$. Esto significa que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función.

Si $p = (p_1, p_2)$ es un punto de la curva, entonces la recta tangente está dada por

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p (x - p_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_p (y - p_2) = 0$$

Si las dos parciales se anulan en p, entonces no existe la recta tangente en p y se dice que p es un *punto singular* de la curva. Consideremos la matriz hessiana de f en p :

$$H_p(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}_p$$

Llamemos $\Delta_p = \det\ (H_p(f))$ al determinante de la matriz hessiana. Existen distintos tipos de puntos singulares [64]:

- $\Delta_p < 0$: entonces el punto se llama *nodo* y tiene dos tangentes. Obsérvese que el índice del punto es uno.
- $\Delta_p > 0$: entonces el punto es un *punto aislado* y no tiene tangentes. El índice es cero o dos.
- $\Delta_p = 0$: entonces el punto se llama *punto de retroceso* o *cúspide* y tiene una tangente. Es un punto degenerado de la función f. Se llama de primera especie (resp. de *segunda especie*) según queda localmente la curva a ambos lados de la tangente (resp. a un solo lado).

La razón de que aparezca el hessiano al estudiar los diferentes tipos de puntos singulares es que el hessiano aparece en el desarollo de taylor de la función, como mejor aproximación si el punto es singular (ya que se anulan los términos de primer orden): si $p = (p_1, p_2)$ es un punto singular de la curva, entonces

$$f(p_1+\epsilon, p_2+\eta) = f(p_1, p_2)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p \epsilon+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_p \eta+\frac{1}{2}\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_p \epsilon^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_p \epsilon\eta+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_p \eta^2\}+O(3)$$

[64] Segumos la notación clásica de Geometría de curvas planas. Véase, e.g., R. Rothe: *Matemática Superior para matemáticos, físicos e ingenieros.* Ed. Labor, Barcelona, 1959, tomo primero, pp.175 y ss.

donde $O(3)$ denota términos de tercer grado. Como los dos puntos son de la curva se tiene que

$$f(p_1+\epsilon, p_2+\eta) = f(p_1+p_2) = 0$$

y como el punto p es singular, se anulan las parciales en p con lo que también

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p \epsilon + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_p \eta = 0$$

de donde debe anularse (salvo términos de orden $O(3)$) el término cuadrático

$$\frac{1}{2}\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_p \epsilon^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_p \epsilon\eta + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_p \eta^2\} = 0$$

que es una ecuación de segundo grado. Dividiendo todo por ϵ^2 y multiplicando por 2, nos queda

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_p + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_p \lambda + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_p \lambda^2 = 0$$

donde $\lambda = \eta/\epsilon$ es la pendiente de la dirección en la que nos estamos moviendo. El discriminante de la última ecuación es:

$$b^2 - 4ac = 4\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_p^2 - 4\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_p \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_p = -4\Delta_p$$

La existencia de dos, una o ninguna solución depende de que ese discriminante sea positivo, nulo o negativo, y las soluciones dan las direcciones tangentes a la curva en el punto.

Observación 8.37 *Si p es un punto singular de una curva plana $f(x,y)=0$, entones p es un punto crítico de la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.*

El recíproco no es cierto, porque si q es un punto crítico de f, entonces no tiene por qué ser $f(q)=0$, esto es, no tiene por qué estar q en la curva $f=0$. Sin embargo, si llamamos $k=f(q)$, resultará que $q \in f^{-1}(k)$, que es una curva de nivel de f, y será punto singular de esa curva.

Por lo tanto, los puntos críticos de f son los puntos singulares de todas las curvas de nivel de f.

Observación 8.38 *Sea p un punto crítico de $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Eso significa que las derivadas parciales de primer orden se anulan en p y que el plano tangente a la gráfica es horizontal. Sea Δ_p el determinante de la matriz hessiana de f en p. Entonces se tiene*[65] *que*

$\Delta_p < 0$*: entonces el punto se llama* punto de silla. *El índice del punto es uno.*

$\Delta_p > 0, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_p > 0$*: entonces el punto es un* mínimo relativo. *El índice es cero.*

$\Delta_p > 0, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_p < 0$*: entonces el punto es un* máximo relativo. *El índice es dos.*

[65] Ver, e.g., T. M. Apostol: *Análisis Matemático.* Ed. Reverté, Barcelona, 1982, p. 460

Observación 8.39 *Con la notación precedente, consideremos ahora la gráfica de la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. La gráfica es el conjunto de todos los puntos*

$$\{(x,y,f(x,y));\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}\subset\mathbb{R}^3$$

es decir, es la superficie de ecuación $\{z=f(x,y)\}$. Como superficie es diferenciable en todos sus puntos, ya que $\{z=f(x,y)\}=F^{-1}(0)$, siendo $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ la función dada por $F(x,y,z)=z-f(x,y)$. Esta función F tiene jacobiano de rango máximo en todos los puntos de $F^{-1}(0)$ porque

$$\nabla F=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)=\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)\neq(0,0,0)$$

Los puntos críticos de f son los puntos que determinan en la gráfica plano tangente horizontal

Ejercicio 8.40 *Consideremos la recta $\{x=0\}\subset\mathbb{R}^2$. Uno espera que no tenga puntos singulares, y así es, porque en ningún punto de la recta se anulan las dos derivadas parciales.*

La función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=x$ tampoco tiene ningún punto crítico, pues su jacobiana es $\nabla f=(1,0)$, que no se anula en ningún punto.

La gráfica es el plano $\{z=x\}$, que es un plano inclinado y, por tanto, nunca es horizontal (no existen puntos críticos para f).

Ejercicio 8.41 *Consideremos la circunferencia $\{x^2+y^2=1\}\subset\mathbb{R}^2$. Uno espera que no tenga puntos singulares, y así es, porque en ningún punto de la circunferencia se anulan las dos derivadas parciales.*

La función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=x^2+y^2-1$ tiene un punto crítico, pues su jacobiana es $\nabla f=(2x,2y)$, que se anula en el punto $(0,0)$.

La gráfica es el paraboloide $\{z=x^2+y^2-1\}$, que tiene plano tangente horizontal en el punto $(0,0,-1)$, que corresponde al punto crítico de f)

Ejercicio 8.42 *Consideremos la parábola semicúbica $\{y^2-x^3=0\}\subset\mathbb{R}^2$. Uno espera que tenga un punto singular, y así es, porque $\nabla f=(-3x^2,2y)$, que se anula en $p=(0,0)$, que es un punto de la curva.*

La matriz hessiana en el punto singular es

$$H_p(f)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}_p=\begin{pmatrix}-6x & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}_p=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

Así que $p=(0,0)$ es un punto de retoceso. La recta tangente está dada por la aproximación de segundo grado (ya que la de primer grado se anula):

$0=f(0+\epsilon,0+\eta)=f(0,0)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p\epsilon+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_p\eta+\frac{1}{2}\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_p\epsilon^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_p\epsilon\eta+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_p\eta^2\}+O(3)=$

$\frac{1}{2}\{2\eta^2\}+O(3)$

con lo que $\eta=0$ y así la recta tangente es la recta $\{y=0\}$.

El punto singular es de primera especie, porque la tangente deja puntos de la curva a ambos lados.

La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x, y) = y^2 - x^3$ *tiene un punto crítico: el punto* $(0, 0)$*.*

La gráfica es la superficie $\{z = y^2 - x^3\}$*, que tiene plano tangente horizontal en el punto* $(0, 0, 0)$*, que corresponde al punto crítico de* f*.*

Como comentario final dos observaciones de cómo se generalizan las nociones anteriores.

- Si un punto singular de una curva es degenerado con hessiana idénticamente nula, entonces habrá que proseguir el desarrollo de Taylor a grados mayores, y la complejidad del punto será mayor. Por ejemplo, tendrá tres o más ramas. En el caso de curvas algebraicas es la teoría de las *ramas de Puiseux* que se pueden calcular con el *polígono de Newton*.
- En hipersuperficies $F^{-1}(0)$ de $\mathbb{R}^n$ se puede realizar un estudio similar, aunque los tipos de singularidades se complican. Si la matriz jacobiana no se anula en ningún punto de la hipersuperficie, entonces ésta es una variedad diferenciable.

8.9. Submersiones

La teoría de submersiones comprende como casos particulares las de **variedades cociente** y las de **fibrados**. Puede hallarse uma magnífica exposición en el capítulo 6 del libro de Brickell y Clark ya mencionado en ocasiones anteriores[66]. Teniendo en cuenta el carácter limitado de este curso y la existencia de una asignatura de Geometría Diferencial donde se imparten estas nociones nos vemos obligados a no incluir aquí estos contenidos.

[66] F. Brickell, R.S. Clark: *Differentiable Manifolds. An introduction.* Van Nostrand, London 1970, capítulo VI.

9. Teoría del grado topológico

En esta sección pretendemos estudiar las aplicaciones entre esferas de igual dimensión. La teoría del grado trata, dicho de modo muy simplista, de estudiar *cuántas vueltas* da una aplicación $f : S^n \to S^n$. Veremos que esta noción tiene interés en disciplinas variadas:

- Permite definir el índice de un punto singular de una ecuación diferencial (o equivalentemente de un campo vectorial) y el de un camino cerrado en Variable Compleja.
- Permite demostrar resultados muy variados, como el de Borsuk-Ulam (*toda aplicación diferenciable de la esfera S^n en $\mathbb{R}^n$ identifica dos puntos antipodales*) o el de Lusternik-Schinirelmann (*si la esfera S^n se recubre por $(n+1)$ conjuntos cerrados alguno de ellos contiene dos puntos antipodales*).
- Permite estudiar los ceros de un campo vectorial definido en una variedad compacta por medio del teorema de Hopf-Poincaré (*la suma de los índices coincide con la característica de Euler de la variedad*).
- Permite demostrar, a partir del teorema precedente, un resultado que enunciamos con anterioridad: la suma de los índices de una función de Morse definida en una variedad compacta coincide con la característica de Euler de ésta.
- Finalmente, por no alargar esta lista, podemos comentar que estos temas se pueden abordar desde dos vías: la Topología Diferencial y la Topología Algebraica. Indicaremos brevemente esta relación, pues no vamos a presuponer conocimientos de Topología Algebraica.

