Exercicis de Geometria Lineal Curs 2021–2022

Índex

1 Geometria Afí

1.1 Espais afins

Exercici 1.1: Demostreu que les accions següents són espais afins:

a)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}\times E & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ (P,u) & \longrightarrow & P+\vec{u} \end{array}$$

on $\mathbb{A}=\{P=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+y+z=1\}$ i $E=\{u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+y+z=0\}$.

b)

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{A}\times E & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ (P,(\alpha,\beta)) & \longrightarrow & P+\alpha(1,-1,0)+\beta(1,0,-1), \end{array}$$

on $\mathbb{A}=\{P=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+y+z=1\}$ i $E=\mathbb{R}^2$.

c)

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{A}\times E & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ ((x,y,z),(\alpha,\beta)) & \longrightarrow & (x+\alpha z+\beta y+\alpha\beta, y+\alpha, z+\beta), \end{array}$$

on $\mathbb{A}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x=yz\}$ i $E=\mathbb{R}^2$.

Solució: a) El primer que hem de veure és que $(x,y,z)+(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{A}$. L'acció és la suma component a component, per tant hem de veure que $(x+u_1,y+u_2,z+u_3)\in\mathbb{A}$. És a dir, que la suma d'aquestes tres compo¡nents és 1 però això és clar ja que

$$x+u_1+y+u_2+z+u_3=(x+y+z)+(u_1+u_2+u_3)=1+0=1.$$

Les tres condicions són:
1) $(x,y,z)+(0,0,0)=(x,y,z)$. Obvi.
2) $P+(v+w)=(P+v)+w$. Obvi.
3) Donats P,Q existeix un únic $u\in E$ tal que $Q=P+u$. Obvi.

b) El primer que hem de veure és que $(x,y,z)\oplus(\alpha,\beta)\in\mathbb{A}$ ((denotem per $\oplus$ l'acció). Però

$$(x,y,z)+\alpha(1,-1,0)+\beta(1,0,-1)=(x+\alpha+\beta,y-\alpha,z-\beta)$$

i la suma d'aquestes tres components és 1 (recordeu que $x+y+z=1$). Les tres condicions són :
1) $(x,y,z)\oplus(0,0)=(x,y,z)$. Obvi.
2) $P\oplus(v+w)=(P\oplus v)\oplus w$. En efecte, el primer terme, posant $v=(\alpha,\beta), w=(\alpha',\beta')$, és igual a

$$(x,y,z)+(\alpha+\alpha')(1,-1,0)+(\beta+\beta')(1,0,-1)=(x+\alpha+\alpha'+\beta+\beta',y-\alpha-\alpha',z-\beta-\beta')$$

i el segon terme és

$$\begin{array}{cl} & ((x,y,z)+\alpha(1,-1,0)+\beta(1,0,-1))\oplus(\alpha',\beta') \\ = & (x,y,z)+\alpha(1,-1,0)+\beta(1,0,-1)+\alpha'(1,-1,0)+\beta'(1,0,-1) \end{array}$$

que és igual al primer terme.

3) Donats P,Q existeix un únic $u\in E$ tal que $Q=P+u$. En efecte, si $P,Q\in\mathbb{A}$ el vector $\overrightarrow{PQ}$ pertany al subespi vectorial $x+y+z=0$, que està generat pels vectors $(1,-1,0),(1,0,-1)$. Per tant

$$\overrightarrow{PQ}=\alpha(1,-1,0)+\beta(1,0,-1)$$

Llavors $P\oplus(\alpha,\beta)=Q$.

c)
Sabent que $x=yz$ hem de veure que

$$x+\alpha z+\beta y+\alpha\beta=(y+\alpha)(z+\beta)$$

cosa clara.

Les tres condicions són :

1) $(x, y, z) \oplus (0,0) = (x, y, z)$. Obvi.

2) $P \oplus (v+w) = (P \oplus v) \oplus w$. En efecte, el primer terme, posant $v = (\alpha, \beta), w = (\alpha', \beta')$, és igual a

$$(x + (\alpha + \alpha')z + (\beta + \beta')y + (\alpha + \alpha')(\beta + \beta'), y + \alpha + \alpha', z + \beta + \beta')$$

I el segon terme és igual a

$$\begin{aligned} & (x + \alpha z + \beta y + \alpha\beta, y + \alpha, z + \beta) \oplus (\alpha', \beta') \\ = \quad & (x + \alpha z + \beta y + \alpha\beta + \alpha'(z + \beta) + \beta'(y + \alpha) + \alpha'\beta', y + \alpha + \alpha', z + \beta + \beta') \end{aligned}$$

que és igual a l'anterior.

3) Donats P, Q existeix un únic $u \in E$ tal que $Q = P + u$. Si $P = (p_1, p_2, p_3)$ amb $p_1 = p_2 p_3$ i $Q = (q_1, q_2, q_3)$ amb $q_1 = q_2 q_3$ prenem $u = (\alpha, \beta)$ amb $\alpha = q_2 - p_2$, $\beta = q_3 - p_3$ i tenim

$$\begin{aligned} P + u &= (p_1, p_2, p_3) \oplus (\alpha, \beta) \\ &= (p_1 + (q_2 - p_2)p_3 + (q_3 - p_3)p_2 + (q_2 - p_2)(q_3 - p_3), q_2, q_3) = (q_1, q_2, q_3) = Q \end{aligned}$$

Exercici 1.2: Demostreu que el conjunt

$$\mathbb{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z = 0\}$$

amb l'acció de $\mathbb{R}^2$ donada per

$$(x, y, z) + (u, v) = (x + u, y + v, (x + u)^2 + (y + v)^2),$$

és un espai afí.

Solució: El primer que hem de veure és que $(x, y, z) + (u, v) \in \mathbb{A}$. Per a això només hem de veure que

$$(x + u)^2 + (y + v)^2 - (x + u)^2 - (y + v)^2 = 0$$

cosa evident.

Les tres condicions són:

1) $(x, y, z) + (0,0) = (x, y, z)$. Obvi, ja que $x^2 + y^2 = z$.

2) $(x, y, z) + ((u, v) + (w, t)) = ((x, y, z) + (u, v)) + (w, t)$. Però el terme de l'esquerra és igual a

$$(x, y, z) + (u + w, v + t) = (x + u + w, y + w + t, (x + u + w)^2 + (y + w + t)^2),$$

i el de la dreta val el mateix ja que

$$(x + u, y + v, (x + u)^2 + (y + v)^2) + (w, t) = (x + u + w, y + v + t, (x + u + w)^2 + (y + v + t)^2).$$

3) Donats $P = (x, y, z), Q = (x', y', z') \in \mathbb{A}$ prenem $u = x' - x, v = y' - y$ i llavors

$$P + (u, v) = (x', y', x'^2 + y'^2) = (x', y', z') = Q.$$

La unicitat de (u, v) és clara.

Exercici 1.3: Calculeu i dibuixeu aproximadament la recta paral·lela a $r : (0,1) + \langle(1,1)\rangle$, que passa pel punt $(0,2)$, a l'espai afí de l'exemple 3, capítol 1, de [2].

Solució: Aquest espai afí és $\mathbb{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ amb espai vectorial associat $E = \mathbb{R}^2$ i acció

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{A} & \times & E & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ (x, y) & , & (u_1, u_2) & \longmapsto & (x + u_1, e^{u_2} y). \end{array}$$

Observem que, per a tot $u_2 \in \mathbb{R}$, $e^{u_2} y > 0$, i per tant $(x + u_1, e^{u_2} y) \in \mathbb{A}$.

Hem de dibuixar la recta

$$(0,2) + \lambda(1,1) = (\lambda, 2e^{\lambda}).$$

És a dir, la recta afí demanda és la gràfica de la funció exponencial $y = 2e^x$.

Exercici 1.4: Sigui $\mathbb{A}$ un espai afí de dimensió dos sobre un k-espai vectorial E. Comproveu que es compleixen els axiomes $1, 2$ i 3 de la geometria afí donats a la introducció de [2].

Solució: Per comprovar l'axioma 1 hem de veure que donats dos punts diferents P, Q existeix una única recta l tal que $P \in l$ i $Q \in l$.

Prenem la recta $l : P + \lambda\overrightarrow{PQ}$, $\lambda \in k$, que conté clarament els punts P i Q. Sigui ara l' una altra recta que contingui aquests dos punts. És clar que podem escriure $l' : P + \lambda u$, amb $u \in E$. En particular $Q = P + au$, per a un cert $a \in k, a \neq 0$. Però sabem que $\overrightarrow{PQ}$ és l'únic vector tal que $Q = P + \overrightarrow{PQ}$. Per tant $au = \overrightarrow{PQ}$ i $l' : P + \lambda a^{-1}\overrightarrow{PQ} = P + \mu\overrightarrow{PQ}$, $\mu \in k$, i per tant $l = l'$.

Per comprovar l'axioma 2 hem de veure que donats un punt P i una recta l, $P \notin l$, existeix una única recta m tal que $P \in m$ i $l \| m$.

En efecte, si posem $l : Q + \lambda u$, $u \in E$, és clar que la recta $m : P + \mu u$ és paral·lela a l ja que si es tallessin existirien $\lambda, \mu \in k$ tals que $Q + \lambda u = P + \mu u$ i això implica $P \in l$.

Per veure la unicitat suposem que $m' : P + \lambda w$, $w \in E$, sigui paral·lela a l. Això vol dir que l'equació

$$P + \lambda w = Q + \mu u, \quad \lambda, \mu \in k,$$

no té solució. Però si u, w fossin linealment independents serien base de E i podríem escriure

$$\overrightarrow{PQ} = au + bw, \quad a, b \in k$$

de manera que l'equació anterior sí que tindria solució. En efecte, com

$$Q = P + \overrightarrow{PQ} = P + au + bw$$

només hem d'agafar $\lambda = b, \mu = -a$.

Per tant u i w són linealment dependents i això implica $m = m'$.

L'axioma tres, que hi ha tres punts no alineats, és evident.

Exercici 1.5: En el pla afí $\mathbb{A} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sobre el cos $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$,

a) Quants punts hi ha?

b) Quants punts té cada recta?

c) Quantes rectes hi ha?

d) Quantes rectes hi ha paral·leles a una donada?

e) Quants feixos diferents de rectes paral·leles hi ha?

Solució: a) Hi ha nou punts $(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)$

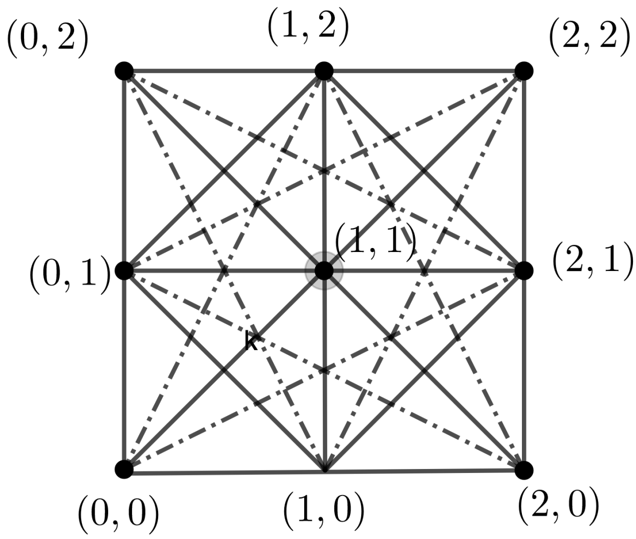
b) Cada recta té tres punts ja que es poden escriure com $P + \lambda v$ amb P i v fixats i $\lambda = 0, 1, 2$.

c) L'espai vectorial associat és també $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ i té per tant 9 vectors. Per cada punt P hi passen quatre rectes: $P + \langle(0, 1)\rangle$, $P + \langle(1, 0)\rangle$, $P + \langle(1, 1)\rangle$, $P + \langle(1, 2)\rangle$

Per tant el total de rectes és $4 \times 9/3 = 12$.

Concretament les 3 verticals, les 3 horitzontals, les tres paral·leles a la bisectriu del primer quadrant $(\{((0, 0), (1, 1), (2, 2))\}, \{((1, 0), (2, 1), (0, 2))\}, \{((0, 1), (1, 2), (2, 0))\})$, i les tres perpendiculars a la bisectriu del primer quadrant $(\{((2, 0), (1, 1), (0, 2))\}, \{((1, 2), (2, 1), (0, 0))\}, \{((0, 1), (1, 0), (2, 2))\})$,

$$\begin{array}{ccc}
(0,0) & + & \langle(1,0)\rangle \\
(0,0) & + & \langle(0,1)\rangle \\
(0,0) & + & \langle(1,1)\rangle \\
(0,0) & + & \langle(1,2)\rangle \\
(1,0) & + & \langle(1,1)\rangle \\
(1,0) & + & \langle(1,2)\rangle \\
(1,0) & + & \langle(0,1)\rangle \\
(2,0) & + & \langle(1,1)\rangle \\
(2,0) & + & \langle(1,2)\rangle \\
(2,0) & + & \langle(0,1)\rangle \\
(0,1) & + & \langle(1,0)\rangle \\
(0,2) & + & \langle(1,0)\rangle
\end{array}$$



d) Fixada una recta queden 6 punts lliures, però aquests s'han d'agrupar de 3 en 3, de manera que només hi ha dues rectes paral·leles a una donada. Per exemple donada $\{((0,0),(1,1),(2,2))\}$, que és la recta per l'origen amb vector director $(1,1)$ tenim les rectes paral·leles

$$\{((1,0),(2,1),(0,2))\},\{((1,2),(2,0),(0,1))\},$$

e) Com hi ha quatre direccions $((1,0),(0,1),(1,1),(2,1))$hi ha quatre feixos diferents de rectes paral·leles.

1.2 Varietats lineals

Exercici 1.6: Considerem les varietats lineals de l'espai afí $\mathbb{R}^4$ donades per les equacions respectives següents:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z-2t &=& 0,\\ 3x-y+z+4t &=& 1,\\ 2y-2z-5t &=& -1/2.\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} -z+t &=& 1,\\ 2x+y+z-t &=& 0,\\ 4x+2y+2z+t &=& 3.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+t &=& -1,\\ 2x-y+t &=& -1,\\ -x+2y+z-2t &=& 2.\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 3x+z &=& 0.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+2y+z-2t &=& 2,\\ 3x+z &=& 0.\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+t &=& -1,\\ -x+2y+z-2t &=& 2,\\ 3x+z+t &=& 4.\end{array}\right.$$

Escriviu cadascuna d'elles en la forma $P+[V]$, on $P\in\mathbb{R}^4$ i V és un subespai vectorial de l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$, donant explícitament el punt P i una base de V.

Solució: Fem només el primer i l'últim ja que la idea és la mateixa en tots els casos.

Solucionant el primer sistema obtenim

$$\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{4}-\frac{t}{2}\\ z &=& -\frac{5t}{2}+y+\frac{1}{4}\end{array}$$

de manera que podem escriure les solucions com

$$(x,y,z,t)=(\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},0)+y(0,1,1,0)+t(-\frac{1}{2},0,-\frac{5}{2},1)$$

és a dir, $L: P+[V]$, amb $P=(\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},0)$ i

$$V=\langle(0,1,1,0),(-\frac{1}{2},0,-\frac{5}{2},1)\rangle.$$

Solucionant el darrer sistema obtenim

$$\begin{aligned} y &= 2x+5 \\ z &= -3x \\ t &= 4 \end{aligned}$$

de manera que podem escriure les solucions com

$$(x,y,z,t)=(0,5,0,4)+x(1,2,-3,0),$$

és a dir, $L: P+[V]$ amb $P=(0,5,0,4)$ i $V=\langle(1,2,-3,0)\rangle$.

Exercici 1.7: Estudieu el subespai vectorial E de $\mathbb{R}^3$ generat per $(1,-1,2),(0,1,1)$ i $(1,1,4)$.

Solució: Un vector $(x,y,z)\in E$ si i només si

$$(x,y,z)=\lambda(1,-1,2)+\mu(0,1,1)+\nu(1,1,4),$$

per a certs $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$. És a dir

$$\begin{cases} x=\lambda+\nu \\ y=-\lambda+\mu+\nu \\ z=2\lambda+\mu+4\nu \end{cases}$$

La pregunta que ens estem fent és doncs si donat $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ (un punt fixat, ara x,y,z no són variables!) existeixen $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ que satisfacin el sistema.

Per estudiar aquest sistema, on les variables són λ,μ,ν, esglaonem la seva matriu ampliada:[1]

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 1 & x \\ -1 & 1 & 1 & y \\ 2 & 1 & 4 & z \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & x+y \\ 0 & 1 & 2 & z-2x \end{array}\right),$$

on hem fet les transformacions $F_2\to F_2+F_1, F_3\to F_3-2F_1$. A continuació,

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & x+y \\ 0 & 1 & 2 & z-2x \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & z-3x-y \end{array}\right),$$

on hem fet la transformació $F_3\to F_3-F_2$. El sistema és compatible si i només si

$$z-3x-y=0.$$

(A més, en aquest cas és compatible determinat amb un grau de llibertat: $\lambda=x-\nu,\mu=x+y-2\nu$.)

Per tant

$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; z-3x-y=0\}=\{(x,y,3x+y)\in\mathbb{R}^3; x,y\in\mathbb{R}\}.$$

Observem que

$$(x,y,3x+y)=x(1,0,3)+y(0,1,1)$$

de manera que també

$$E=\langle(1,0,3),(0,1,1)\rangle.$$

Diem que $z-3x-y=0$ és l'*equació cartesiana* de E, ja que aquesta condició caracteritza els elements de E.

[1] Observeu que les columnes són les components dels tres vectors donats.

Exercici 1.8: Estudieu el subespai vectorial E de $\mathbb{R}^4$ generat per $(1,-1,2,0)$, $(5,0,1,1)$.

Solució: Un vector $(x,y,z,t)\in E$ si i només si

$$(x,y,z,t)=\lambda(1,-1,2,0)+\mu(5,0,1,1).$$

És a dir

$$\begin{cases} x=\lambda+5\mu \\ y=-\lambda \\ z=2\lambda+\mu \\ t=\mu \end{cases}$$

Per estudiar aquest sistema esglaonem la seva matriu ampliada:

$$\left(\begin{array}{rr|l} 1 & 5 & x \\ -1 & 0 & y \\ 2 & 1 & z \\ 0 & 1 & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rr|l} 1 & 5 & x \\ 0 & 5 & x+y \\ 0 & -9 & z-2x \\ 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

on hem fet les transformacions $F_2\to F_2+F_1, F_3\to F_3-2F_1$.

A continuació,

$$\left(\begin{array}{rr|l} 1 & 5 & x \\ 0 & 5 & x+y \\ 0 & -9 & z-2x \\ 0 & 1 & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rr|l} 1 & 5 & x \\ 0 & 5 & x+y \\ 0 & 0 & -x+9y+5z \\ 0 & 0 & -x-y+5t \end{array}\right)$$

on hem fet la transformació $F_3\to 5F_3+9F_2, F_4\to 5F_4-F_2$. El sistema és doncs compatible si i només si

$$\begin{cases} -x+9y+5z=0 \\ -x-y+5t=0 \end{cases}$$

Per tant

$$\begin{aligned} E &= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4; -x+9y+5z=0, -x-y+5t=0\} \\ &= \left\{\left(x,y,\frac{x-9y}{5},\frac{x+y}{5}\right)\in\mathbb{R}^4; x,y\in\mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

Observem que

$$\left(x,y,\frac{x-9y}{5},\frac{x+y}{5}\right)=x\left(1,0,\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)+y\left(0,1,\frac{-9}{5},\frac{1}{5}\right)$$

de manera que també

$$E=\left\langle\left(1,0,\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right),\left(0,1,\frac{-9}{5},\frac{1}{5}\right)\right\rangle.$$

Diem que el sistema d'equacions $-x+9y+5z=0, -x-y+5t=0$ són les *equacions cartesianes* de E, ja que aquestes condicions caracteritzen els elements de E.

Exercici 1.9: En un espai afí de dimensió 4, trobeu la dimensió i una equació paramètrica de les subvarietats lineals donades, respecte d'una certa referència, per:

$$\begin{aligned} L &: \left\{ -2x+3y+4z+t = 5. \right. \\ M &: \begin{cases} x-y+2z-2t = 7, \\ 3x+z+t = 7, \\ x-y+5z+6t = 0, \\ -2x-y+z-3t = 0. \end{cases} \\ N &: \begin{cases} -2x+3y+4z+t = 5, \\ -x+4y+z-5t = 8. \end{cases} \end{aligned}$$

Estudieu $L\cap M$, $M\cap N$ i $M+N$.

Solució: Per a la primera part de l'exercici tant sols hem de resoldre els sistemes respectius.

Les solucions de L són $x = (1/2)(3y + 4z + t - 5)$ i per tant una equació paramètrica és

$$\begin{cases} x = (1/2)(3\lambda + 4\mu + \nu - 5) \\ y = \lambda \\ z = \mu \\ t = \nu \end{cases}$$

També és pot escriure com

$$L : (-5/2, 0, 0, 0) + \langle (3/2, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (1/2, 0, 0, 1) \rangle.$$

És doncs una subvarietat de dimensió 3.

Anàlogament, resolent els sistemes M i N (per exemple amb Wolfram Alpha) obtenim

$$M = P + [F] = (\frac{28}{9}, -\frac{77}{9}, -\frac{7}{3}, 0) + \langle (5, -61, -24, 9) \rangle$$

$$N = Q + [G] = (0, \frac{27}{13}, -\frac{4}{13}, 0) + \langle (13, 2, 5, 0), (0, 21, -19, 13) \rangle$$

Per calcular $L \cap M$, $M \cap N$ tant sols hem de resoldre els sistemes formats per les equacions de les dues subvarietats. Obtenim $L \cap M = \{\frac{1}{35}(80, 53, 57, -52)\}$, i $M \cap N = \emptyset$.

Per calcular $M + N$ recordem la fórmula

$$(P + [F]) + (Q + [G]) = P + [F + G + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle]$$

Com $\overrightarrow{PQ} = (-\frac{28}{9}, \frac{1244}{117}, \frac{79}{39}, 0)$ l'espai vectorial $F + G + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle$ és l'espai vectorial generat pel vectors generadors de F, de G, i $\overrightarrow{PQ}$. Com

$$\det \begin{pmatrix} 5 & -61 & -24 & 9 \\ 13 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 21 & -19 & 13 \\ -\frac{28}{9} & \frac{1244}{117} & \frac{79}{39} & 0 \end{pmatrix} = -17576 \neq 0$$

aquest vectors són linealment independents i per tant $M + N = \mathbb{R}^4$.

Observem que com $M \cap N = \emptyset$ la fórmula de Grassmann (teorema 1.14 de [2]) diu que

$$\dim(M + N) = \dim M + \dim N - \dim(F \cap G) + 1.$$

En el nostre cas hem obtingut

$$4 = 1 + 2 - \dim(F \cap G) + 1$$

d'on $\dim(F \cap G) = 0$ cosa fàcil de comprovar (els respectius vectors generadors són linealment independents).

Exercici 1.10: Siguin L_1 i L_2 les varietats lineals de l'espai afí $\mathbb{R}^4$ donades per

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(a + 3\lambda + 2\mu, 1 - \lambda - \mu, 4 + \lambda, 6 + 5\lambda + 2\mu);\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}, \\ L_2 &= \{(2 + \alpha + 2\beta, 1, 1 + \alpha + \beta, 3\alpha);\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Trobeu $a \in \mathbb{R}$ per tal que $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. Per aquest valor de a determineu $L_1 \cap L_2$ i $L_1 + L_2$.

Solució: Per calcular la intersecció és millor tenir les expressions de L_1 i L_2 en coordenades cartesianes. Per L_1 imposem

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 3 & 2 & x - a \\ -1 & -1 & y - 1 \\ 1 & 0 & z - 4 \\ 5 & 2 & t - 6 \end{pmatrix} = 2.$$

Esglaonant

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & x - a \\ 0 & -1 & 3y - 3 + x - a \\ 0 & -2 & 3z - 12 - x + a \\ 0 & -4 & 3t - 18 - 5x + 5a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & x - a \\ 0 & -1 & 3y - 3 + x - a \\ 0 & 0 & x + 2y - z + 2 - a \\ 0 & 0 & 3x + 4y - t + 2 - 3a \end{pmatrix}$$

Per tant les equacions de L_1 són

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z+2-a & = & 0 \\ 3x+4y-t+2-3a & = & 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

Per L_2 imposem

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & x-2 \\ 0 & 0 & y-1 \\ 1 & 1 & z-1 \\ 3 & 0 & t \end{pmatrix} = 2,$$

i obtenim

$$\left\{\begin{array}{rcl} -3x+6z-t & = & 0 \\ y & = & 1 \end{array}\right. \tag{2}$$

Per calcular $L_1 \cap L_2$ hem de resoldre el sistema format per les quatre equacions (1) i (2). Aquest sistema és incompatible a menys que $a = 6$. En aquest cas la solució és

$$x = 4 + \frac{t}{3}, \quad y = 1, \quad z = \frac{t+6}{3},$$

és a dir, en aquest cas $L_1 \cap L_2$ és la recta

$$(4,1,2,0) + \langle (1/3, 0, 1/3, 1) \rangle$$

Per calcular $L_1 + L_2$ (amb $a = 6$) posem $L_1 = P + [F] = (6,1,4,6) + \langle (3,-1,1,5),(2,-1,0,2) \rangle$ i $L_2 = Q + [G] = (2,1,1,0) + \langle (1,0,1,3),(2,0,1,0) \rangle$. Llavors

$$\begin{array}{rcl} L_1 + L_2 & = & P + [F + G + \langle (-4,0,-3,-6) \rangle] \\ & = & (6,1,4,6) + \\ & & \langle (3,-1,1,5),(2,-1,0,2),(1,0,1,3),(2,0,1,0),(-4,0,-3,-6) \rangle \end{array}$$

Per veure quin espai generen aquests vectors esglaonem la matriu que té per files les components d'aquests vectors. Obtenim

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -10 \\ 0 & -4 & -5 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 18 \\ 0 & 0 & -3 & -18 \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$L_1 + L_2 = (6,1,4,6) + \langle (3,-1,1,5),(0,-1,-2,-4),(0,0,3,18) \rangle$$

Notem que sabíem d'entrada que $\dim L_1 + L_2 = 2 + 2 - 1 = 3$.

Nota. Un segon mètode per passar d'equacions paramètriques en cartesianes Aquest mètode es basa en que $(F^\perp)^\perp = F$. Apliquem-ho a l'exemple anterior en que L_1 és una subvarietat lineal que passa per $(a,1,4,6)$ amb espai vectorial director generat per $\langle (3,-1,1,5),(2,-1,0,2) \rangle$.

Calculem $F^\perp$ resolent

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

obtenim que tota expressió de la forma

$$x(1,2,-1,0) + t(0,2,-3,1), \quad x, t \in \mathbb{R}$$

és solució, la qual cosa vol dir que $F^\perp = \langle (1,2,-1,0),(0,2,-3,1) \rangle$

Les equacions cartesianes buscades són

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-1 \\ z-4 \\ t-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

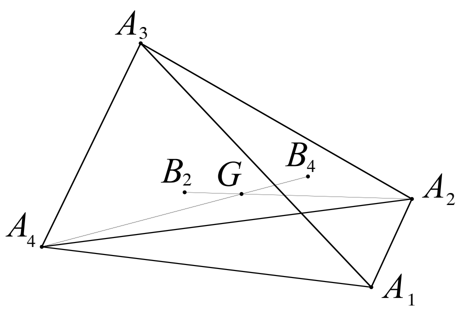
que donen les equacions

$$\begin{cases} x + 2y - z - a + 2 = 0 \\ 2y - 3z + t + 4 = 0 \end{cases}$$

quesón equivalents a les dues obtingudes per a L_1 anteriorment, equacions (1) (la segona allà és igual a 3 vegades la primera menys la segna aquí).

1.3 Baricentre. Raó simple

Exercici 1.11: Siguin $A_1, ..., A_n$ punts d'un espai afí. Demostreu que les rectes que uneixen cada punt A_i amb el baricentre B_i dels altres punts són concurrents (en el baricentre G del punts $A_1, ..., A_n$). Calculeu la raó simple (A_i, B_i, G).



Solució: Fem el cas $n = 4$. Prenem la referència afí amb origen A_1 i base $e_2 = \overrightarrow{A_1A_2}, e_3 = \overrightarrow{A_1A_3}, e_4 = \overrightarrow{A_1A_4}$. Tenim

$$\begin{aligned}
B_1 &= A_2 + \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_2}A_4) = A_1 + e_2 + \frac{1}{3}(-e_2 + e_3 - e_2 + e_4) \\
&= A_1 + \frac{1}{3}(e_2 + e_3 + e_4) \\
B_2 &= A_1 + \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_4}) = A_1 + \frac{1}{3}(e_3 + e_4) \\
B_3 &= A_1 + \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_4}) = A_1 + \frac{1}{3}(e_2 + e_4) \\
B_4 &= A_1 + \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3}) = A_1 + \frac{1}{3}(e_2 + e_3)
\end{aligned}$$

Recta A_1B_1: $A_1 + \lambda(e_2 + e_3 + e_4)$.
Recta A_2B_2: $A_2 + \mu(-e_2 + \frac{1}{3}(e_3 + e_4)) = A_1 + e_2 + \mu(-e_2 + \frac{1}{3}(e_3 + e_4))$.
Igualant obtenim

$$\lambda = \mu/3, \lambda = 1 - \mu,$$

i per tant $\lambda = 1/4, \mu = 3/4$ El punt d'intersecció és doncs

$$G = A_1 + \frac{1}{4}(e_2 + e_3 + e_4)$$

que és justament el baricentre de A_1, A_2, A_3, A_4.
Si en lloc de tallar A_1B_1 per A_2B_2 tallem per A_3B_3 o A_4B_4 el resultat és el mateix.
Finalment, com

$$\overrightarrow{A_1B_1} = (A_1, B_1, G)\overrightarrow{A_1G}$$

tenim

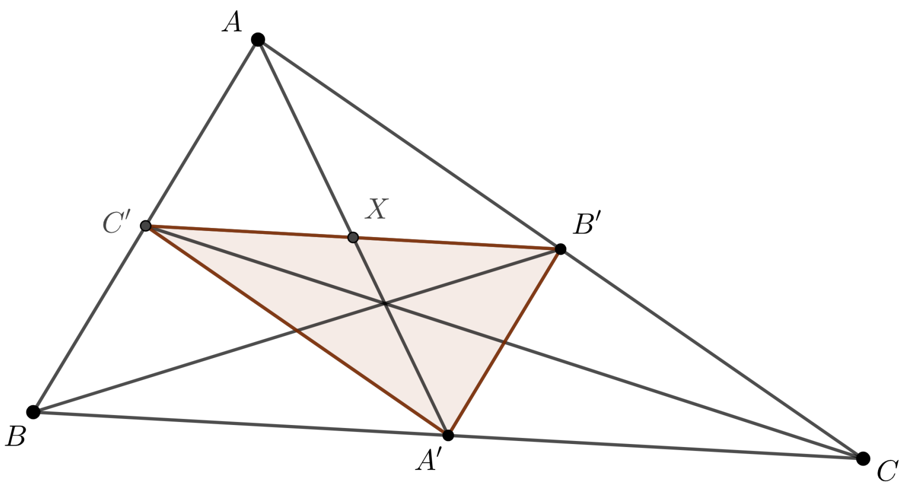
$$\frac{1}{3}(e_2+e_3+e_4) = (A_1, B_1, G)\frac{1}{4}(e_2+e_3+e_4)$$

i per tant

$$(A_1, B_1, G) = \frac{4}{3}$$

Exercici 1.12: Siguin A, B, C tres punts d'un espai afí de dimensió dos. Sigui C' el punt mitjà de A i B, A' el de B i C, i B' el de C i A. Demostreu que el baricentre de A, B i C és el mateix que el baricentre de A', B', C'.

Solució: *Sintètica.* Pel teorema de Tales les rectes BC i $C'B'$ són paral·leles. Sigui $X = AA' \cap C'B'$. La homotècia de centre A i raó 2 mostra que $2C'X = BA' = A'C = 2XB'$ i per tant X és el punt mitjà de $C'B'$. Així AA' és mitjana dels dos triangles. El mateix passa amb les altres dues mitjanes.



En coordenades. El baricentre de tres punts de coordenades $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ és

$$\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

(secció 1.12 de [2]). Com els punts mitjans tenen per coordenades les semisumes de les coordenades tenim que el baricentre dels punts mitjans és

$$\left(\frac{\frac{a_1+b_1}{2}+\frac{b_1+c_1}{2}+\frac{c_1+a_1}{2}}{3}, \frac{\frac{a_2+b_2}{2}+\frac{b_2+c_2}{2}+\frac{c_2+a_2}{2}}{3}\right) = \left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right).$$

Exercici 1.13 (Baricentre amb pesos)**:** Donats r punts P_i, $i = 1, \ldots, r$, d'un espai afí $\mathbb{A}$, es defineix el seu baricentre amb pesos per

$$\tilde{G} = P_1 + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{P_1P_i}, \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1.$$

Demostreu que per a tot punt $Q \in \mathbb{A}$ es compleix

$$\begin{aligned} Q + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{QP_i} &= \tilde{G}, \quad \text{i, per tant,} \\ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{\tilde{G}P_i} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Solució: Utilitzant que

$$\overrightarrow{QP_i} = \overrightarrow{QP_1} + \overrightarrow{P_1P_i}$$

tenim

$$\begin{aligned} Q+\sum_{i=1}^r \lambda_i\overrightarrow{QP_i} &= Q+\sum_{i=1}^r \lambda_i(\overrightarrow{QP_1}+\overrightarrow{P_1P_i}) \\ &= Q+(\sum_{i=1}^r \lambda_i)\overrightarrow{QP_1}+\sum_{i=1}^r \lambda_i\overrightarrow{P_1P_i}) \\ &= P_1+\sum_{i=1}^r \lambda_i\overrightarrow{P_1P_i}=\tilde{G}. \end{aligned}$$

Aplicant-ho ara a $Q=\tilde{G}$ tenim

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i\overrightarrow{\tilde{G}P_i}=0.$$

Nota. Recordem que si tenim r punts P_i i r escalars λ_i tals que $\lambda_1+\cdots+\lambda_r=1$ es defineix la *combinació afí* de $P_1,\ldots,P_r$ com el punt denotat $\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_rP_r$ i donat per

$$\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_rP_r=O+(\lambda_1\overrightarrow{OP_1}+\cdots+\lambda_r\overrightarrow{OP_r})$$

on O és qualsevol punt (justament a l'exercici es veu que aquesta definició no depèn de O). Observeu que l'expressió λP, amb λ un escalar i P un punt, no té sentit i l'expressió $\lambda P+\mu Q$, amb λ,μ escalars i P,Q punts tampoc té sentit, a menys que $\mu=1-\lambda$.

Per tant, el baricentre amb pesos λ_i, dels punts P_i, $i=1,\ldots,r$, és el punt

$$\tilde{G}=\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_rP_r, \quad \sum_{i=1}^r\lambda_i=1$$

Exercici 1.14: Donades les tres rectes del pla afí $\mathbb{R}^2$, d'equacions

$$3x+2y=1, \quad y=5, \quad 6x+y=-13,$$

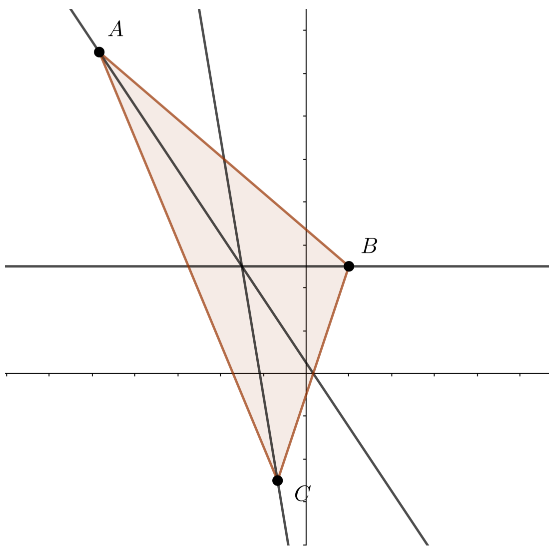
trobeu el triangle $\triangle ABC$ que té les seves mitjanes sobre aquestes rectes, el vèrtex A sobre la primera recta, i el punt $(1/3,0)$ com a punt mitjà del costat BC.

Solució: Posem $A=(a,\frac{1}{2}(1-3a))$, $B=(b,5)$, $C=(c,-6c-13)$. Per ser $(1/3,0)$ el punt mitjà de BC tenim

$$\frac{1}{3}=\frac{b+c}{2}, \quad 0=\frac{1}{2}(-6c-8)$$

Per tant, $b=2, c=-4/3$. Així $B=(2,5), C=(-4/3,-5)$ Observem que la recta $3x+2y=1$ és la mitjana relativa a A ja que passa per A i el punt mitjà $M=(1/3,0)$ entre B i C.

La mitjana relativa a B és una recta que passa per $(2,5)$ i el punt mitjà $N=((a-4/3)/2,-(3a+9)/4)$ entre A i C. Si volem que sigui la recta $y=5$ només hem d'agafar $a=-29/3$. I $A=(-29/3,15)$.



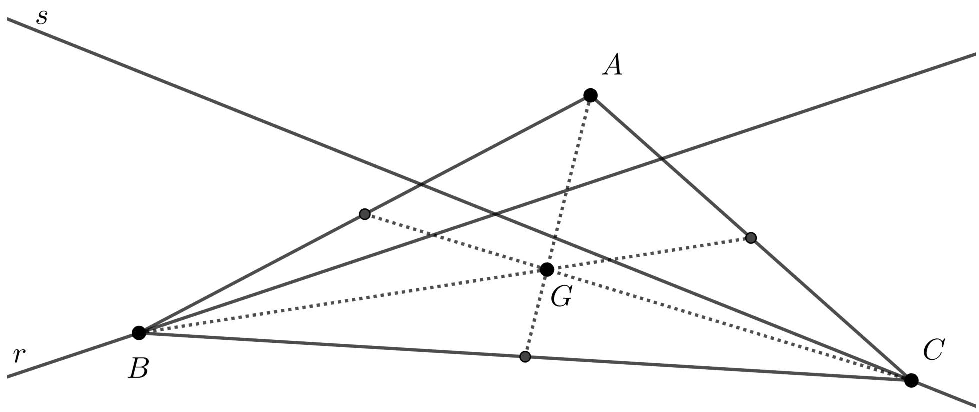
Ara podem comprovar que la mitjana que falta, la corresponent a C, és la recta $6x + y = -13$. En efecte, aquesta recta passa per C i pel punt mitjà $(-23/6, 10)$ de A i B.