Seguiremos como referencia básica el libro de Milnor[67] muy citado en este curso, aunque completaremos con otros tratados.

9.1. Grado módulo 2

El resultado fundamental que queremos mostrar es el que afirma que si $f : M \to N$ es una aplicación diferenciable entre una variedad compacta M y una variedad conexa N, con $\dim(M) = \dim(N)$, entonces las fibras de puntos regulares (de fibra no vacía) tienen el mismo cardinal módulo 2. A ese cardinal se le llamará **grado módulo 2** de f y estudiaremos sus propiedades. Necesitamos comenzar con una serie de definiciones.

Definición 9.1 *Sean M y N dos variedades diferenciables, con $M \subset \mathbb{R}^k$, y sean $f, g : M \to N$ dos aplicaciones diferenciables.*

- *Se dice que f y g son* **diferenciablemente homótopas** *si existe una homotopía entre ambas, es decir, una aplicación diferenciable*

  $$F : M \times [0,1] \to N$$

  de modo que

  $$\left\{ \begin{array}{l} F(p,0) = f(p) \\ F(p,1) = g(p) \end{array} \right\} \forall p \in M$$

  Se dice también que F es una **homotopía diferenciable** *entre f y g. Obsérvese que $M \times [0,1]$ es una variedad con borde.*

[67] J. W. Milnor: *Topology from Differentiable viewpoint.* Uiv. Press Virginia, Charlottesville, 1969.

- *Si en las condiciones anteriores además son f y g difeomorfismos y también lo son, para todo $t \in [0,1]$, las aplicaciones $F_t : M \to N$ dadas por $F_t(p) = F(p,t)$, entonces se dice que f y g son* **diferenciablemente isótopas** *y que F es una* **isotopía diferenciable**.

Observación 9.2 *Las relaciones de homotopía e isotopía diferenciable son de equivalencia.*

Los siguientes resultados sirven para probar que la noción de grado módulo 2 está bien definida.

Proposición 9.3 (Lema de homotopía). *Sean M y N dos variedades diferenciables de igual dimensión, con M compacta, sean $f, g : M \to N$ dos aplicaciones diferenciablemente homótopas y $q \in N$ un valor regular para f y g. Entonces*

$$\sharp f^{-1}(q) = \sharp g^{-1}(q) \bmod 2$$

Demostración. Sea $F : M \times [0,1] \to N$ la homotopía diferenciable entre f y g, esto es $F(p,0) = f(p)$; $F(p,1) = g(p)$, para todo $p \in M$. Dado el valor regular $q \in N$ pueden darse dos situaciones: que además sea valor regular para F o que no. Estudiemos ambos casos.

Primero: q es valor regular de F.

Si $F^{-1}(q) = \emptyset$ entonces es valor regular de F, y además, $f^{-1}(q) = \emptyset$ y $g^{-1}(q) = \emptyset$, con lo que la identidad buscada se cumple trivialmente (si existiera $p \in f^{-1}(q)$, entonces $q = f(p) = F(p,0)$, con lo que no sería $F^{-1}(q) = \emptyset$, y análogo argumento para g).

Sea pues, $F^{-1}(q) \neq \emptyset$. Entonces $F^{-1}(q)$ es una variedad compacta (es cerrada en el compacto $M \times [0,1]$) con borde diferenciable. Por la Proposición 8.12 sabemos que

- $F^{-1}(q)$ es una variedad diferenciable de dimensión igual a $\dim(M \times [0,1]) - \dim(N) = \dim(M) + 1 - \dim(N) = 1$, ya que las variedades M y N tienen la misma dimensión.
- El borde de $F^{-1}(q)$ es $F^{-1}(q) \cap \partial(M \times [0,1]) = F^{-1}(q) \cap ((M \times \{0\}) \cup (M \times \{1\})) = (f^{-1}(q)) \cup (g^{-1}(q))$.

Por lo tanto, el número de puntos en la frontera de $F^{-1}(q)$ es $\sharp f^{-1}(q) + \sharp g^{-1}(q)$. Como toda variedad compacta de dimensión uno es unión de circunferencias (que no tienen borde) y de intervalos cerrados (que tienen dos puntos en el borde) resulta que el número de puntos de la frontera de F^{-1} es par.

Y si la suma de dos números es par, ambos números tienen la misma paridad, esto es, $\sharp f^{-1}(q) = \sharp g^{-1}(q) \bmod 2$, que es lo que queríamos probar.

Segundo: q es valor crítico de F.

Por el Teorema 8.10 sabemos que los cardinales de las fibras de f y de g son funciones localmente constantes para los valores regulares. En particular, como q es valor regular para ambas funciones f y g existen:

- V_1 entorno abierto de q en N tal que $\sharp f^{-1}(q') = \sharp f^{-1}(q)$, para todo valor regular, de f, $q' \in V_1$.
- V_2 entorno abierto de q en N tal que $\sharp g^{-1}(q') = \sharp g^{-1}(q)$, para todo valor regular, de g, $q' \in V_2$.

De hecho, en la demostración del citado Teorema 8.10 se prueba que todos los puntos de V_1 (resp. V_2) son regulares para f (resp. g). Tomando $V = V_1 \cap V_2$ obtenemos un entorno abierto de q en N. Por el Teorema de Sard podemos garantizar que existe un $z \in V$ que sea valor regular de F (y también de f y g por lo que acabamos de señalar). Entonces aplicamos la primera parte de la presente demostración y obtenemos:

$$\begin{array}{ccc} \sharp f^{-1}(q) = \sharp f^{-1}(z) & = & \sharp g^{-1}(z) = \sharp g^{-1}(q) \\ & \downarrow & \\ & \mathrm{mod}\ 2 & \end{array}$$

con lo que $\sharp f^{-1}(q) = \sharp g^{-1}(q) \bmod 2$.

La demostración ha concluido.□

Corolario 9.4 *Si M es una variedad compacta y $c_0 \in M$, la aplicación constante c de valor c_0 no es homótopa a la identidad.*

Demostración. La aplicación constante tiene un valor crítico único: c_0, ya que para todo $p \in M$ resulta que $c_* : T_pM \to T_{c_0}M$ es el homomorfismo nulo. Los restantes valores son regulares de fibra vacía, con lo que el grado módulo 2 de c es cero.

La aplicación identidad tiene todos los valores regulares de grado módulo 2 igual a uno.

Luego no puden ser homótopas: si lo fueran tendrían el mismo grado módulo 2.□

Proposición 9.5 (Lema de homogeneidad). *Sea M una variedad diferenciable conexa y sean $p, q \in M$. Entonces existe un difeomorfismo $h : M \to M$ diferenciablemente isótopo a la identidad y que lleva p en q.*

Ejemplo 9.6 *Veamos un par de ejemplos:*

- *En $\mathbb{R}^n$ la traslación de vector $\vec{pq}$ es el difeomorfismo buscado.*
- *En la esfera S^2 dados los puntos p y q la rotación de eje perpendicular al plano definido por el origen, por p y por q lleva el punto p sobre el q. (Caso de que los puntos sean antipodales existen muchas aplicaciones que verifican la condición.*

Observación 9.7 *El lema de homogeneidad prueba en particular que el grupo de difeomorfismos de una variedad diferenciable conexa actúa de modo transitivo sobre ella. En Geometría Diferencial se llama* **variedad homogénea** *a aquélla sobre la que actúa de modo transitivo un* **grupo de Lie** *(que es una variedad diferenciable dotada de estructura de grupo algebraico de modo que las operaciones de producto e inverso sean diferenciables). Resulta que toda variedad homogénea es el cociente de dos grupos de Lie [68]. En general, el conjunto de difeomorfismos de una variedad es un grupo topológico, de estructura topológica muy compleja.*

Utilizando los dos últimos resultados podemos probar ya el anunciado al principio de la sección:

Teorema 9.8 *Si $f : M \to N$ es una aplicación diferenciable entre una variedad compacta M y una variedad conexa N, con $\dim(M) = \dim(N)$, entonces las fibras de puntos regulares (de fibra no vacía) tienen el mismo cardinal módulo 2. A ese cardinal se le llama* **grado módulo 2** *de f.*

[68] cfr., e.g., F. Warner: *Foundations of Differentiable Manifolds.* Scott, Foresmann and Co., Glenview, Ill., 1971, pág. 120-123.

Demostración. Sean $y, z \in N$ valores regulares de f. Debemos probar que

$$\sharp f^{-1}(y) = \sharp f^{-1}(z) \bmod 2.$$

Dividimos la demostración en varios apartados:

1. Por el lema de homogeneidad existe un difeomorfismo $h : N \to N$ diferenciablemente isótopo a la identidad de modo que $h(y) = z$.
2. Resulta entonces que z es valor regular de $h \circ f$, ya que lo es de f y h es difeomorfismo.
3. Ahora bien, como h es homótopo a la identidad resulta que $h \circ f$ lo es a $id_N \circ f = f$, es decir, $h \circ f$ y f son dos aplicaciones homótopas entre sí.
4. Por el lema de homotopía resulta entonces que

$$\sharp(h \circ f)^{-1}(z) = \sharp f^{-1}(z) \bmod 2$$

5. Ahora bien, como h es difeomorfismo resulta que $h^{-1}(z) = y$, con lo que se tiene

$$(h \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}h^{-1}(z) = f^{-1}(y)$$

de donde resulta que

$$\sharp f^{-1}(y) \bmod 2 = \sharp(h \circ f)^{-1}(z)) \bmod 2 = \sharp f^{-1}(z) \bmod 2.$$

La demostración está concluida.□

9.2. Grado de Brouwer

El grado de Brouwer se define para variedades orientables [69], por lo que es una teoría menos general que la del grado módulo 2 estudiada en la seccción anterior. Pero, por ello mismo, se pueden alcanzar resultados más profundos.

Observación 9.9 *1. Si V y W son dos espacios vectoriales de igual dimensión y si $\varphi : V \to W$ es un isomorfismo entonces la matriz de φ tiene determinante no nulo. Si M y N son dos variedades orientadas y de igual dimensión y si $f : M \to N$ es un difeomorfismo, entonces $(f_*)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ tiene determinante positivo si f preserva la orientación y negativo se la invierte.*

2. Aunque $f : M \to N$ no sea difeomorfismo, si M y N son dos variedades orientadas y de igual dimensión, entonces para todo valor regular $q \in N$ y todo punto de su fibra $x \in f^{-1}(q)$, que a fortiori *es punto regular, resulta que $(f_*)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es isomorfismo lineal con lo que $(f_*)_p$ tiene determinante positivo si preserva la orientación y negativo si la invierte.*

Definición 9.10 *Con la notación de la observación precedente se dice que*

- $\operatorname{signo}(f_*)_p = +1$, *si* $\det(f_*)_p > 0$
- $\operatorname{signo}(f_*)_p = -1$, *si* $\det(f_*)_p < 0$

[69] Una variedad diferenciable se llama *orientable* si admite una atlas cuyos cambios de carta son todos de determinante positivo.

Más aún, si M y N son dos variedades diferenciables orientadas y de igual dimensión, con M compacta y N conexa, si $f : M \to N$ es una aplicación diferenciable y si $q \in N$ es un valor regular, se llama **grado de Brouwer** *de f en q a*

$$\deg(f, q) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \mathrm{signo}\,(f_*)_p$$

Observación 9.11 *La definición es correcta porque la fibra es finita, porque el teorema 8.10 lo garantiza, al ser M compacta. Y al ser las variedades orientables los signos $\mathrm{signo}\,(f_*)_p$ no dependen de las cartas consideradas alrededor de los puntos p y q: si cambiamos de carta podemos hacerlo de modo que el cambio tenga determinante positivo, con lo que el signo final no varía.*

La utilidad de la definición queda reogida en el siguiente teorema, que no probaremos, pero cuya demostración es de técnicas similares, aunque más complicada, que las desarrolladas en la seccción precedente. Ahora será imprescindible utilizar la propiedad de conexión de N.

Teorema 9.12 *Con la notación precedente:*

- *El entero $\deg(f, q)$ no depende de la elección del valor regular q, lo que permite definir el* **grado de Brouwer** *de f como*

$$\deg(f) = \deg(f, q)$$

  cualquiera que sea el valor regular $q \in N$.
- *Si f y g son aplicaciones diferenciablemente homótopas, entonces $\deg(f) = \deg(g)$.*

Ejemplo 9.13 *De modo muy sencillo se tienen los siguientes ejemplos:*

1. *La aplicación identidad tiene grado +1.*
2. *La aplicación constante tiene grado 0.*

Observación 9.14 *El grado de Brouwer verifica tres propiedades básicas:*

1. *Propiedad de normalizacción:*
   - $\deg(f, q) \neq 0 \Rightarrow q \in \mathrm{im}(f)$
   - $\deg(id, q) = 1, \forall q \in M$*, siendo $id : M \to M$ la identidad.*
2. *Propiedad aditiva: si D_1 y D_2 son dos abiertos disjuntos de M y $q \notin f(M - (D_1 \cup D_2))$, entonces $\deg(f, q) = \deg(f|_{D_1}, q) + \deg(f|_{D_2}, q)$.*
3. *Invarianza por homotopías, que quiere decir que si f y g son aplicaciones diferenciablemente homótopas, entonces $\deg(f) = \deg(g)$.*

Pues bien, estas propiedades caracterizan el grado, en el sentido de que si d^* es una aplicación que verifica estas mismas propiedades, entonces d^* es el grado de Brouwer. Es decir, el grado de Brouwer se puede definir tomando estas propiedades como axiomas.

Además el grado de Brouwer verifica la siguiente importante propiedad[70]: si se tienen tres variedades compactas y conexas de igual dimensión M, N, P y aplicaciones diferenciables $f : M \to N$, $g : N \to P$, entonces $\deg(g \circ f) = \deg(f) \deg(g)$. El grado es multiplicativo respecto de la composición de aplicaciones.

[70]cfr. M. W. Hirsch: *Differential Topology.* Springer, N. York, 1976, ejercicio 2, pág.130.

9.3. Campos vectoriales sobre esferas

Vamos a comenzar el estudio de los campos vectoriales sobre esferas a partir de las siguientes observaciones sobre algunas aplicaciones especialmente sencillas que se pueden definir sobre toda esfera: la simetría ortogonal respecto de un hiperplano que pase por el origen y la aplicación antipodal

Observación 9.15 *Consideremos $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ como la esfera unidad centrada en el origen: $S^n = \{(x^1)^2 + \ldots + (x^{n+1})^2 = 1\}$.*

1. *Llamamos $r_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ a la reflexión (o simetría ortogonal) respecto del hiperplano $\{x^i = 0\}$. En coordenadas está dada por:*

$$r_i(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^{n+1}) = (x^1, \ldots, -x^i, \ldots, x^{n+1}).$$

   Esta aplicación invierte la orientación y su aplicación lineal asociada, la aplicación tangente, es

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

   que tiene determinante 1. Es decir, es de grado 1.

2. *La aplicación antipodal $a : S^n \to S^n$, $a(x^1, \ldots, x^{n+1}) = (-x^1, \ldots, -x^{n+1})$ tiene grado $(-1)^{n+1}$:*
   - *si n es par, a invierte la orientación y el grado es -1;*
   - *si n es impar, a preserva la orientación y el grado es +1.*

   De hecho, $a = r_1 \circ \ldots \circ r_{n+1}$: cada reflexión invierte la orientación, con lo que la composición de un número par (resp. impar) de reflexiones preserva (resp. invierte) la orientación.

La observación precedente nos permite abordar el siguiente importante resultado:

Teorema 9.16 *Sea $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la esfera unidad de dimensión n centrada en el origen.*

- *Si n es par, entonces S^n no admite ningún campo vectorial sin ceros.*
- *Si n es impar, entonces S^n admite campos vectoriales sin ceros.*

Demostración. Realizamos las dos partes conjuntamente.

En la esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, un campo vectorial tangente es aquél en el que para cada $p \in S^n$ verifique que X_p es perpendicular a p, considerando ahora p como el vector que une el origen de coordenadas con el punto p. Esto es, X es un campo tangente si $X_p \cdot p = 0, \forall p \in S^n$.

Es trivial que si $n = 2k+1$ es impar podemos tomar como campo tangente el que en cada punto

$$p = (p^1, p^2, p^3, p^4, \ldots, p^{2k+1}, p^{2k+2}) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

toma el valor

$$X_p = (p^2, -p^1, p^4, -p^3, \ldots, p^{2k+2}, -p^{2k+1})$$

con lo que la segunda afirmación del teorema queda demostrada.

Probemos pues la primera afirmación, por reducción al absurdo. De hecho, vamos a demostrar que si existiera un campo sin ceros en S^n para n par entonces la aplicación antipodal a y la identidad id serían homótopas, lo cual contradice la observación previa a este teorema. De hecho, vamos a ver que podríamos construir explícitamente la homotopía entre a e id.

Supongamos pues que n es par y que tenemos un campo tangente sin ceros X. Entonces $\frac{X}{\|X\|}$ es un campo vectorial unitario, con el que podemos definir la aplicación $f : S^n \to S^n$ dada por

$$f(p) = \frac{X_p}{\| X_p \|}$$

Mediante esta aplicación cada punto $x \in S^n$ se transforma en un punto $f(x) \in S^n$, de modo que los vectores x y $f(x)$ son perpendiculares entre sí. Pues bien, definamos mediante esa aplicación f una homotopía entre a e id, del siguiente modo:

$$\begin{array}{rcc} F : S^n \times [0,1] & \longrightarrow & S^n \\ (x,t) & \mapsto & x\cos(\pi t) + f(x)\sin(\pi t) \end{array}$$

Entonces F es obviamente diferenciable y:

$F(x,0) = x = id(x)$

$F(x,1) = -x = a(x)$

Falta ver que la homotopía encontrada *no se sale de la esfera*, esto es, que para todo $x \in S^n$ y todo $t \in [0,1]$ es $F(X,t) \in S^n$. Pues bien:

$\| F(x,t) \|^2 = (x\cos(\pi t) + f(x)\sin(\pi t)) \cdot (x\cos(\pi t) + f(x)\sin(\pi t)) =$

$\| x \|^2 \cos^2(\pi t) + \| f(x) \|^2 \sin^2(\pi t) + 2\cos(\pi t)\sin(\pi t)\, x \cdot f(x) = \cos^2(\pi t) + \sin^2(\pi t) + 0 = 1$

como queríamos probar.$\square$

Observación 9.17 *Como comentamos a principio de curso la Topología Diferencial estudia propiedades globales de las variedades diferenciables. Evidentemente, para toda variedad existen campos vectoriales sin ceros definidos de modo* **local**. *La fuerza del teorema que acabamos de probar está en su carácter* **global**.

La teoría culmina con el siguiente Teorema que demuestra la equivalencia entre el grado y la propiedad de homotopía:

Teorema 9.18 (de Hopf). *Dos aplicaciones diferenciables $f, g : S^n \to S^n$ son diferenciablemente homótopas si y sólo si tienen el mismo grado.*

Observación 9.19 *En particular la aplicación antipodal a es homótopa a la identidad id si n es impar, pues ambas tienen grado $+1$, y no lo es si n es par.*

9.4. Funciones pares e impares. Teoremas de Borsuk-Ulam y Lusternik-Schnirelmann

Las siguientes definiciones son bien conocidas:

Definición 9.20 *Una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se llama*

- **par** *si* $f(-x) = f(x);\ \forall x \in \mathbb{R}^n$*;*
- **impar** *si* $f(-x) = -f(x);\ \forall x \in \mathbb{R}^n$*;*

Estas definiciones se extienden de modo natural a funciones definidas en un dominio simétrico (respecto del origen de coordenadas). En particular, a aplicaciones de la esfera S^n en sí misma.