Exercici 1.15: Considerem els punts $A = (2, 3)$, $G = (1, -1)$ i les rectes $r : x-3y+1 = 0$, $s : 2x+5y-1 = 0$, del pla afí $\mathbb{R}^2$. Determineu l'únic triangle que té A per un dels vèrtexs, G per baricentre i els dos vèrtexs restants un a cadascuna de les rectes r, s.

Solució: Els vèrtexs B i C tenen coordenades que es poden escriure com $B = (3b-1, b)$, $C = (c, \frac{1}{5}(1-2c))$.
Per definició de baricentre tenim que

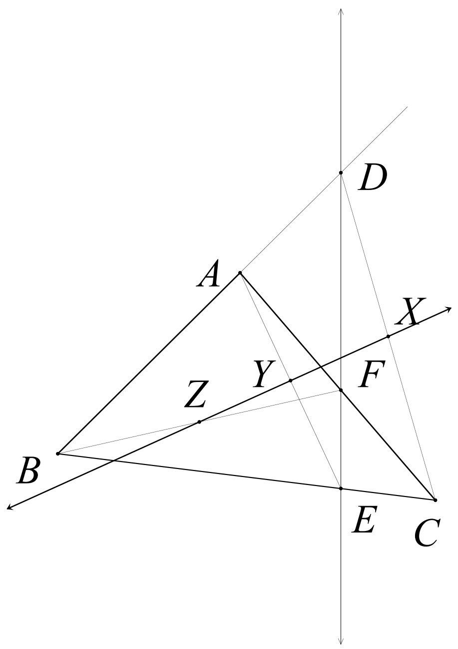
$$1 = \frac{2 + 3b - 1 + c}{3}, \quad -1 = \frac{3 + b + \frac{1}{5}(1 - 2c)}{3}$$

Per tant, $b = -27/11$, $c = 103/11$, és a dir $B = (-92/11, -27/11)$ i $C = (103/11, -39/11)$.



1.4 Algunes configuracions geomètriques

Exercici 1.16 (Recta de Gauss)**:** Una recta talla els costats AB, BC i AC del triangle $\triangle ABC$, respectivament en els punts D, E i F. Demostreu que els punts mitjans X, Y, Z, dels segments DC, AE i BF respectivament, estan alineats.



Solució: Prenem la referència afí $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ de manera que en coordenades tenim $A = (0,0), B = (1,0), C = (0,1), D = (d,0), F = (0,f), \quad d, f \in \mathbb{R}$. El punt E és el punt d'intersecció de les rectes FD i BC. Per tant, hem de trobar $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tals que

$$B + \lambda\overrightarrow{BC} = F + \mu\overrightarrow{FD},$$

que en coordenades és

$$1 + \lambda(-1) = \mu d, \quad \lambda = f + \mu(-f)$$

per tant $\lambda = f$, $\mu = \frac{1-f}{d-f}$ i així $E = \frac{1}{d-f}(d - df, fd - f)$. Els punts mitjans són

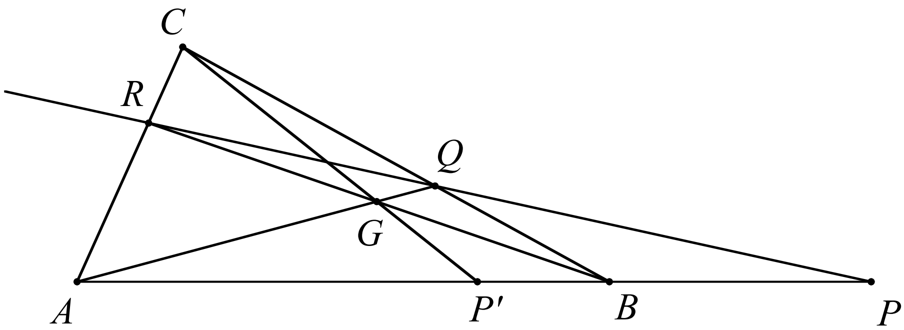
$$X = \frac{1}{2}(d,1), \quad Y = \frac{1}{2(d-f)}(d - df, fd - f), \quad Z = \frac{1}{2}(1,f)$$

i estan alineats ja que

$$\begin{vmatrix} d/2 & 1/2 & 1 \\ \frac{d-df}{2(d-f)} & \frac{fd-f}{2(d-f)} & 1 \\ 1/2 & f/2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercici 1.17: Considerem, en un pla afí real, un triangle $\triangle ABC$ i un punt P sobre la recta AB que no pertanyi al segment AB. Sigui l una recta per P que talli els segments AC i BC. Denotem per $R = l \cap AC$, $Q = l \cap BC$ i $G = BR \cap AQ$. Demostreu que el punt P', intersecció de les rectes CG i AB, no depèn de la recta l.

Indicació: Demostreu que $(P, A, B) = -(P', A, B)$.



Solució: Configuració central en geometria projectiva.

Primera solució. Prenem la referència afí $\{A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\}$ de manera que en coordenades tenim $A=(0,0), B=(1,0), C=(0,1), P=(p,0), R=(0,r)$. El punt $Q=(q,1-q)$ pertany a la recta PR i per tant

$$Q=P+\lambda(\overrightarrow{PR})$$

que en coordenades és

$$(q,1-q)=(p,0)+\lambda(-p,r)$$

és a dir,

$$\left\{\begin{array}{ccc} q & = & p-\lambda p \\ 1-q & = & \lambda r \end{array}\right.$$

Per tant $\lambda=\frac{1-p}{r-p}$ i així $Q=\frac{1}{r-p}(p(r-1),r(1-p))$.

Ara hem de trobar G com intersecció de les rectes AQ i BR. Posem

$$A+\lambda\overrightarrow{AQ}=B+\mu\overrightarrow{BR}$$

que en coordenades és

$$\lambda\frac{1}{r-p}(p(r-1),r(1-p))=(1,0)+\mu(-1,r)$$

és a dir

$$\left\{\begin{array}{ccc} \lambda\dfrac{p(r-1)}{r-p} & = & 1-\mu \\ \lambda\dfrac{r(1-p)}{r-p} & = & \mu r \end{array}\right.$$

d'on deduïm

$$\lambda=\frac{r-p}{p(r-2)+1},\qquad \mu=\frac{1-p}{p(r-2)+1}$$

i per tant

$$G=\frac{1}{p(r-2)+1}(p(r-1),r(1-p)).$$

Ara ja podem calcular $P'=(p',0)$ com intersecció de les rectes AB i CG. Directament en coordenades

$$(p',0)=(0,1)+\frac{\lambda(r-1)}{p(r-2)+1}(p,1-2p)$$

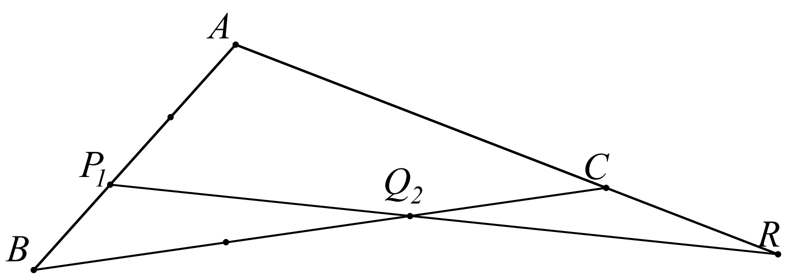
Deduïm $p'=p/(2p-1)$, que, com no depèn de r, ens diu que el punt P' és independent de la recta l que passi per P, com volíem demostrar.

*Segon mètode.*Pels teoremes de Menelau i Ceva tenim

$$\begin{array}{rcl}(P,A,B)(Q,B,C)(R,C,A) & = & 1 \\ (P'A,B)(Q,B,C)(R,C,A) & = & -1\end{array}$$

per tant $(P,A,B)=-(P',A,B)$ i hem acabat ja que el coneixement de la raó simple (P',A,B) caracteritza P' i aquesta raó simple només depèn de P (i A,B que estan sempre fixats).

Exercici 1.18: Donat un triangle $\triangle ABC$ del pla afí real, considerem els punts $P_1=A+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $P_2=A+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $Q_1=B+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $Q_2=B+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Calculeu (A,C,R), on R és el punt on el costat AC talla la recta P_1Q_2.



Solució: Prenem una referència afí amb origen B i base $e_1 = \overrightarrow{BP_1}, e_2 = \overrightarrow{BQ_2}$. Llavors $A = (3,0), C = (0,3/2)$. Per calcular les coordenades de R resolem

$$P_1 + \lambda\overrightarrow{P_1Q_2} = (1,0) + \lambda(-1,1) = A + \mu\overrightarrow{AC} = (3,0) + \mu(-3,3/2)$$

és a dir,

$$\begin{aligned} 1 - \lambda &= 3 - 3\mu \\ \lambda &= (3/2)\mu \end{aligned}$$

Per tant, $\lambda = 2, \mu = 4/3$.

Llavors $R = A + (4/3)\overrightarrow{AC} = (3,0) + (4/3)(-3,3/2) = (-1,2)$ Així, com

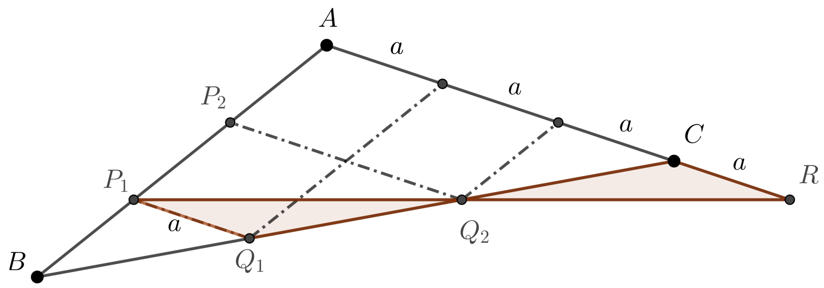
$$\overrightarrow{AC} = (A,C,R)\overrightarrow{AR}$$

tenim

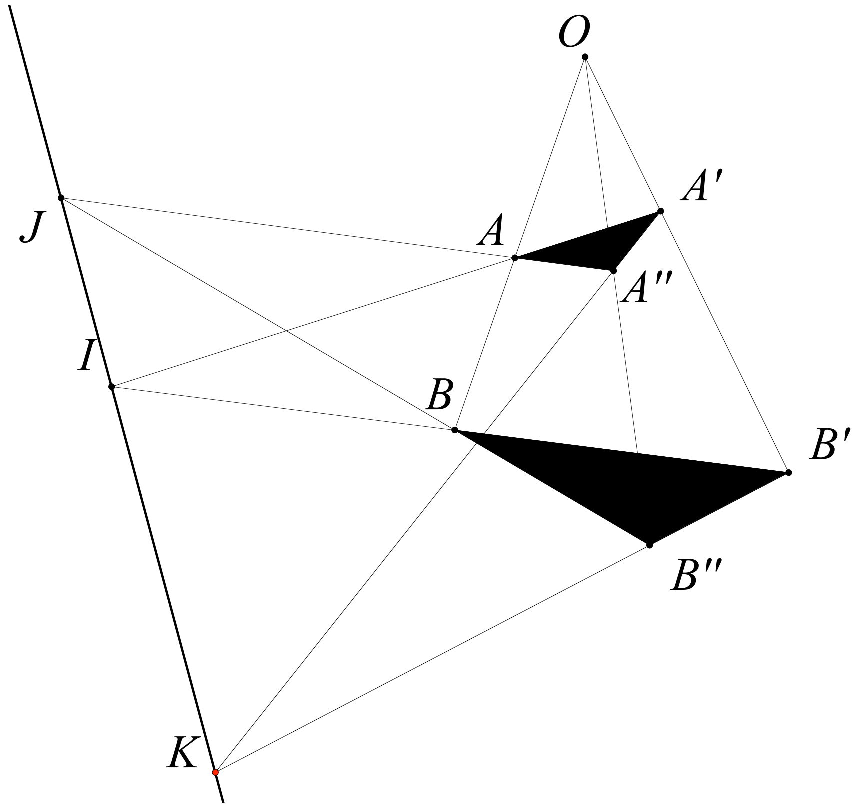
$$(-3,3/2) = (A,C,R)(-4,2)$$

i.e., $(A,C,R) = 3/4$.

Solució sintètica. Tracem les paral·leles a AB per Q_1 i Q_2 respectivament. Tallen AC és segments de la mateixa longitud $a = P_1Q_1$ ja que, per Tales, les rectes P_1Q_1, P_2Q_2 i AC són paral·leles. Els triangles CQ_2R i $P_1Q_1Q_2$ són iguals, i per tant $CR = P_1Q_1 = a$. Per tant $(A,C,R) = 3/4$.



Exercici 1.19 (Teorema de Desargues)**:** Siguin r, r', r'' rectes d'un espai afí concurrents en un punt O. Siguin $A, B \in r$, $A', B' \in r'$, $A'', B'' \in r''$ punts diferents entre si i diferents de O. Demostreu que si els punts $I = AA' \cap BB'$, $J = AA'' \cap BB''$, $K = A'A'' \cap B'B''$ existeixen, estan alineats.



Solució: Si les rectes OA, OA' i OA'' no estan en un pla el teorema és trivial. En efecte, tots tres punts I, J, K pertanyen als dos plans $AA'A''$ i $BB'B''$, ja que pertanyen a rectes d'aquests plans, i per tant pertanyen a la intersecció d'aquest plans i estan, doncs, alineats.

Si les rectes OA, OA' i OA'' estan en un pla prenem[2] la referència $\mathcal{R} = \{O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}\}$. Així $O = (0,0), A = (1,0), A' = (0,1), B = (b,0), B' = (0,b'), A'' = (p,q), B'' = (\lambda p, \lambda q)$.

Coordenades de I. Ha de ser

$$I = A' + t\overrightarrow{AA'} = B' + s\overrightarrow{B'B}$$

que en coordenades és

$$(0,1) + t(-1,1) = (0,b') + s(b,-b')$$

que implica $s = \frac{b'-1}{b'-b}, t = -sb$ i per tant $I = \frac{1}{b'-b}(b(b'-1), b'(1-b))$. Si $b = b'$ les rectes AA' i BB' són paral·leles i el punt I no estaria definit.

Coordenades de J. Ha de ser

$$J = A'' + t\overrightarrow{AA''} = B'' + s\overrightarrow{B''B}$$

que en coordenades és

$$(p,q) + t(p-1,q) = (\lambda p, \lambda q) + s(\lambda p - b, \lambda q)$$

que implica $s = \frac{\lambda-1}{b-\lambda}, t = bs$ i per tant $J = \frac{1}{b-\lambda}(p\lambda(b-1) + b(1-\lambda), \lambda q(b-1))$. Si $b = \lambda$ les rectes AA'' i BB'' són paral·leles i el punt J no estaria definit.

Coordenades de K. Ha de ser

$$K = A' + t\overrightarrow{A'A''} = B' + s\overrightarrow{B'B''}$$

que en coordenades és

$$(0,1) + t(p, q-1) = (0,b') + s(\lambda p, \lambda q - b')$$

que implica $s = \frac{b'-1}{b'-\lambda}, t = \lambda s$ i per tant $K = \frac{1}{b'-\lambda}(\lambda p(b'-1), q\lambda(b'-1) + b'(1-\lambda))$. Si $b' = \lambda$ les rectes $A'A''$ i $B'B''$ són paral·leles i el punt JK no estaria definit.

[2] Vegeu, per exemple llibre Aguadé, la relació entre plans no desarguesians i el poder agafar coordenades.

Com

$$\begin{vmatrix} b(b'-1) & b'(1-b) & b'-b \\ p\lambda(b-1)+b(1-\lambda) & q\lambda(b-1) & b-\lambda \\ \lambda p(b'-1) & q\lambda(b'-1)+b'(1-\lambda) & b'-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

I, J, K estan alineats.

Segon mètode.[3] Existeixen λ, μ, ν tals que

$$\begin{aligned} A+\lambda\overrightarrow{AB} &= O \\ A'+\mu\overrightarrow{A'B'} &= O \\ A''+\nu\overrightarrow{A''B''} &= O \end{aligned}$$

Igualant les dues primeres obtenim

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA'} &= \lambda\overrightarrow{AB}-\mu\overrightarrow{A'B'} = \lambda(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B})-\mu(\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{BB'}) \\ &= \lambda\overrightarrow{AA'}-\mu\overrightarrow{BB'}+(\lambda-\mu)\overrightarrow{A'B} \end{aligned}$$

d'on

$$\overrightarrow{A'B} = \frac{1-\lambda}{\lambda-\mu}\overrightarrow{AA'}+\frac{\mu}{\lambda-\mu}\overrightarrow{BB'}$$

que implica

$$B-\frac{\mu}{\lambda-\mu}\overrightarrow{BB'} = A'+\frac{1-\lambda}{\lambda-\mu}\overrightarrow{AA'}$$

Com el punt de l'esquerra d'aquesta igualtat pertany a la recta BB' i el de la dreta (que és igual) pertany a la recta AA', aquest és el punt I.

Per permutació circular obtenim

$$\begin{aligned} I &= A'+\frac{1-\lambda}{\lambda-\mu}\overrightarrow{AA'} \\ K &= A''+\frac{1-\mu}{\mu-\nu}\overrightarrow{A'A''} \\ J &= A+\frac{1-\nu}{\nu-\lambda}\overrightarrow{A''A} \end{aligned}$$

que escrits amb origen comú A són

$$\begin{aligned} I &= A+\frac{1-\mu}{\lambda-\mu}\overrightarrow{AA'} \\ K &= A+\overrightarrow{AA'}+\frac{1-\nu}{\mu-\nu}\overrightarrow{A'A''} \\ J &= A+\frac{1-\nu}{\nu-\lambda}\overrightarrow{A''A} \end{aligned}$$

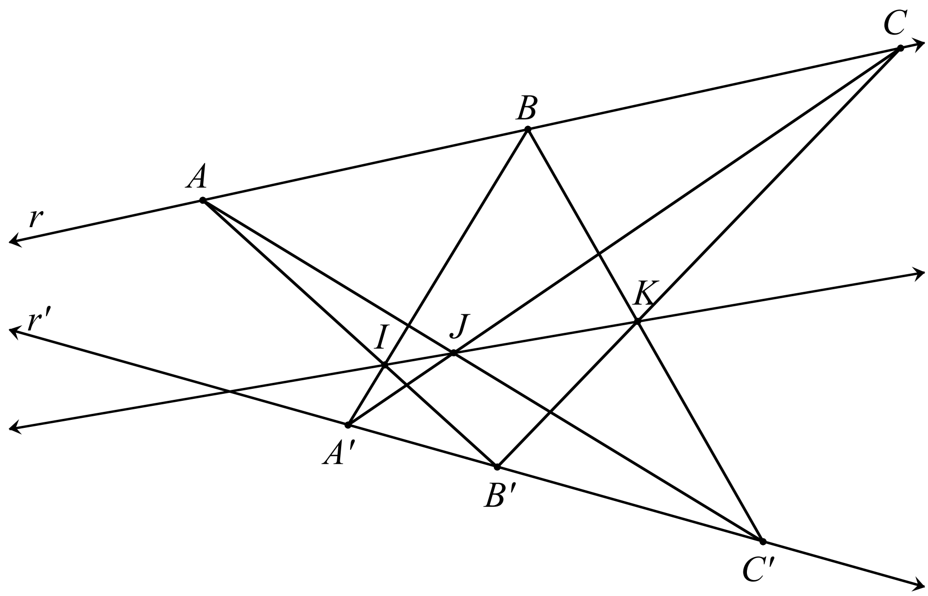
que podem escriure com

$$\begin{aligned} I &= A+u \\ K &= A+v \\ J &= A+w \end{aligned}$$

i aquest tres punts estan alineats ja que prenent $\rho = \frac{\nu-\lambda}{\mu-\nu}$ es compleix que $v-u = \rho(w-u)$.

Exercici 1.20 (Teorema de Pappus)**:** Siguin A, B, C punts d'una recta r i A', B', C' punts d'una altra recta r', en un espai afí. Demostreu que si els punts $I = AB'\cdot BA'$, $J = AC'\cdot A'C$, $K = BC'\cdot B'C$ existeixen, estan alineats.

[3] Hi ha moltes proves d'aquest teorema, vegeu notes Aguadé per demostrar-lo a partir de Pappus.



Solució: Suposem primerament que les rectes es tallen i agafem el punt d'intersecció com origen de coordenades. I com a base de la referència afí els vectors directors d'aquestes dues rectes. D'aquesta manera els punts són $A = (a, 0), B = (b, 0), C = (c, 0)$ i $A' = (0, a'), B' = (0, b'), C' = (0, c')$. Només ens cal calcular les coordenades del punt I ja que les de J i K sortiran per permutació circular.

La intersecció de les rectes AB' i $A'B$ s'obté escrivint

$$A + \lambda(-a, b') = A' + \mu(b, -a)$$

Obtenim

$$\lambda = \frac{a'(b-a)}{bb' - aa'}$$

i per tant

$$I = \frac{1}{bb' - aa'}(ab(b' - a'), a'b'(b - a))$$

Per permutació singular

$$J = \frac{1}{cc' - bb'}(bc(c' - b'), b'c'(c - b))$$

$$K = \frac{1}{aa' - cc'}(ca(a' - c'), c'a'(a - c))$$

Sabem que aquests punts estan alineats si el determinant format per les seves components amb una tercera columna de $1's$ és zero. Però (Wolfram Alpha o observar que la primera fila multiplicada per cc' més la segona fila multiplicada per aa' més la tercera multiplicada per bb' és igual a zero.)

$$\begin{vmatrix} ab(b' - a') & a'b'(b - a) & bb' - aa' \\ bc(c' - b') & b'c'(c - b) & cc' - bb' \\ ca(a' - c') & c'a'(a - c) & aa' - cc' \end{vmatrix} = 0.$$

Rectes paral·leles. Prenem l'origen en una d'elles i com base el vector director d'aquestes rectes més un segon vector determinat per un punt de la segona recta i l'origen. Així els punts són $A = (a, 0), B = (b, 0), C = (c, 0)$ i $A' = (a', 1), B' = (b', 1), C' = (c', 1)$. Només ens cal calcular les coordenades del punt I ja que les de J i K sortiran per permutació circular. La intersecció de les rectes AB' i $A'B$ s'obté escrivint

$$A + \lambda(b' - a, 1) = A' + \mu(b - a', -1)$$

Obtenim

$$\lambda = \frac{b - a}{b + b' - a - a'}$$

i per tant

$$I = \frac{1}{b + b' - a - a'}(bb' - aa', b - a)$$

Per permutació singular

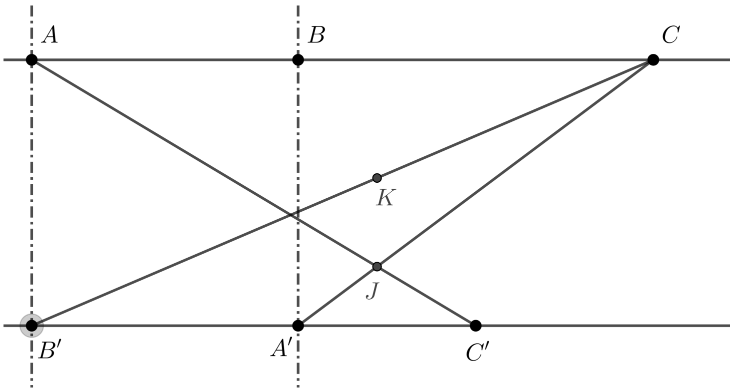
$$J = \frac{1}{c + c' - b - b'}(cc' - bb', c - b)$$

$$K = \frac{1}{a + a' - c - c'}(aa' - cc', a - c)$$

El determinant que controla si estan alineats és en aquest cas trivialment zero ja que les files sumen zero:

$$\begin{vmatrix} bb' - aa' & b - a & b + b' - a - a' \\ cc' - bb' & c - b & c + c' - b - b' \\ aa' - cc' & a - c & a + a' - c - c' \end{vmatrix} = 0.$$

Quan algun dels denominadors de l'expressió en coordenades de I, J, K s'anul·la vol dir que el corresponent punt no existeix i no estem en les hipòtesis de Pappus. A la figura podem pensar que I és el punt de l'infinit de la recta JK, paral·lela a AB' i $A'B$, però de moment no hem introduït el llenguatge projectiu



1.5 Afinitats

Exercici 1.21: Considereu l'afinitat f de l'espai afí $\mathbb{R}^3$ en l'espai afí $\mathbb{R}^2$ donada, respecte de les referències canòniques de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$, per

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Trobeu les equacions de f respecte de les referències $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ donades per

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \{(1,0,0); ((2,-1,0),(0,2,-1),(-1,0,2))\}, \\ \mathcal{R}_2 &= \{(2,1); ((1,1),(1,-1))\}. \end{aligned}$$

Solució: Utilitzarem la fórmula general del canvi de base per a una aplicació $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$

$$M(f, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = M(\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2')^{-1} M(f, \mathcal{R}_1', \mathcal{R}_2') M(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1')$$

amb $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1'$ referències de $\mathbb{A}_1$ i $\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2'$ referències de $\mathbb{A}_2$. (Proposició 2.22 de [2]). En el nostre cas prenem $\mathcal{R}_1' = \mathcal{C}_3$ (canònica de $\mathbb{R}^3$) i $\mathcal{R}_2' = \mathcal{C}_2$ (canònica de $\mathbb{R}^2$) Així

$$\begin{aligned} M(f, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) &= M(\mathcal{R}_2, \mathcal{C}_2)^{-1} M(f, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_2) M(\mathcal{R}_1, \mathcal{C}_3) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Equivalentment,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercici 1.22: Trobeu, a l'espai afí $\mathbb{R}^3$, les equacions de la simetria respecte de $L = (1,1,0) + [F]$ en la direcció G, en els casos següents:

1. $F = \langle (1,2,3), (0,0,1) \rangle$, $G = \langle (3,1,1) \rangle$.
2. $F = \langle (3,1,1) \rangle$, $G = \langle (1,2,3), (0,0,1) \rangle$.
3. $F = \{\vec{0}\}$.
4. $G = \{\vec{0}\}$.

Solució: Segons l'observació 2.37 de [2] la simetria respecte $L = P + [F]$ en la direcció G, en els casos en que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, està donada per

$$s_L(P + v) = P + v_1 - v_2, \quad v = v_1 + v_2,\ v_1 \in F, v_2 \in G.$$

1) En la referència $\mathcal{R} = \{(1,1,0); (1,2,3), (0,0,1), (3,1,1)\}$ tenim doncs

$$M(s_L, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Com sempre (Proposició 2.22 de [2])

$$\begin{aligned} M(s_L, \mathcal{C}) &= M(\mathcal{R}, \mathcal{C}) M(s_L, \mathcal{R}) M(\mathcal{R}, \mathcal{C})^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -7 & 6 & 0 & 6 \\ -4 & 7 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2) En la referència $\mathcal{R} = \{(1,1,0); (3,1,1), (1,2,3), (0,0,1)\}$ tenim doncs

$$M(s_L, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant

$$\begin{aligned} M(s_L, \mathcal{C}) &= M(\mathcal{R}, \mathcal{C}) M(s_L, \mathcal{R}) M(\mathcal{R}, \mathcal{C})^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & -6 & 0 & 4 \\ 4 & -7 & 0 & 8 \\ 4 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3) Es tracta de la simetria central respecte $P = (1,1,0)$. Per tant podem trobar les equacions directament imposant

$$\frac{(x,y,z)+(x',y',z')}{2} = (1,1,0)$$

d'on

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & 2-x \\ y' & = & 2-y \\ z' & = & -z \end{array}\right.$$

Òbviament es pot resoldre igualment seguint la tècnica dels apartats anteriors.

4) En aquest cas l'aplicació és la identitat.

Exercici 1.23: En un espai afí de dimensió 3 considerem les subvarietats lineals donades, respecte d'una certa referència $\mathcal{R}$, per

$$\begin{array}{rcl} L & = & \{(x,y,x); x+y+z=3, x-4y+2z=1\}, \\ M & = & \{(x,y,x); 2x-3y-z=1\}. \end{array}$$

Calculeu, respecte de $\mathcal{R}$, les equacions de la simetria respecte de L en la direcció donada per M, i les equacions de la simetria respecte de M en la direcció donada per L.

Solució: Recordem que si descomponem l'espai vectorial $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ i prenem un punt P la *simetria* s_L *respecte* $L = P + [F]$ *en la direcció* G *és l'aplicació donada per* $s_L(P+v) = P + v_1 - v_2$ *on* $v = v_1 + v_2$ *amb* $v_1 \in F$ *i* $v_2 \in G$. Clarament $s_L^2 = id$ que és la definició de simetria.

Primer observem que

$$\begin{array}{rcl} L & : & P+[F] = (0, \frac{5}{6}, \frac{13}{6}) + \langle (1, -\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}) \rangle \\ M & : & Q+[G] = (\frac{1}{2}, 0, 0) + \langle (\frac{3}{2}, 1, 0), (\frac{1}{2}, 0, 1) \rangle \end{array}$$

Primer mètode. Per qualsevol $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, escrivim

$$(a,b,c) = P + v = (0, \frac{5}{6}, \frac{13}{6}) + v$$

per tant $v = (a, b - \frac{5}{6}, c - \frac{13}{6})$ Ara descomponem v a

$$F \oplus G = \langle (1, -\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}) \rangle \oplus \langle (\frac{3}{2}, 1, 0), (\frac{1}{2}, 0, 1) \rangle$$

$$(a, b - \frac{5}{6}, c - \frac{13}{6}) = \alpha(1, -\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}) + \beta(\frac{3}{2}, 1, 0) + \gamma(\frac{1}{2}, 0, 1).$$

Obtenim

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \frac{1}{10}(6a - 9b - 3c + 14) \\ \beta & = & \frac{1}{20}(2a + 17b - c - 12) \\ \gamma & = & \frac{1}{4}(2a - 3b + 3c - 4) \end{array}$$

Així $v = v_1 + v_2$ amb $v_1 \in F$, $v_2 \in G$,

$$\begin{array}{rcl} v_1 & = & \frac{1}{10}(6a - 9b - 3c + 14)(1, -\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}) \\ v_2 & = & \frac{1}{20}(2a + 17b - c - 12)(3/2, 1, 0) \\ & + & \frac{1}{4}(2a - 3b + 3c - 4)(\frac{1}{2}, 0, 1) \end{array}$$

Així,

$$\begin{aligned} s_L(a,b,c) &= s_L(P+v) = (0,\frac{5}{6},\frac{13}{6}) + v_1 - v_2 \\ &= (\frac{1}{5}(a-9b-3c+14), \frac{1}{10}(-2a-7b+c+12), \frac{1}{2}(-2a+3b-c+4)) \end{aligned}$$

Segon mètode. Prenem la referència $\mathcal{R} = \{P; e_1, e_2, e_3\}$ amb

$$e_1 = (1, -\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}), \quad e_2 = (\frac{3}{2}, 1, 0), e_3 = (\frac{1}{2}, 0, 1)$$

Llavors

$$M(s_L, \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right)$$

Per tant

$$\begin{aligned} M(s_L, \mathcal{C}) &= M(\mathcal{R},\mathcal{C}) M(s_L,\mathcal{R}) M(\mathcal{R},\mathcal{C})^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 1 & 0 & 5/6 \\ -\frac{5}{6} & 0 & 1 & 13/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 1 & 0 & 5/6 \\ -\frac{5}{6} & 0 & 1 & 3/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & -18 & -6 & 28 \\ -2 & -7 & 1 & 12 \\ -10 & 15 & -5 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quan apliquem aquesta matriu a la matriu

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{pmatrix}$$

obtenim exactament la fórmula el valor de $s_L(a,b,c)$ que hem obtingut pel primer mètode.

Exercici 1.24: Demostreu que la imatge per una afinitat del baricentre de r punts és igual al baricentre de les imatges d'aquests punts. El mateix és cert per a baricentre amb pesos. Si una aplicació conserva els baricentres amb pesos, és una afinitat?

Solució: Recordem que la condició

$$\sum_{i=1}^{r} \overrightarrow{GP_i} = 0$$

caracteritza el baricentre dels r punts $P_1, \ldots, P_r$. Si denotem $\vec{f}$ l'aplicació lineal associada a l'afinitat f i recordem que $\vec{f}(\overrightarrow{GP_i}) = \overrightarrow{f(G)f(P_i)}$ només hem d'aplicar $\vec{f}$ a l'anterior equació i obtenim

$$\sum_{i=1}^{r} \overrightarrow{f(G)f(P_i)} = 0$$

i, per tant, $f(G)$ és el baricentre de $f(P_1), \ldots, f(P_r)$.

Per baricentre en pesos observeu que la condició de l'exercici 1.13 és també caracteritzant i es pot aplicar un argument igual a l'anterior.

La condició de l'enunciat, de que tenim una aplicació f que conserva els baricentres amb pesos, vol dir que la imatge del baricentre és el baricentre de les imatges, és a dir,

$$f(\tilde{G}) = \lambda_1 f(A_1) + \cdots + \lambda_r f(A_r), \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1.$$

En particular, quan $r = 2$, i recordant l'expressió de $\tilde{G}$ donada a la Nota de l'exercici 1.13, pàgina 11,

$$f(\lambda A + (1-\lambda)B) = \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B),$$

per tot $\lambda \in \mathbb{R}$ i per tota parella de punts $A, B \in \mathbb{A}$[4].

Per tant, elegint un punt arbitrari O tenim

$$f(O + \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB}) = f(O) + \lambda\overrightarrow{f(O)f(A)} + (1-\lambda)\overrightarrow{f(O)f(B)}, \tag{3}$$

[a l'esquerra hem agafat com punt auxiliar O i a la dreta $f(O)$, cosa que podem fer ja que sabem que aquesta expressió no depèn del punt.
]

Per veure que f és una afinitat el primer que necessitem és construir l'aplicació lineal associada.

Per cada $v \in E$ definim $\vec{f}(v) = \overrightarrow{f(O)f(O+v)}$.

En principi depèn de $O \in \mathbb{A}$. Clarament

$$f(O + v) = f(O) + \vec{f}(v).$$

Si $\vec{f}$ és lineal llavors aquesta igualtat és certa canviant O per qualsevol punt $Q \in \mathbb{A}$. En efecte

$$f(Q + w) = f(O + \overrightarrow{OQ} + w) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OQ}) + \vec{f}(w) = f(Q) + \vec{f}(w).$$

Per tant, només cal demostrar que $\vec{f}$ és lineal.

a) Volem veure que $\vec{f}(\lambda u) = \lambda\vec{f}(u)$, és a dir,

$$\overrightarrow{f(O)f(O+\lambda u)} = \lambda\overrightarrow{f(O)f(O+u)}. \tag{4}$$

Escrivim (3) amb $B = O$ i tenim

$$f(O + \lambda\overrightarrow{OA}) = f(O) + \lambda\overrightarrow{f(O)f(A)},$$

que posant $A = O + u$ dóna

$$f(O + \lambda u) = f(O) + \lambda\overrightarrow{f(O)f(O+u)},$$

que demostra (4).

b) Volem veure que $\vec{f}(u + v) = \vec{f}(u) + \vec{f}(v)$, és a dir,

$$\overrightarrow{f(O)f(O+u+v)} = \overrightarrow{f(O)f(O+u)} + \overrightarrow{f(O)f(O+v)} \tag{5}$$

Apliquem (3) amb $A = O + u, B = O + v$ i $\lambda = 1/2$ i tenim

$$f(O + (1/2)u + (1/2)v) = f(O) + \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{f(O)f(O+u)} + \overrightarrow{f(O)f(O+v)}\right]$$

Equivalentment

$$\overrightarrow{f(O)f(O+(1/2)(u+v))} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{f(O)f(O+u)} + \overrightarrow{f(O)f(O+v)}\right]$$

Aplicant la igualtat (4) a l'esquerra la igualtat (5) queda demostrada.

[4]Aquest curs prendrem aquesta propietat com definició d'afinitat

Exercici 1.25: Trobeu l'afinitat f de l'espai afí $\mathbb{R}^3$ que deixa el pla $\Pi : x + y = 1$ invariant, actuant en aquest pla com una translació de vector $v = (0, 0, 1)$, i tal que $f(1, 1, 0) = (0, 0, 0)$.

Solució: Sabem que una subvarietat $P + [F]$ és invariant per una afinitat f (d'aplicació lineal associada $\vec{f}$) si i només si $\overrightarrow{Pf(P)} \in F$ i $\vec{f}(F) \subset F$ (Proposició 2.24 de [2]).

Observem que Π es pot escriure com

$$P + [F] = (1, 0, 0) + \langle (1, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

Observem que el vector de translació $v = (0, 0, 1)$ és un vector de F.

La primera condició es complirà sempre ja que per hipòtesis (f és una translació sobre Π de vector v) ha de ser $\overrightarrow{Pf(P)} = (0, 0, 1) \in F$.

Per altra banda sabem $\vec{f}$ és la identitat sobre F. Per tant, ampliant la base de F a una base de $\mathbb{R}^3$, per exemple $\mathcal{B} = ((1, -1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0))$ la matriu de f respecte la referència $\mathcal{R} = \{(1, 0, 0); \mathcal{B}\}$ és

$$M(f, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 1 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per trobar la quarta columna hem escrit $\overrightarrow{Qf(Q)}$ amb $Q = (1, 0, 0)$ respecte la base de $\mathcal{R}$. És a dir,

$$(0, 0, 1) = \alpha(1, -1, 0) + \beta(0, 0, 1) + \gamma(1, 0, 0),$$

que implica òbviament $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0$.

Per la fórmula del canvi de base

$$\begin{aligned} M(f, \mathcal{C}) &= M(\mathcal{R}, \mathcal{C}) M(f, \mathcal{R}) M(\mathcal{R}, \mathcal{C})^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M(f, \mathcal{R}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} a + c & a + c - 1 & 0 & -a - c + 1 \\ -a & 1 - a & 0 & a \\ b & b & 1 & 1 - b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

I ara imposem

$$M(f, \mathcal{C}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que implica $a = 1, b = -1, c = -1$, per tant

$$M(f, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.6 Afinitats del pla.