Ejemplo 9.21 *Comencemos con los ejemplos más clásicos, considerando funciones de una variable real* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*:*

- $f(x) = c_0$*, aplicación constante, es obviamente una función par.*
- $f(x) = x$ *define una función impar, ya que* $f(-x) = -x = -f(x)$*.*
- $f(x) = x^2$ *define una función par, ya que* $f(-x) = x^2 = f(x)$*.*
- $f(x) = x^k$ *define una función par si* k *es par e impar si* k *es impar.*
- $f(x) = x^2 + x$ *define una aplicación que no es par ni impar. En general, una aplicación no tiene por qué ser par ni impar.*
- $f(x) = x^2$ *define una función par, como hemos visto. Además la fibra de cada valor regular de* f *está formada por un número par de puntos (0 si el valor es negativo y 2 si el valor es positivo).*
- $f(x) = x^3$ *define una función impar, como hemos visto. Además la fibra de cada valor regular de* f *está formada por un número impar de puntos (1 tanto si el valor es negativo como si es positivo).*
- $f(x) = \sin x$ *define una función impar. Los valores de* $(-1, 1)$ *son regulares de fibra infinita.*
- $f(x) = \cos x$ *define una función par. Los valores de* $(-1, 1)$ *son regulares de fibra infinita.*

Podemos extender la definición anterior a aplicaciones entre subconjuntos simétricos del espacio euclídeo. En particular:

Definición 9.22 *Una aplicación $f : S^m \to S^n$ se llama*

- **par** *si* $f(-x) = f(x);\ \forall x \in \mathbb{R}^n$*;*
- **impar** *si* $f(-x) = -f(x);\ \forall x \in \mathbb{R}^n$*;*

Ejemplo 9.23 *Consideremos* $M = S^n$ *y* $f : M \to M$*.*

- *Si* $f = id$*, entonces* $f(-x) = -x = -f(x)$*, por lo que la identidad es una función impar.*
- *Si* $f = a$*, entonces* $f(x) = -x$ *mientras que* $f(-x) = x = -f(-x)$*, por lo que la aplicación antipodal es impar*

Se verifica el siguiente resultado, que no vamos a probar:

Proposición 9.24 *Sea* $f : S^n \to S^n$ *una aplicación diferenciable.*

- **(Teorema de la función par)** *Si f es par, entonces* $\deg(f)$ *es par.*
- **(Teorema de la función impar)** *Si f es par, entonces* $\deg(f)$ *es impar.*

Ejemplo 9.25 *Si $f = id$ entonces f es una aplicación impar de grado 1 y si $f = a$ entonces f es una aplicación impar de grado $(-1)^{n+1} = \pm 1$, según sea la paridad de n. Si f es una aplicación constante (que es par) entonces todos los puntos son críticos y por tanto el grado de f es cero (que es par).*

Obsérvese que las aplicaciones impares no pueden ser homótopas a las constantes.

Vamos ahora a estudiar los dos teoremas que dan título a esta sección, y que seguiremos de [71].

Como consecuencia del teorema de la función impar se puede establecer el siguiente resultado:

Proposición 9.26 *Si $f : S^m \to S^n$ es una función impar, entonces $m \leq n$.*

La idea de la demostración radica en probar que si se diera la otra desigualdad, entonces se podría definir una aplicación impar (de grado impar, por tanto) homótopa a una aplicación constante (de grado cero). La demostración es muy técnica y no la detallamos.

Teorema 9.27 (de Borsuk-Ulam). *Toda aplicación diferenciable $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ debe identificar un par de puntos antipodales, esto es, existe $x \in S^n$ con $f(x) = f(-x)$.*

Demostración. Supongamos que $f(x) \neq f(-x)$, $\forall x \in S^n$. Entonces $f(x) - f(-x)$ es un vector no nulo de $\mathbb{R}^n$, y si lo dividimos por su norma tenemos un vector unitario. Así

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\| f(x) - f(-x) \|}$$

define una aplicación $g : S^n \to S^{n-1}$ que es impar, ya que

$$g(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{\| f(-x) - f(x) \|} = -g(x)$$

lo que contradice el resultado anterior.□

El teorema de Borsuk-Ulam sigue siendo cierto aunque se rebaje la diferenciabilidad de f a continuidad. Como consecuencia del Teorema de Borsuk-Ulam se establece el siguiente, de naturaleza aparentemente muy diferente:

Teorema 9.28 (de Lusternik-Schnirelmann). *Si S^n está recubierto por $n+1$ conjuntos cerrados, entonces alguno de esos conjuntos contiene dos puntos antipodales.*

Demostración. Sean $A_1, \ldots, A_{n+1}$ los conjuntos cerrados. Consideremos la función continua $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$f(x) = (\mathrm{dist}(x, A_1), \ldots, \mathrm{dist}(x, A_n))$$

donde $\mathrm{dist}(x, A)$ denota la distancia del punto x al conjunto A, que es el ínfimo de las distancias $\mathrm{dist}(x, a), a \in A\}$. Recordemos que si A es un conjunto cerrado entonces $\mathrm{dist}(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in A$.

Por el teorema de Borsuk-Ulam existe algún $x_0 \in S^n$ con $f(x_0) = f(-x_0)$. Veamos que este punto x_0 es el que necsitamos para probar el teorema:

[71] M. A. Armstrong: *Topología Básica.* Ed. Reverté, Barcelona, 1987, pp.228-231.

- Si $\mathrm{dist}(x_0, A_i) = 0$, para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces también $\mathrm{dist}(-x_0, A_i) = 0$, con lo que $x_0, -x_0 \in A_i$ y hemos terminado.
- Si $\mathrm{dist}(x_0, A_i) = \mathrm{dist}(-x_0, A_i) > 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $x_0, -x_0 \notin A_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $S^n = A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}$ resultará entonces que $x_0, -x_0 \in A_{n+1}$.

Hemos terminado la demostración.□

9.5. Grado de aplicaciones de la circunferencia S^1 en sí misma. Índice de un camino.

Si consideramos las aplicaciones de la circunferencia unidad en sí misma $f : S^1 \to S^1$ podemos dar una interpretación geométrica del grado de Brouwer como el número de vueltas (con sentido) que da la imagen de f sobre la circunferencia. En efecto, considerando $S^1 \subset \mathbb{C}$ como el conjunto de puntos complejos de módulo 1, es fácil comprobar que se tienen las siguientes propiedades (algunas de las cuales ya hemos probado explícitamente en secciones anteriores o han sido propuestas como ejercicios):

- Si $f(z) = z$, entonces $\deg(f) = 1$.
- Si $f(z) = -z$, entonces $\deg(f) = 1$. La aplicación antipodal tiene grado $+1$.
- Si f es constante o no suprayectiva, entonces $\deg(f) = 0$.
- Si $f(z) = z^n$, entonces $\deg(f) = n$.
- Si $f(z) = \overline{z}$, entonces $\deg(f) = -1$. La conjugación, que es la reflexión respecto del eje real, tiene grado 1 (como vimos ocurre para toda reflexión respecto de un hiperplano).
- Si $f(z) = \overline{z^n}$, entonces $\deg(f) = -n$, ya que a la composición de aplicaciones corresponde el producto de los grados.

Observación 9.29 *Así que esta noción de grado de Brouwer coincide con la de* **índice de un camino cerrado** *estudiada en Variable Compleja*[72]*.*

También coincide con la de índice de un cero de un campo vectorial (o punto singular de una ecuación diferencial) sobre una superficie, como veremos en la sección siguiente.

9.6. Índice de un campo vectorial. Teorema de Hopf-Poincaré

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Podemos considerar un **campo vectorial** en U como una aplicación $v : U \to \mathbb{R}^n$ (diferenciable de clase C^∞ como a lo largo de todo el curso). Supongamos que $z \in U$ es un cero aislado del campo v. Entonces podemos definir la función

$$\begin{array}{rcl} V : S^{n-1}(z) & \longrightarrow & S^{n-1} \\ X & \mapsto & \frac{v(x)}{\|v(x)\|} \end{array}$$

en la que $S^{n-1}(z)$ es una esfera de dimensión $n-1$ centrada en z y de radio suficientemente pequeño para que $v(x) \neq 0$, $\forall x \in S^{n-1}(z)$, mientras que S^{n-1} denota la esfera unidad de $\mathbb{R}^n$ centrada en el origen de coordenadas. Pues bien, con toda la notación precedente se tiene:

Definición 9.30 *Se llama* **índice del campo** v *en el punto* z *al grado de la aplicación* V*.*

[72] cfr., e.g., T. M. Apostol: *Análisis Matemático.* Ed. Reverté, Barcelona, 1982, pp.539 y ss.

Observación 9.31 *En el caso de dimensión $n = 2$, el grado de $V : S^1(z) \to S^1$ indica las veces que el campo gira alrededor del cero aislado z. Visualmente se puede obtener en casos sencillos.*

Observación 9.32 *También se generaliza a variedades sin dificultad, porque la noción de índice es local.*

Hemos visto cómo la teoría del grado de Brouwer tiene estrecha relación con las ecuaciones diferenciales y campos vectoriales. De hecho, se tiene un resultado mucho más fuerte:

Teorema 9.33 (de Hopf-Poincaré). *Sea M una variedad diferenciable compacta y sea X un campo vectorial sobre M con ceros aislados. Entonces la característica de Euler de M es igual a la suma de los índices en los ceros de X.*

Ejemplo 9.34 *Como es bien sabido, $\kappa(S^n) = 2$ si n es par y es 0 si n es impar. Por lo tanto, las esferas de dimensión par no pueden admitir campos sin ceros (como ya sabíamos con anterioridad). Más aún, de las superficies compactas, conexas y orientables la única que podría admitir (y de hecho admite) campos sin ceros es el toro, puesto que la caraterística del g-toro es $2 - 2g = 0 \Leftrightarrow g = 1$.*

Observación 9.35 *Para variedades no compactas no existe resultado parecido al Teorema de Hopf-Poincaré, pues Hirsch probó que toda variedad no compacta admite un campo sin ceros (siempre que la variedad sea paracompacta).*

9.7. Característica de Euler y funciones de Morse

En las secciones precedentes hemos visto cómo distintas nociones de *índice* (de un camino cerrado y de un cero aislado de una ecuación diferencial) se corresponden con la noción de grado topológico de una aplicación entre esferas. En este mismo curso hemos estudiado otra noción de índice: la de un punto crítico no degenerado de una función de Morse. Pues bien, vamos a ver qué relación tiene aquel índice con los ahora estudiados y con el teorema de Hopf-Poncaré.

Sean M una variedad compacta y sea : $M \to \mathbb{R}$. En la observación 8.31 anunciábamos que se verificaba la igualdad

$$\kappa(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \nu_k$$

siendo $n = \dim(M)$ y ν_k el número de puntos de índice k y $\kappa(M)$ la característica de Euler de la superficie. Queremos dar ahora una idea de la demostración de esta propiedad, siguiendo [73] La dividimos en varios pasos:

- Tomemos una métrica riemanniana g auxiliar en la variedad M y tomemos el campo vectorial $X = \frac{1}{2}\text{grad}(f)$. El campo **gradiente** de una función f se define del siguiente modo: mediante la métrica riemanniana g (que en cada punto $p \in M$ define un producto escalar $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$) se induce un isomorfismo $\sharp : \Lambda^1 M \to \mathfrak{X}(M)$ que a cada 1-forma ω le hace corresponder el campo Z tal que $\omega(-) = g(Z, -)$. Pues bien, el campo gradiente de f es $\text{grad}(f) = \sharp(df)$. El campo vectorial gradiente tiene las siguientes propiedades esenciales:

[73] M. W. Hirsch: *Differential Topology.* Springer, N. York, 1976, pp. 161-164.

- ∘ El campo gradiente es perpendicular a las "curvas de nivel" $f^{-1}(\{cte\})$. En efecto, si Y es el campo vectorial tangente a las curvas de nivel, entonces $Y(f) = 0$, ya que f es constante sobre las curvas de nivel. Entonces $0 = Y(f) = (df)(Y) = g(\sharp(df), Y) = g(\mathrm{grad}(f), Y)$, que es lo que queríamos probar.
- ∘ Respecto de cualquier carta $(x^1, \ldots, x^n)$ el campo gradiente tiene la expresión:

$$\mathrm{grad}(f) = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} g^{ij}$$

si $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ es la expresión de la métrica g y g^{ij} indica la matriz inversa en cada punto del entorno coordenado. En efecto, sea $\mathrm{grad}(f) = \frac{\partial}{\partial x^i} X^i$

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} = (df)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g\left(\mathrm{grad}(f), \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i} X^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g_{ij} X^i$$

con lo que, multiplicando por la matriz inversa se tiene: $X^i = \frac{\partial f}{\partial x^j} g^{ij}$.
- ∘ El campo gradiente tiene por ceros los puntos críticos de f. En efecto, como $f : M \to \mathbb{R}$ resulta que un punto $p \in M$ es crítico si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$, $\forall i$. Con la expresión que hemos hallado del campo gradiente esto es lo mismo que decir que p es un cero de $\mathrm{grad}(f)$.
- ∘ En el caso $M = \mathbb{R}^n$ el campo gradiente coincide con el "clásico": en efecto, en este caso la métrica standard tiene como matriz la identidad, $g_{ij} = \delta_{ij}$, con lo que su inversa es también la identidad, $g^{ij} = \delta^{ij}$, y así resulta:

$$\mathrm{grad}(f) = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} g^{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}\delta^{ij} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \ldots \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)$$

- Si p es un punto crítico de la función de Morse f, por el lema de Morse se tiene que p es punto crítico aislado y además se puede encontrar un entorno coordenado $(x^1, \ldots, x^n)$ respecto del cual la expresión de f sea

$$f(x) = f(p) - (x^1)^2 - \ldots - (x^k)^2 + (x^{k+1})^2 + \ldots + (x^n)^2$$

- Pues bien, se puede probar que respecto de ese sistema de coordenadas el campo X se espresa como:

$$X(x) = (-x^1, \ldots, -x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n)$$

con lo que el índice del campo X en el punto p es $(-1)^k$.
- Se realiza esta construcción para todos los puntos críticos de f, que son justamente los ceros del campo X.
- Finalmente se aplica el teorema de Hopf-Poincaré, resultando que la característica de Euler de M es igual a la suma de los índices en los ceros de X. Por tanto,

$$\kappa(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \nu_k$$

Observación 9.36 *Para estabelcer el resultado se ha necesitado tomar una métrica auxiliar. Eso no es ninguna restricción, porque toda variedad diferenciable paracompacta admite métricas riemannianas y porque el resultado establecido no depende de le métrica escogida.*

Ejemplo 9.37 *Si consideramos las funciones altura para la esfera y para el toro vertical se pueden calcular los índices en los puntos singulares, tanto considerados como puntos críticos de la función de Morse como ceros del campo vectorial gradiente y se puede comprobar en estos casos el resultado que hemos probado. El campo gradiente, perpendicular a las secciones horizontales de ambas supeficies, lo podemos imaginar como las trayectorias que seguirían gotas de lluvia cayendo verticalmente sobre las superficies (realmente ése sería el opuesto del campo gradiente, el campo gradiente va "hacia arriba").*

9.8. Característica de Euler y teoremas de Hopf-Poincaré y de Gauss-Bonnet

Los siguientes tres teoremas están indudablemente relacionados (los dos primeros los hemos visto en el curso y el tercero es un teorema clásico de Geometría de superficies):

Teorema 9.38 *Sean M una variedad diferenciable compacta y $f : M \to \mathbb{R}$ una función de Morse. Entonces*

$$\kappa(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \nu_k$$

donde ν_k es el número de puntos de índice k de f.

Teorema 9.39 ***(de Hopf-Poincaré)*** *Sean M una variedad diferenciable compacta y X un campo vectorial con ceros aislados. Entonces*

$$\kappa(M) = \sum_{p \ / \ X_p=0} \text{índice}\, p$$

donde índice p *denota el índice de p respecto del campo X.*

Teorema 9.40 ***(de Gauss-Bonnet)*** *Sea M una superficie de $\mathbb{R}^3$, compacta y orientable y sean K su curvatura de Gauss y Ω su forma de volumen. Entonces las siguientes cantidades coinciden:*

$$\kappa(M) = \frac{1}{2\pi} \int_M K\Omega$$

Hagamos algunos comentarios:

- Los tres resultados establecen que la característica de Euler (invariante topológico) se puede obtener a partir de datos diferenciables: una función diferenciable, un campo vectorial, la curvatura de Gauss. De entrada, este es un hecho sorprendente, puesto que la estructura diferenciable está añadida sobre la topológica.
- En los tres resultados, el dato topológico (la característica de Euler) es independiente del dato diferenciable, con lo que se pueden reescribir los tres teoremas de la siguiente forma: para toda función de Morse (resp. campo vectorial con ceros aislados, resp. superficie homeomorfa a la dada) la cantidad $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\nu_k$ (resp. $\sum_{p \ / \ X_p=0} \text{índice}\, p$, resp. $\frac{1}{2\pi}\int_M K\Omega$) es la misma.
- Finalmente, los tres datos topológicos de los tres teoremas son el mismo: la característica de Euler.

En [74] puede ampliarse la información.

[74] Á. M. Amores Lázaro: *Integración y formas diferenciales: un curso de Análisis vectorial.* Sanz y Torres, Madrid 2003

9.9. Otras aproximaciones a la teoría del grado

Siendo el presente un curso de Topología Diferencial la aproximación al tema que hemos esocgido es la diferencial. Sin embargo existen otros modos de hacerlo. En particular el grado de aplicaciones continuas entre esferas se puede definir mediante técnicas de homotopía y homología[75]. De hecho, los resultados obtenidos en nuestro curso que son consecuencia de la teoría del grado se pueden probar con técnicas de grupo fundamental y son por ello ciertos para funciones a las que sólo se les exija continuidad y no su diferenciabilidad.

Por otra parte, es posible[76] llegar a la teoría del grado partiendo de teorías más potentes, como son las de **intersección** y **transversalidad**.

[75] Véanse por ejemplo:

- M. A. Armstrong: *Topología Básica.* Ed. Reverté, Barcelona, 1987, pág. 219.
- W. S. Massey: *A basic course in Algebraic Topology.* McGraw-Hill, N. York, 1981, cap. V., sección 9.
- J. R. Munkres: *Topology: a first course.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1975, pág. 361.

[76] Véase por ejemplo
V. Guillemin, A. Pollack.: *Differential Topology.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1974.

10. Ejercicios

Variedades y aplicaciones diferenciables

1. Se pide probar que dos atlas C^∞ son equivalentes si y sólo si están contenidos en el mismo atlas C^∞ maximal.
2. Se pide comprobar que mediante dos proyecciones esterográficas desde los polos sobre el plano ecuatorial se tiene un atlas C^∞ sobre la esfera $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
3. Se pide probar que todo abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable.
4. Se pide dotar de estructura de variedad diferenciable al conjunto $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ de las matrices cuadradas $n \times n$ con entradas reales.
5. Se considera el conjunto $GL(n, \mathbb{R})$ de las matrices de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ de determinante no nulo (este conjunto se llama *grupo lineal general*). Se pide dotarlo de estructura de variedad diferenciable. ¿Cuál es su dimensión?
6. Se pide probar que todo espacio vectorial real de dimensión finita admite estructura de variedad diferenciable.
7. Se pide dotar de estructura de variedad diferenciable al producto de dos variedades. ¿Cuál es su dimensión?
8. De los siguientes conjuntos decídase cuáles son variedades, cuáles variedades con borde y cuáles ninguna de las dos:
   - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
   - $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$;
   - $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;
   - $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$;
   - $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1;\ -1 \leq y \leq 1\}$;
   - $\{((1 + \cos t) \cos \theta, ((1 + \cos t) \sin \theta, \sin t), t, \theta \in \mathbb{R}\}$;
   - el cilindro de $\mathbb{R}^3$ sobre una curva en forma de α.
9. Sea $S = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-1, 1)\} \cup \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1)\}$. Se definen:

$$U = \{(x, 0) : x \in (-1, 1)\},\ \varphi : U \to \mathbb{R},\ \varphi(x, 0) = x$$

$$V = \{(x, 0) : x \in (-1, 0]\} \cup \{(x, x) : x \in (0, 1)\},\ \psi : V \to \mathbb{R},\ \psi(x, 0) = x,\ \psi(x, x) = x$$

   ¿Es $\mathcal{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ un atlas C^∞ del conjunto S?
10. Se pide demostrar que si dos variedades son difeomorfas entonces tienen la misma dimensión.
11. Se pide probar que la función determinante $det : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es diferenciable.
12. Se consideran sobre $\mathbb{R}$ las estructuras diferenciables generadas por las siguientes cartas:

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x(p) = p \qquad ; \qquad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ y(p) = p^3.$$

   Se pide:
   - Probar que ambas estructuras diferenciables son distintas entre sí.
   - Probar que las estructuras son difeomorfas entre sí.