Exercici 1.26: a) Construïu totes les afinitats del pla afí $\mathbb{R}^2$ que deixen invariant la figura formada per un punt P i una recta r tal que $P \notin r$.

b) Doneu, en el pla afí $\mathbb{R}^2$, l'expressió de totes les afinitats f tals que $f(P) = P$ i $f(r) = r$ quan $P = (1, 0)$ i $r : y - x = 0$.

Solució: a) Sigui e_1 el vector director de la recta. Ampliem a una base de $\mathbb{R}^2$, (e_1, e_2), i prenem la referència $\mathcal{R} = \{P; e_1, e_2\}$. Llavors

$$M(f, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Perquè aquesta afinitat f així definida estigui en les hipòtesis de l'exercici falta imposar la condició $\overrightarrow{Qf(Q)} = \lambda e_1$, per algun $\lambda \in \mathbb{R}$, i $Q \in r$. Com $f(Q) = (aq_1 + bq_2, cq_2)$ aquest condició implica $c = 1$. Per tant, les afinitats buscades són les donades per

$$M(f, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

o equivalentment, i respecte $\mathcal{R}$,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & ax + by \\ y' & = & y \end{array} \right.$$

b) En aquest cas el vector director de la recta és $e_1 = (1, 1)$ (sempre determinat llevat d'escalars). Per tant podem aplicar l'apartat anterior amb

$$\mathcal{R} = \{(1, 0); (1, 1), (p, q)\}, \quad p \neq q,$$

i, per la fórmula del canvi de base

$$\begin{array}{rcl} M(f, \mathcal{C}) & = & M(\mathcal{R}, \mathcal{C}) M(f, \mathcal{R}) M(\mathcal{R}, \mathcal{C})^{-1} \\ & = & \dfrac{1}{(q-p)^2} \begin{pmatrix} aq - b - p & -ap + b + p & -aq + b + p + 1 \\ aq - b - q & -ap + b + q & -aq + b + q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Qualsevol afinitat que s'escrigui d'aquesta manera amb a, b, p, q arbitraris, amb $p \neq q$ té $P = (1, 0)$ com punt fix i $y = x$ com recta invariant.

Exercici 1.27: Proveu que, en un pla afí, donades dues rectes r, s que es tallen i un punt P que no pertany a cap de les dues, i donada una altra configuració anàloga, és a dir, dues rectes r', s' que es tallen i un punt P' que no pertany a cap de les dues, existeix una única afinitat f tal que $f(r) = r'$, $f(s) = s'$ i $f(P) = P'$. Trobeu aquesta afinitat, en el pla afí $\mathbb{R}^2$, quan

$$\begin{array}{rrclrrclrcl} r: & x - y & = & 2, & s: & x - 2y & = & -1, & P & = & (0, 0); \\ r': & x & = & 4, & s': & x - y & = & 1, & P' & = & (1, 2). \end{array}$$

Solució: Utilitzarem la fórmula

$$M(f, \mathcal{C}) = M(\mathcal{R}', \mathcal{C}) M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') M(\mathcal{R}, \mathcal{C})^{-1} \tag{6}$$

(Proposició 2.2.6 de [2]). Prenem $\mathcal{R} = \{P; e_1, e_2\}$ on e_1 i e_2 són els vectors directors de les dues primeres rectes i $\mathcal{R}' = \{P'; e_1', e_2'\}$ on e_1' i e_2' són els vectors directors de les dues segones rectes. D'aquesta manera la matriu de qualsevol afinitat f que compleixi les condicions de l'enunciat és de la forma

$$M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Quan ara imposem que el punt Q intersecció de les dues primeres rectes vagi al punt Q' intersecció de les dues segones obtenim

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda q_1 & = & q_1' \\ \mu q_2 & = & q_2' \end{array} \right.$$

on (q_1, q_2) són les coordenades de Q respecte $\mathcal{R}$ i (q_1', q_2') són les coordenades de Q' respecte $\mathcal{R}'$ (per tant fixades). Aquestes equacions determinen de manera única λ i μ i per tant, la primera part de l'exercici queda demostrada.

A l'exemple concret que ens donen les referències són

$$\mathcal{R} = \{(0,0);(1,1),(2,1)\}, \quad \mathcal{R}' = \{(1,2);(0,1),(1,1)\}$$

Els punts d'intersecció Q, Q' respecte la base canònica són $Q = (5,3)$ i $Q' = (4,3)$. Les coordenades de Q respecte $\mathcal{R}$ són

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = M(\mathcal{R}, \mathcal{C}) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i les coordenades de Q' respecte $\mathcal{R}'$ són

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = M(\mathcal{R}', \mathcal{C}) \begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per tant

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i.e., $q_1 = 1$, $q_2 = 2$. I

$$\begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i.e., $q'_1 = -2, q'_2 = 3$. Per tant $\lambda = q'_1/q_1 = -2, \mu = q'_2/q_2 = 3/2$.

Per tant, segons hem vist més amunt

$$M(f, \mathcal{R}, \mathcal{R}') = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I així, per (6)

$$M(f, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 7 & -11 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercici 1.28: a) Calculeu, respecte de la referència canònica del pla afí $\mathbb{R}^2$, les equacions d'una homotècia de centre $(2,3)$ i raó -1.

b) Raoneu si és cert o no que la imatge d'una recta que no passa pel centre d'homotècia és una altra recta paral·lela a l'anterior.

c) Trobeu una homotècia tal que la composició d'ella amb l'homotècia de l'apartat a) sigui una translació i doneu el vector d'aquesta translació.

Solució: a) El punt (x,y) té per imatge el punt (x',y') tal que

$$(x',y') - (2,3) = -[(x,y) - (2,3)]$$

per tant

$$\begin{cases} x' &= -x + 4 \\ y' &= -y + 6 \end{cases}$$

o equivalentment $h_{(2,3),-1}(x,y) = -(x,y) + (4,6)$.

b) Sigui r una recta que no passa pel centre d'homotècia. Diguem h a aquesta homotècia. Si $r \cap h(r) \neq \emptyset$ hi hauria un punt $P \in r$ amb $P = h(Q), Q \in r$. La recta $Qh(Q)$ sempre passa pel centre d'homotècia, però aquesta és la recta r cosa que no pot ser.

c) L'aplicació lineal associada a la composició d'afinitats és la composició de les aplicacions lineals d'aquestes afinitats (que són múltiples de la identitat). Per tant al compondre dues homotècies tenim un altra homotècia de raó el producte d'homotècies o una translació si aquest producte és 1. Per tant, l'homotècia que busquem té raó $\frac{1}{-1} = -1$.

Prenem per exemple $H = h_{(a,b),-1}$ la homotècia de centre (a,b) i raó -1. Llavors $H(x,y) - (a,b) = (-1)((x,y) - (a,b))$ per tant

$$H(x,y) = -(x,y) + 2(a,b)$$

Llavors

$$[h_{(2,3),-1} \circ H](x,y) = h_{(2,3),-1}(-(x,y) + 2(a,b)) = (x,y) - 2(a,b) + (4,6)$$

que és una translació de vector $-2(a,b) + (4,6)$.

Exercici 1.29: Estudieu les afinitats de l'espai afí $\mathbb{R}^2$ que preserven la hipèrbola $xy = 1$.

Solució: Si les equacions són

$$\begin{array}{rcl} x' & = & ax + by + p \\ y' & = & cx + dy + q \end{array}$$

s'ha de complir

$$x'y' = acx^2 + ad + axq + bc + bdy^2 + qby + pcx + pdy + pq = 1,$$

equivalentment

$$acx^4 + adx^2 + ax^3q + bcx^2 + bd + qbx + pcx^3 + pdx + pqx^2 = x^2,$$

igualtat que ha de ser certa per tot x la qual cosa implica

$$\begin{array}{rcl} ac & = & 0 \\ aq + pc & = & 0 \\ ad + bc + pq - 1 & = & 0 \\ qb + pd & = & 0 \\ bd & = & 0 \end{array}$$

La primera i última equacions donen lloc als quatre casos següents.

Primer cas $a = b = 0$.

$$\begin{array}{rcl} pc & = & 0 \\ pq - 1 & = & 0 \\ pd & = & 0 \end{array}$$

que implica $c = d = 0$ i $pq = 1$ que és l'aplicació constant

$$\begin{array}{rcl} x' & = & p \\ y' & = & 1/p \end{array} \tag{7}$$

Segon cas $a = d = 0$.

$$\begin{array}{rcl} pc & = & 0 \\ bc + pq - 1 & = & 0 \\ qb & = & 0 \end{array}$$

que dóna només dues possibilitats: $p = q = 0$ amb $bc = 1$ i $c = b = 0$ amb $pq = 1$. Es tracta de les afinitats

$$\begin{array}{rcl} x' & = & by \\ y' & = & (1/b)x \end{array}$$

i l'aplicació constant (7).

Tercer cas $c = b = 0$.

$$\begin{array}{rcl} aq & = & 0 \\ ad + pq - 1 & = & 0 \\ pd & = & 0 \end{array}$$

que dóna només dues possibilitats: $p = q = 0$ amb $ad = 1$ i $a = d = 0$ amb $pq = 1$. Es tracta de les afinitats

$$\begin{array}{rcl} x' & = & ax \\ y' & = & (1/a)y \end{array}$$

i l'aplicació constant (7).

Quart cas $c = d = 0$.

$$\begin{array}{rcl} aq & = & 0 \\ pq - 1 & = & 0 \\ qb & = & 0 \end{array}$$

que dóna només una possibilitat: $a = b = 0$ amb $pq = 1$ que torna a ser l'aplicació constant (7).

Exercici 1.30: a) Trobeu, respecte de la referència canònica de l'espai afí $\mathbb{R}^2$, les equacions d'una afinitat que porti els punts $A = (0,0), B = (1,0)$, $C = (0,1)$, respectivament, sobre els punts B, C, A. Qui és la imatge, per aquesta afinitat, del baricentre del triangle $\triangle ABC$?

b) Trobeu, respecte de la referència canònica de l'espai afí $\mathbb{R}^2$, les equacions d'una afinitat que porti els punts $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$, respectivament, sobre els punts B, C, A. Qui és la imatge, per aquesta afinitat, del baricentre del triangle $\triangle ABC$?

Solució: Considerem la referència $\mathcal{R} = \{A; u = \overrightarrow{AB}, v = \overrightarrow{AC}\}$. Com $f(A) = B$ i

$$\begin{array}{rcl} \vec{f}(u) & = & \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -u + v \\ \vec{f}(v) & = & \overrightarrow{f(A)f(C)} = \overrightarrow{BA} = -u, \end{array}$$

la matriu de l'afinitat en aquesta referència és

$$M(f;\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$\begin{array}{rcl} M(f,\mathcal{C}) & = & M(\mathcal{R},\mathcal{C})M(f,\mathcal{R})M(\mathcal{R},\mathcal{C})^{-1} \\ & = & \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 & a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 & a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ & = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

amb

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{(c_2-a_2)(c_1-b_1)+(a_1-b_1)(a_2-b_2)}{\Delta} \\
a_{12} &= \frac{(a_1-c_1)(c_1-b_1)+(a_1-b_1)(b_1-a_1)}{\Delta} \\
a_{13} &= \frac{(a_2c_1-a_1c_2)(c_1-b_1)+(a_1-b_1)(a_1b_2-a_2b_1)}{\Delta}+b_1 \\
a_{21} &= \frac{(c_2-a_2)(c_2-b_2)+(a_2-b_2)^2}{\Delta} \\
a_{22} &= \frac{(a_1-c_1)(c_2-b_2)+(b_1-a_1)(a_2-b_2)}{\Delta} \\
a_{23} &= \frac{(a_2c_1-a_1c_2)(c_2-b_2)+(a_2-b_2)(a_1b_2-a_2b_1)}{\Delta}+b_2
\end{aligned}$$

on $\Delta = (b_1-a_1)(c_2-a_2)-(c_1-a_1)(b_2-a_2)$

El baricentre queda fix.

En el cas particular de la primera part del problema tenim $b_1 = c_2 = 1$ i $a_1 = a_2 = b_2 = c_1 = 0$ que substituint dóna

$$M(f,\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.7 Classificació d'afinitats

Exercici 1.31: Demostreu que la composició d'una homologia especial[5] d'eix e amb una homotècia de centre $O \in e$ és una afinitat parabòlica.

Solució: Sigui h_e una homologia especial d'eix e. Sabem que podem agafar una referència $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2\}$ amb e_2 vector director de l'eix de l'homologia e (recta de punts fixos) i $O \in e$, on

$$M(h_e,\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Respecte aquesta base la homotècia de centre O i raó λ és

$$M(H_{O,\lambda},\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Així

$$M(H_\lambda \circ h_e,\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per veure que aquesta composició és una afinitat parabòlica hem de veure que té *un únic punt fix i una única recta invariant* (a la qual pertany el punt fix). Secció 3.9 de [2].

Punts fixos. Són punts (x,y) solucions de

$$\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Suposarem $\lambda \neq 1$ ja que si $\lambda = 1$ l'homotècia es redueix a la identitat (i l'enunciat no seria correcte).

[5] Una homologia especial és una afinitat que té una recta de punts fixos, l'eix de l'homologia, i tal que totes les rectes paral.leles a l'eix són invariants. Vegeu secció 3.9 de [2].

Per tant $x = 0 = y$, és a dir hi ha un únic punt fix, el $(0,0)$. Ara falta veure que hi ha una única recta invariant.

L'únic vector propi de $\vec{f}$ és e_2, per tant les candidates a rectes invariants són rectes de la forma $P+\langle e_2\rangle$ tals que $\overrightarrow{Pf(P)} = \mu e_2$ (Proposició 2.25 de [2]). Si posem $P = (a,b)$ les coordenades de $\overrightarrow{Pf(P)}$ són

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda-1)a \\ \lambda a + (\lambda-1)b \\ 0 \end{pmatrix}$$

i perquè tingui la direcció de e_2 ha de ser $a = 0$. Per tant P és qualsevol punt de la recta $x = 0$ i la recta $P + \langle e_2\rangle$ és la única invariant. Els seus punts no són fixos, excepte el $(0,0)$.

Nota: observeu que no hi ha cap afinitat amb un únic punt fix i una única recta invariant que no el contingui.

Exercici 1.32: Classifiqueu l'afinitat f del pla afí $\mathbb{R}^2$ donada per

$$\begin{cases} x' = x - \frac{1}{8}y - \frac{1}{8}, \\ y' = 2x - \frac{1}{8}. \end{cases}$$

Determineu els punts fixos, les rectes invariants, i una referència $\mathcal{R}$ respecte de la qual $M(f,\mathcal{R})$ sigui l'expressió canònica de f.

Solució: Per trobar punts fixos resolem

$$\begin{cases} x = x - \frac{1}{8}y - \frac{1}{8}, \\ y = 2x - \frac{1}{8}. \end{cases}$$

i trobem $P = (-7/16, -1)$. L'únic valor propi de

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

és $1/2$ que dóna lloc al vector propi $v = (1,4)$. Aquesta és la direcció de les rectes invariants, si n'hi han. Mirem si trobem un punt P tal que $\overrightarrow{Pf(P)} = \lambda v$. Equivalentment

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/8 & -1/8 \\ 2 & -1 & -1/8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que, eliminant λ ens dóna la recta $2x - (1/2)y + 3/8 = 0$, (que conté el punt fix).

Com té un únic punt fix i una única recta invariant és una afinitat parabòlica.

Prenem la referència $\mathcal{R} = \{P; u, v\}$ on u és en principi qualsevol vector linealment independent amb v.

Llavors

$$M(f,\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Com el determinant i la traça són invariants ha de ser $1/4 = a/2$, $1 = a + 1/2$ és a dir $a = 1/2$. I ara canviem v per bv que continua sent un vector propi de valor propi $1/2$ i respecte $\mathcal{R}' = \{P; u, bv\}$ tenim

$$M(f,\mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Expressió canònica d'una afinitat parabòlica (vegeu la taula 3.3 de [2]).

Exercici 1.33: Classifiqueu, en cada cas, l'afinitat f d'un pla afí real $\mathbb{A}$, donada, respecte d'una certa referència $\mathcal{R}$, per

$$a)\begin{cases} x' = 4y+1, \\ y' = -x+4y+1. \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x' = 2x+9y+12, \\ y' = x+4y+4. \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y+\frac{11}{2}, \\ y' = \frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{7}{2}. \end{cases} \qquad d)\begin{cases} x' = 2x-y-2, \\ y' = 3y+2. \end{cases}$$

$$e)\begin{cases} x' = \frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y-1, \\ y' = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+1. \end{cases} \qquad f)\begin{cases} x' = x-3y+3, \\ y' = x-2y+2. \end{cases}$$

Determineu, en cada cas, els punts fixos, les rectes invariants, i una referència $\mathcal{R}'$ respecte de la qual $M(f,\mathcal{R}')$ sigui l'expressió canònica de f.

Solució: a) *Punts fixos.* Resolem

$$\begin{cases} x = 4y+1, \\ y = -x+4y+1. \end{cases}$$

i obtenim un únic punt fix $P=(1,0)$.

Rectes invariants. El polinomi característic de la matriu de la part lineal és $(x-2)^2$, de manera que només tenim un valor propi, $\lambda = 2$. El vector propi corresponent és $u=(2,1)$. Per saber si hi ha rectes invariants busquem $X=(x,y)$ tal que $\overrightarrow{Xf(X)} = \mu u$. Equivalentment

$$\begin{cases} 4y+1-x = 2\mu \\ -x+3y+1 = \mu \end{cases}$$

d'on $-x+2y+1=0$, i aquesta és per tant la recta invariant. En la referència $\mathcal{R} = \{(1,0);((0,1),(2,1))\}$ ($(0,1)$ qualsevol linealment independent amb $(2,1)$) tenim

$$M(f,\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per la invariància de la traça ha de ser $a=2$, i canviant $(2,1)$ per $b(2,1)$ tenim l'expressió canònica de les afinitats parabòliques

$$M(f,\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) *Punts fixos.* Resolem

$$\begin{cases} x = 2x+9y+12, \\ y = x+4y+4. \end{cases}$$

i obtenim $P=(0,-4/3)$.

Rectes invariants. El polinomi característic de la matriu de la part lineal és x^2-6x-1 de manera que tenim els valors propis $\lambda = 3+\sqrt{10}$, $\mu = 3-\sqrt{10}$, amb vectors propis respectius $u=(9,1+\sqrt{10})$, $v=(9,1-\sqrt{10})$. En la referència $\mathcal{R}=\{P;u,v\}$ tenim

$$M(f,\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 3+\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3-\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que és una afinitat hiperbòlica (un punt fix i dues rectes invariants).

c) *Punts fixos.* El sistema

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y+\frac{11}{2}, \\ y = \frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{7}{2}. \end{cases}$$

és incompatible i per tant no hi ha punts fixos.

Rectes invariants. Els valors propis de la part lineal són $\lambda = 1$, amb vector propi $u = (1, 1)$, i $\mu = -2$, amb vector propi $v = (1, -1)$.

Rectes invariants de direcció u. Busquem punts $X = (x, y)$ tals que $\overrightarrow{Xf(X)} = \lambda u$. En coordenades,

$$\begin{aligned} -(3/2)x + (3/2)y + 11/2 &= \lambda \\ (3/2)x - (3/2)y - 7/2 &= \lambda \end{aligned}$$

que dóna $x - y - 3 = 0$, que és la recta invariant de direcció u.

Quan apliquem el mateix procediment per trobar rectes invariants de direcció v arriem a un sistema incompatible, de manera que no hi ha rectes invariants de direcció v.

Amb aquests coneixements (sense punts fixos i una recta invariant) ja podem dir que es tracte d'una homologia general seguida de translació. Vegeu la taula 3.3 de [2].

Prenem com referència canònica $\mathcal{R}$ la formada per un punt de la recta invariant, per exemple $O = (3, 0)$, i com base (v, u) (en aquest ordre).

Observem que $f(O) = (4, 1)$ però per escriure la matriu de f en la nova referència necessitem escriure aquest punt en la nova base, és a dir hem de resoldre el sistema

$$(4, 1) - (3, 0) = \alpha(1, -1) + \beta(1, 1)$$

i obtenim $\alpha = 0, \beta = 1$. Així,

$$M(f, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d), e) f) left to the reader.

Exercici 1.34: Classifiqueu les afinitats f_a del pla afí $\mathbb{R}^2$ donades, respecte de la referència canònica, per

$$\begin{cases} x' = ax + y + a, \\ y' = x + ay + a. \end{cases}$$

Determineu, en cada cas, els punts fixos, les rectes invariants, i una referència $\mathcal{R}_a$ respecte de la qual $M(f_a, \mathcal{R}_a)$ sigui l'expressió canònica de f.

Determineu el lloc geomètric de les imatges d'un punt donat per totes aquestes afinitats. És a dir, estudieu el conjunt $\{f_a(P); a \in \mathbb{R}\}$ per a cada punt donat $P \in \mathbb{R}^2$.

Solució: Per trobar els punts fixos resolem

$$\begin{cases} x = ax + y + a, \\ y = x + ay + a. \end{cases}$$

Trobem tres casos (el determinant de la matriu associada al sistema és $a(a - 2)$).

Primer cas. $a = 0$. Llavors tenim una recta de punts fixos, la recta $y = x$.

En aquest cas la matriu de la part lineal és

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que admet el valor propi 1, amb vector propi $u = (1, 1)$, i el valor propi -1 amb vector propi $v = (1, -1)$.

Rectes invariants de direcció u. Busquem P tal que $\overrightarrow{Pf(P)} = \lambda u$, és a dir,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i obtenim $\lambda = 0$ i $x = y$. Aquesta és, com ja sabíem, la recta de punts fixos.

Rectes invariants de direcció v. Busquem P tal que $\overrightarrow{Pf(P)} = \lambda v$, és a dir,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i obtenim $-x+y=\lambda$. Això vol dir que per qualsevol punt P la recta que hi passa amb direcció v és invariant.

Tenim doncs una recta de punts fixos i rectes invariants no paral·leles a la recta fixa. Segons la taula 3.3 de [2] es tracta d'una homologia general. Prenem $\mathcal{R}'=\{(0,0);v,u\}$ i tenim

$$M(f,\mathcal{R}')=\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

que és l'expressió canònica d'una homologia general.

Segon cas. $a=2$. En aquest cas també tenim una recta de punts fixos, la recta $y=-x-2$.
En aquest cas la matriu de la part lineal és

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

que admet el valor propi 1, amb vector propi $u=(1,-1)$, i el valor propi 3 amb vector propi $v=(1,1)$.

Rectes invariants de direcció u. Busquem P tal que $\overrightarrow{Pf(P)}=\lambda u$, és a dir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i obtenim $\lambda=0$ i $x+y+2=0$ com recta de punts fixos, cosa que ja sabíem.

Rectes invariants de direcció v. Busquem P tal que $\overrightarrow{Pf(P)}=\lambda v$, és a dir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i obtenim $x+y+2=\lambda$. Això vol dir que per qualsevol punt P la recta que hi passa amb direcció v és invariant. Es tracta novament d'una homologia general. Prenem $\mathcal{R}'=\{(-2,0);v,u\}$ i tenim

$$M(f,\mathcal{R}')=\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

que és l'expressió canònica d'una homologia general.

Tercer cas. $a\neq 0, a\neq 2$. Tenim un punt fix $P=(-1,-1)$. La matriu de la part lineal és

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

que admet el valor propi $\lambda=a+1$ amb vector propi $u=(1,1)$ i el valor propi $\mu=a-1$ amb vector propi $v=(1,-1)$.

Rectes invariants de direcció u. Busquem P tal que $\overrightarrow{Pf(P)}=\lambda u$, és a dir,

$$\begin{pmatrix} a-1 & 1 & a \\ 1 & a-1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i obtenim $x=y$.

Rectes invariants de direcció v. Busquem P tal que $\overrightarrow{Pf(P)}=\lambda u$, és a dir,

$$\begin{pmatrix} a-1 & 1 & a \\ 1 & a-1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i obtenim $x+y+2=0$.

Com tenim un punt fix i dues rectes invariants ja sabem (taula 3.3 de [2]) que es tracte d'una afinitat hiperbòlica. Prenem $\mathcal{R}' = \{(-1,-1); u, v\}$ i tenim

$$M(f, \mathcal{R}') = \left(\begin{array}{cc|c} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

que és l'expressió canònica d'una afinitat hiperbòlica. Recordeu que s'ha de complir $a+1, a-1 \neq 1, a+1 \neq a-1$.

Finalment, l'òrbita de $P = (p_1, p_2)$ és el conjunt de punts del pla que es poden escriure com

$$(ap_1 + p_2 + a, p_1 + ap_2 + a) = (p_2, p_1) + a(p_1 + 1, p_2 + 1).$$

Es tracta doncs de la recta que passa pel punt (p_2, p_1) amb vector director $(p_1 + 1, p_2 + 1)$.

Exercici 1.35: Classifiqueu les afinitats f_a del pla afí $\mathbb{R}^2$ donades, respecte de la referència canònica, per

$$\begin{cases} x' = (1+a)x - ay + 1, \\ y' = a^2x + (1 + 2a - 4a^2 + a^3)y, \end{cases}$$

que no tenen punts fixos. Determineu les rectes invariants, i una referència $\mathcal{R}_a$ respecte de la qual $M(f, \mathcal{R})$ sigui l'expressió canònica de f.

Determineu el lloc geomètric de les imatges d'un punt donat per totes aquestes afinitats. És a dir, estudieu el conjunt $\{f_a(P); a \in \mathbb{R}\}$ per a cada punt donat $P \in \mathbb{R}^2$.

Solució: Si busquem els punts fixos obtenim

$$x = -\frac{a^2 - 4a + 2}{a(a-1)(a-2)}, \quad y = \frac{1}{(a-1)(a-2)}$$

Pe tant l'exercici ens demana estudiar l'afinitat donada en els casos $a = 0, 1, 2$.

Cas $a = 0$

$$\begin{cases} x' = x + 1, \\ y' = y, \end{cases}$$

que és una translació de mòdul 1 en la direcció $(1, 0)$. Ja està donada en forma canònica. Les rectes $y = c$ són invariants.

Cas $a = 1$

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 1, \\ y' = x, \end{cases}$$

La matriu de la part lineal és

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que admet el valor propi $\lambda = 1$ (amb multiplicitat 2), amb vector propi $v = (1, 1)$.

Rectes invariants de direcció u. Busquem P tal que $\overrightarrow{Pf(P)} = \mu u$, és a dir,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i veiem que aquest sistema és incompatible.

La taula 3.3 de [2] ens diu que estem davant d'una homologia especial seguida de translació.

Respecte la referència $\mathcal{R} = \{(0,0); (u, v)\}$ on u és qualsevol vector linealment independent amb v, tenim

$$M(f, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

però com la traça ha de ser 3 tenim

$$M(f,\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalment si volem l'expressió canònica canviem v per bv i tenim

$$M(f,\mathcal{R}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Cas $a = 2$ En aquest cas

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y + 1, \\ y' = 4x - 3y, \end{cases}$$

Els valors propis de la part lineal són $\lambda = 1$ amb vector propi $u = (1,1)$, i $\mu = -1$ amb vector propi $v = (1,2)$.

Rectes invariants de direcció u. Busquem P tal que $\overrightarrow{Pf(P)} = \mu u$, és a dir,

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenim $2x - 2y - 1 = 0$. Com té la direcció de v és la única recta invariant d'aquesta direcció.

Rectes invariants de direcció v. Busquem P tal que $\overrightarrow{Pf(P)} = \mu u$, és a dir,

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistema incompatible i per tant no tenim rectes invariants en aquesta direcció. Per la taula 3.3 de [2] sabem que es tracte d'una homologia general seguida de translació.

Respecte la referència $\mathcal{R} = \{(1/2, 0); (v, u)\}$ tenim

$$M(f,\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Canviant ara u per $2u$ tenim l'expressió canònica

$$M(f,\mathcal{R}) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Finalment l'òrbita de $P = (p_1, p_2)$ és el conjunt

$$(x,y) = ((1+a)p_1 - ap_2 + 1, a^2 p_1 + (1 + 2a - 4a^2 + a^3)p_2)$$

Si $p_1 = p_2$ l'òrbita de P està continguda en la recta $x = p_1 + 1$.

Si $p_1 \neq p_2$ podem posar

$$a = \frac{x - 1 - p_1}{p_1 - p_2}$$

i substituint aquesta expressió a $y = a^2 p_1 + (1 + 2a - 4a^2 + a^3)p_2$ obtenim una cúbica $y = y(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ (si $p_2 \neq 0$).

Per exemple si $P = (1,0)$, $a = x - 2$, i obtenim la paràbola $y = (x-2)^2$.

Si $P = (0,1)$, $a = 1 - x$, i per tant $y = (1 + 2(1-x) - 4(1-x)^2 + (1-x)^3)$.

Afinitat	*Característiques*	*Equació*
$\mathcal{E}(b,c)$	**El·líptica** Únic punt fix. No rectes invariants. $\rho = 0$.	$x' = -cy, \quad b^2 < 4c,$ $y' = x - by.$
$\mathcal{H}(a,b)$	**Hiperbòlica** Únic punt fix. Dues rectes invariants. $\rho = 0$.	$x' = ax, \quad a, b \neq 1,$ $y' = by, \quad a \neq b.$
$h(a)$	**Homotècia** Infinites rectes invariants. Únic punt fix. $\rho = 0$.	$x' = ax, \quad a \neq 1,$ $y' = ay.$
$\mathcal{P}(a)$	**Parabòlica** Únic punt fix. Una recta invariant. $\rho = 0$.	$x' = ax, \qquad a \neq 1,$ $y' = x + ay.$
$h_g(a)$	**Homologia general** Rectes inv. no $\parallel$ a la fixa. Recta punts fixos. $\rho = 0$.	$x' = ax, \quad a \neq 1,$ $y' = y.$
$Th_g(a)$	**Hom. gen. seguida de trans.** Una recta invariant. Cap punt fix. $\rho = 1$.	$x' = ax, \qquad a \neq 1,$ $y' = y + 1.$
h_e	**Homologia especial** Rectes inv. $\parallel$ a la fixa. Recta punts fixos. $\rho = 0$.	$x' = x,$ $y' = x + y.$
Th_e	**Hom. esp. seguida de trans.** Cap recta invariant. Cap punt fix. $\rho = 2$.	$x' = x + 1,$ $y' = x + y.$
T	**Translació** $\rho = 1$.	$x' = x,$ $y' = y + 1.$
id	**Identitat** $\rho = 0$.	$x' = x,$ $y' = y.$

Referències

[1] Agustí Reventós, *Geometria Projectiva*, Materials UAB, n. 85, 2000.

[2] ———, *Affine Maps, Euclidean Motions and Quadrics*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2011, traducció de *Afinitats, Moviments i Quàdriques*, Manuals UAB, Vol. 50, 2008.

2 Geometria Euclidiana

2.1 Distància entre subvarietats. Volum

Exercici 2.1: Calculeu la distància entre les subvarietats lineals L_1 i L_2 de l'espai afí euclidià $\mathbb{R}^3$ donades per

$$L_1 : \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 2, \\ z = 3. \end{cases} \qquad L_2 : \begin{cases} x = 0, \\ z = 2y. \end{cases}$$

Trobeu punts $P \in L_1$ i $Q \in L_2$ tals que $d(P, Q) = d(L_1, L_2)$.

Solució: Primer escrivim

$$\begin{cases} L_1 : P + [F] = (1, 2, 3) + \langle(1, 0, 0)\rangle \\ L_2 : Q + [G] = (0, 0, 0) + \langle(0, 1, 2)\rangle \end{cases}$$

Calculem l'ortogonal de $F + G$ i obtenim $(F + G)^\perp = (0, 2, -1)$ i descomponem

$$\overrightarrow{QP} = (1, 2, 3) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 2) + \gamma(0, 2, -1)$$

i obtenim $\alpha = 1, \beta = \frac{8}{5}, \gamma = \frac{1}{5}$, per tant $d(L_1, L_2) = \|\gamma(0, 2, -1)\| = \frac{1}{5}\sqrt{5}$.

Per trobar el punts que realitzen la distància mínima aprofitem l'expressió anterior de $\overrightarrow{QP}$ i tenim

$$P - Q = (1, 0, 0) + \frac{8}{5}(0, 1, 2) + \frac{1}{5}(0, 2, -1)$$

i obtenim

$$P - (1, 0, 0) = Q + \frac{8}{5}(0, 1, 2) + \text{part normal}$$

per tant els punts buscats són

$$(0, 2, 3) \in L_1 \quad \text{i} \quad \frac{8}{5}(0, 1, 2) \in L_2.$$

Exercici 2.2: Siguin

$$L_1 : \begin{cases} x + y + z = 2, \\ x - y + z = 1. \end{cases} \qquad L_2 : \begin{cases} x = 2\lambda + \mu, \\ y = 3 + 2\lambda + 2\mu, \\ z = 4 + 3\lambda + 2\mu. \end{cases}$$

dues varietats lineals de l'espai afí euclidià $\mathbb{R}^3$.

a) Calculeu la distància d'un punt arbitrari $P = (a, b, c)$ a cadascuna de les varietats L_1 i L_2.

b) Trobeu la recta que passa per P i talla L_1 i la recta $x = z = 0$.

Solució: a) El primer que necessitem és conéixer els subespais directors de L_1 i L_2. Resolent els sistema homogeni

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

obtenim $y = 0, x = -z$ de manera que els subespai vectorial G_1 associat a L_1 és $G_1 = \{(x, 0, -x) \in \mathbb{R}^3\}$ o equivalentment $G_1 = \langle(1, 0, -1)\rangle$

El subespai vectorial G_2 generador de L_2 està donat directament en les equacions de L_2 i és

$$G_2 = \langle(2, 2, 3), (1, 2, 2)\rangle.$$

Per calcular la distància entre P i L_i, $i = 1, 2$, seguint la secció 5.3 de [2], descomponem $\mathbb{R}^3$ com sum directa

$$\mathbb{R}^3 = (F + G_i) \oplus (F + G_i)^\perp = G_i \oplus G_i^\perp$$

ja que, en aquest cas, $F = \{0\}$

És fàcil trobar bases de $G_i^\perp$. Per exemple podem posar

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 &= G_1 + G_1^\perp = \langle(1,0,-1)\rangle + \langle(0,1,0),(1,0,1)\rangle \\ \mathbb{R}^3 &= G_2 + G_2^\perp = \langle(2,2,3),(1,2,2)\rangle + \langle(2,1,-2)\rangle\end{aligned}$$

Ara prenem punts arbitraris $Q_i \in L_i$, per exemple $Q_1 = (3/2, 1/2, 0)$ i $Q_2 = (0,3,4)$, i descomponem $\overrightarrow{PQ_i}$ a $G_i \oplus G_i^\perp$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ_1} &= (3/2-a, 1/2-b, c) = \lambda(1,0,-1) + \mu(0,1,0) + \nu(1,0,1) \\ \overrightarrow{PQ_2} &= (-a, 3-b, 4-c) = \bar\lambda(2,2,3) + \bar\mu(1,2,2) + \bar\nu(2,1,-2)\end{aligned}$$

Resolent aquests sistemes obtenim

$$\lambda = \frac{1}{4}(-2a-2c+3), \quad \mu = \frac{1}{2} - b, \quad \nu = \frac{1}{4}(-2a+2c+3)$$

en el primer cas i

$$\bar\lambda = \frac{1}{3}(-2a+2b-c-2), \quad \bar\mu = \frac{1}{9}(7a-10b+2c+22), \quad \bar\nu = \frac{1}{9}(-2a-b+2c-5)$$

en el segon.

Per tant,

$$d(P, L_1) = \|\mu(0,1,0) + \nu(1,0,1)\| = \|(\nu,\mu,\nu)\| = \sqrt{\mu^2 + 2\nu^2}$$

$$d(P, L_2) = \|\bar\nu(2,1,-2)\| = 3|\bar\nu|.$$

Per exemple si $P = (0,0,0)$, $d(P, L_1) = \sqrt{(1/2)^2 + 2(3/4)^2} = \sqrt{22}/4$ i $d(P, L_2) = 5/3$.

b) Trobem primer l'equació del pla que conté P i L_1. La recta PQ_1, $Q_1 \in L_1$ ha d'estar en aquest pla que tindrà, doncs, equació

$$\Pi : P + \langle \overrightarrow{PQ_1}, (1,0,-1)\rangle$$

Prenent $Q_1 = (3/2, 1/2, 0)$ els punts de Π són

$$(x,y,z) = (a,b,c) + \lambda(3/2-a, 1/2-b, -c) + \mu(1,0,-1)$$

i ara hem de tallar aquest pla amb la recta $x = z = 0$, és a dir, ha de ser

$$\left\{\begin{array}{rcl} a + \lambda((3/2)-a) + \mu &=& 0. \\ c - \lambda c - \mu &=& 0 \end{array}\right.$$

Resolent obtenim

$$\lambda = \frac{2(a+c)}{2a+2c-3}, \quad \mu = -\frac{3c}{2a+2c-3}.$$

I el punt de tall és doncs

$$R = (0, b + (1/2-b)\frac{2(a+c)}{2a+2c-3}, 0)$$

Així la recta demanada és la recta PR,

$$(a,b,c) + \lambda(-a, b + (1/2-b)\frac{2(a+c)}{2a+2c-3} - b, -c)$$

Observem que si $2a+2c-3 = 0$ aquesta recta demanada no existeix. Aquesta situació es dóna quan P pertany al pla $2x+2z-3=0$, però aquest pla conté també la recta L_1 i és clar doncs que qualsevol recta per P que talli L_1 està totalment continguda en aquest pla i no pot tallar $x = z = 0$. Si $P \in L_1$ (Π no estaria definit) llavors qualsevol recta per P que talli l'eix de les y és solució.

Exercici 2.3: Sigui $\mathbb{A}$ l'espai afí $\mathbb{R}^3$ considerat com a espai afí euclidià amb el producte escalar donat, respecte de la base canònica de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$, per la matriu

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Trobeu la distància del punt $P = (-1, 1, -2)$ al pla que passa pels punts $A = (1, -1, 1)$, $B = (-2, 1, 3)$ i $C = (4, -5, -2)$.