13. Se pide probar que las cartas de una variedad diferenciable son difeomorfismos.
14. Se pide probar que dos puntos de una variedad diferenciable siempre admiten entornos difeomorfos.

    Este hecho es crucial para el desarrollo de la Topología Diferencial: demuestra que en Topología Diferencial no hay cuestiones locales, porque dos puntos tienen siempre entornos difeomorfos. Por lo tanto, la Topología Diferencial se dedicará sólo a las cuestiones globales, aunque las definiciones que se usen sean locales.
15. Se pide demostrar la existencia de *funciones meseta*: dado $A \subset M$, A cerrado, M variedad, y dado U entorno abierto de A existe una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ tal que $f\,|_A \equiv 1$, $f\,|_{M-U} \equiv 0$, $f(p) \geq 0$, $\forall p \in M$. (Indicación: usar una partición diferenciable de la unidad).
16. Se llama *superficie simple* a una aplicación inyectiva de clase C^∞ $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, con dominio un abierto U, tal que $f_u \times f_v \neq \vec{0}$ en todo U y tal que $f : U \to f(U)$ sea homeomorfismo. Se pide probar que $f^{-1} : f(U) \to U$ es una carta y que f y f^{-1} son difeomorfismos.
17. Se llama *superficie regular* a todo subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que S es localmente simple, i.e., para cada $p \in S$ existen un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y un abierto $V \subset S$ con $p \in S$ y una aplicación $f : U \to V$ que es superficie simple. Se pide probar que S es una variedad diferenciable.
18. Se pide probar que una variedad diferenciable compacta no puede admitir un atlas C^∞ formado por una sola carta.
19. Se considera $M = \mathbb{R}$ dotado de la siguiente carta global: $\varphi : M \to \mathbb{R}$; $\varphi(t) = \frac{1}{t}$, si $t \neq 0$; $\varphi(0) = 0$. Se pide probar que las aplicación $f : M \to M$ definida por $f(t) = -t$ es de clase C^∞ mientras que la aplicación $\alpha : M \times M \to M$ dada por $\alpha(t, s) = t - s$ no lo es.
20. Se pide averiguar si el siguiente conjunto de $\mathbb{R}^3$ es una variedad diferenciable: $\{x^3 + y^3 + z^3 - 2xyz = 1\}$.
21. Pruébese que si $F : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable C^∞ entonces la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x^1, \ldots, x^{n-1}, x^n) = F(x^1, \ldots, x^{n-1}) - x^n$$

    define una estructura de variedad C^∞ en $S = f^{-1}(0)$. Pruébese además que S es difeomorfa a $\mathbb{R}^{n-1}$ e ilústrese el resultado considerando las funciones:

    (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$;

    (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$.
22. Se pide estudiar si $S = \{x^3 - y^3 + xyz - xy = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ es una variedad diferenciable y calcular, si tiene sentido, el plano tangente en $p = (1, 1, 1)$.

Topología de las variedades

23. Se pide probar que toda variedad compacta verifica el II Axioma de Numerabilidad.
24. Se pide probar que todo espacio topológico compacto es paracompacto.
25. Se pide dar una familia de subconjuntos de $(\mathbb{R}^2, T_u)$ que recubra todo el plano, que no sea finita pero sí sea localmente finita.
26. Se considera la familia de rectas horizontales de ordenada un número entero $\cup\{y = k, k \in \mathbb{Z}\}$ y se identifican todos los puntos de igual abscisa salvo los que están sobre la recta $\{x = 0\}$, i.e., $(x, j) \equiv (x, k)$, $\forall x \neq 0$, $\forall j, k \in \mathbb{Z}$. Sea M la variedad resultante. Se pregunta si M satisface los siguientes axiomas:
    - II Axioma de Numerabilidad.

- Hausdorff.
- Paracompacidad.
- Metrizabilidad.

27. Sea una variedad M con borde ∂M. Se pide:
    (a) Dar un ejemplo en que ∂M sea compacto y M no.
    (b) Probar que si M es compacta, entonces ∂M también.
28. ¿Es el producto de variedades con borde una variedad con borde? En caso afirmativo, dígase cuál es el borde.

Campos vectoriales

29. Sean M una variedad diferenciable, $p \in M$, $x : U \to \mathbb{R}^n$ una carta con $p \in U$. Se pide dar una interpretación de $(\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ como vector tangente a una curva.
30. Se consideran una variedad M, una función $f : M \to \mathbb{R}$ y un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se pide decir qué significa geométricamente $X(f) = 0$. (Por sencillez de expresión se puede asumir $M = \mathbb{R}^2$).
    Se pide asimismo describir todas las funciones f tales que
    (a) $X(f) = 0$, siendo $X = \frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$.
    (b) $Y(f) = 0$, siendo $Y = -y\,\frac{\partial}{\partial x} + x\,\frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$.
31. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$. Se consideran los campos de $\mathbb{R}^3$
    $X = (x^2 - 1)\,\frac{\partial}{\partial x} + xy\,\frac{\partial}{\partial y} + xz\,\frac{\partial}{\partial z}$;
    $Y = x\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y} + 2xz^2\,\frac{\partial}{\partial z}$.
    Se pide dar un criterio para determinar si son tangentes los campos a la superficie $S = f^{-1}(0)$ y aplicarlo para comprobar si lo son o no.
32. Pruébese que si $\varphi : M \to N$ es una aplicación diferenciable, $x : U \to \mathbb{R}^m$ es una carta de M e $y : V \to \mathbb{R}^n$ es una carta de N de modo que $p \in U$, $\varphi(p) \in V$, entonces

$$(\varphi_*)_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$$

    está dada por

$$(\varphi_*)_p(v) = (\varphi_*)_p \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \cdot X^i \right] = \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_{\varphi(p)} \cdot \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} X^i$$

33. Se consideran la aplicación $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$h(a, b) = (a^2 - 2b, 4a^3b^2)$$

    el campo vectorial $X = 4x^1\partial/\partial x^1 + 3x^2\partial/\partial x^2$ y el punto $p = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$. Se pide calcular $(h_*)_pX_p$, siendo $p = (1, 2)$.
34. Se considera la esfera $S^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$. Se pide probar que los siguientes campos vectoriales definen una *paralelización* de S^3, esto es, que son una base de T_pS^3 para cada punto de S^3:

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - t\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial t}$$

$$Y = -z\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z} - y\frac{\partial}{\partial t}$$

$$Z = -t\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial t}$$

35. Se pide demostrar que la ecuación

$$e^{-y}\, dx - (2y + xe^{-y})\, dy = 0$$

es una ecuación diferencial total exacta, y hallar su integral general.

36. Se pide demostrar que la ecuación

$$x\, dx + y\, dy = 0$$

es una ecuación diferencial total exacta, hallar su integral general e interpretar geométricamente el resultado obtenido.

37. Se considera la forma de Pfaff de $\mathbb{R}^2$

$$\omega = x\, dx + y\, dy$$

Calcúlese la distribución que define.

38. Se pide demostrar que la ecuación

$$y\, dx + x\, dy = 0$$

es una ecuación diferencial total exacta, hallar su integral general e interpretar geométricamente el resultado obtenido.

39. Se considera la forma de Pfaff de $\mathbb{R}^2$

$$\omega = y\, dx + x\, dy$$

Calcúlese la distribución que define.

40. Se considera la ecuación diferencial total

$$-y\, dx + x\, dy = 0$$

Calcúlese una integral general e interprétese geométricamente el resultado.

41. Se considera la forma de Pfaff de $\mathbb{R}^2$

$$\omega = -y\, dx + x\, dy$$

Calcúlese la distribución que define.

42. Se considera la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Se pide hallar el campo gradiente y las curvas de nivel, interpretando geométricamente el resultado. Además se pide hallar las curvas integrales del campo gradiente.

43. Se considera la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto xy$. Se pide hallar el campo gradiente y las curvas de nivel, interpretando geométricamente el resultado. Además se pide hallar las curvas integrales del campo gradiente.

Inmersiones

44. Se pide probar que toda subvariedad compacta de una variedad Hausdorff es subvariedad regular.

45. Se considera la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (t^2, t^3)$. Se pide estudiar si es una inmersión.

46. Se llama *parametrización regular* C^∞ a toda aplicación diferenciable de dominio un intervalo de la recta real e imagen contenida en $\mathbb{R}^3$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}^3$, que es de clase C^∞ y verifica $f'(t) \neq \vec{0}, \forall t \in (a, b)$. Estudiese si f es una inmersión, un embedding y un embedding regular y propóngase ejemplo de una parametrización regular que sea embedding regular.

47. Se considera el *plano proyectivo real* $P_2(\mathbb{R})$ con coordenadas homogéneas $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

    (a) Se pide probar que $\{f_i : A_i \to \mathbb{R}^2\}$ es un atlas (llamado *atlas afín*) de $P_2(\mathbb{R})$, donde $A_i = P_2(\mathbb{R}) - \{x_i = 0\}$, $i = 0, 1, 2$,

$$f_0 \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x_1/x_0 \\ x_2/x_0 \end{pmatrix}$$

    y análogamente f_1, f_2 (las aplicaciones f_i son funciones de *deshomogeneización*).
    (b) Se pide probar que la siguiente aplicación $f : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ es una inmersión:

$$f \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{x_0^2}{\mid x \mid^2}, \frac{2x_0x_1}{\mid x \mid^2}, \frac{2x_0x_2 + x_1^2}{\mid x \mid^2}, \frac{2x_1x_2}{\mid x \mid^2} \right)$$

    donde $\mid x \mid^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$. (De hecho, es un embedding regular).

48. Se considera la aplicación natural $\pi : \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\} \to P_1(\mathbb{C})$ dada por $\pi(z) =< z >$ (al vector $z \in \mathbb{C}^2$ le hace corresponder la recta que genera). Se consideran la inmersión canónica $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ y la siguiente cadenas de aplicaciones

$$S^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4 - \{(0, 0, 0, 0)\} \approx \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\} \xrightarrow{\pi} P_1(\mathbb{C}) \approx S^2$$

    La aplicación resultante se llama *aplicación de Hopf.* Se pide probar que es suprayectiva.

Puntos y valores regulares y críticos

49. Se consideran la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $\{z = x^2 - y^2\}$ y las aplicaciones

$$f : S \to \mathbb{R}^2 \qquad ; \qquad g : S \to \mathbb{R}$$

    dadas por $f(x, y, z) = (x, y)$; $g(x, y, z) = z$. Se pide calcular los puntos críticos y regulares y los valores críticos y regulares y las fibras en ambos tipos de valores, para ambas aplicaciones. *(Obsérvese cómo los puntos críticos son distintos para f y g: dependen de la aplicación).*

50. Se considera el toro de revolución T obtenido al girar la circunferencia de centro $(2, 0, 0)$ y radio 1 contenida en el plano $\{y = 0\}$ respecto del eje z. Se consideran las funciones

$$f : T \to \mathbb{R} \qquad ; \qquad g : T \to \mathbb{R}$$

dadas por $f(x,y,z)=z$; $g(x,y,z)=x$. Se pide calcular los puntos críticos y regulares y los valores críticos y regulares y las fibras en ambos tipos de valores, para ambas aplicaciones. *(Obsérvese cómo los puntos críticos son un subconjunto discreto de T en uno de los casos mientras que en el otro no).*

51. Sean $\varphi : M \to \mathbb{R}$ una aplicación y N una subvariedad de M. ¿Es el conjunto de puntos críticos de $\varphi|_N$ igual al conjunto de puntos críticos de φ intersecado con N?
52. Se pide hallar los puntos y los valores críticos y regulares de $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(x,y,z) = (x+y^2, y+z^2)$.
53. Se considera la aplicación $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(x,y,z) = (xy, z)$. Se pide:
    (1) Encontrar los puntos críticos de φ.
    (2) Encontrar los puntos críticos de $\varphi|_{S^2}$, siendo S^2 la esfera unidad centrada en el origen.
    (3) Encontrar el conjunto C de valores críticos de $\varphi|_{S^2}$.
    (4) Razonar si C tiene medida nula.
54. Se considera la aplicación $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

    $$\varphi(x,y,z,t) = (x^2+y^2+z^2+t^2-1, x^2+y^2+z^2+t^2-2y-2z+5)$$

    Se pide:
    (a) Calcular los conjunto de puntos y valores críticos.
    (b) Calcular una base de $\ker((\varphi_*)_p)$, para $p = (0,1,2,0)$.
55. Para las siguientes curvas se pide:
    (a) Hallar sus puntos singulares , decir de qué tipo son y calcular las tangentes en ellos.
    (b) Hallar los puntos críticos de la correspondiente función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, estudiar si son degenerados o no, y calcular su índice.
    (c) Dibujar la curva y la superficie gráfica de la función.
    Las curvas son:
    - Lemniscata de Bernoulli: $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$
    - Folium de Descartes: $x^3+y^3 = 3axy$
    - Cisoide de Diocles: $y^2 = x^3/(2a-x)$
    - Conchoide: $(x-b)^2(x^2+y^2) - a^2x^2 = 0$
    - Limaçon de Pascal: $(x^2+y^2-2ax)^2 = b^2(x^2+y^2)$

    Por sencillez en los cálculos, todas las constantes a y b pueden suponerse iguales a 1.
56. Se considera la elipse $\{6x^2+3y^2+4x+4y-4=0\}$ y la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y) = 6x^2+3y^2+4x+4y-4$.
    (a) Se pide calcular el centro de la elipse y el punto crítico de F, comprobando que coinciden. ¿Es una casualidad?
    (b) Se pide hallar los valores críticos de F.
    (c) Se pide clasificar la gráfica de F como cuádrica de $\mathbb{R}^3$.
    (d) Se pide hallar el centro de cada elipse $E_k = \{6x^2+3y^2+4x+4y-4=k\}$, cuando k toma todos los valores posibles para que sea elipse.
57. *(Aplicación de Gauss de una superficie).* Se define la aplicación de Gauss de una superficie orientable $M \subset \mathbb{R}^3$ como la aplicación $\nu : M \to S^2$ que a cada punto $p \in M$ le hace corresponder el vector normal N_p, para una determinación continua del vector normal. ¿Qué se puede afirmar de un punto $p \in M$ si se sabe que es un punto crítico de ν? Se pide describir la aplicación de Gauss de las siguientes superficies, indicando en cada caso cuáles son los puntos críticos y regulares y los valores críticos y regulares:

- M la esfera unidad.
- M un cilindro
- M un plano

58. Se considera una función diferenciable $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Se pide explicar la relación existente entre las siguientes propiedades:
    - Se anula el gradiente ∇F en $p \in \mathbb{R}^3$.
    - El punto $p \in \mathbb{R}^3$ es un punto crítico de la función F.
59. Sea M una variedad compacta. Si $f : M \to M$ es un difeomorfismo, ¿necesariamente tiene f algún punto fijo?
60. Se pide hallar una aplicación diferenciable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que el conjunto de valores críticos sea denso en $\mathbb{R}$ (se considera $\mathbb{R}$ dotado de la estructura diferenciable usual).
61. Sea X una hipersuperficie de $\mathbb{R}^n$. Se llama fibrado normal de X a $N(X) = \bigcup_{x \in X} N_x$, donde N_x es el complemento ortogonal de $T_x X$ en $\mathbb{R}^n$, respecto de la métrica standard. Se considera la aplicación $h : N(X) \to \mathbb{R}^n$, dada por $h(x, v) = x + v$. Los valores críticos de h se llaman *puntos focales* de X. Se pide calcular el lugar geométrico de los puntos focales de la parábola $\{y = x^2\} \subset \mathbb{R}^2$ y demostrar que coincide con el de los centros de curvatura (y, por tanto, con la evoluta de la parábola). Asimismo, se pide probar que para toda curva plana coinciden los lugares geométricos de los puntos focales y de los centros de curvatura.

Funciones de Morse

62. Se consideran la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $\{z = x^2 - y^2\}$ y la aplicación
$$g : S \to \mathbb{R}$$
dada por $g(x, y, z) = z$. Se pide clasificar los puntos críticos (en degenerados y no degenerados) y decidir si g es una función de Morse. Además, en los puntos críticos no degenerados se pide determinar su índice.
63. Se consideran la esfera $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ y la aplicación
$$f : S \to \mathbb{R}$$
dada por $f(x, y, z) = z$. Se pide clasificar los puntos críticos (en degenerados y no degenerados) y decidir si f es una función de Morse. Además, en los puntos críticos no degenerados se pide determinar su índice.
64. Se considera el toro de revolución T obtenido al girar la circunferencia de centro $(2, 0, 0)$ y radio 1 contenida en el plano $\{y = 0\}$ respecto del eje z. Se consideran las funciones
$$f : T \to \mathbb{R} \qquad ; \qquad g : T \to \mathbb{R}$$
dadas por $f(x, y, z) = z$; $g(x, y, z) = x$. Se pide clasificar los puntos críticos para ambas aplicaciones, y decidir si son funciones de Morse. Además, en los puntos críticos no degenerados se pide determinar su índice.
65. Se considera la función $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x, y, z) = x \sin y + y \sin z + z \sin x$. Se pide:
(1) Estudiar si $(0, 0, 0)$ es un punto crítico y, en su caso, si es degenerado o no.
(2) Calcular, si no es degenerado, su índice.

66. *(Curvatura de Gauss).* Sean U un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable y $\{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in U\} \subset \mathbb{R}^3$ su gráfica (que se denomina *superficie de Monge*). Se pide probar que la curvatura de Gauss se anula en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ si y sólo si se anula el determinante de la matriz hessiana de f en (x_0, y_0).

Teroema fundamental del Álgebra. Funciones holomorfas

67. Sean X un espacio topológico conexo y $f : X \to \mathbb{N}$ una función localmente constante. Se pide probar que si X es conexo entonces f es globalmente constante.
68. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Se pide probar que entonces las siguientes condiciones son equivalentes:
    - a es un punto crítico de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
    - La aplicación tangente $(f_*)_a : T_a\mathbb{R}^2 \to T_{f(a)}\mathbb{R}^2$ es el homomorfismo nulo.
    - $\frac{df}{dz}(a) = 0$
69. Se pide estudiar si la aplicación de Gauss de una superficie orientable en la esfera S^2 es holomorfa o no.

Homotopías e isotopías. Teoría del grado y campos vectoriales en esferas

70. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$. Se pide hallar un difeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciablemente isótopo a la identidad y que lleve a en b.
71. Sean $p, q \in S^2$. Se pide hallar un difeomorfismo $h : S^2 \to S^2$ diferenciablemente isótopo a la identidad y que lleve p en q.
72. Se pide hallar dos difeomorfismos $f, g : M \to N$ y una homotopía diferenciable $F : M \times [0, 1] \to N$ entre ambos difeomorfismos, que no sea isotopía.
73. Se dice que una aplicación es *nulhomótopa* si es homótopa a una aplicación constante. Se pide probar que toda aplicación diferenciable no suprayectiva de la esfera S^n en sí misma es nulhomótopa, construyendo explícitamente una homotopía entre la aplicación y una aplicación constante.
74. Sean M y N dos espacios topológicos, $f : M \to N$ una aplicación continua y $h : N \to N$ una aplicación continua homótopa a la identidad $id_N : N \to N$. Se pide probar que entonces $h \circ f$ es también homótopa a $id_N \circ f = f$.
75. Se consideran la aplicaciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^3 - x$ y por $g(x) = x^2$. Estudiése si son funciones pares o impares y determínese su grado de Brouwer. Estudiése también si son homótopas a la identidad. ¿Contradicen los resultados el Teorema de Hopf?