Solució: Seguim el mètode explicat a la secció 5.3 de [2]. Primer calculem l'equació vectorial del pla.

$$A + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = A + \langle (-3, 2, 2), (3, -4, -3) \rangle.$$

A continuació descomponem $\mathbb{R}^3$ com suma directe d'aquest subespai i del seu ortogonal. Hem de trobar, doncs, (x, y, z) tal que

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

i

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

Resolent obtenim

$$\mathbb{R}^3 = \langle (-3, 2, 2), (3, -4, -3) \rangle \oplus \langle (5, -17, 8) \rangle$$

Ara descomponem $\overrightarrow{PA} = (2, -2, 3)$ en aquest suma directa i posant

$$(2, -2, 3) = \lambda(-3, 2, 2) + \mu(3, -4, -3) + \nu(5, -17, 8)$$

obtenim $\nu = 28/109$. La distància buscada és

$$d = \| \frac{28}{109} (5, -17, 8) \|$$

Per calcular aquesta norma fem

$$\begin{pmatrix} 5 & -17 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -17 \\ 8 \end{pmatrix} = 436$$

i per tant

$$d(P, \Pi) = \frac{28}{109} \sqrt{436}.$$

Exercici 2.4: A l'espai afí euclidià $\mathbb{R}^4$, calculeu la distància entre el pla

$$\Pi : \begin{cases} x - t - 2 = 0, \\ y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

i la recta

$$r : \begin{cases} x - z - 2 = 0, \\ y - t + 1 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Trobeu punts $P \in \Pi$ i $Q \in r$ tals que $d(P, Q) = d(\Pi, r)$.

Solució: Seguirem el mètode explicat a la secció 5.4 de [2]. Primerament escrivim

$$\begin{aligned} \Pi : P + [F] &= (2, 0, 2, 0) + \langle (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1) \rangle \\ r : Q + [G] &= (0, 0, -2, 1) + \langle (1, 0, 1, 0) \rangle \end{aligned}$$

Clarament

$$F+G=\langle(0,1,1,0),(1,0,0,1),(1,0,1,0)\rangle, \quad (F+G)^{\perp}=(-1,-1,1,1)$$

A continuació escrivim $\overrightarrow{PQ}$ a $(F+G)\oplus(F+G)^{\perp}$. Posem

$$(-2,0,-4,1)=\alpha(0,1,1,0)+\beta(1,0,0,1)+\gamma(1,0,1,0)+\delta(-1,-1,1,1)$$

i obtenim $\alpha=-1/4, \beta=5/4, \gamma=-7/2, \delta=-1/4$

Llavors

$$d(\Pi,r)=|\delta|\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2+1^2}=\frac{1}{2}.$$

I el càlcul anterior permet saber que els punts buscats són (notació de secció 5.4 de [2])

$$\begin{aligned} X &= P+u_1=(2,0,2,0)-\frac{1}{4}(0,1,1,0)+(5/4)(1,0,0,1)=\frac{1}{4}(13,-1,7,5) \\ Y &= Q-u_2=(0,0,-2,1)+\frac{7}{2}(1,0,1,0)=\frac{1}{2}(7,0,3,2) \end{aligned}$$

És una comprovació veure que efectivament $d(X,Y)=\frac{1}{2}=d(\Pi,r)$.

Exercici 2.5: a) Siguin $u_1,\dots u_k$ vectors de $\mathbb{R}^n$, $k\le n$. Demostreu que el volum del paral·lelepiped generat per $u_1,\dots u_k$ és l'arrel quadrada del determinant de la matriu de Gram.

b) Calculeu l'àrea del paral·lelogram de $\mathbb{R}^4$ determinat pels vectors $u=(3,4,0,1), v=(1,2,0,0)$.

Solució: a) Sabem que el determinant de k vectors en un espai vectorial de dimensió k és el volum del paral·lelepíped que generen. Prenem $(e_1,\dots e_k)$ una base ortonormal a $\langle u_1,\dots u_k\rangle$.

Tindrem

$$u_i=\sum_{l=1}^{k}\langle u_i,e_l\rangle e_l$$

Així l'entrada ij de la matriu de Gram G és

$$G_{ij}=\langle u_i,u_j\rangle=\sum_{l=1}^{k}\langle u_i,e_l\rangle\langle u_j,e_l\rangle=(B^tB)_{ij}$$

on B és la matriu $k\times k$ donada per

$$B_{ij}=\langle u_j,e_i\rangle$$

Per tant

$$\det G=(\det B)^2,$$

o equivalentment (observeu que $\det B$ és el volum del paral·lelepiped buscat)

$$\text{Volum}=\sqrt{\det G}$$

Observem finalment que la matriu de Gram es pot escriure com

$$A^tA$$

on A és la matriu de k files i n columnes formada posant a cada fila les components de u_k respecte una base ortonormal, en general la canònica de $\mathbb{R}^n$.

Tenim, doncs,

$$\text{Volum}=\sqrt{\det(A^*A)}.$$

b)

Primer mètode. Trobem una base ortonormal al subespai F generat per u i v. Prenem

$$e_1=\frac{u}{|u|}=\frac{1}{\sqrt{26}}(3,4,0,1)$$

i

$$e_2 = \frac{v - \langle v, e_1\rangle e_1}{|v - \langle v, e_1\rangle e_1|} = \frac{1}{\sqrt{234}}(-7, 8, 0, -11).$$

Ara calculem el determinant de la matriu que apareix en escriure u i v respecte aquesta base. Resolent el sistema

$$\begin{aligned} u &= xe_1 + ye_2 \\ v &= ze_1 + te_2 \end{aligned}$$

és a dir

$$\begin{aligned} (3,4,0,1) &= x(3,4,0,1)\frac{1}{\sqrt{26}} + y(-7,8,0,-11)\frac{1}{\sqrt{234}} \\ (1,2,0,0) &= z(3,4,0,1)\frac{1}{\sqrt{26}} + t(-7,8,0,-11)\frac{1}{\sqrt{234}} \end{aligned}$$

Obtenim

$$x = \sqrt{26}, y = 0, z = \frac{11}{\sqrt{26}}, t = \frac{3}{\sqrt{26}}.$$

Observeu que aquest càlcul és molt fàcil ja que $x = \langle u, e_1\rangle, y = \langle u, e_2\rangle, z = \langle v, e_1\rangle, t = \langle v, e_2\rangle$. Per tant,

$$\text{Àrea paral·lelogram} = \det \begin{pmatrix} \sqrt{26} & 1 \\ 0 & \dfrac{3}{\sqrt{26}} \end{pmatrix} = 3.$$

Segon mètode. La matriu de Gram (matriu dels productes escalars) és

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 11 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Àrea paral·lelogram} = \sqrt{\det G} = 3.$$

Exercici 2.6: Sigui E l'espai vectorial dels polinomis reals de grau ≤ 2. Per a tot parell $p(x), q(x) \in E$ definim

$$\varphi(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x)\, dx.$$

a) Demostreu que φ és un producte escalar a E.

b) Trobeu una base del subespai ortogonal al polinomi $2x + 1$.

c) Apliqueu el procés d'ortonormalització de Gram-Schmidt a la base $1, x, x^2$ per obtenir una base ortonormal.

d) Trobeu la projecció ortogonal del vector x^2 sobre el subespai generat per $1, x$.

Solució: a) Fàcil.

b) El polinomi $ax^2 + bx + c$ pertany a $\langle 2x + 1\rangle^\perp$ si

$$\int_0^1 (ax^2 + bx + c)(2x + 1)dx = 0$$

d'on $11a + 7b + 6c = 0$, i per tant una base d'quest subespai està formada per exemple pels polinomis $p(x) = 6x^2 - 11, q(x) = 6x - 7$.

c) Denotem $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2$.

Com e_1 ja te norma 1 prenem $e_1' = e_1$. A continuació prenem

$$e_2' = \frac{e_2 - \langle e_1, e_2\rangle e_1}{\|e_2 - \langle e_1, e_2\rangle e_1\|}$$

El producte escaler de e_1 amb e_2 val

$$\langle e_1, e_2\rangle = \int_0^1 x\, dx = 1/2.$$

I

$$\|x-1/2\|^2 = \int_0^1 (x^2 + (1/4) - x)\,dx = 1/12$$

per tant $e_2' = \sqrt{3}(2x-1)$.

A continuació prenem

$$e_3' = \frac{e_3 - \langle e_3, e_1' \rangle e_1' - \langle e_3, e_2' \rangle e_2'}{\|e_3 - \langle e_3, e_1' \rangle e_1' - \langle e_3, e_2' \rangle e_2'\|}$$

Aquests productes escalars són fàcils de calcular i obtenim

$$\begin{aligned} \langle e_3, e_1' \rangle &= 1/3 \\ \langle e_3, e_2' \rangle &= \sqrt{3}/6 \end{aligned}$$

de manera que

$$e_3' = \frac{x^2 - x + 1/6}{\|x^2 - x + 1/6\|}$$

Calculant aquesta norma obtenim finalment $e_3' = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$.

d) Només hem d'escriure x^2 respecte la base ortonormal que acabem de trobar tot observant que l'espai vectorial general per $1 = e_1, x = e_2$ és el mateix que el generat per e_1', e_2'.

Posem

$$x^2 = \alpha e_1' + \beta e_2' + \gamma e_3' = \alpha + \beta\sqrt{3}(2x-1) + \gamma\sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$$

Igualant coeficients obtenim $\alpha = 1/3, \beta = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ i per tant la projecció de x^2 sobre l'espai generat per $1, x$ és

$$\pi(x^2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(2x-1).$$

2.2 Algunes propietats mètriques del triangle

Exercici 2.7: Considereu un triangle d'un pla afí euclidià. Demostreu les afirmacions següents:

a) Les tres mediatrius es tallen en un punt (el *circumcentre*).

b) Les tres bisectrius dels angles es tallen en un punt (l' *incentre*).

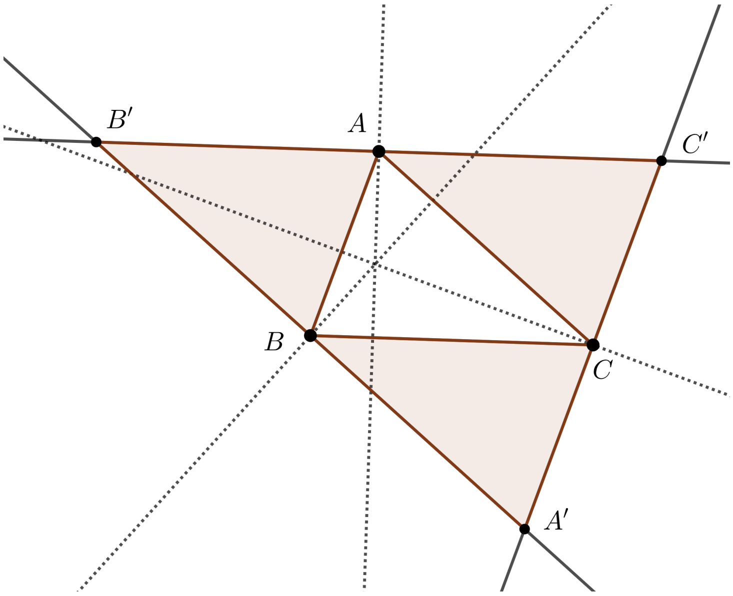
c) Les tres altures es tallen en un punt (l'*ortocentre*).

d) Les tres medianes es tallen en un punt.

Solució: a) Conseqüència immediata del fet de que els punts de la mediatriu d'un segment AB equidisten de A i B. Així al tallar dues mediatrius es troba un punt que equidista dels tres vèrtexs del triangle i pertany doncs a la tercera mediatriu.

b) Conseqüència immediata del fet de que els punts de la bisectriu equidisten dels costats de l'angle. Per tant, el punt on es tallen dues bisectrius serà equidistant dels tres costats del triangle

c) Les altures d'un triangle $\triangle ABC$ són les mediatrius del triangle $\triangle A'B'C'$ amb $B'C'$ paral·lela a BC per A, $A'B'$ paral·lela a AB per C i $A'C'$ paral·lela a AC per B. Això és degut a que els triangles $\triangle ACB'$, $\triangle ABC'$ $\triangle BCA'$ i $\triangle ABC$ són congruents. I les mediatrius ja sabem que es tallen en un punt.



d) Conseqüència directa del teorema de Ceva.

Versió analítica

a) Prenem una referència ortonormal amb origen A i primer vector de la base en la direcció $\overrightarrow{AB}$. Així $A = (0, 0)$, $B = (b, 0), C = (c_1, c_2)$. L'equació de la mediatriu del costat AB és $x = b/2$. L'equació de la mediatriu del costat BC és

$$(\frac{b + c_1}{2}, \frac{c_2}{2}) + \lambda(-c_2, c_1 - b), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

que en tallar amb $x = b/2$ dóna el punt

$$(\frac{b}{2}, \frac{c_2}{2} + \frac{c_1(c_1 - b)}{2c_2}).$$

L'equació de la mediatriu del costat AC és

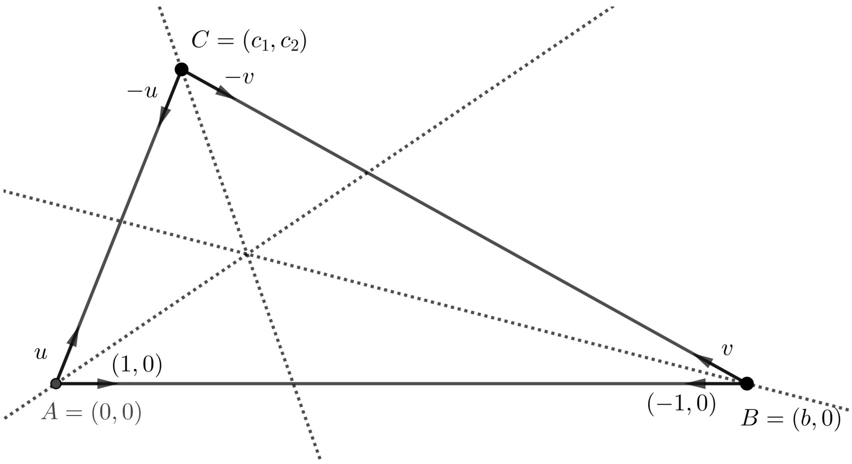
$$(\frac{c_1}{2}, \frac{c_2}{2}) + \mu(-c_2, c_1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

que en tallar amb $x = b/2$ dóna el punt

$$(\frac{b}{2}, \frac{c_2}{2} + \frac{c_1(c_1 - b)}{2c_2}).$$

b) Prenem una referència com en l'apartat anterior. Introduïm els vectors unitaris

$$u = \frac{1}{AC}(c_1, c_2), \quad v = \frac{1}{BC}(c_1 - b, c_2).$$



Les equacions de les tres bisectrius són:

$$\begin{array}{rcl}(0,0) & + & \lambda((1,0)+u)\\ (b,0) & + & \mu((-1,0)+v)\\ (c_1,c_2) & + & \nu(-u-v)\end{array}$$

$\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ Per tallar les dues primeres resolem el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda(1+\dfrac{c_1}{AC}) & = & b+\mu(\dfrac{c_1-b}{BC}-1)\\ \\ \lambda\dfrac{c_2}{AC} & = & \mu\dfrac{c_2}{BC}\end{array}\right.$$

obtenim

$$\lambda=\frac{AB\cdot AC}{AC+AB+BC}.$$

Per tallar la primera i la tercera resolem el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda(1+\dfrac{c_1}{AC}) & = & c_1+\nu(-\dfrac{c_1}{AC}-\dfrac{c_1-b}{BC})\\ \\ \lambda\dfrac{c_2}{AC} & = & c_2+\nu(-\dfrac{c_2}{AC}-\dfrac{c_2}{BC})\end{array}\right.$$

obtenim de la segona

$$\nu=\frac{(AC-\lambda)BC}{AC+BC}$$

que substituint a la primera ens dóna

$$\lambda=\frac{AB\cdot AC}{AC+AB+BC},$$

que és el mateix valor obtingut abans i per tant les bisectrius són concurrents.

c) Prenem una referència com en els apartats anteriors. Les equacions de les tres altures són

$$\begin{array}{rcl}(c_1,c_2) & + & \lambda(0,1)\\ (0,0) & + & \mu(-c_2,c_1-b)\\ (b,0) & + & \nu(-c_2,c_1)\end{array}$$

$\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$. Tallant les dues primeres obtenim trivialment $\mu=-c_1/c_2$. Per tallar la segona i la tercera resolem el sistema

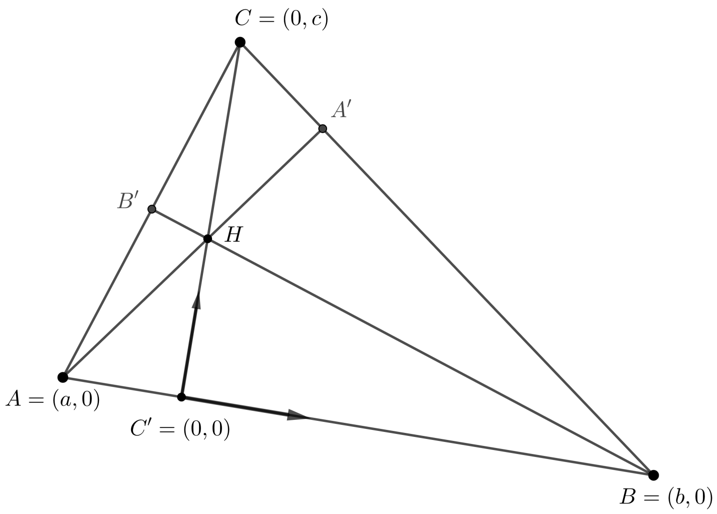
$$\left\{\begin{array}{rcl}-\mu c_2 & = & b-\nu c_2\\ \mu(c_1-b) & = & \nu c_1\end{array}\right.$$

i obtenim també $\mu=-c_1/c_2$. Per tant, les tres altures es tallen en un punt.

d) Immediat (baricentre). Com és un concepte afí podem prendre com referència $\{A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\}$ de manera que els punts mitjans respectius tenen coordenades $(0,1/2),(1/2,0),(1/2,1/2)$. Ara és fàcil veure que les tres mitjanes es tallen en un punt de coordenades $(1/3,1/3)$ (el baricentre).

Exercici 2.8: Demostreu que el producte de les longituds dels dos segments en què l'ortocentre d'un triangle divideix cada altura, és constant.

Solució: Considerem un triangle $\triangle ABC$ i denotem per A',B',C' els peus de les altures des de A,B,C respectivament. Prenem una referència ortonormal amb origen C' i primer vector en la direcció $\overrightarrow{C'B}$. D'aquesta manera $A=(a,0),B=(b,0),C=(0,c),C'=(0,0)$.



Tallem l'altura per A amb l'altura per C.

$$(a, 0) + \lambda(c, b) = \mu(0, 1)$$

per tant $\lambda = -a/c$ i l'ortocentre és

$$H = (0, -ab/c),$$

Calculem A'.

$$(a, 0) + \lambda(c, b) = (0, c) + \mu(-b, c)$$

obtenim $\lambda = c(b - a)/(b^2 + c^2)$ i per tant

$$A' = \frac{b}{b^2 + c^2}(ab + c^2, c(b - a))$$

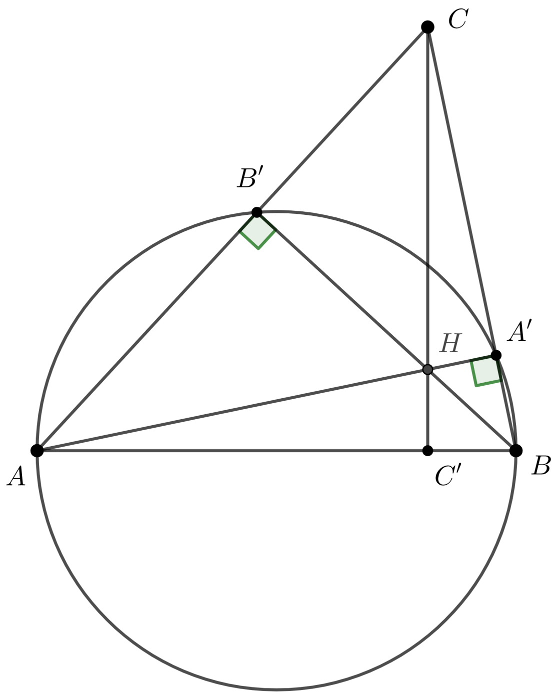
Ara ja podem calcular el producte de les longituds dels segments en que l'ortocentre divideix cada altura.

$$CH \cdot HC' = \left| c + \frac{ab}{c} \right| \left| \frac{-ab}{c} \right| = \frac{1}{c^2} \left| c^2 + ab \right| |ab| \, .$$

$$\begin{aligned}
AH \cdot HA' &= \sqrt{\frac{b^2(ab + c^2)^2}{(b^2 + c^2)^2} + \left[\frac{cb(b - a)}{b^2 + c^2} + \frac{ab}{c} \right]^2} \cdot |\frac{a}{c}| \sqrt{c^2 + b^2} \\
&= \sqrt{\frac{b^2(ab + c^2)^2}{(b^2 + c^2)^2} + \frac{b^4(ab + c^2)^2}{c^2(b^2 + c^2)^2}} \cdot |\frac{a}{c}| \sqrt{c^2 + b^2} \\
&= \frac{|ab + c^2|}{b^2 + c^2} \sqrt{b^2 + \frac{b^4}{c^2}} \cdot |\frac{a}{c}| \sqrt{c^2 + b^2} \\
&= = \frac{1}{c^2} \left| c^2 + ab \right| |ab| \\
&= CH \cdot HC'
\end{aligned}$$

El càlcul per a la tercera altura és similar.

Prova sintètica Considerem el cercle de diàmetre AB. Els peus de les altures A' i B' pertanyen a aquesta circumferència.



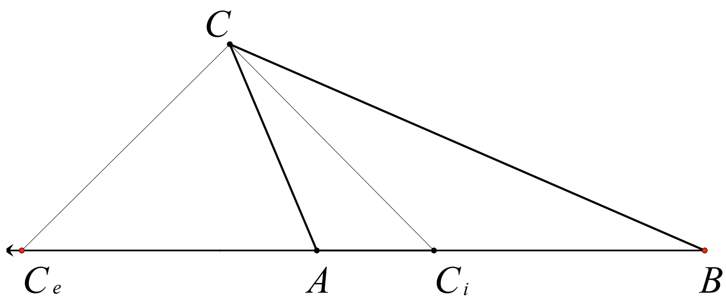
Per la propietat de la potència d'un punt respecte una circumferència tenim

$$HA \cdot HA' = HB \cdot HB'.$$

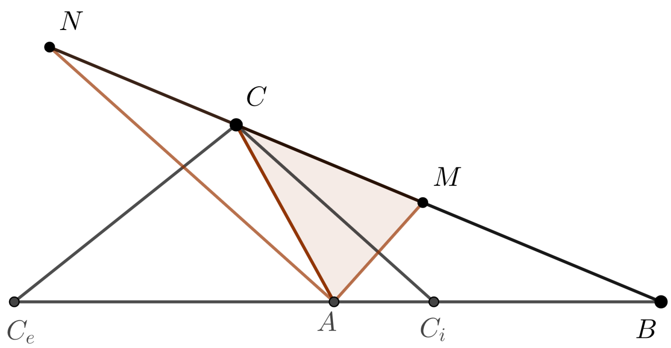
Això ja prova el resultat per a aquestes dues altures. Si ara fem el mateix amb la circumferència de diàmetre AC tenim el resultat.

Exercici 2.9: Suposem que les bisectrius interior i exterior de l'angle C d'un triangle $\triangle ABC$ tallen la recta AB en els punts C_i i C_e. Demostreu que

$$(C_e, A, B) = -(C_i, A, B).$$



Solució: L'enunciat habitual d'quest exercici és dir que els punts A, B, C_i, C_e formen quaterna harmònica. La demostració sintètica és la següent.



Considerem sobre el costat BC punts MN tals que $CA = CM = CN$. Com les bisectrius són perpendiculars entre sí i perpendiculars respectivament a les bases dels triangles isòsceles ACM i ACN, les rectes AM i CC_e són paral·leles i les rectes AN i CC_i són també paral·leles. Per Tales des de B tenim

$$\frac{BC_i}{AC_i} = \frac{BC}{AC}, \quad \frac{BC_e}{AC_e} = \frac{BC}{AC}.$$

Per tant,

$$(C_e, A, B) = \frac{C_eA}{C_eB} = \frac{AC}{BC} = -\frac{C_iA}{C_iB} = -(C_i, A, B)$$

El signe prové de que C_i està entre A i C (i C_e no).

Demostració analítica. Prenem una referència ortonormal amb origen C i primer vector de la base en la direcció de AB. Així $A = (a, h), B = (b, h), C = (0, 0)$. Per trobar $C_i = (x, h)$ tallem la bisectriu amb la recta $y = h$.

L'equació de la bisectriu és

$$t\left(\frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

de manera que trobem el valor de t que fa que aquesta recta talli $y = h$.

Posem[6]

$$t\left(\frac{(a, h)}{AC} + \frac{(b, h)}{BC}\right) = (x, h)$$

i obtenim (mirant la segona component)

$$t = \frac{AC \cdot BC}{AC + BC}$$

i per tant

$$x = \frac{a \cdot BC + b \cdot AC}{AC + BC}$$

Ara ja podem calcular la raó simple

$$(C_i, A, B) = \frac{a - x}{b - x} = \frac{-\dfrac{AC(b-a)}{AC+BC}}{\dfrac{BC(b-a)}{AC+BC}} = -\frac{AC}{BC}$$

Anàlogament es veu que $(C_e, A, B) = \frac{AC}{BC}$ i hem acabat. (Els càlculs per calcular les coordenades C_e són els mateixos que per calcular les coordenades de C_i canviant $\overrightarrow{CB}$ per $-\overrightarrow{CB}$).

[6]Simplifico la notació posant $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$, etc.

2.3 Moviments

Exercici 2.10: A l'espai afí euclidià $\mathbb{R}^3$ trobeu, respecte de la referència canònica, l'equació de la recta r' simètrica de la recta
$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{-y+3}{1} = \frac{z-2}{3},$$
respecte del pla $\Pi : 2x - y + z - 1 = 0$.

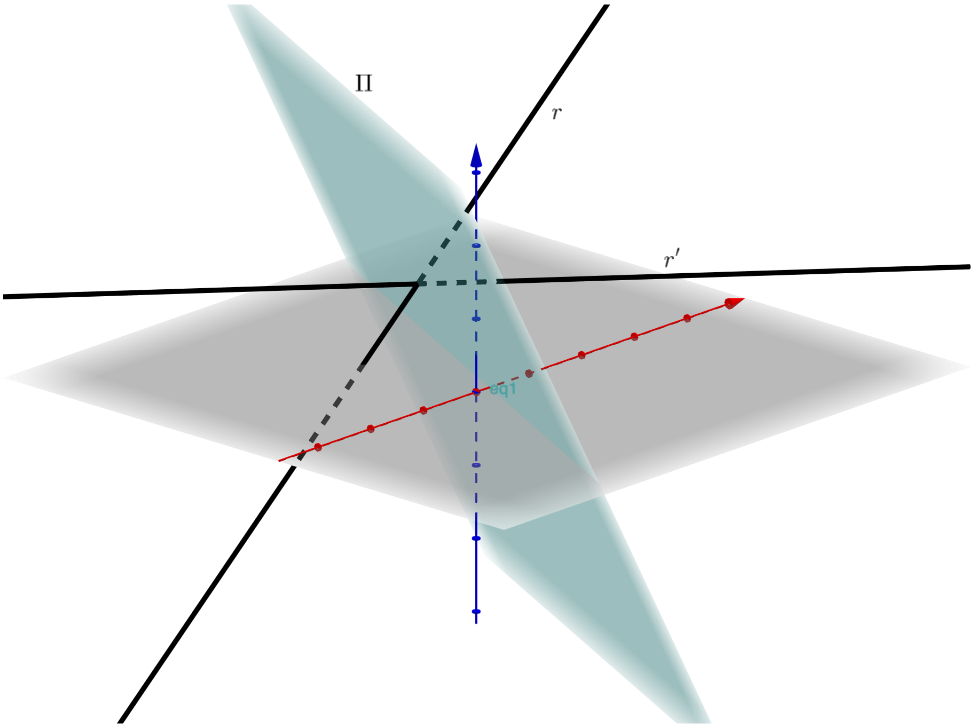
Solució: *Primer mètode (llarg).* Calculem les equacions de la simetria ortogonal respecte Π. Primer escrivim
$$\Pi : P + [F] = (1/2, 0, 0) + \langle (1/2, 1, 0), (-1/2, 0, 1) \rangle$$
Observem que
$$\langle (1/2, 1, 0), (-1/2, 0, 1) \rangle^{\perp} = \langle (2, -1, 1) \rangle$$
Per cada $X = (x, y, z)$ fem
$$\overrightarrow{PX} = \alpha(1/2, 1, 0) + \beta(-1/2, 0, 1) + \gamma(2, -1, 1)$$
i obtenim $\alpha = \frac{1}{6}(2x + 5y + z - 1), \beta = \frac{1}{6}(-2x + y + 5z + 1), \gamma = \frac{1}{6}(2x - y + z - 1)$

El simètric del punt X és el punt
$$\begin{aligned} X' &= P + \alpha(1/2, 1, 0) + \beta(-1/2, 0, 1) - \gamma(2, -1, 1) \\ &= \frac{1}{3}(-x + 2y - 2z + 2, 2x + 2y + z - 1, -2x + y + 2z + 1) \end{aligned}$$
que escriurem com
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La recta r és la intersecció dels plans
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 11.$$

Per tant, la recta transformada és
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\left[M^{-1}\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right] = 7$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\left[M^{-1}\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right] = 11$$

Substituint el valor de
$$M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
i canviant x', y', z' per x, y, z obtenim
$$x + 2y = 7, \quad 4x + 7y + 5z = 35.$$
La simètrica de la recta r és doncs la recta
$$r' : (0, 7/2, 21/10) + \langle (1, -1/2, -1/10) \rangle = (1, 3, 2) + \langle (10, -5, -1) \rangle$$



Segon mètode. El punt d'intersecció de r i Π és $Q = (1, 3, 2)$. Prenem un segon punt de r, per exemple, $R = (0, 7/2, 1/2)$. Calculem el simètric de R respecte Π.

$$\overrightarrow{QR} = (-1, 1/2, -3/2) = \alpha(1/2, 1, 0) + \beta(-1/2, 0, 1) + \gamma(2, -1, 1)$$

obtenim $\alpha = -1/6, \beta = -5/6, \gamma = -2/3$. Per tant, el simètric R' de R respecte Π és

$$R' = Q + \alpha(1/2, 1, 0) + \beta(-1/2, 0, 1) - \gamma(2, -1, 1) = (8/3, 13/6, 11/6)$$

Així r' és la recta

$$\overline{QR'} = (1, 3, 2) + \langle (5/3, -5/6, -1/6) \rangle = (1, 3, 2) + \langle (10, -5, -1) \rangle$$

d'acord amb el primer mètode.

Exercici 2.11: Sigui $\mathcal{B} = (u, v)$, amb $u = (1, -1)$ i $v = (1, 1)$, una base del pla afí euclidià $\mathbb{R}^2$. Sigui $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'afinitat que en la referència $\{(0, 0); \mathcal{B}\}$ té per equació:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Comproveu que T és un moviment.

Solució: La base $\mathcal{B}$ no és ortonormal però la base $\mathcal{B}' = (\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|})$ sí que ho és i, per la fórmula del canvi de base la matriu de $\vec{f}$ respecte $\mathcal{B}$ o $\mathcal{B}'$ és la mateixa. Això és degut a que $M(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \frac{1}{\sqrt{2}} id$ i per tant la fórmula del canvi de base deixa invariant $M(\vec{f}, \mathcal{B})$.

Com la matriu
$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$
és ortogonal, T és un moviment.

Exercici 2.12: Siguin

$$L_1 : \begin{cases} x + y + z = 2, \\ x - y + z = 1. \end{cases} \qquad L_2 : \begin{cases} x = 2\lambda + \mu, \\ y = 3 + 2\lambda + 2\mu, \\ z = 4 + 3\lambda + 2\mu \end{cases}$$

dues varietats lineals de l'espai afí euclidià $\mathbb{R}^3$.

a) Determineu la projecció ortogonal del punt $A = (2, 1, 3)$ sobre L_1 i L_2.

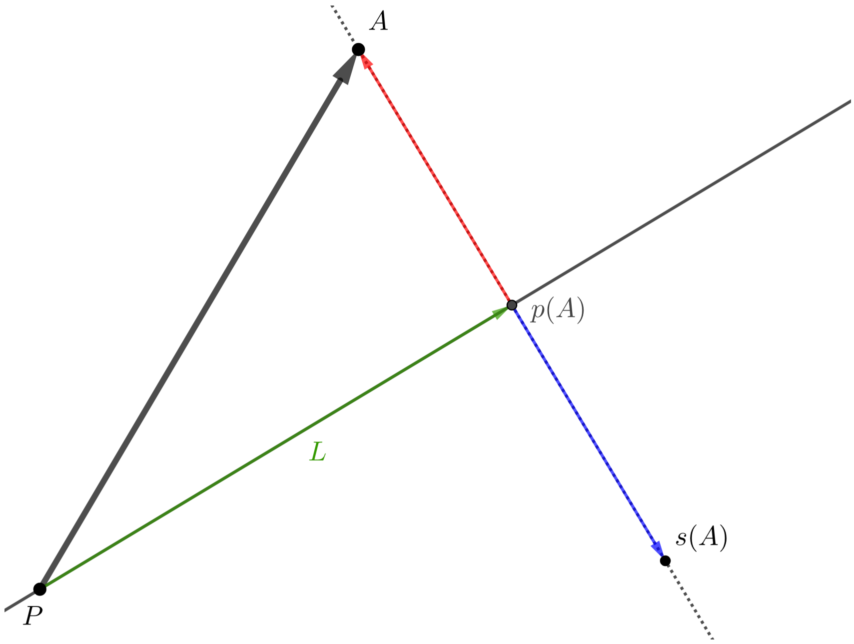
b) Trobeu el simètric de A respecte de L_2.

Solució: a) Escrivim L_1 i L_2 en forma vectorial.

$$L_1 : P + \vec{F} = (0, 1/2, 3/2) + \langle(1, 0, -1)\rangle$$
$$L_2 : Q + \vec{G} = (0, 3, 4) + \langle(2, 2, 3), (1, 2, 2)\rangle$$

Observem que $\vec{F}^{\perp} = \langle(0, 1, 0), (1, 0, 1)\rangle$ i $\vec{G}^{\perp} = \langle(1, 1/2, -1)\rangle$

La figura següent ajuda a veure el projectat $p(A)$ i el simètric $s(A)$ d'un punt A respecte una subvarietat lineal L que passa per P. Tot està en descompondre el vector $\overrightarrow{PA}$ és una part en la direcció de L i en una part ortogonal.



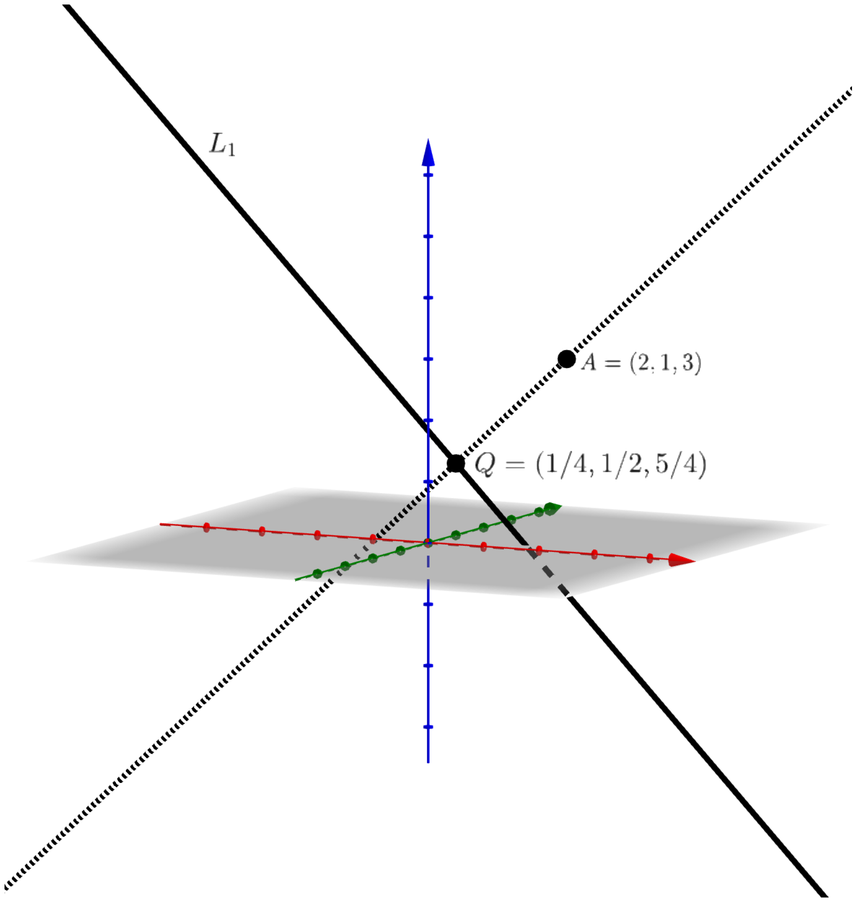
Per trobar la projecció ortogonal del punt A sobre L_1 descomponem

$$\overrightarrow{PA} = (2, 1/2, 3/2) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(1, 0, 1),$$

i obtenim $\alpha = 1/4, \beta = 1/2, \gamma = 7/4$.

El projectat de A sobre L_1 és doncs el punt

$$P + \alpha(1, 0, -1) = (0, 1/2, 3/2) + (1/4, 0, -1/4) = (1/4, 1/2, 5/4).$$



Per projectar A sobre L_2, descomponem

$$\overrightarrow{QA} = (2, -2, -1) = \alpha(2, 2, 3) + \beta(1, 2, 2) + \gamma(2, 1, -2),$$

i obtenim $\alpha = 7/3, \beta = -32/9, \gamma = 4/9$. El projectat de A sobre L_2 és doncs el punt

$$(0, 3, 4) + (7/3)(2, 2, 3) + (-32/9)(1, 2, 2) = \frac{1}{9}(10, 5, 35).$$

b) Aprofitant els càlculs anteriors el simètric de A respecte L_2 és el punt

$$A' = Q + \alpha(2, 2, 3) + \beta(1, 2, 2) - \gamma(2, 1, -2) = \frac{1}{9}(2, 1, 43).$$

Exercici 2.13: A l'espai afí euclidià $\mathbb{R}^3$, trobeu el simètric del punt $X = (-1, 1, 3)$ respecte de cadascuna de les varietats lineals següents:

$$L_1 : \begin{cases} x - y - z = 1, \\ y - 2z = 0. \end{cases} \qquad L_2 : \left\{ \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}. \right.$$

Solució: Primer escrivim

$$L_1 : P + [F] = (0, -2/3, -1/3) + \langle(3, 2, 1)\rangle$$

$$L_2 : Q + [G] = (1, 0, -1) + \langle(1, -1, 2)\rangle$$

Calculem els ortogonals i obtenim

$$F^\perp = \langle(-2, 3, 0), (0, 1, -2)\rangle, \quad G^\perp = \langle(1, 1, 0), (0, 2, 1)\rangle$$

Ara descomponem sobre L_1

$$\overrightarrow{PX} = \alpha(3,2,1) + \beta(-2,3,0) + \gamma(0,1,-2)$$

i obtenim $\alpha = 11/42, \beta = 25/28, \gamma = -43/28$.