    Observación: aunque el conjunto inicial no es compacto sí tienen todos los puntos del conjunto final fibra finita. La condición de que la variedad inicial sea compacta sirve para garantizar la finitud de las fibras).
76. Se considera la función $f : S^1 \to S^1$ dada por $f(z) = z^2$ (cuando se considera $S^1 \subset \mathbb{C}$). Se pide calcular su grado de Brouwer. Lo mismo para $f(z) = z^n$. Se pide interpretar geométricamente el resultado.
77. Sean S^{2n} la esfera de dimensión $2n$ y $f : S^{2n} \to S^{2n}$ una aplicación diferenciable que no tiene ningún punto fijo. Se pide probar que entonces la aplicación $-f : S^{2n} \to S^{2n}$, definida por $(-f)(x) = -f(x)$, para todo $x \in S^{2n}$, tiene algún punto fijo.

78. Si la presión y la temperatura en la superficie terrestre son funciones diferenciables, demuéstrese que en cada instante existen dos puntos antipodales con igual presión y temperatura.
79. Se consideran los siguientes campos vectoriales del plano real:
    - $X(x, y) = (x, y)$
    - $Y(x, y) = (-x, y)$
    - $Z(x, y) = (-x-, y)$

    Se pide calcular el índice del origen de coordenadas para cada uno de los campo. Se pide asimismo expresar los campos vectoriales como sistemas de ecuaciones diferenciales.
80. Se pide dibujar las órbitas de campos vectoriales sobre la esfera S^2 que tengan:
    - un único cero de índice 2
    - dos ceros aislados de índice 1
81. Se pide dibujar las órbitas de campos vectoriales sobre el toro T^2 que no tengan ceros.

Problemas variados[77]

82. (febrero 2004) Sean S^1, S^2, D^2 la circunferencia unidad, la esfera unidad y el disco unidad centrados en el origen. Se pide decidir si son ciertas o no las siguientes afirmaciones, razonando la respuesta:
    (a) Para toda aplicación diferenciable $f : S^1 \to S^1$ existe x tal que $f(x) = x$.
    (b) Para toda aplicación diferenciable $f : S^1 \to S^1$ existe x tal que $f(x) = x$ o $f(x) = -x$.
    (c) Para toda aplicación diferenciable $f : D^2 \to D^2$ existe x tal que $f(x) = x$.
    (d) Para toda aplicación diferenciable $f : S^2 \to S^2$ existe x tal que $f(x) = x$.
    (e) Para toda aplicación diferenciable $f : S^2 \to S^2$ existe x tal que $f(x) = x$ o $f(x) = -x$.
83. (febrero 2004) Se considera el 2-toro. Se pide
    (a) Calcular su característica de Euler, utilizando algún resultado de Topología Diferencial.
    (b) Enunciar con precisión el resultado que se haya empleado.
84. (febrero 2004) Se considera la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida como $f(x, y, z) = (x^2+y^2, z)$. Se pide:
    (a) Determinar los puntos críticos, los puntos regulares, los valores críticos y los valores regulares.
    (b) Determinar, si los hay, los puntos de fibra vacía.
    (c) Sea $q \in \mathbb{R}^2$ un punto de fibra no vacía. ¿Qué tipo de conjunto es $f^{-1}(q)$?
85. (febrero 2005) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = x^2 - y^2$.
    (a) Se pide razonar si es una función de Morse y, en caso afirmativo, calcular el índice de todos sus puntos críticos.
    (b) Identificando $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ y considerando que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ se define la misma función como aplicación de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$. Se pide estudiar si f es holomorfa.
    (c) Se define la aplicación $\tilde{f} : S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \to \mathbb{R}$ dada por $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, y $\tilde{f}(\infty) = 0$. Se pide calcular, si tiene sentido, el grado módulo dos de $\tilde{f}$.
    (d) Se considera el campo vectorial gradiente de f, ∇f. Se pide calcular el índice de sus puntos singulares.
    (e) Se define el conjunto $S = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$. Se pide estudiar si S es una variedad diferenciable, razonando la respuesta.

[77] Se recogen algunos problemas de exámenes anteriores. Otros problemas de exámenes están ya incluídos en los epígrafes correspondientes.

86. (febrero 2005) En $\mathbb{R}^3$ se consideran el toro T^2 obtenido al hacer girar la circunferencia de radio unidad y centro $(0,2,0)$ contenida en el plano $\{x=0\}$ respecto del eje z y la esfera S^2 centrada en el origen de coordenadas y de radio 1. Se define la aplicación $f: T^2 \to S^2$ dada por

$$f(p) = \frac{p}{\|p\|}$$

Se pide:

(a) Hallar la imagen de f, determinando sus ecuaciones.

(b) Calcular el grado de Brouwer de f.

87. (septiembre 2005) Se consideran las siguientes aplicaciones:

$x: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\quad x(t) = t$
$y: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\quad y(t) = t^2$
$z: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\quad z(t) = t^3$

Se pide:

(a) Para cada una de las tres aplicaciones, decidir si define una estructura de variedad diferenciable en $\mathbb{R}$.

(b) Estudiar, para las que definan estructura diferenciable, si las estructuras son equivalentes.

(c) Estudiar, para las que definan estructura diferenciable, si las estructuras son difeomorfas.

88. (septiembre 2005) Sean $S^1 = \{x^2+y^2=1\}$ la circunferencia unidad y $D^2 = \{x^2+y^2 \leq 1\}$ el disco unidad. Se pide contestar de modo razonado las siguientes preguntas:

(a) ¿Toda aplicación diferenciable $f: S^1 \to S^1$ se puede extender a una aplicación diferenciable $\tilde{f}: D^2 \to D^2$? (Al hablar de extensión se entiende que debe verificarse $\tilde{f}|_{S^1} = f$).

(b) ¿Existe alguna aplicación diferenciable $f: D^2 \to S^1$ de modo que $f|_{S^1} = id$?

(c) ¿Toda aplicación diferenciable $f: D^2 \to D^2$ tiene algún punto fijo?

(d) ¿Toda aplicación diferenciable $f: S^1 \to S^1$ tiene algún punto fijo?

89. (septiembre 2005) Se considera la aplicación $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

Se pide:

(a) Determinar los puntos críticos, los puntos regulares, los valores críticos y los valores regulares.

(b) Decidir si f es una función de Morse y, en su caso, calcular el índice de sus puntos críticos.

(c) Calcular los puntos singulares del campo gradiente ∇f y los índices en éstos.

(d) Hallar $(f_*)_q\left(4(\frac{\partial}{\partial x})_q + 3(\frac{\partial}{\partial y})_q\right)$, siendo $q=(1,1)$ y $(f_*)_q: T_q\mathbb{R}^2 \to T_{f(q)}\mathbb{R}$ la aplicación tangente en q.

(e) Decidir si $\{z = f(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3$ es una variedad diferenciable.

90. (febrero 2006) Sea $f: \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ un aplicación de clase C^∞. Dígase si es cierto

$$deg(f) \text{ es par } \Leftrightarrow\ deg_2(f) \text{ es par}$$

donde el primero es el grado de Brouwer y el segundo el grado módulo dos.

91. (febrero 2006) En $\mathbb{R}^2$ se consideran el punto $p = (\sqrt{2}, 1)$ y la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = 2xy + y^2$. Se define también la familia de curvas

$$\mathcal{F} = \{\gamma_\lambda(t) = (2\lambda \cos t, \sqrt{2}\lambda \sin t)\}_{\lambda \geq 0}$$

Se pide:

(1) Hallar el campo vectorial X cuyas órbitas son las curvas de la familia $\mathcal{F}$.

(2) Calcular $X(f)$ en el punto p.

(3) Hallar el gradiente ∇f en el punto p.

(4) Calcular el producto escalar $X \cdot \nabla f$ en el punto p y comprobar que coincide con el valor hallado en el apartado (2).

(5) Probar que cualesquiera que sean el campo X, la función f y el punto p, resulta que $X(f) = X \cdot \nabla f$ en p.

(6) Hallar una función, distinta de la idénticamente nula, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de clase C^∞, tal que $X(g) = 0$.

92. (febrero 2006) Se consideran la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1 = \{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ y la función $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2$.

Se pide:

(1) Hallar los puntos y los valores críticos y regulares de f.

(2) Estudiar si los puntos críticos de f son degenerados o no y, en caso de que no lo sean, calcular su índice.

(3) Decidir si f es una función de Morse y, en caso de que lo sea, deducir de ese hecho la característica de Euler de $\mathbb{S}^1$.

93. (septiembre 2006) Se considera el campo vectorial X de $\mathbb{R}^2$ dado por $X(x, y) = (1, 2) = \frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y}$. Se pide:

(1) Hallar una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que no sea idénticamente constante y tal que $X(f) = 0$ en todo punto.

(2) Hallar una ecuación diferencial total exacta que tenga como soluciones las curvas integrales del campo X.

94. (septiembre 2006) Se consideran la superficie $S = \{x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ y la aplicación $f : S \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = z$. Se pide clasificar los puntos críticos (en degenerados y no degenerados) y decidir si f es una función de Morse. Además, en los puntos críticos no degenerados se pide determinar su índice.

Estabilidad

95. Se considera la aplicación identidad $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuando $\mathbb{R}$ se considera dotado de la estructura diferenciable usual. Se pide estudiar si es estable la propiedad *i es difeomorfismo.* También se pide estudiar si es estable la propiedad *0 es un valor regular del difeomorfismo i.*