I descomponent sobre L_2

$$\overrightarrow{QX} = \alpha(1,-1,2) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,2,1)$$

i obtenim $\alpha = 5/6, \beta = -17/6, \gamma = 7/3$.

Així el simètric de X respecte L_1 és

$$X' = P + \alpha(3,2,1) - \beta(-2,3,0) - \gamma(0,1,-2) = \frac{1}{7}(18,-9,-22).$$

I el simètric de X respecte L_2 és

$$X' = Q + \alpha(1,-1,2) - \beta(1,1,0) - \gamma(0,2,1) = \frac{1}{3}(14,-8,-5).$$

Es pot comprovar que, en els dos casos, el punt mitjà entre X i X' pertany a la corresponent subvarietat.

Exercici 2.14: Sigui $\mathbb{A}$ l'espai afí $\mathbb{R}^2$ considerat com a espai afí euclidià amb el producte escalar donat, respecte de la base canònica de l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$, per la matriu

$$I = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trobeu el punt simètric del punt $P = (2,3)$ respecte de la recta $x + y + 1 = 0$.

Solució: Escrivim la recta com

$$r : Q + [F] = (-1,0) + \langle(-1,1)\rangle$$

Trobem $F^\perp$. Un vector $(x,y) \in F^\perp$ si i només si

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

que implica $x = 0$, de manera que $F^\perp = \langle(0,1)\rangle$.

Descomponem

$$\overrightarrow{QP} = (3,3) = \alpha(-1,1) + \beta(0,1)$$

i obtenim $\alpha = -3$, $\beta = 6$, de manera que el simètric P' de P és

$$P' = Q + \alpha(-1,1) - \beta(0,1) = (2,-9).$$

Exercici 2.15: Siguin

$$\Pi : \ -x + 2y + z - 2 = 0, \qquad r : \ \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{2},$$

un pla i una recta de l'espai afí euclidià $\mathbb{R}^3$.

a) Trobeu les equacions de la recta r' simètrica de r respecte de Π.

b) Trobeu les equacions del pla Π' simètric de Π respecte de r.

Solució: a) *Primer mètode (llarg).*Trobem les equacions de la simetria ortogonal respecte Π. Observem que Π es pot escriure com

$$\Pi : P + [F] = (-2,0,0) + \langle(2,1,0),(1,0,1)\rangle.$$

És fàcil veure que $F^{\perp} = \langle(1,-2,-1)\rangle$.

Prenem la referència

$$\mathcal{R} = \{(-2,0,0);(2,1,0),(1,0,1),(1,-2,-1)\}$$

$$M(s_\Pi, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Així

$$\begin{aligned} M(s_\Pi, \mathcal{C}) &= M(\mathcal{R},\mathcal{C})M(s_\Pi,\mathcal{R})M(\mathcal{R},\mathcal{C})^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un dels plans que determina la recta r és $x - 3y + 5 = 0$, que escrivim com és habitual en aquestes situacions, com

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = -5.$$

Com l'afinitat és

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

substituint obtenim[7]

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x' + 2y' + z' - 2 \\ 2x' - y' - 2z' + 4 \\ x' - 2y' + 2z' + 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -5$$

És a dir, el pla transformat és el pla

$$-4x + 5y + 7z + 1 = 0.$$

Repetim el mateix amb l'altra pla que determina r. Aquest pla és per exemple $2y - z + 1 = 0$ que escrivim com

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = -1.$$

Per tant

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x' + 2y' + z' - 2 \\ 2x' - y' - 2z' + 4 \\ x' - 2y' + 2z' + 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -1$$

És a dir, el pla transformat és el pla

$$x - 2z + 3 = 0.$$

[7] La inversa de la matriu és ella mateixa ja que les simetries compleixen que elevades al quadrat són la identitat.

Per tant la imatge de r per simetria respecte Π és la recta

$$\left\{\begin{array}{rcl} -4x+5y+7z+1 & = & 0 \\ x-2z+3 & = & 0 \end{array}\right.$$

o, equivalentment $(-17,-4,-7)+\lambda(10,1,5)$.

Segon mètode. El punt d'intersecció del pla i la recta és $P=\Pi\cap r=(-17,-4,-7)$. Prenem un punt qualsevol $Q\in r$, per exemple $Q=(-2,1,3)$. Descomponem $\overrightarrow{PQ}$ a la suma directa $F\oplus F^{\perp}$.

$$(15,5,10)=\alpha(2,1,0)+\beta(1,0,1)+\gamma(1,-2,-1).$$

Obtenim $\alpha=10/3, \beta=55/6, \gamma=-5/6$.

Per tant el punt Q' simètric de Q respecte de Π és

$$Q'=(-17,-4,-7)+\frac{10}{3}(2,1,0)+\frac{55}{6}(1,0,1)+\frac{5}{6}(1,-2,-1)=\frac{1}{3}(-1,-7,4).$$

La recta r' simètrica de r respecte de Π és la recta PQ' que s'escriu com

$$P+\lambda\overrightarrow{PQ'}=(-17,-4,-7)+\lambda(10,1,5).$$

com aviem obtingut abans.

b) *Primer mètode.* Observem que r es pot escriure com

$$r: Q+[G]=(-2,1,3)+\langle(3,1,2)\rangle.$$

És fàcil veure que $G^{\perp}=\langle(-1/3,1,0),(-2/3,0,1)\rangle$. Prenem la referència

$$\mathcal{R}=\{(-2,1,3);(3,1,2),(-1,3,0),(-2,0,3)\}$$

$$M(s_r,\mathcal{R})=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Així

$$\begin{aligned} M(s_r,\mathcal{C}) &= M(\mathcal{R},\mathcal{C})M(s_r,\mathcal{R})M(\mathcal{R},\mathcal{C})^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & -31 \\ 3 & -6 & 2 & 13 \\ 6 & 2 & -3 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El pla Π es pot escriure com

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}=2.$$

Substituint com en l'apartat anterior la matriu columna pel seu valor obtingut a partir de l'equació de l'afinitat tenim

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x'+3y'+6z'-31 \\ 3x'-6y'+2z'+13 \\ 6x'+2y'-3z'+40 \\ 7 \end{pmatrix}=2$$

És a dir, el pla transformat és el pla $10x-13y-5z+83=0$.

Segon mètode. Prenem dos punts arbitraris $A, B \in \Pi$, per exemple $A = (0,0,2), B = (-2,0,0)$. Trobem els simètrics A', B' respecte r. El pla buscat és el pla determinat pels tres punts P, A', B' amb $P = \Pi \cap r$. Descomponem $\overrightarrow{PA}$ i $\overrightarrow{PB}$ a la suma directa

$$(3,1,2) \oplus (3,1,2)^{\perp} = (3,1,2) \oplus \langle(-1,3,0),(0,2,-1)\rangle$$

Resolent el sistema

$$\overrightarrow{PA} = (17,4,9) = \alpha(3,1,2) + \beta(-1,3,0) + \gamma(0,2,-1)$$

obtenim$\alpha = 73/14, \beta = -19/14, \gamma = 10/7$ de manera que

$$A' = (-17,-4,-7) + \frac{73}{14}(3,1,2) + \frac{19}{14}(-1,3,0) - \frac{10}{7}(0,2,-1) = \frac{1}{7}(-19,17,34)$$

Resolent ara el sistema

$$\overrightarrow{PB} = (15,4,7) = \alpha(3,1,2) + \beta(-1,3,0) + \gamma(0,2,-1)$$

obtenim$\alpha = 9/2, \beta = -3/2, \gamma = 2$ de manera que

$$B' = (-17,-4,-7) + \frac{9}{2}(3,1,2) + \frac{3}{2}(-1,3,0) - 2(0,2,-1) = (-5,1,4)$$

Es comprova fàcilment que el pla generat pels punts P, A', B' coincideix amb el pla $10x - 13y - 5z + 83 = 0$ trobat anteriorment.

Exercici 2.16: Sigui $\mathcal{R} = \{P; (e_1, e_2)\}$ una referència ortonormal d'un espai afí euclidià de dimensió 2. Demostreu que les equacions d'una simetria ortogonal respecte de la recta $l : P + \langle v \rangle$ són

$$\begin{cases} x' = x\cos(2\alpha) + y\sin(2\alpha), \\ y' = x\sin(2\alpha) - y\cos(2\alpha), \end{cases}$$

on $v = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Solució: Per calcular el simètric d'un punt arbitrari $X = (x, y)$ respecte l descomponem $\overrightarrow{PX}$ a $\langle v \rangle \oplus \langle v \rangle \perp$,

$$(x, y) = \lambda(\cos\alpha, \sin\alpha) + \mu(\sin\alpha, -\cos\alpha)$$

Obtenim $\lambda = x\cos\alpha + y\sin\alpha$, $\mu = x\sin\alpha - y\cos\alpha$. El simètric de X és

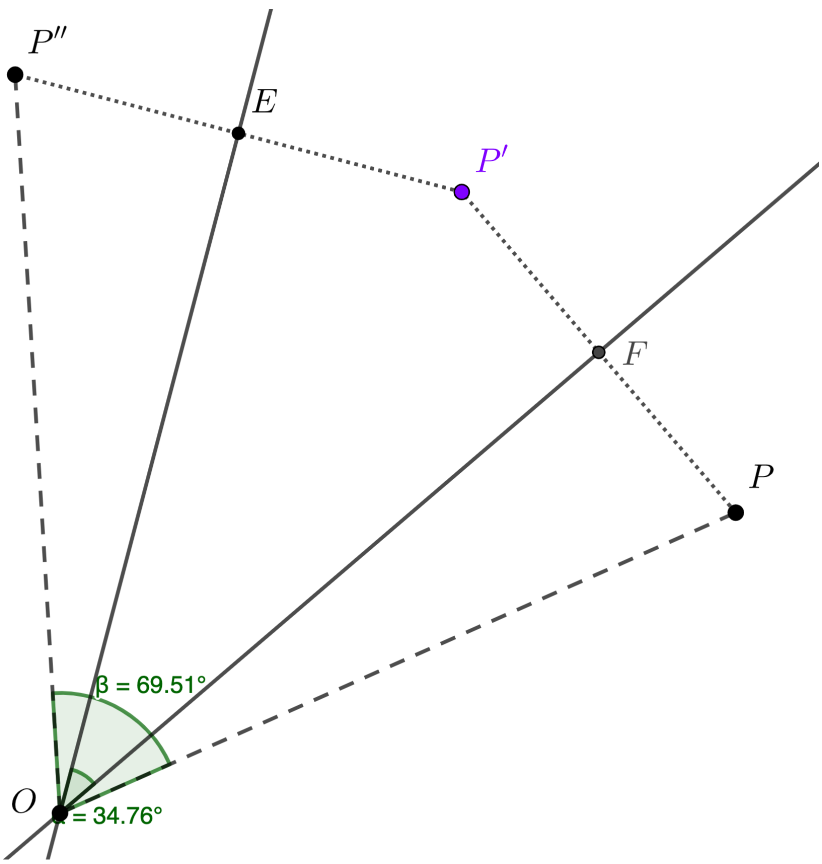
$$X' = P + \lambda(\cos\alpha, \sin\alpha) - \mu(\sin\alpha, -\cos\alpha)$$

que en coordenades és

$$\begin{aligned} x' &= (x\cos\alpha + y\sin\alpha)\cos\alpha - (x\sin\alpha - y\cos\alpha)\sin\alpha = x\cos(2\alpha) + y\sin(2\alpha) \\ y' &= (x\cos\alpha + y\sin\alpha)\sin\alpha + (x\sin\alpha - y\cos\alpha)\cos\alpha = x\sin(2\alpha) - y\cos(2\alpha). \end{aligned}$$

Exercici 2.17: En un espai afí euclidià de dimensió dos, ¿quin moviment resulta quan es componen dues simetries ortogonals, respecte de rectes que es tallen formant un angle θ?

Solució: Suposem que el punt P' és el simètric de P respecte OF i P'' el simètric de P' respecte OE. Els triangles $\triangle OPF$ i $\triangle OP'F$ són congruents. Per tant $\alpha = \angle POF = \angle FOP'$. Anàlogament $\beta = \angle P'OE = \angle EOP'$.



Per tant $\theta = \angle FOE = \alpha + \beta$ i $\angle POP'' = 2(\alpha + \beta) = 2\theta$. Com $OP = OP''$ aquest moviment és un gir d'angle 2θ.

Segon mètode. Utilitzant l'exercici 2.16 només hem de multiplicar les dues matrius (de determinant -1)

$$\begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2(\beta-\alpha)) & \sin(2(\beta-\alpha)) \\ -\sin(2(\beta-\alpha)) & \cos(2(\beta-\alpha)) \end{pmatrix}$$

matriu d'un gir d'angle $2(\beta - \alpha)$.

Exercici 2.18: Demostreu que en un espai afí euclidià de dimensió dos, tota translació és composició de simetries d'eixos paral·lels; i tot gir és composició de simetries d'eixos que es tallen justament en el centre del gir. Com a conseqüència, proveu que tot moviment és composició de, com a molt, tres simetries.

Solució: Sabem que donada una translació T_v existeix una referència respecte de la qual

$$\begin{cases} x' = x + d \\ y' = y \end{cases}$$

Considerem la simetria s_0 respecte $x = 0$ donada en coordenades per

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

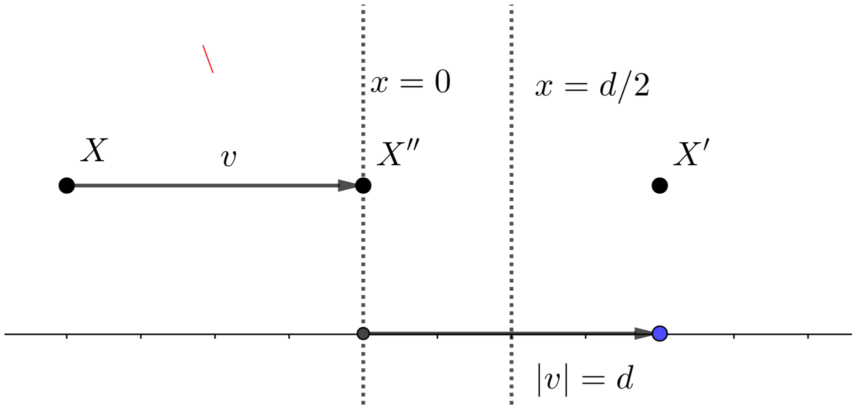
i la simetria s_d respecte la recta $x = d/2$

$$\begin{cases} x' = d - x \\ y' = y \end{cases}$$

Clarament

$$s_{d/2} \circ s_0 = T_v.$$

A la figura el punt X va a parar a X' per simetria respecte $x = 0$ i aquest va a X'' per simetria respecte $x = d/2$.



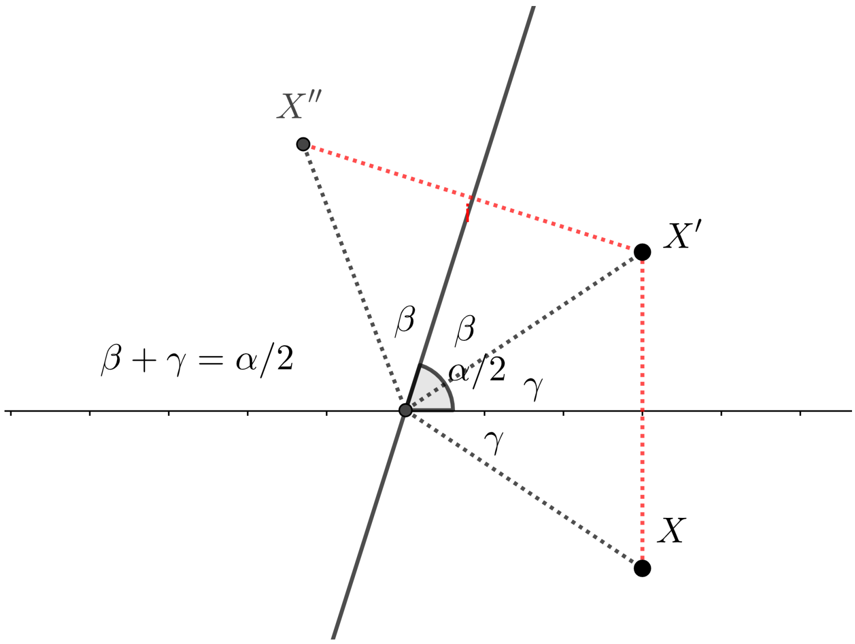
Els exercicis 2.16 i 2.17 ens permeten dir que el gir d'angle α, g_α descompon com

$$g_\alpha = s_m \circ s_0$$

on $s_0(x,y) = (x,-y)$ i s_m és la simetria respecte la recta de pendent $m = \tan(\alpha/2)$, donada per

$$\begin{cases} x' = x\cos(\alpha) + y\sin(\alpha), \\ y' = x\sin(\alpha) - y\cos(\alpha), \end{cases}$$

A la figura el punt X va a parar a X' per simetria respecte $y = 0$ i aquest va a X'' per simetria respecte la recta de pendent $m = \tan(\alpha/2)$.



A partir de la classificació dels moviments del pla, secció 7.4 de [2], el resultat és clar.

Exercici 2.19: A l'espai afí $\mathbb{R}^2$ trobeu, respecte de la referència canònica, les equacions de:

a) Un gir g de centre $Q = (2,1)$ i angle α en sentit horari (la base $(e_1, \tilde{g}(e_1))$ és negativa respecte de la base canònica (e_1, e_2) de l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$. Que la base és negativa vol dir que el determinant de la matriu del canvi de base és negatiu).

b) Una simetria axial d'eix la recta $x + 2y - 2 = 0$.

Solució: a)

Primer mètode. Prenem com referència $\mathcal{R} = \{(2,1);(1,0),(0,1)\}$. Clarament la matriu del gir g en aquesta referència és

$$M(g,\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

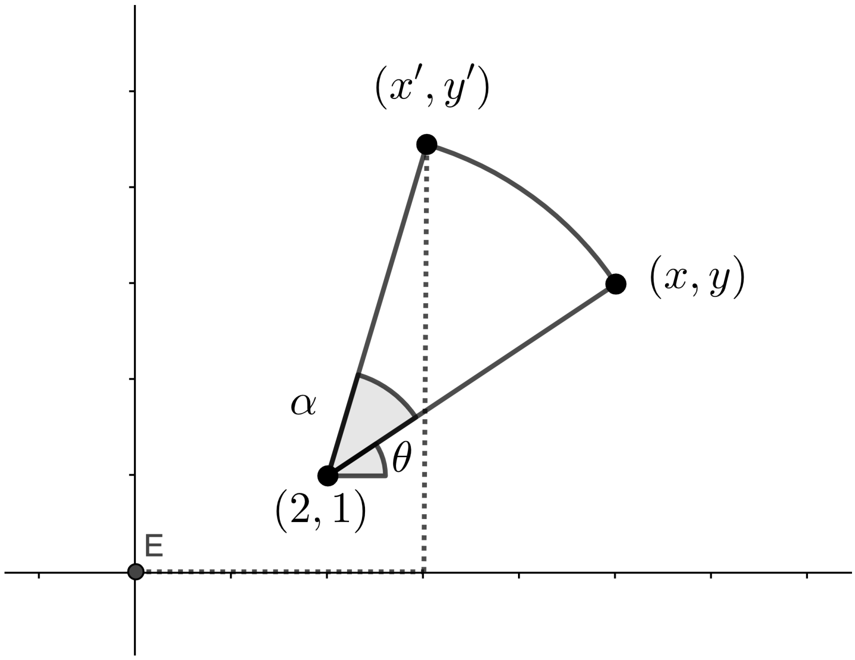
Per la fórmula del canvi de base la matriu de g respecte la base canònica és

$$\begin{aligned} M(g,\mathcal{C}) &= M(\mathcal{R},\mathcal{C})M(g,\mathcal{R})M(\mathcal{R},\mathcal{C})^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & -2\cos(\alpha)+\sin(\alpha)+2 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & -2\sin(\alpha)-\cos(\alpha)+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per tant les equacions del gir són (apliquem aquesta matriu a la matriu columna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$)

$$\begin{cases} x' = 2 + (x-2)\cos(\alpha) - (y-1)\sin(\alpha) \\ y' = 1 + (x-2)\sin(\alpha) + (y-1)\cos(\alpha) \end{cases}$$

Segon mètode.



Mirant el dibuix es veu que (denotant per r el radi de gir $r = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$)

$$\sin(\theta) = \frac{y-1}{r}, \quad \cos(\theta) = \frac{x-2}{r}$$

i també

$$\begin{cases} x' = 2 + r\cos(\theta+\alpha) \\ y' = 1 + r\sin(\theta+\alpha) \end{cases}$$

que substituint els valors de $\cos(\theta)$ i $\sin(\theta)$ ens dóna

$$\begin{cases} x' = 2 + (x-2)\cos(\alpha) - (y-1)\sin(\alpha) \\ y' = 1 + (x-2)\sin(\alpha) + (y-1)\cos(\alpha) \end{cases}$$

b) *Primer mètode.* La recta donada es pot escriure com $(2,0) + \langle(-2,1)\rangle$ Respecte la referència $\mathcal{R} = \{(2,0); (-2,1), (1,2)\}$ la simetria s'escriiu

$$M(s,\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per tant

$$\begin{aligned} M(s,\mathcal{C}) &= M(\mathcal{R},\mathcal{C})M(s,\mathcal{R})M(\mathcal{R},\mathcal{C})^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -4 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

És a dir,

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(3x - 4y + 4) \\ y' = \frac{1}{5}(-4x - 3y + 8) \end{cases}$$

Segon mètode. Prenem un punt arbitrari $P = (x, y)$ i descomponem el vector que va de $(2,0)$ a P en la suma directa $\langle(-2,1)\rangle \oplus \langle(-2,1)\rangle^{\perp} = \langle(-2,1)\rangle \oplus \langle(1,2)\rangle$

$$(x-2, y) = \alpha(-2,1) + \beta(1,2)$$

obtenim $\alpha = \frac{1}{5}(-2x+y+4), \beta = \frac{1}{5}(x+2y-2)$. Per tant la simetria demanada és l'aplicació $(x', y') = s(x, y)$ donada per

$$s(x,y) = (2,0) + \frac{1}{5}(-2x+y+4)(-2,1) - \frac{1}{5}(x+2y-2)(1,2) = \frac{1}{5}(3x-4y+4, -4x-3y+8)$$

d'acord amb el valor obtingut en el primer mètode.

Exercici 2.20: Sigui $\mathcal{B} = (u, v)$ una base de l'espai vectorial euclidià $\mathbb{R}^2$. Suposem que un gir g de $\mathbb{R}^2$ és tal que

$$M(\vec{g},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

on $\vec{g}$ és l'aplicació lineal associada a g. És $\mathcal{B}$ una base ortonormal? Determineu l'angle de rotació de g, l'angle dels vectors u, v, i la raó dels seus mòduls, $\frac{|u|}{|v|}$.

Solució: És clar que $\mathcal{B}$ no és una base ortonormal ja que la matriu donada no és ortogonal.

Per la invariància de la traça deduïm directament (pensem en la matriu d'un gir d'angle α en una base ortonormal) que

$$2\cos(\alpha) = 1$$

per tant $\alpha = \pi/3$. Ara observem que

$$\langle u, v\rangle = \langle g(u), g(v)\rangle = \langle u + (2/3)v, (-3/2)u\rangle = (-3/2)\langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle$$

d'on deduïm

$$\frac{\|u\|}{\|v\|} = -\frac{4}{3}\cos(\theta)$$

on θ és l'angle entre els vectors u, v.

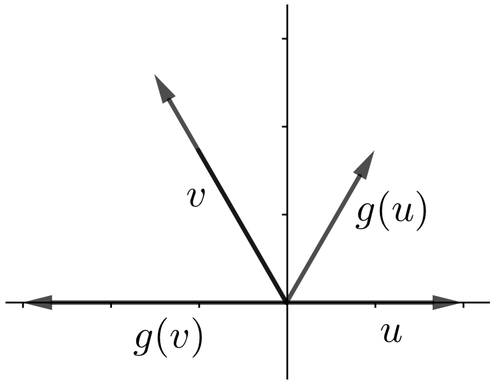
Per altra banda

$$\|v\| = \|g(v)\| = \frac{3}{2}\|u\|$$

per tant

$$\frac{\|u\|}{\|v\|} = \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}\cos(\theta)$$

i així $\theta = 2\pi/3$.



Exercici 2.21: Sigui $g = G(l, u, \alpha)$ el gir de l'espai afí euclidià $\mathbb{R}^3$, al voltant de la recta $l : P + \langle u \rangle$, orientada pel vector unitari u, i angle α.

a) Demostreu que

$$\vec{g}(v) = \cos\alpha \cdot v + (1 - \cos\alpha)(\langle u, v \rangle) \cdot u + \sin\alpha \cdot (v \wedge u),$$

on $\vec{g}$ és l'aplicació lineal associada a g.

b) Donat un punt $Q \in \mathbb{R}^3$, calculeu les coordenades del punt $Q' = g(Q)$, respecte de la referència $\mathcal{R} = \{P; \mathcal{B}\}$, on $\mathcal{B} = (\overrightarrow{PQ}, u, \overrightarrow{PQ} \wedge u)$.

Solució: a) Denotem $\bar{v}$ la projecció de v sobre $\langle u \rangle^{\perp}$ de manera que tindrem $v = \bar{v} + \langle u, v \rangle u$.

Observem que $\bar{v}, \bar{v} \wedge u$ es una base ortogonal (amb el mateix mòdul, $|\bar{v}| = |\bar{v} \wedge u|$) de $\langle u \rangle^{\perp}$, i per tant, quan girem v un angle α al voltant de u, $\bar{v}$ es transforma en

$$\vec{g}(\bar{v}) = \bar{v}\cos(\alpha) + (\bar{v} \wedge u)\sin(\alpha)$$

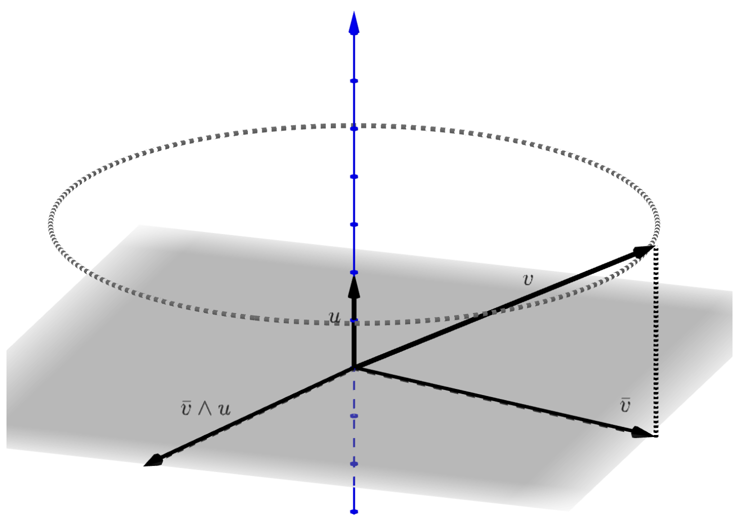
i per tant el transformat de v és

$$\vec{g}(v) = \bar{v}\cos(\alpha) + (\bar{v} \wedge u)\sin(\alpha) + \langle v, u \rangle u$$

(la projecció de v sobre $\langle u \rangle$ és constant al llarg del gir). Substituint $\bar{v}$ per $v - \langle u, v \rangle u$ tenim

$$\begin{aligned} \vec{g}(v) &= (v - \langle u, v \rangle u)\cos(\alpha) + (v \wedge u)\sin(\alpha) + \langle v, u \rangle u \\ &= \cos\alpha \cdot v + (1 - \cos\alpha)(\langle u, v \rangle) \cdot u + \sin\alpha \cdot (v \wedge u) \end{aligned}$$

que és la fórmula demanada.



b) És l'apartat anterior aplicat al vector $v = \overrightarrow{PQ}$. El punt buscat és

$$g(Q) = g(P + \overrightarrow{PQ}) = P + \vec{g}(\overrightarrow{PQ})$$

amb $\vec{g}(\overrightarrow{PQ})$ donat a l'apartat a).

Exercici 2.22: Classifiqueu els següents desplaçaments del pla: dieu si es tracta d'un gir, una simetria, una translació o un lliscament.

$$\begin{aligned}
T_1(x,y) &= (x+4, y+2)\\
T_2(x,y) &= (-\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - 2, \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1)\\
T_3(x,y) &= (-\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})\\
T_4(x,y) &= (-\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \sqrt{3} + 2, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2} + 1 + 2\sqrt{3})
\end{aligned}$$

Solució:

T_1. La matriu de la part lineal és la identitat. Es tracta doncs d'una translació de vector $u = (4,2)$.

T_2. El polinomi característic de la matriu de la part lineal no té arrels reals. Es tracta, doncs, d'un gir. Per trobar el centre de gir trobem els punts fixos. Resolem l'equació $T_2(x,y) = (x,y)$ i trobem que el punt fix és $P = (-\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2} - \sqrt{2})$. L'angle de gir es troba mirant la traça: ha de ser $2\cos(\alpha) = -\sqrt{2}$ d'on $\alpha = 3\pi/4$.

T_3. El polinomi característic de la matriu de la part lineal és (x^2-1), de manera que es tracte d'un lliscament o una simetria. Mirem els punts fixos. En resoldre l'equació $T_3(x,y) = (x,y)$ trobem $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$, de manera que tenim una recta de punts fixos i es tracte doncs d'una simetria respecte d'aquesta recta.

T_4. El polinomi característic de la matriu de la part lineal és (x^2-1), de manera que es tracte d'un lliscament o una simetria. Mirem els punts fixos. En resoldre l'equació $T_4(x,y) = (x,y)$ trobem que aquest sistema és incompatible i, per tant, no hi ha punts fixos i es tracte d'un lliscament. Per trobar la recta invariant busquem els vectors propis (possibles direccions d'aquestes rectes).

Vector propi de valor propi $\lambda = 1$. Resolem

$$\begin{pmatrix} -3/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i obtenim $u = (1, \sqrt{3})$.

A continuació busquem un punt P tal que $\overrightarrow{Pf(P)} = \mu u$, és a dir, resolem el sistema

$$\begin{pmatrix} -3/2 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}+2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 1+2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

i obtenim $y = \sqrt{3}x + 2$, cosa que vol dir que aquesta recta és invariant.

El mòdul de lliscament és

$$\tau(T_4) = \langle \overrightarrow{Pf(P)}, \frac{u}{|u|} \rangle = 4.$$

Equivalentment, si prenem un punt P de la recta invariant, per exemple $P = (0,2)$ llavors $T_4(P) = (2, 2+2\sqrt{3})$ i

$$\tau(T_4) = |\overrightarrow{Pf(P)}| = 4.$$

Podem comprovar finalment que, com és obvi, no hi ha més rectes invariants.

Vector propi de valor propi $\lambda = -1$. Resolem

$$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i obtenim $v = (\sqrt{3}, -1)$.

A continuació busquem un punt P tal que $\overrightarrow{Pf(P)} = \mu v$, és a dir, resolem el sistema

$$\begin{pmatrix} -3/2 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}+2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 1+2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sistema que no té solució.

Exercici 2.23: Calculeu els angles de Jordan que formen els subespais F, G de $\mathbb{R}^4$ donats per

$$\begin{aligned} F &= \langle (1,0,1,0), (0,1,0,-1) \rangle, \\ G &= \langle (1,1,0,0), (1,-1,1,1) \rangle. \end{aligned}$$

Solució: Prenem una base ortonormal $B = (u_1, u_2)$ de F. Com que els vectors $(1,0,1,0), (0,1,0,-1)$ ja són ortogonals, no ens cal aplicar Gram-Schmidt sinó simplement normalitzar:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0), u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)$$

De la mateixa manera, una base ortonormal $B' = (v_1, v_2)$ de G és

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0), v_2 = \frac{1}{2}(1,-1,1,1)$$

Podem calcular $\pi_G(u_1), \pi_G(u_2)$ usant la base ortonormal B' de G:

$$\begin{aligned} \pi_G(u_1) &= \langle u_1, v_1 \rangle v_1 + \langle u_1, v_2 \rangle v_2 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 \\ \pi_G(u_2) &= \langle u_2, v_1 \rangle v_1 + \langle u_2, v_2 \rangle v_2 = \frac{1}{2} v_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 \end{aligned}$$

Anàlogament calculem $\pi_F(v_1), \pi_F(v_2)$ usant la base ortonormal B de F:

$$\begin{aligned} \pi_F(v_1) &= \langle v_1, u_1 \rangle u_1 + \langle v_1, u_2 \rangle u_2 = \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_2 \\ \pi_F(v_2) &= \langle v_2, u_1 \rangle u_1 + \langle v_2, u_2 \rangle u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} u_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} u_2 \end{aligned}$$

Deduim que les matrius $M(\pi_G, B, B'), M(\pi_F, B', B)$ associades a $\pi_G \colon F \to G$ i $\pi_F \colon G \to F$ en les bases B, B' són

$$M(\pi_G, B, B') = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad M(\pi_F, B', B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Per tant, l'endomorfisme $P = \pi_F \circ \pi_G \colon F \to F$, en la base B té matriu associada

$$M(P, B, B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Els valors propis d'aquesta matriu són $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}$. Per tant els angles de Jordan entre F i G són $\theta_1 = \arccos(\sqrt{\lambda_1}) = 0$ i $\theta_2 = \arccos(\sqrt{\lambda_2}) = \frac{\pi}{4}$.

Exercici 2.24: Calculeu els angles de Jordan que formen els subespais F, G de $\mathbb{R}^4$ donats per

$$\begin{aligned} F &= \langle (1,2,0,0), (3,4,0,1) \rangle, \\ G &= \langle (5,0,1,2), (6,1,1,1) \rangle. \end{aligned}$$

Solució: A teoria s'ha vist que l'endomorfisme P de F donat per

$$P = \pi_F \circ \pi_G$$

on $\pi_F : G \longrightarrow F$ i $\pi_G : F \longrightarrow G$ són les respectives projeccions ortogonals, és autoadjunt. Els seus valors propis són els cosinus dels angles de Jodan.

Per tant, només hem d'estudiar l'endomorfisme P.

Primer de tot calculem $F^\perp$ i $G^\perp$. Resolent

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 3x + 4y + t &= 0 \end{aligned}$$

obtenim $F^\perp = \langle(-2, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0)\rangle$.

Resolent

$$\begin{aligned} 5x + z + 2t &= 0 \\ 6x + y + z + t &= 0 \end{aligned}$$

obtenim $G^\perp = \langle(1, -1, -5, 0), (0, 1, -2, 1)\rangle$.

Per calcular $\pi_G(1, 2, 0, 0)$ posem (descomponem $(1, 2, 0, 0)$ a $G \oplus G^\perp$)

$$(1, 2, 0, 0) = a(5, 0, 1, 2) + b(6, 1, 1, 1) + c(1, -1, -5, 0) + d(0, 1, -2, 1)$$

i obtenim $a = -23/27, b = 25/27$ i per tant

$$\pi_G(1, 2, 0, 0) = \frac{1}{27}(35, 25, 2, -21).$$

Per calcular $\pi_G(3, 4, 0, 1)$ posem

$$(3, 4, 0, 1) = a(5, 0, 1, 2) + b(6, 1, 1, 1) + c(1, -1, -5, 0) + d(0, 1, -2, 1)$$

i obtenim $a = -32/27, b = 43/27$ i per tant

$$\pi_G(3, 4, 0, 1) = \frac{1}{27}(98, 43, 11, -21).$$

Per calcular $\pi_F(\pi_G(1, 2, 0, 0))$ posem (descomponem $\pi_G(1, 2, 0, 0)$ a $F \oplus F^\perp$)

$$\frac{1}{27}(35, 25, 2, -21) = a(1, 2, 0, 0) + b(3, 4, 0, 1) + c(-2, 1, 0, 2) + d(0, 0, 1, 0)$$

i obtenim $a = 62/81, b = -5/81$ i per tant

$$P(1, 2, 0, 0) = \pi_F(\pi_G(1, 2, 0, 0)) = \frac{1}{81}(47, 104, 0, -5).$$

Per calcular $\pi_F(\pi_G(3, 4, 0, 1))$ posem (descomponem $\pi_G(3, 4, 0, 1)$ a $F \oplus F^\perp$)

$$\frac{1}{27}(98, 43, 11, -21) = a(1, 2, 0, 0) + b(3, 4, 0, 1) + c(-1, 1, 0, 2) + d(0, 0, 1, 0)$$

i obtenim $a = -37/81, b = 67/81$ i per tant

$$P(3, 4, 0, 1) = \pi_F(\pi_G(3, 4, 0, 1)) = \frac{1}{81}(164, 194, 0, 67).$$

Per trobar els valors propis de P escrivim la seva matriu respecte la base donada de F, és a dir $(u = (1, 2, 0, 0), v = (3, 4, 0, 1))$. Resolent el sistema

$$\begin{aligned} P(u) &= xu + yv \\ P(v) &= zu + tv \end{aligned}$$

és a dir

$$\begin{aligned} \frac{1}{81}(47, 104, 0, -5) &= x(1, 2, 0, 0) + y(3, 4, 0, 1) \\ \frac{1}{81}(164, 194, 0, 67) &= z(1, 2, 0, 0) + t(3, 4, 0, 1) \end{aligned}$$

Obtenim

$$x = \frac{62}{81}, y = \frac{-5}{81}, z = \frac{-37}{81}, t = \frac{67}{81}.$$

El polinomi característic de la matriu

$$\frac{1}{81}\begin{pmatrix} 62 & -37 \\ -5 & 67 \end{pmatrix}$$

és

$$x^2 - \frac{43}{27}x + \frac{49}{81}$$

que té valors propis

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{54}(43 - \sqrt{85}) \simeq 0.6255 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{54}(43 + \sqrt{85}) \simeq 0.967 \end{aligned}$$

Els angles de Jordan, compleixen per definició, que $\cos^2(\theta_i) = \lambda_i$, de manera que tenim $\theta_1 = 0.658$ radians i $\theta_2 = 0.182$ radians.

Referències

[1] Agustí Reventós, *Geometria Projectiva*, Materials UAB, n. 85, 2000.

[2] ———, *Affine Maps, Euclidean Motions and Quadrics*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2011, traducció de *Afinitats, Moviments i Quàdriques*, Manuals UAB, Vol. 50, 2008.

3 Geometria projectiva

3.1 Exercicis introductoris

Exercici 3.1: **a)** Comproveu que la projecció usual

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}P^1$$

restringida a S^1 no és bijectiva.

b) Considereu la circumferència $\mathbb{S}$ de centre $(1/2, 0)$ i radi $1/2$. Comproveu que la restricció de la projecció anterior a aquesta circumferència dóna una bijecció entre $\mathbb{S} \setminus \{(0,0)\}$ i els punts *finits* de $\mathbb{R}P^1$. Això permet estendre l'aplicació anterior, i definir una bijecció entre $\mathbb{S}$ i $\mathbb{R}P^1$, enviant $(0,0)$ a l'infinit. Sabríeu descriure analíticament aquesta identificació?

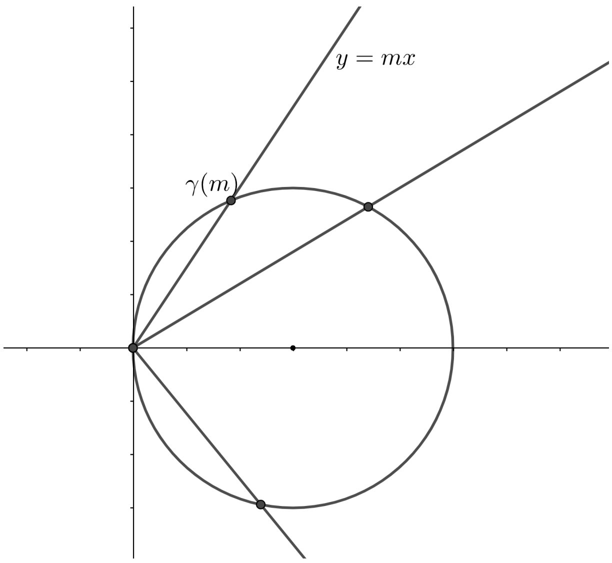
c) Sabríeu fer una identificació semblant entre una esfera i $\mathbb{C}P^1$?

Solució: a) Els punts antipodals donen lloc al mateix punt de $\mathbb{R}P^1$. Aquesta aplicació aplica (x, y) a la seva classe d'equivalència per la relació és $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ si i només si existeix $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(x_1, y_1) = \lambda(x_2, y_2)$. Les classes d'equivalència es denoten per $[x : y]$. És clar que $[x : y] = [-x : -y]$.

b) Les rectes per l'origen, $y = mx$, tallen aquesta circumferència en punts

$$\gamma(m) = (\frac{1}{1+m^2}, \frac{m}{1+m^2})$$

Aquesta nova parametrització d'aquest cercle permet identificar els punts de coordenada m, $\gamma(m)$, amb la direcció de $\mathbb{R}^2$ donada per la recta de pendent m. Però $\gamma(m)$ no agafa el punt $(0,0)$. A aquest punt se li fa correspondre la direcció que faltava, la recta vertical, és a dir $m = \infty$



Així l'aplicació $\mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{R}P^1$ està donada per

$$\gamma(m) \mapsto [1, m], \quad (0,0) \mapsto [0,1].$$

c) Recordem que $\mathbb{C}P^1$ és $\mathbb{C}^2 \setminus (0,0)/\sim$ on la relació d'equivalència és $(z_1, w_1) \sim (z_2, w_2)$ si i només si existeix $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $(z_1, w_1) = \lambda(z_2, w_2)$. Les classes d'equivalència es denoten per $[z : w]$. Si $z \neq 0$ aquesta classe és igual a $[1 : w/z]$. de manera que hi ha una bijecció entre $\mathbb{C}P^1 \setminus [0, z]$ i $\mathbb{C}$. A cada classe $[z : w]$ li associem el nombre complex w/z. Com $\mathbb{C}$ és $\mathbb{R}^2$ i aquest és, a través de la projecció estereogràfica S^2 menys el pol nord resulta que $\mathbb{C}P^1$ menys un punt és bijectiu amb S^2 menys un punt. Doncs apliquem el punt que falta a $\mathbb{C}P^1$ al que falta a S^2 i hem acabat.

Com la inversa de la projecció estereogràfica està donada per

$$\varphi(z) = \varphi(a+bi) = \left(\frac{2a}{a^2+b^2+1}, \frac{2b}{a^2+b^2+1}, \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1}\right)$$

l'aplicació que busquem entre $\mathbb{C}P^1$ i S^2 és (aquesta fórmula aplicada a w/z més l'observació de que si posem $w/z = a+bi$ llavors $|w|^2+|z|^2 = |z|^2(a^2+b^2+1)$ i $a = \mathcal{R}e(w\bar{z}/|z|^2$, $b = \mathcal{I}m(w\bar{z}/|z|^2)$,

$$[z:w] \longrightarrow \frac{1}{\|w\|^2+\|z\|^2}\Big(2\mathcal{R}e(w\bar{z}), 2\mathcal{I}m(w\bar{z}), \|w\|^2-\|z\|^2\Big)$$

Exercici 3.2: A $\mathbb{R}P^2$, expresseu el punt $Q = p(-1,4,2)$ en el sistema de coordenades projectiu determinat per

$$P_0 = p(0,1,1), \quad P_1 = p(1,1,0), \quad P_2 = p(1,1,1), \quad P_3 = p(0,2,1).$$

Solució: Prenem P_3 com a punt unitat. Tenim

$$(0,2,1) = \lambda(0,1,1) + \mu(1,1,0) + \nu(1,1,1),$$

d'on $\lambda = 2$, $\mu = 1$, $\nu = -1$. Per tant la base és, llevat d'un únic escalar, $\tilde{e}_0 = (0,2,2)$, $\tilde{e}_1 = (1,1,0)$, $\tilde{e}_2 = (-1,-1,-1)$; llavors

$$(-1,4,2) = \alpha(0,2,2) + \beta(1,1,0) + \gamma(-1,-1,-1),$$

d'on $\alpha = 5/2$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$; per tant, en el sistema de coordenades projectiu $\varphi : P(E) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ associat a $\tilde{e}_0$, $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$ el punt Q té coordenades

$$\varphi(Q) = [5/2, 2, 3] = [5,4,6].$$

Per abús de notació s'escriu també $Q = [5,4,6]$, $P_0 = [0,1,1]$, etc.

Exercici 3.3: Donats els punts $A = [0,0,1]$, $B = [0,1,0]$, $C = [1,0,0]$, $D = [1,1,1]$, trobeu la projectivitat $\tilde{f}$ tal que $\tilde{f}(A) = B$, $\tilde{f}(B) = C$, $\tilde{f}(C) = D$ i $\tilde{f}(D) = A$. Trobeu els punts fixos quan $k = \mathbb{R}$ i quan $k = \mathbb{C}$.

Solució: Considero A, B, C, D com la primera referència projectiva, amb D com a punt unitat. Això vol dir que agafem la base $e_0 = (0,0,1)$, $e_1 = (0,1,0)$, $e_2 = (1,0,0)$ en la que $A = p(e_0)$, $B = p(e_1)$, $C = p(e_2)$ i $D = p(e_1+e_2+e_3)$.

Considero ara B, C, D, A com la segona referència projectiva amb A com punt unitat. Això vol dir que agafem la base $u_0 = \lambda(0,1,0)$, $u_1 = \mu(1,0,0)$, $u_2 = \nu(1,1,1)$ amb la condició $A = p(0,0,1) = p(u_0+u_1+u_2)$.

És a dir $\rho(0,0,1) = \lambda(0,1,0) + \mu(1,0,0) + \nu(1,1,1)$, d'on es dedueix $\lambda = \mu = -\nu$, és a dir que podem agafar com a base de la segona referència projectiva $u_0 = (0,1,0)$, $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (-1,-1,-1)$.

La projectivitat buscada és, doncs, la projectivització de l'aplicació lineal f definida per $f(e_i) = u_i$.

Respecte a la base canònica $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ tenim, doncs,

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= f(e_2) = u_2 = (-1,-1,-1) \\ f(0,1,0) &= f(e_1) = u_1 = (1,0,0) \\ f(0,0,1) &= f(e_0) = u_0 = (0,1,0), \end{aligned}$$

és a dir,

$$f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Busquem ara els punts fixos.

Observem que $P = p(v)$ és fix per a $\tilde{f}$ si $\tilde{f}(P) = p(f(v)) = P = p(v)$. Per tant P és fix per a $\tilde{f}$ si i només si $f(v) = \lambda v$, és a dir que *$P = p(v)$ és un punt fix de f si i només si v és vector propi de f.* El polinomi característic és $(x^2+1)(x+1)$; per tant, si $k = \mathbb{R}$, tenim únicament el vector propi $u = (1,0,1)$ corresponent al valor propi $x = -1$. Per tant el punt $p(1,0,1)$ és l'únic punt fix de $\tilde{f}$ sobre $\mathbb{R}$.

Sobre $\mathbb{C}$ tenim encara els vectors propis $(-i, -i+1, 1)$ i $(i, i+1, 1)$ corresponents als valors propis i i $-i$. Per tant $p(-i,-i+1,1)$ i $p(i,i+1,1)$ són també punts fixos de $\tilde{f}$ sobre $\mathbb{C}$.

Exercici 3.4: Calculeu:

a) L'equació de la recta que passa pels punts $[1, 0, 1]$ i $[0, 1, 1]$.

b) El punt d'intersecció de les rectes $\langle 0, 1, 0\rangle$ i $\langle 1, -1, 0\rangle$, on $\langle a, b, c\rangle$ denota la recta d'equació $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$.

Solució: a) Es tracte del subespai vectorial generat per $(1, 0, 1), (0, 1, 1)$. Per tant, és el conjunt de punts (x, y, z) que es poden escriure com

$$(x, y, z) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1),$$

igualtat que implica $x + y - z = 0$. La recta buscada és el projectivitat d'aquest subespai.

b) Només hem de resoldre el sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

per tant el punt d'intersecció és $[0, 0, 1]$.

Exercici 3.5: Descriviu els punts i les rectes de kP^1 i de kP^2 amb

a) $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;

b) $k = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Solució: a_1) kP^1 és en aquest cas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \setminus \{(0, 0)\}/\sim$. La relació d'equivalència $\sim$ és $(a, b) \sim (a', b')$ si i només si existeix $\lambda \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\lambda \neq 0$, tal que $(a', b') = \lambda(a, b)$. Com λ ha de ser forçosament igual a 1, cada parella (a, b) està relacionada només amb ella mateixa.

Els punts són doncs

$$[1, 0], [0, 1], [1, 1]$$

Les rectes són projectivitzats de plans per l'origen. Com només hi ha un pla, hi ha una única recta.

Resumint, kP^1 és una recta amb tres punts.

a_2). kP^2 és en aquest cas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \setminus \{(0, 0, 0)\}/\sim$. La relació d'equivalència $\sim$ és $(a, b, c) \sim (a', b', c')$ si i només si existeix $\lambda \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\lambda \neq 0$, tal que $(a', b', c') = \lambda(a, b, c)$. Com λ ha de ser forçosament igual a 1, cada terna (a, b, c) està relacionada només amb ella mateixa.

Els punts són doncs

$$[0, 0, 1], [0, 1, 0], [0, 1, 1], [1, 0, 0], [1, 0, 1], [1, 1, 0], [1, 1, 1]$$

Les rectes són projectivitzats de plans per l'origen. Per tant tindran equacions $ax + by + cz = 0$, amb $a, b, c \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. És a dir,

$$x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 0, x + z = 0, y + z = 0, x + y + z = 0$$

Com abans cada una d'elles conté tres punts. Per exemple $x+y+z = 0$ conté els punts $[0, 1, 1], [1, 0, 1], [1, 1, 0]$. I per cada punt passen tres rectes. Per exemple per $[1, 1, 0]$ passen les rectes $z = 0, x+y = 0, x+y+z = 0$. Resumint, kP^2 té set punts i set rectes.

b_1). kP^1 és en aquest cas $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \setminus \{(0, 0)\}/\sim$. La relació d'equivalència $\sim$ és $(a, b) \sim (a', b')$ si i només si existeix $\lambda \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\lambda \neq 0$, tal que $(a', b') = \lambda(a, b)$. Com λ ha de ser forçosament igual a 1 o 2, cada parella (a, b) està relacionada amb ella mateixa i una segona parella. Cada classe té doncs dos elements.

Els punts són, doncs,

$$[1, 0], [0, 1], [1, 1], [1, 2]$$

(observeu que $k \times k \setminus (0, 0)$ té 8 elements que s'agrupen de dos en dos al projectivitzar).

Anàlogament les rectes són

$$x = 0, y = 0, x + 2y = 0, x + y = 0$$

i casa una d'elles conté només un únic punt.

Resumint, kP^1 amb $k = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, té quatre punts i quatre rectes (aquests mateixos punts).

b_2). kP^2 és en aquest cas $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \setminus \{(0,0,0)\}/\sim$. La relació d'equivalència $\sim$ és $(a,b,c) \sim (a',b',c')$ si i només si existeix $\lambda \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\lambda \neq 0$, tal que $(a',b',c') = \lambda(a,b,c)$. Com λ ha de ser forçosament igual a 1 o 2, cada terna (a,b,c) està relacionada amb ella mateixa i una segona terna. Cada classe té doncs dos elements. Hi ha doncs $(27-1)/2 = 13$ classes. Els punts són

$$[0,0,1],[0,1,0],[0,1,1],[1,0,0],[1,0,1],[1,1,0],[1,1,1],$$
$$[0,1,2],[1,0,2],[1,1,2],[1,2,1],[1,2,2],[2,1,0],$$

Les rectes són de la forma $ax+by+cz=0$, amb $a,b,c \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. El mateix argument d'abans mostra que hi ha 13 rectes,

$$z=0, y=0, y+z=0, x=0, x+z=0, x+y=0, x+y+z=0,$$
$$y+2z=0, x+2z=0, x+y+2z=0, x+2y+z=0, x+2y+2z=0, 2x+y=0,$$

Cada recta té quatre punts. Per exemple $[0,1,0],[1,0,1],[1,1,1],[1,2,1]$ pertanyen a $x+2z=0$. Per cada punt passen quatre rectes. Per exemple per $[1,1,1]$ passen $x+y+z=0, y+2z=0, x+2z=0, 2x+y=0$.

Resumint, kP^2 amb $k = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, té 13 punts i 13 rectes. Cada recta té quatre punts i per cada punt passen quatre rectes.

Exercici 3.6: Trobeu les coordenades del punt de $\mathbb{R}P^1$, $A = [-2,1]$, respecte del sistema de referència projectiu

$$P_0 = [-1,1], P_1 = [4,1]; P_2 = [1,1]$$

Solució: Que $(P_0, P_1; P_2)$ sigui una referència projectiva vol dir que P_2 és el punt unitat. És a dir, hem de determinar α, β tals que

$$\rho(1,1) = \alpha(-1,1) + \beta(4,1)$$

que permet agafar $\alpha = 3$ $\beta = 2$. Així $P_0 = [-3,3]$, $P_1 = [8,2]$ de manera que les coordenades de A són

$$\rho(-2,1) = x(-3,3) + y(8,2)$$

que permet agafar $x = 4, y = -1$. Les coordenades de A respecte aquesta referència projectiva són doncs $[4,-1]$.

Podem donar la fórmula general de canvi de referència posant $A = [a,b]$. Llavors

$$\rho(a,b) = x(-3,3) + y(8,2)$$

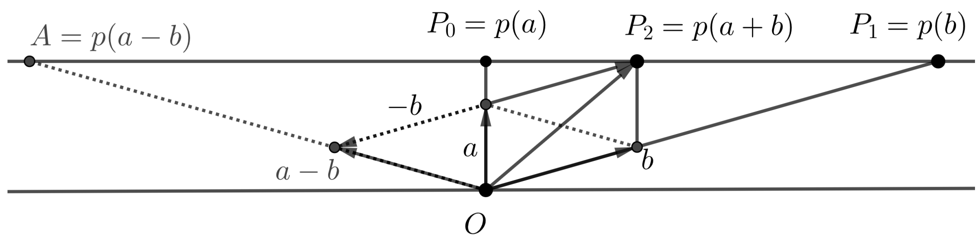
que dóna $x = 2(a-4b), y = -3(a+b)$.

Exercici 3.7: Donats punts P_0, P_1, P_2 d'un sistema de referència projectiu R de $\mathbb{R}P^1$, construïu gràficament els punts A,B,C que tenen coordenades

$$A = [1,-1], \quad B = [2,-1], \quad C = [3,2]$$

en la referència R.

Solució: Dibuixem P_0, P_1, P_2 en la recta afí $y = 1$. Tracem la paral·lela a OP_1 per P_2. El punt de tall d'aquesta recta amb OP_0 dóna lloc al vector a tal que $P_0 = p(a)$. Tracem la paral·lela a OP_0 per P_2. El punt de tall d'aquesta recta amb OP_1 dóna lloc al vector b tal que $P_1 = p(b)$. D'aquesta manera, per la llei del paral·lelogram, $P_2 = p(a+b)$.



Per construir A, que representarem també sobre la recta $y = 1$, dibuixem $-b$ al final del vector a i unim amb l'origen. Dir $A = [1, -1]$ vol dir $A = p(a - b)$. Per tant prolongant el vector $a - b$ fins trobar la recta $y = 1$ tenim dibuixat A.

Els altres punts es dibuixen anàlogament.

Exercici 3.8: Trobeu les equacions que ens donen les coordenades d'un punt arbitrari del pla projectiu $\mathbb{R}P^2$ respecte als següents sistemes de referència:

a) $[1, 1, 1], [0, 0, 1], [-1, 2, 1]; [0, 3, 1]$.

b) $[0, 2, 3], [2, 1, 0], [0, 1, 4]; [5, 0, 12]$.

Solució: a) Imposem la condició de punt unitat.

$$\alpha(1, 1, 1) + \beta(0, 0, 1) + \gamma(-1, 2, 1) = \rho(0, 3, 1)$$

i obtenim $\alpha = -\beta = \gamma$, de manera que escriurem (prenem $\alpha = 1$) $[1, 1, 1], [0, 0, -1], [-1, 2, 1]; [0, 3, 1]$ (les coordenades del quart punt són la suma de les coordenades dels tres primers punts). Llavors, donat un punt P que en coordenades respecte la base canònica s'escriu com $P = [x, y, z]$ el volem escriure com

$$P = p(x'(1, 1, 1) + y'(0, 0, -1) + z'(-1, 2, 1))$$

que es pot escriure matricialment

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

i per tant

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \lambda \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

És a dir, el punt $P = [x, y, z]$ (respecte referència canònica) s'escriu com $P = [2x + y, x + 2y - 3z, -x + y]$ respecte el nou sistema de referència.

b) Left to the reader.

Exercici 3.9: Trobeu la imatge de la recta l respecte a la projectivitat del pla projectiu real donada per la matriu P:

a)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad l = \langle 2, 0, -1 \rangle$$

b)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad l = \langle 2, 0, 1 \rangle$$

Solució: a) Només hem d'escriure la recta com

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

i la projectivitat

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

per tant

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0$$

i.e., $6x - y - 13z = 0$.

b) Left to the reader.

3.2 Raó doble

Exercici 3.10: Donats els punts A, B, C, D, trobeu (A,B,C,D), (B,C,D,A), (D,B,C,A) en els casos següents:

a) $A = [1,1]$, $B = [i,1]$, $C = [-i,i]$, $D = [1-i,1+i]$ en $\mathbb{C}P^1$;

b) $A = [1,0,1]$, $B = [1,2,1]$, $C = [1,3,1]$, $D = [1,-1,1]$ en $\mathbb{R}P^2$;

c) $A = [1,2,4]$, $B = [5,0,4]$, $C = [3,1,4]$, $D = [2,-1,0]$ en $\mathbb{R}P^2$.

Solució: a) Només calcularem (A,B,C,D) ja que el valor d'aquesta raó doble al permutar els punts és ben conegut ([1], p 84).

Recordem que per calcular (A,B,C,D) hem de trobar representants a i b de A i B respectivament (és a dir, $A = p(a)$, $B = p(b)$ amb p la projecció canònica $p : E \longrightarrow P(E)$) tals que $C = p(a+b)$. Llavors hem de trobar μ tal que $D = p(\mu a + b)$ i aquesta μ és la raó doble buscada, és a dir, $\mu = (A,B,C,D)$.

Posem $A = p(1,1), B = p(i,1)$ i busquem $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tals que

$$\alpha(1,1) + \beta(i,1) = \rho(-i,i), \quad \rho \in \mathbb{C}$$

Obtenim $\beta(i-1) = -2\alpha i$, de manera que podem prendre $\alpha = i-1, \beta = -2i$ i tindrem $A = p(a), B = p(b)$ amb $a = (i-1, i-1), b = (2,-2i)$, i $C = p(a+b)$. Llavors només hem d'escriure $D = p(\mu a + b)$ i μ és la raó simple buscada. Posem

$$\begin{cases} \lambda(1-i) = \mu(i-1) + 2 \\ \lambda(1+i) = \mu(i-1) - 2i \end{cases}$$

i obtenim $\lambda = -1 + i$, $\mu = 2$. Per tant $(A,B,C,D) = 2$.

b) Busquem $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tals que

$$\alpha(1,0,1) + \beta(1,2,1) = \rho(1,3,1), \quad \rho \in \mathbb{R}$$

i obtenim $\beta = -3\alpha, \rho = -2\alpha$. Prenent $\alpha = 1$ tenim $A = p(a), B = p(B)$ amb $a = (1,0,1), b = (-3,-6,-3)$, i $C = p(a+b)$. Llavors només hem d'escriure $D = p(\mu a + b)$ i μ és la raó simple buscada. Posem

$$\begin{cases} \lambda(1) = \mu - 3 \\ \lambda(-1) = -6 \\ \lambda(1) = \mu - 3 \end{cases}$$

i obtenim $\mu = 9$. Per tant $(A,B,C,D) = 9$.

c) Left to the reader.

Exercici 3.11: Comproveu que amb les definicions donades aquest curs és compleix que

$$(A,B,C,\infty) = (C,A,B)$$

Solució: Recordem que

$$\overrightarrow{CA} = (C,A,B)\overrightarrow{CB}$$

i que si $A = p(a), B = p(b), C = p(a+b), D = p(\mu a + b)$, p la projecció canònica $E \longrightarrow P(E)$ llavors

$$(A,B,C,D) = \mu.$$

Fixem com infinit $H = p(V)$ amb $V = \{(x_1, \ldots, x_n, 0)\}$[8] i descomponem $E = V \oplus \langle e_{n+1} \rangle$ amb $e_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1)$. Recordem $\dim V = \dim E - 1$.

La notació (A, B, C, ∞) vol dir (A, B, C, D) on D és el punt d'intersecció de la recta AB amb l'hiperplà de l'infinit.

Anem a relacionar ara la raó doble amb la descomposició $E = V \oplus \langle e_{n+1} \rangle$. Si posem $A = p(a)$ hi ha un únic múltiple de a, a_0, tal que $a_0 = a_V + e_{n+1}$, amb $a_V \in V$. És a dir, amb coeficient 1 sobre $\langle e_{n+1} \rangle$. Anàlogament, si $B = p(b)$ hi ha un únic múltiple de b, b_0, tal que $b_0 = b_V + e_{n+1}$, amb $b_V \in V$. Així $A = p(a_0)$ i $B = p(b_0)$. Pel mateix motiu posarem $C = p(c_0)$ amb $c_0 = c_V + e_{n+1}$. Simplement estem agafant els representants amb darrera coordenada igual a 1 (com són punts afins la darrera coordenada és diferent de zero).

Ara hem de trobar, doncs, α, β tals que

$$c_V + e_{n+1} = \alpha(a_V + e_{n+1}) + \beta(b_V + e_{n+1}),$$

és a dir,

$$\begin{cases} \alpha a_V + \beta b_V = c_V \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

i prendre com representants de A i B respectivament $a = \alpha(a_V + e_{n+1})$ i $b = \beta(b_V + e_{n+1})$. Observem que la primera igualtat té sentit ja que els vectors $a_V + e_{n+1}, b_V + e_{n+1}, c_V + e_{n+1}$ són linealment dependents, per estar A, B, C alineats.

Si volem imposar ara que D sigui el punt de l'infinit, quan l'escrivim com $D = p(\mu a + b)$, on μ és, per definició, la raó doble, hem d'imposar que en descompondre aquest vector a $E = V \oplus \langle e_{n+1} \rangle$ no tingui component en e_{n+1} (última coordenada 0).

Com

$$\mu a + b = \mu(\alpha(a_V + e_{n+1})) + \beta(b_V + e_{n+1})$$

ha de ser

$$\mu = -\beta/\alpha$$

és a dir

$$(A, B, C, \infty) = -\beta/\alpha$$

Per calcular la raó simple (C, A, B) només s'ha d'observar que $\overrightarrow{CA} = a_V - c_V$ ([1], p. 39) de manera que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} &= a_V - c_V = a_V - (\alpha a_V + \beta b_V) = \beta(a_V - b_V) \\ \overrightarrow{CB} &= b_V - c_V = b_V - (\alpha a_V + \beta b_V) = \alpha(-a_V + b_V) \end{aligned}$$

i per tant

$$(C, A, B) = -\beta/\alpha = \mu = (A, B, C, \infty).$$

Observació. Utilitzant la fórmula de la raó doble en coordenades projectives[9]

$$(A, B, C, D) = \frac{c - a}{c - b} : \frac{d - a}{d - b}, \tag{8}$$

el fet de que $\infty/\infty = 1$ ([1], p. 76) i els càlculs anterior tenim que podem pensar la raó doble com un quocient de raons simples (quan té sentit parlar d'aquestes, és a dir, en context afí)

$$(A, B, C, D) = \frac{(C, A, B)}{(D, A, B)}$$

Observació Observem finalment que C és el punt mitjà entre A i B ($(C, A, B) = -1$) si i només si ∞ és el quart harmònic de A, B, C

[8] De fet podem agafar un V arbitrari.

[9] Això vol dir fixar tres punts i determinacions seves tals que $P_0 = p(e_0), P_1 = p(e_1), P_2 = p(e_0 + e_1)$. Llavors la coordenada projectiva de qualsevol punt X de la recta determinada per aquests punts és la raó doble $\mu = (P_0, P_1, P_2, X)$, equivalentment $X = p(\mu e_0 + e_1)$.

Exercici 3.12: Teoremes de Menelao i Ceva.

a) *(Teorema de Ceva, G. (1647-1736)).* Sigui $\triangle O_1O_2O_3$ un triangle, A_1 un punt sobre el costat O_2O_3, A_2 un punt sobre el costat O_1O_3 i A_3 un sobre O_1O_2. Considerem un punt I qualsevol que no estigui en cap dels costats i designem per I_1 la intersecció de la recta IO_1 amb el costat O_2O_3; de forma anàloga introduïm I_2, I_3.

Demostreu que les rectes O_iA_i són concurrents si i només si es compleix

$$(O_2, O_3, I_1, A_1)(O_3, O_1, I_2, A_2)(O_1, O_2, I_3, A_3) = 1$$

Aquestes rectes es diuen cevianes.[10]

b) *(Teorema de Menelao (100 d.c.)).* Amb les dades de a) proveu que una condició necessària i suficient perquè els punts A_i estiguin alineats és que:

$$(O_2, O_3, I_1, A_1)(O_3, O_1, I_2, A_2)(O_1, O_2, I_3, A_3) = -1$$

c) Deduïu, d'aquests dos teoremes, els teoremes de Ceva i Menelao afins clàssics. En el primer cas, teorema de Ceva, convé pensar I com el baricentre i Menelao es dedueix de Ceva.

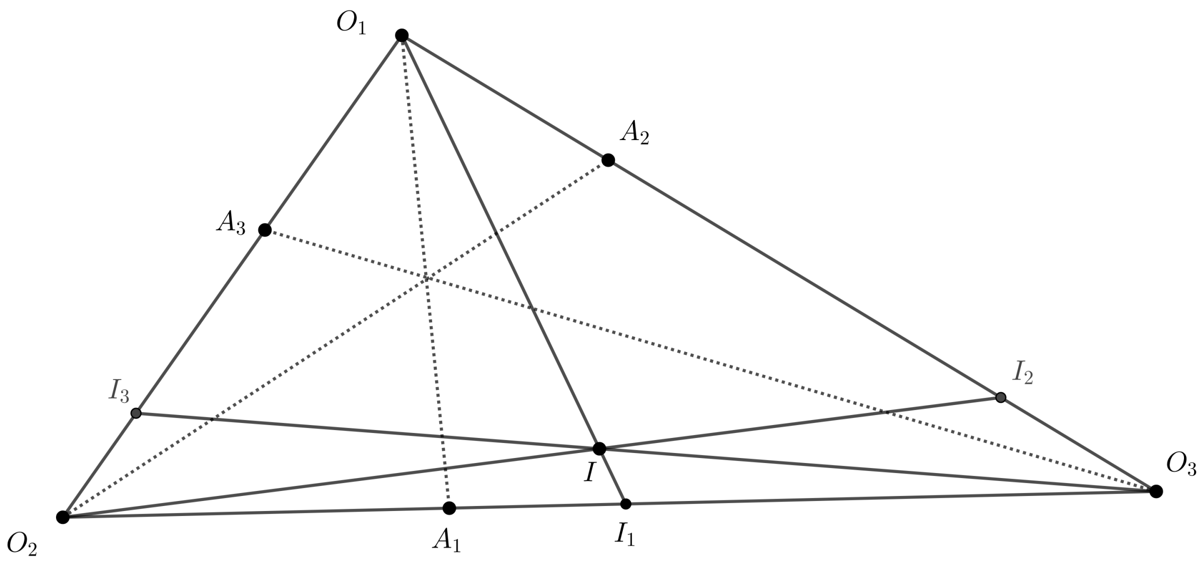
Solució: a) i b) Prenem la referència projectiva $(O_1, O_2, O_3; I)$. Això vol dir que $O_1 = [1, 0, 0], O_2 = [0, 1, 0], O_3 = [0, 0, 1], I = [1, 1, 1]$.

Per tant $A_1 = [0, 1, a_1], I_1 = [0, 1, b]$ però en imposar que I, O_1, I_1 estiguin alineats

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = 1 - b = 0$$

resulta que $I_1 = [0, 1, 1]$.

Anàlogament calcularíem les coordenades de I_2, I_3 obtenint $I_2 = [1, 0, 1], I_3 = [1, 1, 0]$.



Per calcular la raó doble (O_2, O_3, I_1, A_1) prenem $a = (0, 1, 0), b = (0, 0, 1)$ de manera que $O_2 = p(a), O_3 = p(b), I_1 = p(a + b)$ i ara hem d'escriure $A_1 = p(\mu a + b)$ i aquesta μ serà la raó doble buscada. Escrivint aquesta darrera igualtat en coordenades (la segona i la tercera) tenim que existeix λ tal que

$$\begin{cases} \lambda = \mu \\ \lambda a_1 = 1 \end{cases}$$

[10]Trobat a internet: Según Agustí Reventós Tarrida[Affine Maps, Euclidean Motions and Quadrics], el término ceviana fue introducido por Auguste Poulain en 1888, Journal de mathematiques elementaires, 1888, p. 275. Sur la terminologie de la géométrie du triangle

per tant
$$\mu = (O_2, O_3, I_1, A_1) = a_1^{-1}$$

Per calcular la raó doble (O_3, O_1, I_2, A_2) prenem $a = (0,0,1), b = (1,0,0)$ de manera que $O_3 = p(a), O_1 = p(b), I_2 = p(a+b)$ i ara hem d'escriure $A_2 = p(\mu a + b)$ i aquesta μ serà la raó doble buscada. Escrivint aquesta darrera igualtat en coordenades (la primera i la tercera), posant $A_2 = [1, 0, a_2]$, tenim que existeix λ tal que
$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda a_2 = \mu \end{cases}$$
per tant
$$\mu = (O_2, O_3, I_1, A_1) = a_2$$

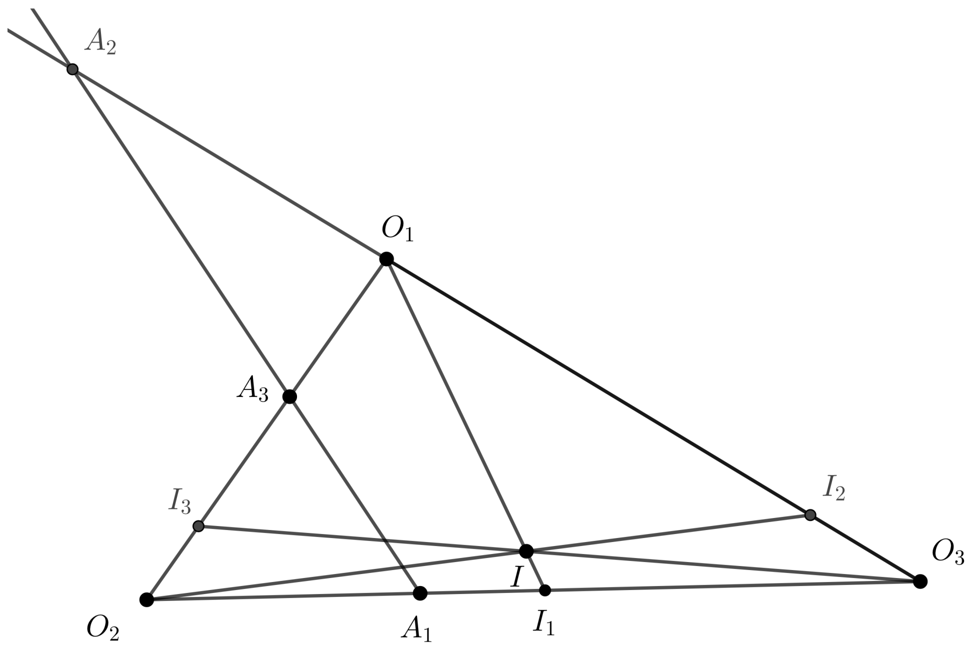
Per calcular la raó doble (O_1, O_2, I_3, A_3) prenem $a = (1,0,0), b = (0,1,0)$ de manera que $O_1 = p(a), O_2 = p(b), I_3 = p(a+b)$ i ara hem d'escriure $A_3 = p(\mu a + b)$ i aquesta μ serà la raó doble buscada. Escrivint aquesta darrera igualtat en coordenades (la primera i la segona), posant $A_3 = [1, a_3, 0]$, tenim que existeix λ tal que
$$\begin{cases} \lambda = \mu \\ \lambda a_3 = 1 \end{cases}$$
per tant
$$\mu = (O_2, O_3, I_1, A_1) = a_3^{-1}$$

Fins aquí el càlcul és el mateix en els apartats a) i b) del problema. A partir d'aquí separem els casos.

a) Ara hem d'imposar que les rectes O_iA_i es tallen en un punt, diguem-li $M = [m, n, p]$.

Igualant a zero els determinants
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & a_3 & 0 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0$$
obtenim
$$a_2 = a_1 a_3$$
i per tant el producte de les tres raons dobles calculades es igual a 1, com volíem veure.

b) Ara hem d'imposar que els punts A_i estiguin alineats.
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & a_1 \\ 1 & 0 & a_2 \\ 1 & a_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$
d'on
$$a_2 = -a_1 a_3$$
i per tant el producte de les tres raons dobles és -1.



c) Tenint en compte la relació entre raó simple i raó doble, la igualtat demostrada a l'apartat a) s'escriu

$$\frac{(I_1,O_2,O_3)}{(A_1,O_2,O_3)}\frac{(I_2,O_3,O_1)}{(A_2,O_3,O_1)}\frac{(I_3,O_1,O_2)}{(A_3,O_1,O_2)}=1$$

i com els numeradors són tots tres iguals a -1, quan I és el baricentre, tenim el teorema de Ceva clàssic que diu que les rectes O_iA_i són concurrents si i només si

$$(A_1,O_2,O_3)(A_2,O_3,O_1)(A_3,O_1,O_2)=-1.$$

Per deduir el teorema de Menelao clàssic a partir de l'apartat b) observem que la fórmula d'aquest apartat (els A_i alineats) es pot escriure com

$$\frac{(I_1,O_2,O_3)}{(A_1,O_2,O_3)}\frac{(I_2,O_3,O_1)}{(A_2,O_3,O_1)}\frac{(I_3,O_1,O_2)}{(A_3,O_1,O_2)}=-1$$

però el numerador, pel teorema de Ceva, és igual a -1 i per tant el denominador és igual a 1, que és el teorema de Menelao clàssic: Tres punts A_1,A_2,A_3, cadascun d'ells sobre un costat d'un triangle, estan alineats si i només si

$$(A_2,O_3,O_1)(A_3,O_1,O_2)(A_1,O_2,O_3)=1.$$

Exercici 3.13: Donades les rectes a,b,c,d, trobeu (a,b,c,d), (a,d,b,c), (d,c,b,a) en els casos següents:

a) $a: x_1-2x_2+x_3=0$, $b: -x_2+x_3=0$, $c: x_1-x_3=0$, $d: x_1-x_2=0$;

b) $a: x_2=0$, $b: x_1-x_2=0$, $c: 3x_1-x_2=0$, $d: 5x_1-x_2=0$.

Solució: a) Degut a l'isomorfisme entre els punts del dual i l'espai d'hiperplans (en aquest cas, rectes)

$$\begin{array}{ccc} P(E^*) & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ p(\omega) & \mapsto & \ker(\omega) \end{array}$$

comencem trobant primerament les formes $\omega_a,\omega_b,\omega_c,\omega_d$ el nucli de les quals determina respectivament les rectes a,b,c,d, donades.

Recta a. Aquesta recta està donada pel projectivitzat de l'espai vectorial de dimensió 2 generat per $\langle(1,0,-1),(1,1,1)\rangle$. Si escrivim $\omega_a=Ae_1^*+Be_2^*+Ce_3^*$ (e_i^* base dual de la canònica) i imposem $\omega_a(1,0,-1)=\omega_a(1,1,1)=0$ obtenim

$$\omega_a=[1,-2,1]$$

Recta b. Aquesta recta està donada pel projectivitzat de l'espai vectorial de dimensió 2 generat per $\langle(0,1,1),(1,1,1)\rangle$. Si escrivim $\omega_b = Ae_1^* + Be_2^* + Ce_3^*$ i imposem $\omega_b(0,1,1) = \omega_b(1,1,1) = 0$ obtenim

$$\omega_b = [0, 1, -1]$$

Recta c. Aquesta recta està donada pel projectivitzat de l'espai vectorial de dimensió 2 generat per $\langle(1,0,1),(1,1,1)\rangle$. Si escrivim $\omega_c = Ae_1^* + Be_2^* + Ce_3^*$ i imposem $\omega_c(1,0,1) = \omega_c(1,1,1) = 0$ obtenim

$$\omega_c = [1, 0, -1]$$

Recta d. Aquesta recta està donada pel projectivitzat de l'espai vectorial de dimensió 2 generat per $\langle(1,1,0),(1,1,1)\rangle$. Si escrivim $\omega_d = Ae_1^* + Be_2^* + Ce_3^*$ i imposem $\omega_d(1,1,0) = \omega_c(1,1,1) = 0$ obtenim

$$\omega_c = [1, -1, 0]$$

Nota. *Observem que els coeficients de les ω són simplement els coeficients de l'equació cartesiana de la recta, cosa que en el futur ens estalviarà aquest càlcul.*

Per calcular la raó doble dels 4 punts del dual $\omega_a, \omega_b, \omega_c, \omega_d$ posem $\omega_a = [1, -2, 1], \omega_b = [0, 2, -2], \omega_c = [1, 0, -1]$ i, a continuació escrivim $\omega_d = p(\mu\omega_a + \omega_b)$ i obtenim $\mu = 2$, és a dir,

$$(a, b, c, d) = (\omega_a, \omega_b, \omega_c, \omega_d) = 2.$$

Segon mètode. Tallem les 4 rectes per una cinquena recta que no passi pel punt de tall de les altres 4. Per exemple tallem amb la recta $z = 0$ (projectivitzat del pla $z = 0$).

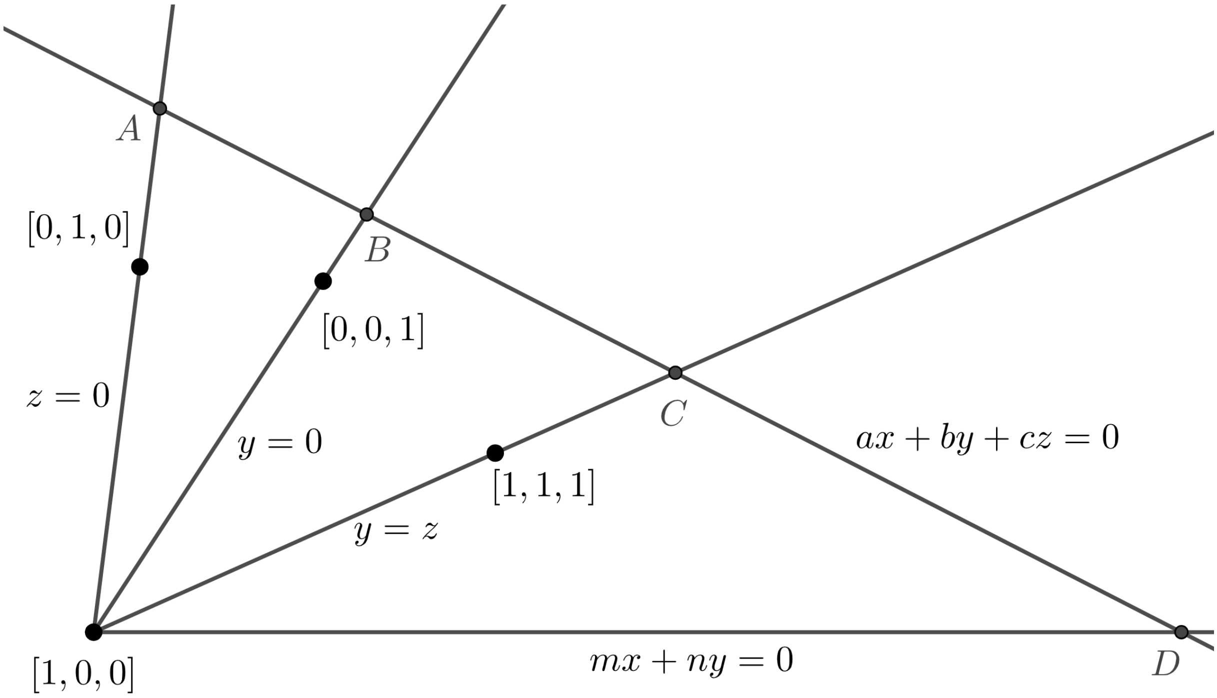
$$\begin{aligned} A &= a \cap \{z = 0\} = [2, 1, 0] \\ B &= b \cap \{z = 0\} = [1, 0, 0] = [-2, 0, 0] \\ C &= c \cap \{z = 0\} = [0, 1, 0] \\ D &= d \cap \{z = 0\} = [1, 1, 0] \end{aligned}$$

i per tant $(A, B, C, D) = 2$.

Nota. La raó doble de quatre rectes concurrents es defineix com la raó doble dels quatre punts que s'obtenen en tallar aquestes quatre rectes per una cinquena recta. Això és una bona definició ja que no depèn d'aquesta cinquena recta.

En efecte[11], prenem una referència projectiva de manera que $[1, 0, 0]$ sigui el punt de tall de les quatre rectes, $[0, 1, 0]$ pertanyi a la primera que tindrà doncs equació $z = 0$, $[0, 0, 1]$ pertanyi a la segona que tindrà doncs equació $y = 0$, $[1, 1, 1]$ pertanyi a la tercera que tindrà doncs equació $y = z$. La quarta tindrà doncs equació $my + nz = 0$ ja que la única informació que tenim és que passa per $[1, 0, 0]$.

[11] A [1] hi ha una demostració a partir del teorema del sinus, que implica context afí, ara en donem una directament al projectiu.



Tallem aquesta configuració per una recta arbitrària $ax+by+cz=0$. Obtenim quatre punts de tall

$$\begin{aligned} A &= (-b/a,1,0) \\ B &= (-c/a,0,1) \\ C &= (-(b+c)/a,1,1) \\ D &= (mc-bn,an,-am) \end{aligned}$$

La raó doble μ compleix que

$$\mu(-b/a,1,0)+(-c/a,0,1)=\rho(mc-bn,an,-am)$$

d'on $\mu=\rho an$ i $1=-\rho am$ per tant

$$\mu=-\frac{an}{am}=-\frac{n}{m}$$

que no depèn ni de a, ni de b, ni de c.

b) Left to the reader.

Exercici 3.14: Donats els punts A,B,C, (respectivament les rectes a,b,c) trobeu el punt D (respectivament la recta d) que compleixi la condició donada:

a) $A=[1,-1,2]$, $B=[-2,0,1]$, $C=[-1,-1,3]$, $(A,B,C,D)=-1$;

b) $a=\langle 2,1,1\rangle$, $b=\langle 0,1,3\rangle$, $c=\langle 1,0,-1\rangle$, $(a,b,c,d)=1/3$.

Solució: a) Posant $a=(1,-1,2), b=(-2,0,1), c=(-1,-1,3)$ sabem que $D=p((-1)a+b)$, i.e. $D=[-3,1,-1]$.

b) Busquem α,β tals que

$$\alpha(2,1,1)+\beta(0,1,3)=\rho(1,0,-1)$$

obtenim $\beta=-\alpha$, de manera que prenent $a=(2,1,1), b=(0,-1,-3)$ tenim $A=p(a), B=p(b), C=p(a+b)$. Llavors $d=p((1/3)a+b)=[2,-2,-8]$ i.e. la recta d és la recta $x-y-4z=0$.

Exercici 3.15: Considereu la varietat lineal $V=(0,0,1,1)+\langle(0,1,0,-1),(1,1,-1,0)\rangle$ de $\mathbb{R}^4$. Trobeu el pla L de $\mathbb{R}P^4$ que conté la imatge de V en la carta afí. Calculeu la intersecció de L amb el pla de l'infinit. Trobeu l'hiperplà H de $\mathbb{R}P^4$ que passa pels punts $[2:0:1:0:1]$ i $[0:1:0:0:1]$ i tal que $H\cap L$ està contingut a l'hiperplà de l'infinit.

Solució: Imposant que el rang de la matriu sigui 2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & -1 & z-1 \\ -1 & 0 & t-1 \end{pmatrix}$$

obtenim

$$\begin{aligned} x+z-1 &= 0 \\ -x+y+t-1 &= 0 \end{aligned}$$

La imatge de V per la carta afí és doncs el pla L de $\mathbb{R}P^4$ donat per

$$\begin{aligned} X+Z-U &= 0 \\ -X+Y+T-U &= 0 \end{aligned}$$

La intersecció amb l'hiperplà de l'infinit ($U=0$) dóna

$$\begin{aligned} X+Z &= 0 \\ -X+Y+T &= 0 \end{aligned}$$

que són els punts de coordenades homogènies $[1,\lambda,-1,1-\lambda,0]$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Ara busquem la varietat lineal H' de $\mathbb{R}^4$ paral·lela a V que contingui els punts $(2,0,1,0)$ i $(0,1,0,0)$, punts que per la carta afí van a parar als punts donats. El subespai vectorial director de H' ha de contenir el subespai vectorial director de H (per paral·lelisme) i el vector $(2,0,1,0)-(0,1,0,0)=(2,-1,1,0)$. Tenim doncs

$$H'=(2,0,1,0)+\langle(2,-1,1,0),(0,1,0,-1),(1,1,-1,0)\rangle$$

que té equació cartesiana

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & x-2 \\ 1 & 1 & -1 & y \\ 0 & -1 & 1 & z-1 \\ -1 & 0 & 0 & t \end{vmatrix}=0$$

que dóna $t+y+z-1=0$.

La imatge de H' per la carta afí és, doncs, $Y+Z+T-U=0$.

Podem comprovar que $L\cap H$ està contingut a l'infinit veient que en reslodre el sistema format per les equacions de L i H

$$\begin{aligned} X+Z-U &= 0 \\ -X+Y+T-U &= 0 \\ Y+Z+T-U &= 0 \end{aligned}$$

obtenim $U=0$.

Segon mètode. L'hiperplà H és de la forma $ax+by+cz+dt+eu=0$ que en imposar que passi pels punts $[2:0:1:0:1]$ i $[0:1:0:0:1]$ queda

$$-\frac{e+c}{2}x-ey+cz+dt+eu=0$$

Si resolem el sistema

$$\begin{aligned} X+Z-U &= 0 \\ -X+Y+T-U &= 0 \\ -\frac{e+c}{2}X-eY+cZ+dT+eU &= 0 \end{aligned}$$

obtenim

$$U=\frac{(3c-2d+e)X+2(d+e)Y}{2(c+d+e)}$$

de manera que per tenir $U = 0$ (i que aquesta intersecció estigui continguda a l'infinit) ha de ser

$$\begin{aligned} 3c - 2d + e &= 0 \\ d + e &= 0 \end{aligned}$$

és a dir, $e = -d = -c$, per tant l'equació de H queda

$$-eY - eZ - eT + eU = 0$$

com abans.

Exercici 3.16: Trobeu les projectivitats $F : \mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2$ tals que $F[1:1:1] = [-1:2:1], F[1:-1:1] = [1:-2:1]$ i $F[0:0:1] = [1:0:1]$. N'hi ha alguna que deixi la recta de l'infinit invariant. A quina afinitat de $\mathbb{R}^2$ correspon? Deixa fix algun punt de la recta de l'infinit?

Solució: La projectivitat F prové d'una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i es compleix que $F(p(v)) = p(f(v))$ on $p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}P^3$ és la projecció canònica.

Tenim doncs

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= \lambda(-1,2,1) \\ f(1,-1,1) &= \mu(1,-2,1) \\ f(0,0,1) &= \nu(1,0,1) \end{aligned}$$

Denotant $\mathcal{B}$ la base formada per $(1,1,1),(1,-1,1),(0,0,1)$ tenim que

$$M(f,\mathcal{B},\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} -\lambda & \mu & \nu \\ 2\lambda & -2\mu & 0 \\ \lambda & \mu & \nu \end{pmatrix}$$

de manera que

$$M(f,\mathcal{C},\mathcal{C}) = M(f,\mathcal{B},\mathcal{C})M(\mathcal{B},\mathcal{C})^{-1} = \begin{pmatrix} -\lambda & \mu & \nu \\ 2\lambda & -2\mu & 0 \\ \lambda & \mu & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\lambda+\mu-2\nu & -\lambda-\mu & 2\nu \\ 2\lambda-2\mu & 2\lambda+2\mu & 0 \\ \lambda+\mu-2\nu & \lambda-\mu & 2\nu \end{pmatrix}$$

En imposar que punts amb tercera coordenada 0 vagin a punts amb tercera coordenada zero (que deixin invariant l'infinit) , trobem $\lambda = \mu = \nu$ de manera que la projectivitat F prové de l'aplicació lineal de matriu respecte la base canònica

$$M(f,\mathcal{C},\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per trobar punts fixos a l'infinit imposem

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A \\ B \\ 0 \end{pmatrix}$$

obtenim $P = [1:-3:0]$ i $Q = [1:0:0]$.

De les equacions projectives

$$\begin{aligned} x' &= -x - y + z \\ y' &= 2y \\ z' &= z \end{aligned}$$

trobem les equacions afins

$$\begin{aligned} x' &= -x - y + 1 \\ y' &= 2y \end{aligned}$$

que és una afinitat hiperbòlica. Les dues rectes invariants tenen direccions $(1,0)$ i $(1,-3)$ (vectors propis de $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ de valors propis -1 i 2 respectivament) que corresponen als dos punts fixos a l'infinit.

Referències

[1] Agustí Reventós, *Geometria Projectiva*, Materials UAB, n. 85, 2000.

[2] ———, *Affine Maps, Euclidean Motions and Quadrics*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2011, traducció de *Afinitats, Moviments i Quàdriques*, Manuals UAB, Vol. 50, 2008.

4 Còniques i Quàdriques

4.1 Còniques

Exercici 4.1: Trobeu el centre i les asímptotes de la hipèrbola $x^2 - 6xy + 8y^2 + 2y = 0$. Observeu que, des del punt de vista projectiu, les asímptotes són les tangents a la cònica en els punts en què aquesta talla la recta de l'infinit.

Solució: Pensem aquesta cònica afí com la restricció al pla $z = 1$ de la cònica projectiva $x^2 - 6xy + 8y^2 + 2yz = 0$.

La intersecció d'aquesta cònica amb la recta de l'infinit $z = 0$ és $x^2 - 6xy + 8y^2 = 0$. Resolem aquesta equació, per exemple completant quadrats, i obtenim

$$(x - 3y)^2 = y^2$$

que vol dir $x = 4y$ o $x = 2y$ és a dir, els punts de tall de la cònica amb l'infinit són $I = (4, 1, 0)$, $J = (2, 1, 0)$. Le rectes tangents a la cònica en aquests punts (les asímptotes) són

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

i

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

que s'escriuen, doncs, com

$$\begin{aligned} x - 4y + z &= 0 \\ -x + 2y + z &= 0. \end{aligned}$$

La intersecció d'aquestes asímptotes és el centre $O = [3, 1, 1]$.

El centre el podem trobar també com *pol de la recta de l'infinit.* Només hem de posar

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

(aquesta igualtat imposa que un punt arbitrari de la recta de l'infinit $(a, b, 0)$ és conjugat al pol (x, y, z)). Resolent obtenim

$$x(a - 3b) + y(8b - 3a) + bz = a(x - 3y) + b(-3x + 8y + z) = 0, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

per tant

$$\begin{aligned} x - 3y &= 0 \\ -3x + 8y + z &= 0 \end{aligned}$$

que implica que el pol és $O = [3, 1, 1]$.

Sense llenguatge projectiu. Completant quadrats la cònica donada es pot escriure com

$$v^2 - u^2 = 1, \quad u = x - 3y, v = y - 1.$$

Les asímptotes són $v = \pm u$ és a dir $y - 1 = \pm(x - 3y)$ que són les dues rectes trobades abans en el context projectiu (posant $z = 1$).

El centre el podem trobar encara d'una altra manera, en el context afí, resolent el sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial q(x, y)}{\partial x} &= 2x - 6y = 0 \\ \frac{\partial q(x, y)}{\partial y} &= -6x + 16y + 2 = 0 \end{aligned}$$

Exercici 4.2 (Teorema 7.2.1 de [1])**:** Sigui $\mathcal{C}$ una cònica no singular i suposem que la recta determinada per dos punts $A, A' \notin \mathcal{C}$ talla $\mathcal{C}$ en punts M, M'.

Llavors A i A' són conjugats respecte a $\mathcal{C}$ si i només si $(A, A', M, M') = -1$.

Solució: Per estar M i M' a la recta AA', amb $A = p(a), A' = p(a')$, existeixen α i β únics tals que $M = p(a + \alpha a')$, $M' = p(a + \beta a')$. Per estar també a la cònica, α i β són arrels de l'equació

$$\phi(a + ta', a + ta') = t^2\phi(a', a') + 2t\phi(a, a') + \phi(a, a) = 0;$$

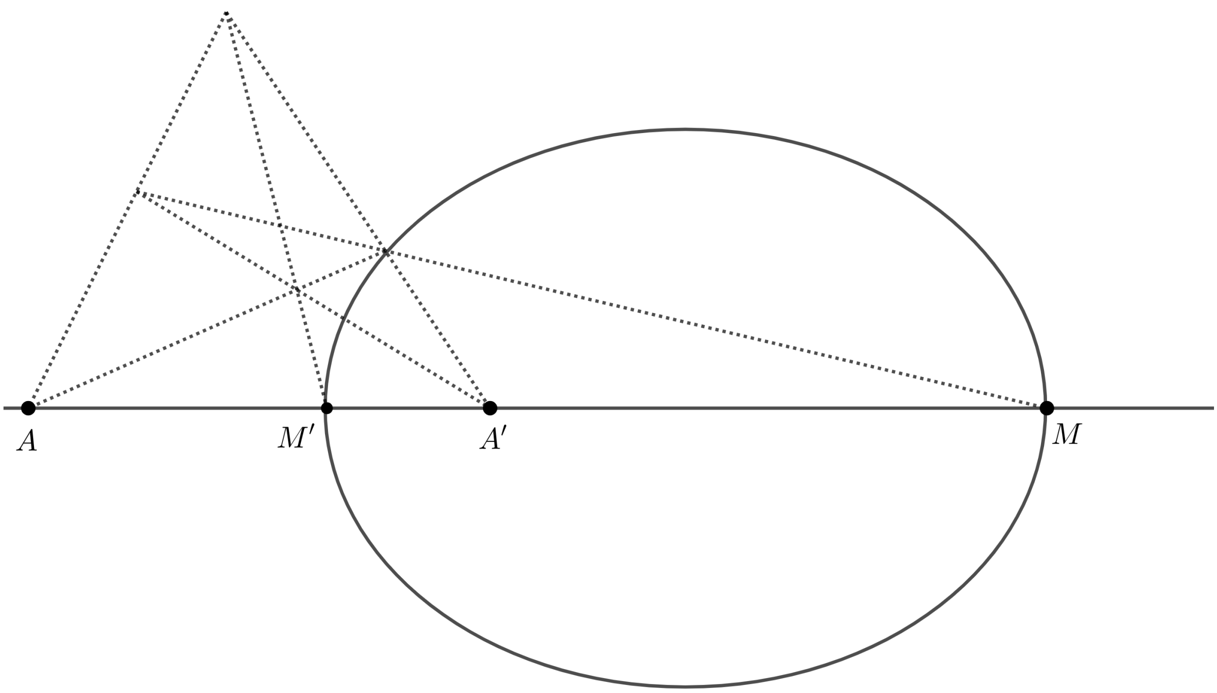
(ϕ aplicació bilineal associada a la cònica) en particular

$$\alpha + \beta = -\frac{2\phi(a, a')}{\phi(a', a')}.$$

Per altra banda, com que[12]

$$(A, A', M, M') = (a, a', a + \alpha a', a + \beta a') = \frac{\alpha}{\beta},$$

resulta que $\phi(a, a') = 0$ (això és la definició de que A, A' siguin conjugats respecte la cònica) si i només si $\alpha + \beta = 0$, és a dir si i només si $(A, A', M, M') = -1$.

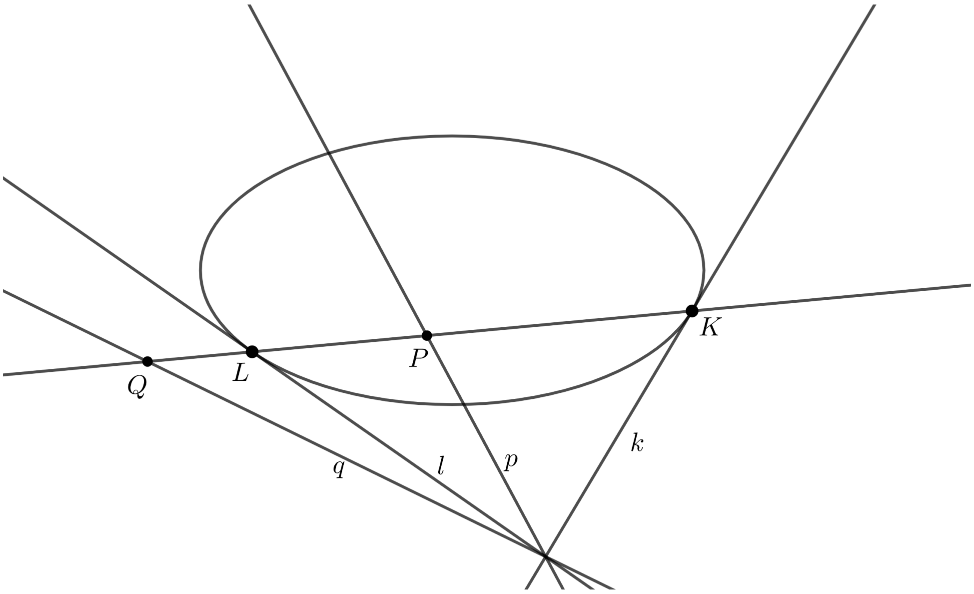


Exercici 4.3: Siguin k, l asímptotes d'una hipèrbola i siguin p, q dos diàmetres conjugats. Proveu que $(k, l, p, q) = -1$.

Solució: Per definició de diàmetres conjugats (definició 7.6.3 de [1])[13] sabem que els punts P, Q en que els diàmetres p, q tallen la recta de l'infinit són conjugats respecte la cònica. Però sabem, per l'exercici anterior, que això passa si i només si $(K, L, P, Q) = -1$ on K, L són respectivament els punts on la cònica talla l'infinit (equivalentment els punts en que les asímptotes k, l tallen la recta de l'infinit).

[12] Observeu que no podeu aplicar la fórmula (8) directament ja que aquesta fórmula fa referència a *coordenades projectives*.

[13] Si $\mathcal{C}$ és una cònica amb centre es diu que tota recta pel centre és un *diàmetre*. Dos diàmetres es diuen *conjugats* si els punts on tallen l'infinit són conjugats respecte a $\mathcal{C}$.



Exercici 4.4: Demostreu que les tangents a una hipèrbola determinen amb les asímptotes segments tals que el seu punt mitjà és el punt de contacte.

Solució: *Sense llenguatge projectiu* Sabem que la tangent a la hipèrbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punt (x_1, y_1) és

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

Si tallem aquesta recta amb les asímptotes $y = \pm\frac{b}{a}x$ obtenim

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{(\pm\frac{b}{a}x)y_1}{b^2} = 1.$$

Equivalentment,

$$b^2x_1x - (\pm\frac{b}{a}x)a^2y_1 = a^2b^2$$

d'on

$$x = \frac{a^2b^2}{b^2x_1 - (\pm\frac{b}{a})a^2y_1}$$

Però com

$$y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{x_1^2 - a^2}$$

substituint tenim

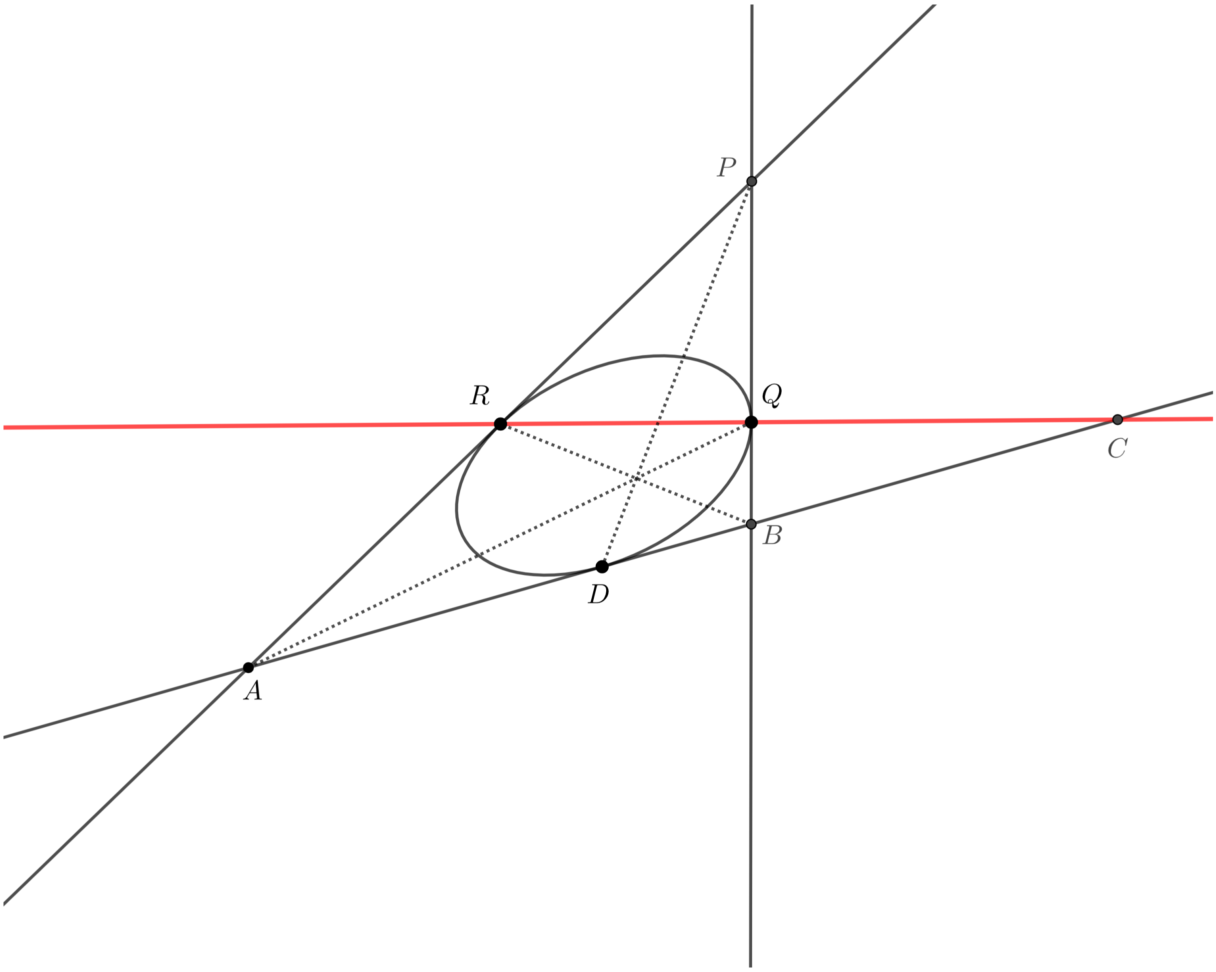
$$x = \frac{a^2}{x_1 \mp \sqrt{x_1^2 - a^2}}$$

L'abscissa mitjana d'aquests dos valors de x és justament x_1,

$$\frac{a^2}{x_1 - \sqrt{x_1^2 - a^2}} + \frac{a^2}{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}} = 2x_1$$

com volíem veure.

En llenguatge projectiu



Només s'ha de mirar la figura. És ben sabut que en aquesta configuració $(A, B, C, D) = -1$ (vegeu, per exemple [1], p.71) i per tant D és el punt mitjà entre A i B (vegeu proposició 5.1.4 de [1]). La recta vermella és la recta de l'infinit. Per tant, PR i PQ són les asímptotes. Que les rectes BR, AQ, PD es tallen en un punt és consequência de teoremade Brianchon (vegeu Exercici 7.4.3 de [1]). Aquest resultat en geometria afí és conseqüència del mateix sobre el cercle, afinment equivalent a una el·lipse, i sobre el cercle és conseqüència quasi immediata de Ceva.

Exercici 4.5: Siguin A, B, C, D quatre punts sobre una cònica no singular i siguin a, b, c, d les quatre tangents en aquests punts. Demostreu que els punts $c \cap d$, $a \cap b$, $AD \cap BC$, $BD \cap AC$ estan alineats.

Solució: El teorema de Pascal diu que si tenim 6 punts sobre una cònica llavors els punts

$$\begin{aligned} i &= 12 \cdot 45 \\ j &= 23 \cdot 56 \\ k &= 34 \cdot 61 \end{aligned}$$

estan alineats. Recordeu que la notació $12 \cdot 45$ vol dir recta detern¡minada pels punts 1 i 2 intersecció amb la recta determinada pels punts 4 i 5.

Apliquem aquest teorema prenent

$$\begin{aligned} A &= 1 = 2 \\ B &= 4 = 5 \\ C &= 3 \\ D &= 6 \end{aligned}$$

i obtenim que els punts

$$\begin{aligned} 12 \cdot 45 &= a \cap b \\ 23 \cdot 56 &= AC \cap BD \\ 34 \cdot 61 &= BC \cap AD \end{aligned}$$

estan alineats.

Repetint el càlcul prenent

$$\begin{aligned} A &= 3 \\ B &= 6 \\ C &= 1 = 2 \\ D &= 4 = 5 \end{aligned}$$

i obtenim que els punts

$$\begin{aligned} 12 \cdot 45 &= c \cap d \\ 23 \cdot 56 &= AC \cap BD \\ 34 \cdot 61 &= BC \cap AD \end{aligned}$$

estan alineats. Això acaba la demostració.

4.2 Classificació projectiva i afí de còniques i quàdriques

Exercici 4.6: Classifiqueu la cònica

$$x^2 + 3y^2 - 4xy + 2xz + 2yz - 9z^2 = 0,$$

segons la taula de la pàgina 20. Trobeu una projectivitat que transformi la cònica de la taula en la cònica donada.

Solució: La matriu associada a la cònica és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

Completació de quadrats. Primer mètode. La quàdrica donada es pot escriure com

$$\begin{aligned} & (x + (z - 2y))^2 - (z - 2y)^2 + 3y^2 + 2yz - 9z^2 \\ = \; & (x - 2y + z)^2 - y^2 - 10z^2 + 6yz \\ = \; & (x - 2y + z)^2 - (y - 3z)^2 - z^2 \\ = \; & X^2 - Y^2 - Z^2 \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

amb

$$\begin{aligned} X &= x - 2y + z \\ Y &= y - 3z \\ Z &= z \end{aligned}$$

Aquest canvi de coordenades es pot escriure com

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

d'on

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \tag{9}$$

La projectivitat que prové de l'aplicació lineal donada per aquesta matriu transforma un punt de coordenades (X, Y, Z) amb $X^2 - Y^2 - Z^2 = 0$ en un punt de coordenades (x, y, z) tals que $x^2 + 3y^2 - 4xy + 2xz + 2yz - 9z^2 = 0$.

Completació de quadrats. Segon mètode.

El típic esglaonament de matrius però recordant que tota operació per files s'ha de fer igual també per a columnes.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -10 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En el primer pas canviem F_2 per $F_2 + 2F_1$ i F_3 per $F_3 - F_1$. En el segon pas canviem C_2 per $C_2 + 2C_1$ i C_3 per $C_3 - C_1$. En el tercer pas canviem F_3 per $F_3 + 3F_2$. En el quart pas canviem C_3 per $C_3 + 3C_2$.

Per controlar la projectivitat buscada només cal fer aquest càlcul posant de bon inici la matriu identitat a sota de la matriu donada. Les operacions per files no l'afectaran però per columnes sí. La matriu que apareix al final al lloc on hi teníem la identitat és la matrriu buscada.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -9 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -10 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -10 \\ \hline 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nota. Els dos mètodes anteriors deixen de funcionar si la quàdrica inicial o a la que s'arriba després de les manipulacions anteriors, conté un terme de la forma XY (i no apareixen a l'expressió ni X^2 ni Y^2). Aquest producte es transforma en suma de quadrats posant simplement

$$\begin{aligned} X &= X' + Y', \\ Y &= X' - Y'. \end{aligned}$$

Exercici 4.7: Donada la cònica

$$x^2 + 3y^2 - 4xy + 2x + 2y - 9 = 0,$$

a) Classifiqueu-la. Trobeu la referència respecte de la qual es dóna l'expressió canònica.

b) Trobeu, si existeixen, el centre, les asímptotes.

c) Trobeu l'equació de la tangent en el punt $(6, 3)$.

Solució: Recordem que el polinomi quadràtic $r(x) = x^t Ax + Bx + C$ té matriu associada

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & B^t/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$$

ja que

$$r(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B^t/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En el nostre cas, doncs,

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -9 \end{array}\right)$$

És fàcil veure que $\tilde{A}$ té tang $\tilde{\rho} = 3$.

Per calcular l'índex és molt útil el teorema de Descartes sobre el número d'arrels reals positides d'un polinomi.

Teorema de Descartes: *El nombre d'arrels positives r^+ d'un polinomi de coeficients reals, comptades amb la seva multiplicitat, és més petit o igual que el nombre v de canvis de signe de coeficients no nuls consecutius $r^+ \leq v$. Si totes les arrels del polinomi sòn reals, llavors $r^+ = v$. (Aquesta és la situació que es dóna en calcular el polinomi característic de les aplicacions bilineals simètriques sobre espais vectorials reals.)*

Per exemple

$$(x - 1)(x - 2) = x^2 - 3x + 2$$

té dos canvis de signe i dues arrels reals positives. $r^+ = v$

$$(x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$$

té un canvi de signe i una arrel real positiva. $r^+ = v$.

$$(x - 1)(x^2 + 1) = x^3 - x^2 + x - 1$$

té tres canvis de signe i una arrel real positiva. $r^+ < v$.

Peró quan el polinomi és el polinomi característic d'una aplicació bilineal simètrica no hi ha arrels complexes i sempre val la igualtat $r^+ = v$.

Tornem a l'exercici.

En el nostre cas el polinomi característic $-x^3 - 5x^2 + 39x + 1$ té un sol canvi de signe i per tant $\tilde{r}^+ = 1$, on $\tilde{r}^+$ és el número d'arrels reals positives d'aquest polinomi. La fórmula de l'índex és

$$\tilde{i} = \min\{\tilde{r}^+, \tilde{\rho} - \tilde{r}^+\} = 1.$$

La matriu de la part lineal

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

té rang $\rho = 2$ i el polinomi característic $x^2 - 4x - 1$ té un canvi de signe, $r^+ = 1$, de manera que l'index és $i = \min\{r^+, \rho - r^+\} = 1$. Així la cònica queda codificada per

$$(\rho, i, \tilde{\rho}, \tilde{i}) = (2, 1, 3, 1)$$

que és una hipèrbola (secció 8.13 de [2]).

Això vol dir que en una certa referència aquesta cònica s'escriu com $X^2 - Y^2 = 1$. Trobem explícitament aquesta referència.

Primer mètode. Completació de quadrats. La quàdrica donada es pot escriure com

$$\begin{aligned} & (x+(1-2y))^2 - (1-2y)^2 + 3y^2 + 2y - 9 \\ = \;& (x-2y+1)^2 - y^2 - 10 + 6y \\ = \;& (x-2y+1)^2 - (y-3)^2 - 1 \\ = \;& X^2 - Y^2 - 1 \\ = \;& 0 \end{aligned}$$

amb

$$\begin{aligned} X &= x - 2y + 1 \\ Y &= y - 3 \end{aligned}$$

Aquest canvi de coordenades es pot escriure com

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'on

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Llavors la referència adaptada és

$$\mathcal{R} = \{(5,3); (1,0), (2,1)\}$$

on $(5,3)$ és la tercera columna (ometem la tercera fila de la matriu), i $(1,0), (2,1)$ són les dues primeres columnes.

Això ho podem demostrar fàcilment, ja que un punt de coordenades (x, y) respecte la referència canònica té coordenades (X, Y) respecte $\mathcal{R}$, donades per

$$(x-5, y-3) = X(1,0) + Y(2,1)$$

d'on

$$\begin{cases} x = 5 + X + 2Y \\ y = Y + 3 \end{cases}$$

que són les equacions (10).

Substituint aquests valors a $x^2 + 3y^2 - 4xy + 2x + 2y - 9 = 0$ obtenim directament $X^2 - Y^2 - 1 = 0$.

Una altra manera de completar quadrats. El típic esglaonament de matrius però recordant que tota operació per files s'ha de fer igual també per a columnes.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -10 \end{pmatrix} \\ \to & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \to & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En el primer pas canviem F_2 per $F_2 + 2F_1$ i F_3 per $F_3 - F_1$. En el segon pas canviem C_2 per $C_2 + 2C_1$ i C_3 per $C_3 - C_1$. En el tercer pas canviem F_3 per $F_3 + 3F_2$. En el quart pas canviem C_3 per $C_3 + 3C_2$.

b) *Centre.* Només hem de resoldre el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial q(x,y)}{\partial x} = 2x - 4y + 2 = 0 \\ \frac{\partial q(x,y)}{\partial y} = 6y - 4x + 2 = 0 \end{cases}$$

on $q(x)$ és la quàdrica donada. Resolent obtenim que el centre és el punt $(5, 3)$.

Asímptotes. Les asímptotes de la hipèrbola $X^2 - Y^2 = 1$ són $Y = \pm X$. Per tant, l'equació de les asímptotes de la cònica inicial en funció de les coordenades x, y és (només substituint els valors de X, Y) $y - 3 = \pm(x - 2y + 1)$.

Si les volem pensar des del punt de vista projectiu com tangents a l'infinit només hem de tallar la quàdrica donada pensada en el projectiu $x^2 + 3y^2 - 4xy + 2xz + 2yz - 9z^2$ amb l'nfinit $z = 0$ i obtenim $x^2 + 3y^2 - 4xy = 0$ que, completant quadrats, és $(x - 2y)^2 - y^2 = 0$, d'on els punts de tall són $P = (3, 1, 0)$ i $Q = (1, 1, 0)$

La tangent en P és

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

és a dir, $x - 3y + 4 = 0$.

Anàlogament obtenim que la tangent en Q és $-x - y + 2 = 0$.

c) L'equació de la tangent en el punt $(6, 3)$ es calcula així:[14]

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Obtenim $x - 2y = 0$.

Nota. És sabut que la tangent a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punt (x_1, y_1) d'aquesta cònica és

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

En el nostre cas el punt $(x, y) = (6, 3)$ correspon al punt $(X, Y) = (1, 0)$ i per tant la tangent és directament $X = 1$, és a dir $x - 2y = 0$.

Exercici 4.8: Doneu l'equació i determineu la classe de la cònica que passa pels cinc punts donats:

a) $[0, 0, 1]$, $[2, 1, 0]$, $[2, -1, 0]$, $[-2, 0, 1]$, $[2, 2, 3]$.

b) $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$, $[2, 2, 1]$, $[2, -1, 2]$.

c) $[1, -2, 1]$, $[-3, 1, 0]$, $[-2, -1, 1]$, $[2, -2, 1]$, $[0, 0, 1]$.

Solució: a) Busquem una cònica $ax^2 + by^2 + cz^2 + 3dxy + 2exz + 2fyz = 0$ tal que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

[14] És clar que aquesta equació és lineal i representa doncs una recta que clarament passa pel punt $(6, 3)$. Es veu fàcilment que si la cònica no conté rectes aquesta recta no pot contenir cap altra punt de la cònica i per tant és la tangent.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0,$$

que donen

$$\begin{cases} c = 0, \\ 4a + 4d + b = 0, \\ 4a + b - 4d = 0, \\ 4a + c - 4e = 0, \\ 4a + 4b + 9c + 8d + 12e + 12f = 0. \end{cases}$$

Resolent obtenim

$$\begin{cases} a = a \\ b = -4a, \\ c = 0, \\ d = 0 \\ e = a \\ f = 0 \end{cases}$$

La cònica és doncs $x^2 - 4y^2 + 2xz = 0$. Completant quadrats $(x + z)^2 - z^2 - 4y^2 = 0$, és a dir, $X^2 - Y^2 - Z^2 = 0$ amb $X = x + z, Y = 2y, Z = z$.

Matricialment (podem prendre $a = 1$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aquesta matriu té rang 3. El polinomi característic $-x^3 - 3x^2 + 5x + 4$ té 1 canvi de signe, $r^+ = 1$, i per tant, index $= \min\{r^+, r - r^+\} = 1$. Hi ha una base, doncs, on la matriu és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i, per tant, la cònica s'escriu com $X^2 - Y^2 - Z^2 = 0$ i es diu que és la cònica no degenerada. Recordem que a $\mathbb{R}P^2$ hi ha 5 tipus de cònica ([1], p. 103): imaginària, no degenerada, punt, dues rectes, recta doble.

b) Les equacions que hem de resoldre ara són

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0,$$

que donen

$$\begin{cases} a = 0, \\ b = 0, \\ c = 0, \\ 8d + 4e + 4f = 0, \\ -4d + 8e - 4f = 0. \end{cases}$$

Resolent obtenim (prenent $d = 3$) $e = -1, f = -5$. La cònica és, doncs, $6xy - 2xz - 10yz = 0$, o matricialment

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -5 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

que té rang 3. El polinomi característic $-x^3 + 35x + 30$ té un canvi de signe i estem davant doncs de la cònica no degenerada com en el cas anterior.

Si volem fer completació de quadrats observem que no hi ha termes quadràtics. Fem doncs el canvi

$$\begin{aligned} x &= x' + y' \\ y &= x' - y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

Substituint

$$6(x'^2 - y'^2) - 2(x' + y')z' - 10(x' - y')z' = 0$$

Simplificant

$$3x'^2 - 3y'^2 - 6x'z' + 4y'z' = 0$$

Completant quadrats

$$3(x' - z')^2 - 3(z' - \frac{2}{3}y')^2 - \frac{5}{3}y'^2 = 0$$

és a dir, es pot escriure com

$$X^2 - Y^2 - Z^2 = 0$$

amb

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{3}(x' - z') \\ Y &= \sqrt{3}(z' - \frac{2}{3}y') \\ Z &= \sqrt{5/3}y' \end{aligned}$$

i per tant

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{3}(\frac{x+y}{2} - z) \\ Y &= \sqrt{3}(z - \frac{2}{3}\frac{x-y}{2}) \\ Z &= \sqrt{5/3}\frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

c) Left to the reader.

Exercici 4.9: Classifiqueu les còniques afins següents:

a) $x^2 - 6xy + 8y^2 + 2y = 0$;

b) $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$;

c) $2x^2 + 3y^2 - 2xy + 4x + 3y + 4 = 0$;

Solució: Segons la secció 8.13 de [2] només hem de calcular rang i index de la matriu i la matriu ampliada associada al polinomi. Recordem la notació

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & B^t/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$$

per $r(x) = x^t Ax + Bx + C$.

a) En aquest cas

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

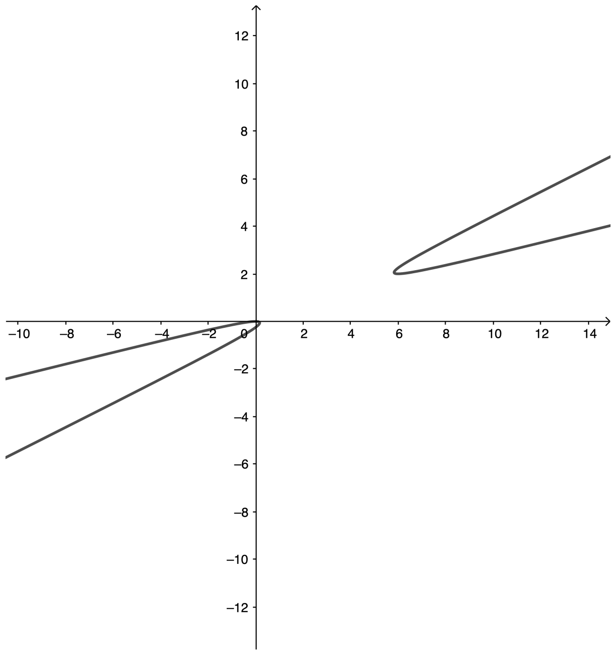
Així, rang $A = \rho = 2$, rang $\tilde{A} = \tilde{\rho} = 3$. Els polinomis característics són

$$p_A(x) = x^2 - 9x - 1, \quad p_{\tilde{A}} = -x^3 + 9x^2 + 2x - 1$$

per tant, com $p_A(x)$ té un canvi de signe index$(A) = i = \min\{r^+, r^-\} = 1$ i com $p_{\tilde{A}}(x)$ té dos canvis de signe index$(\tilde{A}) = \tilde{i} = \min\{r^+, r^-\} = 1$ per tant ,el codi d'aquesta cònica és

$$(\rho, i, \tilde{\rho}, \tilde{i}) = (2, 1, 3, 1)$$

i es tracte d'una hipèrbola.



Càlcul de la referència canònica. Completant quadrats

$$\begin{aligned} & (x-3y)^2 - y^2 + 2y \\ = & (x-3y)^2 - (y-1)^2 + 1 \\ = & X^2 - Y^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

amb

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

i per tant

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Així la referència on la cònica té expressió canònica és

$$\mathcal{R} = \{(3,1); (1,0), (3,1)\}$$

b) En aquest cas

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

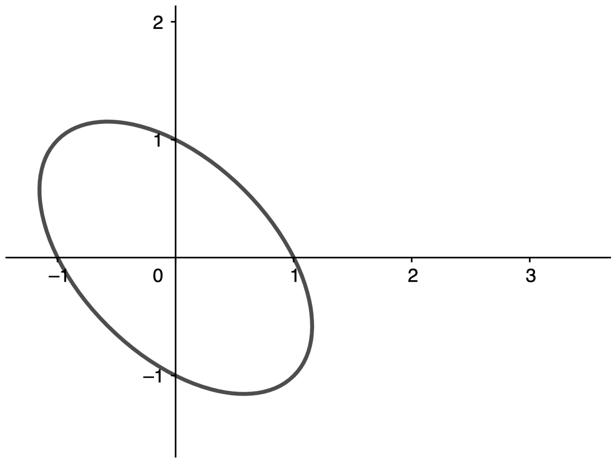
Així, rang $A = \rho = 2$, rang $\tilde{A} = \tilde{\rho} = 3$. Els polinomis característics són

$$p_A(x) = x^2 - 2x + 3/4, \quad p_{\tilde{A}} = -x^3 + x^2 + 5x/4 - 3/4$$

per tant, com $p_A(x)$ té dos canvis de signe index$(A) = i = \min\{r^+, r^-\} = 0$, i com $p_{\tilde{A}}$ té dos canvis de signe index$(\tilde{A}) = \tilde{i} = \min\{r^+, r^-\} = 1$ per tant el codi d'aquesta cònica és

$$(\rho, i, \tilde{\rho}, \tilde{i}) = (2, 0, 3, 1)$$

i es tracte d'una el·lipse.



Càlcul de la referència canònica. Completant quadrats

$$\begin{aligned} & (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 - 1 \\ = \quad & X^2 + \frac{3}{4}Y^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

amb

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

i per tant

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Així, la referència on la cònica té expressió canònica és

$$\mathcal{R} = \{(0,0); (1,0), (-1/2, 1)\}$$

c) En aquest cas

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3/2 \\ \hline 2 & 3/2 & 4 \end{array}\right)$$

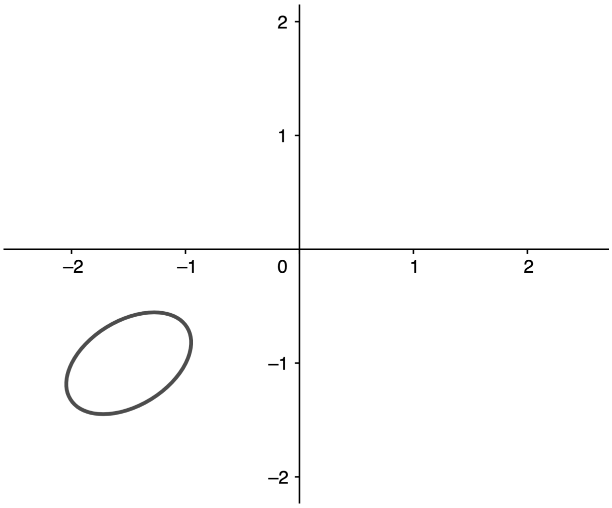
Així rang $A = \rho = 2$, rang $\tilde{A} = \tilde{\rho} = 3$. Els polinomis característics són

$$p_A(x) = x^2 - 2x + 3/4, \quad p_{\tilde{A}} = -x^3 + x^2 + 5x/4 - 3/4$$

per tant, com $p_A(x)$ té dos canvis de signe index$(A) = i = \min\{r^+, r^-\} = 0$ i com $p_{\tilde{A}}$ té dos canvis de signe index$(\tilde{A}) = \tilde{i} = \min\{r^+, r^-\} = 1$ per tant el codi d'aquesta cònica és

$$(\rho, i, \tilde{\rho}, \tilde{i}) = (2, 0, 3, 1)$$

i es tracte d'una el·lipse.



Càlcul de la referència adaptada. Completant quadrats

$$\begin{aligned} & 2(x + \frac{1}{2}(2-y))^2 - \frac{1}{2}(2-y)^2 + 3y^2 + 3y + 4 \\ = \; & 2(x + \frac{1}{2}(2-y))^2 + \frac{5}{2}y^2 + 5y + 2 \\ = \; & 2X^2 + \frac{5}{2}Y^2 - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

amb

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

i per tant

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Així la referència adaptada on la cònica té expressió canònica és

$$\mathcal{R} = \{(-3/2, -1); (1, 0), (1/2, 1)\}$$

Exercici 4.10: Classifiqueu afinment les següents quàdriques i doneu la referència respecte de la qual tenen expressió canònica.

a) $2x^2 + 3y^2 - z^2 - 5 - 2xy + 2xz + 4yz - 2y + 4x = 0$;

b) $x^2 + 2y^2 + z^2 + 4yz - 6xz - 2x + 8y - 2z + 9 = 0$;

c) $x^2 + 5y^2 - 4z^2 + 4xy - 2yz + 2y - 1 = 0$;

Solució: a) Matriu associada

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ \hline 2 & -1 & 0 & -5 \end{array}\right).$$

Polinomi característic: $x^4+x^3-30x^2+135$. Com el terme independent (el determinant) és diferent de zero el rang $\tilde{\rho}=4$ i com té dos canvis de signe $\tilde{r^+}=2$ i per tant índex $\tilde{i}=2$.

El polinomi característic de la part quadràtica és $-x^3+4x^2+5x-20$, per tant rang $\rho=3$ i i com té dos canvis de signe $r^+=2$ i per tant índex $\tilde{i}=1$.

Està codificada doncs per

$$(\rho, i, \tilde{\rho}, \tilde{i}) = (3,1,4,2)$$

i és un hiperboloide d'un full (secció 8.14 de [2]).

Referència adaptada. Completem quadrats.

$$\begin{aligned}
& 2(x+\frac{1}{2}(-y+z+2))^2-\frac{1}{2}(-y+z+2)^2+3y^2-z^2-5+4yz-2y \\
= \;& 2(x+\frac{1}{2}(-y+z+2))^2+\frac{5}{2}y^2-\frac{3}{2}z^2+5yz-2z-7 \\
= \;& 2(x+\frac{1}{2}(-y+z+2))^2+\frac{5}{2}(y+z)^2-4z^2-2z-7 \\
= \;& 2X^2+\frac{5}{2}Y^2-4Z^2-\frac{27}{4}
\end{aligned}$$

amb

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

que dóna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per tant la referència en la que la quàdrica té expressió canònica és

$$\mathcal{R} = \{(-3/4, 1/4, -1/4); (1,0,0), (1/2,1,0), (-1,-1,1)\}.$$

b) Matriu associada

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 4 & -1 & 9 \end{array}\right).$$

Polinomi característic: $x^4-13x^3+10x^2+152x-128$. Com el terme independent és diferent de zero el rang $\tilde{\rho}=4$ i com té tres canvis de signe $\tilde{r^+}=3$ i per tant índex $\tilde{i}=1$.

El polinomi característic de la part quadràtica és $-x^3+4x^2+8x-20$, per tant rang $\rho=3$ i i com té dos canvis de signe $r^+=2$ i per tant índex $\tilde{i}=1$.

Està codificada doncs per

$$(\rho, i, \tilde{\rho}, \tilde{i}) = (3,1,4,1)$$

i és un hiperboloide de dos fulls (secció 8.14 de [2]).

Referència adaptada. Completem quadrats.

$$\begin{aligned}
& (x-(3z+1))^2-(3z+1)^2+2y^2+z^2+4yz+8y-2z+9 \\
= \;& (x-(3z+1))^2-8z^2+2y^2+4yz+8y-8z+8 \\
= \;& (x-(3z+1))^2+2(y+(z+2))^2-2(z+2)^2-8z+8-8z^2 \\
= \;& (x-(3z+1))^2+2(y+(z+2))^2-10z^2-16z \\
= \;& (x-(3z+1))^2+2(y+(z+2))^2-10(z+\frac{4}{5})^2+\frac{32}{5} \\
= \;& X^2+2Y^2-10Z^2+\frac{32}{5}=0
\end{aligned}$$

amb

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

que dóna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 15 & -7 \\ 0 & 5 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per tant la referència adaptada en la que la quàdrica té expressió canònica és

$$\mathcal{R} = \{(-7/5, -6/5, -4/5); (1,0,0), (0,1,0), (3,-1,1)\}.$$

c) Matriu associada

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Polinomi característic: $x^4 - x^3 - 27x^2 - 22x + 9$. Com el terme independent és diferent de zero el rang $\tilde{\rho} = 4$ i com té dos canvis de signe $\tilde{r^+} = 2$ i per tant índex $\tilde{i} = 2$.

El polinomi característic de la part quadràtica és $x^3 + 2x^2 + 24x - 5$, per tant rang $\rho = 3$ i i com té un canvi de signe $r^+ = 1$ i per tant índex $\tilde{i} = 1$.

Està codificada doncs per

$$(\rho, i, \tilde{\rho}, \tilde{i}) = (3, 1, 4, 2)$$

i és un hiperboloide d'un full (secció 8.14 de [2]).

Referència adaptada. Completem quadrats.

$$\begin{aligned} & (x+2y)^2 + y^2 - 4z^2 - 2yz + 2y - 1 \\ = \ & (x+2y)^2 + (y+1-z)^2 - (1-z)^2 - 4z^2 - 1 \\ = \ & (x+2y)^2 + (y+1-z)^2 - 5(z - \frac{1}{5})^2 + \frac{1}{5} - 2 \\ = \ & X^2 + Y^2 - 5Z^2 - \frac{9}{5} = 0 \end{aligned}$$

amb

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

que dóna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -10 & -10 & 8 \\ 0 & 5 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per tant la referència adaptada en la que la quàdrica té expressió canònica és

$$\mathcal{R} = \{(8, -4, 1); (1,0,0), (-2,1,0), (-2,1,1)\}.$$

Exercici 4.11: Sigui $\mathcal{C}_1$ la cònica obtinguda com la intersecció de la quàdrica

$$xz + y^2 - y = 0$$

de $\mathbb{R}^3$ amb el pla

$$x - y + z = 1.$$

Decidiu si $\mathcal{C}_1$ és afinment equivalent o no a la cònica $\mathcal{C}_2$ de $\mathbb{R}^2$ donada per

$$x^2 + 9y^2 + 6xy + 4x + 2y + 1 = 0.$$

Solució: Substituint $z = 1 - x + y$ a l'equació de la quàdrica obtenim

$$x^2 - y^2 - xy - x + y = 0.$$

Podem pensar aquesta equació com una cònica del pla x, y o com un cilindre de $\mathbb{R}^3$ de base aquesta cònica en el pla $z = 0$ i generatrius paral·leles a l'eix z. La intersecció d'aquest cilindre amb el pla $x - y + z = 1$ és la cònica donada. Es pot veure detalladament, però és clar geomètricament, que la cònica donada i la cònica $x^2 - y^2 - xy - x + y = 0$, del pla $z = 0$ són afinment equivalents. Classifiquem aquesta cònica completant quadrats.

$$(x - \frac{1}{2}(y+1))^2 - \frac{1}{4}(y+1)^2 - y^2 + y = 0$$

Equivalentment

$$(x - \frac{1}{2}(y+1))^2 - \frac{5}{4}y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4} = 0$$

o encara

$$(x - \frac{1}{2}(y+1))^2 - \frac{1}{4}\left(5(y - \frac{1}{5})^2) + \frac{4}{5}\right) = 0$$

Fem el canvi de variable

$$\begin{cases} X = x - \frac{y}{2} - \frac{1}{2} \\ Y = y - \frac{1}{5} \end{cases}$$

i tenim

$$X^2 - \frac{5}{4}Y^2 - \frac{1}{5} = 0$$

i es tracta doncs d'una hipèrbola.

Classifiquem afinment $x^2 + 9y^2 + 6xy + 4x + 2y + 1 = 0$.[15] Completant quadrats tenim

$$(x + 3y)^2 + 4x + 2y + 1 = 0$$

que suggereix fer el canvi de variable

$$\begin{cases} X = x + 3y \\ Y = 4x + 2y + 1 \end{cases}$$

de manera que la cònica s'escriu com $X^2 + Y = 0$, i es tracta, doncs, d'una paràbola. Escrivint el canvi de variables matricialment veiem que la nova base és $u = (-1/5, 2/5), v = (3/10, -1/10)$ (columnes de la matriu inversa del canvi anterior). Les paràboles no tenen centre i per tant ni diàmetres ni eixos.

Equivalentment, podem pensar que la paràbola donada és la imatge de la paràbola $Y = -X^2$ per l'afinitat inversa de l'anterior, és a dir, l'afinitat donada per

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per tant les còniques $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ no són afinment equivalents, ja que una és una hipèrbola l'altra una paràbola.

[15] Si apliquem el mateix mètode que en el problema 4.7 ens trobem que el canvi donat pel mètode de completació de quadrats no respecte el pla $z = 0$ i no restrigeix a un canvi afí.

Exercici 4.12: Demostreu que l'hiperboloide d'un full $x^2+y^2-z^2-1=0$ és una quàdrica doblement reglada.

Solució: Suposem que el punt $P=(p_1,p_2,p_3)$ pertany a l'hiperboloide, és a dir, $p_1^2+p_2^2-p_3^2-1=0$. Considerem un punt arbitrari $Q=(q_1,q_2,q_3)$ i imposem que la recta PQ estigui continguda a l'hiperboloide. Com aquesta recta s'escriu com

$$P+\lambda\overrightarrow{PQ}$$

tenim la condició

$$(p_1+\lambda(q_1-p_1))^2+(p_2+\lambda(q_2-p_2))^2-(p_3+\lambda(q_3-p_3))^2-1=0.$$

Això és un polinomi de grau 2 en λ i, es veu fàcilment, sense terme independent. Com ha de ser $=0$ per tot λ els coeficients han de ser zero i tenim el sistema

$$\begin{cases} 2p_1(q_1-p_1)+2p_2(q_2-p_2)-2p_3(q_3-p_3)=0 \\ (q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2-(q_3-p_3)^2=0 \end{cases}$$

que es redueix a

$$\begin{cases} p_1q_1+p_2q_2-p_3q_3=1 \\ q_1^2+q_2^2-q_3^2-1=0 \end{cases}$$

Observem que la segona ens diu només que Q és un punt del paraboloide. Busquem una solució d'aquest sistema amb $q_3=0$ (si la recta està continguda l'hiperboloide tallarà $z=0$ en un punt de l'hiperboloide).

$$\begin{cases} p_1q_1+p_2q_2=1 \\ q_1^2+q_2^2-1=0 \end{cases}$$

Aquest sistema de dues equacions amb dues incògnites es fàcil de resoldre i obtenim

$$q_1=\frac{p_1\pm p_2p_3}{1+p_3^2}, q_2=\frac{p_2\mp p_1p_3}{1+p_3^2}$$

Per tant, el punt Q que estem buscant tal que la recta PQ estigui continguda en el paraboloide ha de ser un dels punts A,B donats per

$$\begin{cases} A=(\dfrac{p_1+p_2p_3}{1+p_3^2},\dfrac{p_2-p_1p_3}{1+p_3^2},0), \\ B=(\dfrac{p_1-p_2p_3}{1+p_3^2},\dfrac{p_2+p_1p_3}{1+p_3^2},0), \end{cases}$$

Així doncs, les rectes PA i PB estan contingudes a l'hiperboloide.

A més aquestes dues rectes pertanyen al pla tangent. En efecte, el gradient de la funció $x^2+y^2-z^2-1$ és $(2x,2y,-2z)$. Per tant, el pla tangent a l'hiperboloide en el punt P té vector normal $(p_1,p_2,-p_3)$ (i múltiples).

Els vectors directors de les rectes PA i PB són respectivament

$$(\frac{p_3(p_2-p_1p_3)}{1+p_3^2},\frac{p_3(-p_1-p_2p_3)}{1+p_3^2},-p_3),\quad (\frac{p_3(-p_2-p_1p_3)}{1+p_3^2},\frac{p_3(p_1-p_2p_3)}{1+p_3^2},-p_3),$$

Equivalentment,

$$(p_1p_3-p_2,p_2p_3+p_1,p_1^2+p_2^2),\quad (p_1p_3+p_2,p_2p_3-p_1,p_1^2+p_2^2),$$

que, com es veu fàcilment, són ortogonals a $(p_1,p_2,-p_3)$

Exercici 4.13: Demostreu que el paraboloide hiperbòlic $x^2-y^2-z=0$ és una quàdrica doblement reglada.

Solució: Suposem que el punt $P=(p_1,p_2,p_3)$ pertany al paraboloide, és a dir, $p_1^2-p_2^2-p_3=0$. Considerem un punt arbitrari $Q=(q_1,q_2,q_3)$ i imposem que la recta PQ estigui continguda a l'hiperboloide. Com aquesta recta s'escriu com

$$P+\lambda\overrightarrow{PQ}$$

tenim la condició

$$(p_1 + \lambda(q_1 - p_1))^2 - (p_2 + \lambda(q_2 - p_2))^2 - (p_3 + \lambda(q_3 - p_3)) = 0.$$

Això és un polinomi de grau 2 en λ i, es veu fàcilment, sense terme independent. Com ha de ser $= 0$ per tot λ els coeficients han de ser zero i tenim el sistema

$$\begin{cases} q_1^2 - q_2^2 + p_1^2 - p_2^2 - 2p_1q_1 + 2p_2q_2 = 0 \\ 2p_1q_1 - 2p_1^2 - 2p_2q_2 + 2p_2^2 - q_3 + p_3 = 0 \end{cases}$$

Que es poden escriure com

$$\begin{cases} (p_1 - q_1)^2 = (p_2 - q_2)^2 \\ -(p_1 - q_1)^2 - p_1^2 + q_1^2 + (p_2 - q_2)^2 + p_2^2 - q_2^2 - q_3 + p_3 = 0 \end{cases}$$

I la segona es redueix (utilitzant la primera i la condició de que P pertany a l paraboloide) a $q_1^2 - q_2^2 - q_3 = 0$, que és la condició de que aquest segon punt sigui de la quàdrica,

La primera igualtat ens porta a les dues solucions $p_1 - q_1 = \pm(p_2 - q_2)$. Els dos vectors directors possibles són doncs

$$\begin{cases} Q - P = (q_2 - p_2, q_2 - p_2, q_3 - p_3) \\ Q - P = -(q_2 - p_2), q_2 - p_2, q_3 - p_3) \end{cases}$$

Que també es poden escriure com[16]

$$\begin{cases} (1, 1, 2(p_1 - p_2)) \\ (1, -1, 2(p_1 + p_2)) \end{cases}$$

Les rectes per P amb aquestes dues direccions estan contingudes al paraboloide hiperbòlic i en el pla tangent a aquest paraboloide per P, com es veu fàcilment considerat el gradient, com a l'exercici anterior.

Exercici 4.14: Donada la quàdrica afí no singular reglada $\mathcal{C}$ i el punt P

$$\mathcal{C} : 3x^2 - 4y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz + 8x - 4y + 12z + 4 = 0; \quad P(-2, 1, 1).$$

a) Classifiqueu-la.

b) Trobeu dues generatrius que passin pel punt donat P.

c) Comproveu que les rectes de l'apartat b) generen el pla tangent de $\mathcal{C}$ en el punt P.

Feu el mateix amb

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 + z^2 - 2xz + 2yz + 2x - 4z - 4 = 0; P(0, 1, -1).$$

Solució: a) El polinomi característic és

$$\begin{vmatrix} 3-x & -2 & 4 & 4 \\ -2 & -4-x & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 4-x & 6 \\ 4 & -2 & 6 & 4-x \end{vmatrix} = x^4 - 7x^3 - 80x^2 - 88x + 16$$

té terme independent diferent de zero, de manera que $\tilde{\rho} = 4$ i dos canvis de signe $\tilde{r^+} = 2$ i per tant índex $\tilde{i} = 2$.

El polinomi característic de la part quadràtica és $-x^3 + 3x^2 + 36x$ i com el terme independent és 0 el rang és $\rho = 2$, i com té un canvi de signe $r^+ = 1$ que implica que l'índex és $i = 1$.

La quàdrica queda, doncs, codificada per

$$(\rho, i, \tilde{\rho}, \tilde{i}) = (2, 1, 4, 2)$$

que és un paraboloide hiperbòlic.

[16] Només observeu que si $p_1 - q_1 = p_2 - q_2$ llavors $q_3 - p_3 = (q_1 + p_1)(q_1 - p_1) - (q_2 + p_2)(q_2 - p_2)$, etc.

b) Primerament completarem quadrats.

$$\begin{aligned}
& 3x^2-4y^2+4z^2-4xy+8xz+8x-4y+12z+4 \\
= \quad & 3(x+(-\frac{2}{3}y+\frac{4}{3}z+\frac{4}{3}))^2-\frac{1}{3}(-2y+4z+4)^2 \\
- \quad & 4y^2+4z^2-4y+12z+4
\end{aligned}$$

Denotem

$$X=\sqrt{3}(x-\frac{2}{3}y+\frac{4}{3}z+\frac{4}{3})$$

Continuem quadrant.

$$\begin{aligned}
& X^2-\frac{1}{3}(-2y+4z+4)^2-4y^2+4z^2-4y+12z+4 \\
= \quad & X^2-\frac{4}{3}\Big(4(y-(\frac{z}{2}+\frac{1}{8}))^2-4(\frac{z}{2}+\frac{1}{8})^2+z^2-z+1\Big) \\
= \quad & X^2-\frac{16}{3}(y-\frac{z}{2}-\frac{1}{8})^2+2z-\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Denotem

$$Y=\frac{4}{\sqrt{3}}(y-\frac{z}{2}-\frac{1}{8}), \quad Z=-2z+\frac{5}{4}$$

i podem escriure la quàdrica donada com

$$X^2-Y^2-Z=0.$$

Recopilem el canvi de coordenades en forma matricial

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{-2\sqrt{3}}{3} & \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & -2 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I el canvi invers

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & -\frac{15}{8} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{16} \\ 0 & 0 & -1/2 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les noves coordenades del punt $P=(-2,1,1)$ donat són, doncs,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{-2\sqrt{3}}{3} & \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & -2 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Llavors, tal com hem vist a l'exercici 4.13 les dues rectes per P contingudes al paraboloide són

$$\begin{cases} (X,Y,Z)=P+\lambda(1,1,2(p_1-p_2))=(0,\sqrt{3}/2,-3/4)+\lambda(1,1,-\sqrt{3}) \\ (X,Y,Z)=P+\lambda(1,-1,2(p_1+p_2))=(0,\sqrt{3}/2,-3/4)+\lambda(1,-1,\sqrt{3}) \end{cases}$$

Usant ara la matriu del canvi invers que acabem de trobar tenim que les equacions d'aquestes rectes respecte les coordenades inicials són

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & -\frac{15}{8} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{16} \\ 0 & 0 & -1/2 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda+\sqrt{3}/2 \\ -\lambda\sqrt{3}-3/4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

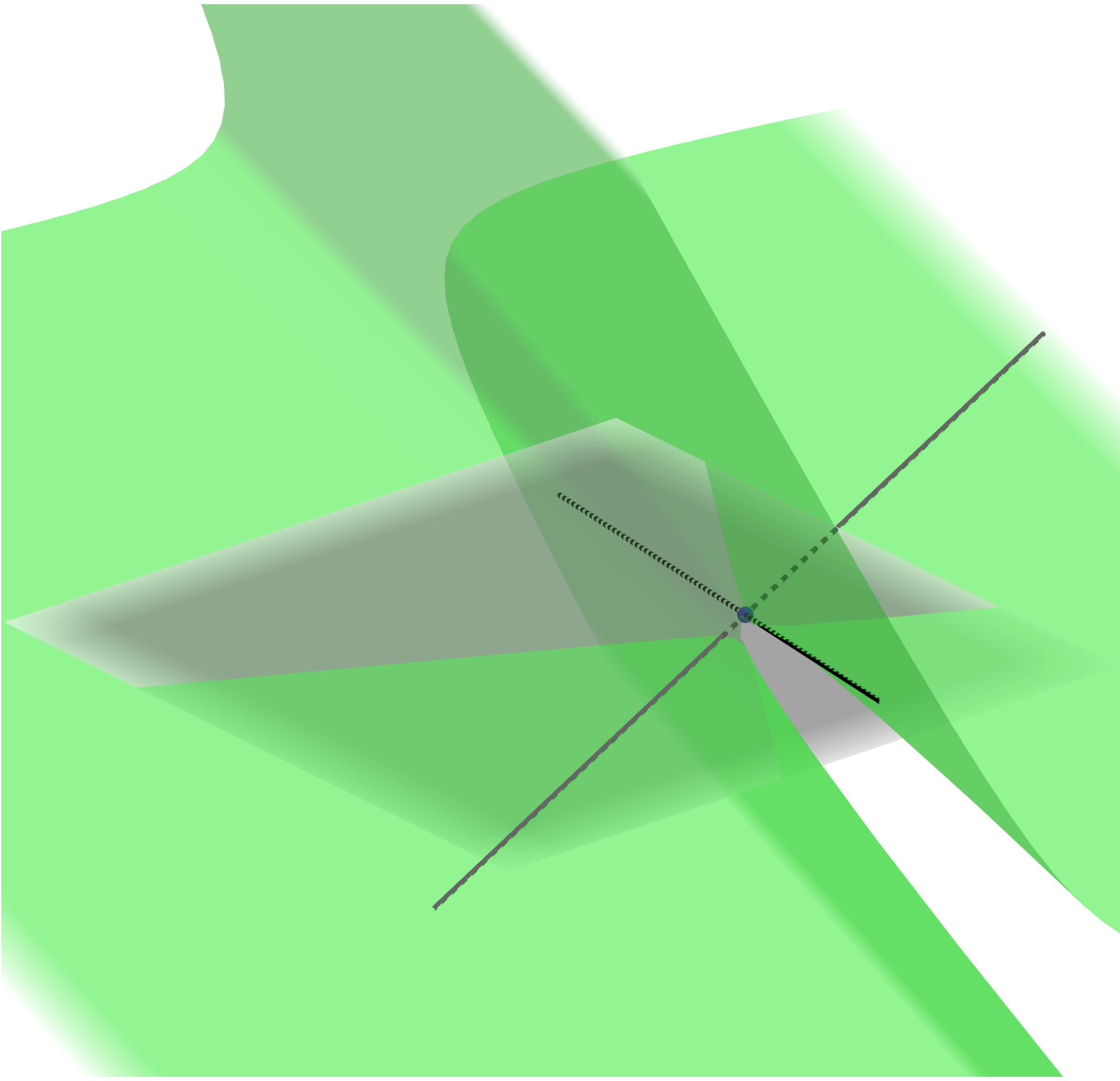
i

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & -\frac{15}{8} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{16} \\ 0 & 0 & -1/2 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda + \sqrt{3}/2 \\ \lambda\sqrt{3} - 3/4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Equivalentment

$$\begin{cases} (x, y, z) = (-2, 1, 1) + \lambda(0, \sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2) \\ (x, y, z) = (-2, 1, 1) + \lambda(2/\sqrt{3}, -\sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2) \end{cases}$$

c) El gradient de $3x^2 - 4y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz + 8x - 4y + 12z + 4$ en el punt $P = (-2, 1, 1)$ és $(0, -4, 4)$ (vector normal del pla tangent) que és perpendicular als dos vectors directors de les rectes trobades a la secció anterior.



5 Taules classificatòries de còniques i quàdriques

Classificació projectiva de les còniques reals

$$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$$

$r=3, i=0$ imaginària	$r=3, i=1$ no singular	$r=2, i=0$ punt real

$$\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$$

$r=2, i=1$ dues rectes	$r=1, i=0$ recta doble

Classificació projectiva de les quàdriques reals

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$$

$r=4, i=0$ imaginària	$r=4, i=1$ no reglada	$r=4, i=2$ reglada	$r=3, i=0$ punt

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}$$

$r=3, i=1$ con	$r=2, i=0$ recta real	$r=2, i=1$ dos plans	$r=1, i=0$ pla doble

Classificació afí de les còniques reals

	ρ	i	$\tilde{\rho}$	$\tilde{i}$	*Equació*	*Nom*
I	2	0	2	0	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	Punt
I	2	1	2	1	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	Dues rectes
I	1	0	1	0	$x_1^2 = 0$	Recta doble
II	2	1	3	1	$x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$	Hipèrbola
II	2	0	3	0	$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$	Buit
II	1	0	2	0	$x_1^2 + 1 = 0$	Buit
III	2	0	3	1	$-x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$	El·lipse
III	1	0	2	1	$-x_1^2 + 1 = 0$	Dues rectes paral·leles
IV	1	0	3	1	$x_1^2 + x_2 = 0$	Paràbola

Classificació afí de les quàdriques reals

	ρ	i	$\tilde{\rho}$	$\tilde{i}$	*Equació*	*Nom*
I	3	0	3	0	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	Punt
I	3	1	3	1	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	Con
I	2	0	2	0	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	Recta
I	2	1	2	1	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	Dos plans
I	1	0	1	0	$x_1^2 = 0$	Pla doble
II	3	0	4	0	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$	Buit
II	3	1	4	1	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$	Hiperboloide dos fulls
II	2	0	3	0	$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$	Buit
II	2	1	3	1	$x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$	Cilindre hiperbòlic
II	1	0	2	0	$x_1^2 + 1 = 0$	Buit
III	3	1	4	2	$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$	Hiperboloide d'un full
III	3	0	4	1	$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$	El·lipsoide
III	2	0	3	1	$-x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$	Cilindre el·líptic
III	1	0	2	1	$-x_1^2 + 1 = 0$	Plans paral·lels
IV	2	0	4	1	$x_1^2 + x_2^2 + z = 0$	Paraboloide el·líptic
IV	2	1	4	2	$x_1^2 - x_2^2 + z = 0$	Paraboloide hiperbòlic
IV	1	0	3	1	$x_1^2 + z = 0$	Cilindre parabòlic

6 Exercicis complementaris

6.1 Geometria Afí

Exercici 6.1: En un espai afí de dimensió 4, trobeu, respecte una referència donada, un sistema d'equacions cartesianes i equacions paramètriques dels plans següents.

a) Pla que passa pel punt $(1,2,3,4)$ i és paral·lel al pla d'equacions:

$$x - y + z + t = 3; \qquad 2x + y - 5t = 10.$$

b) Pla que passa pel punt $(1,2,3,4)$ i és paral·lel al pla d'equacions:

$$x = 2u + v; \quad y = u + v; \quad z = u - 2v + 1; \quad t = v - 2.$$

Solució: a) Resolent el sistema

$$\begin{array}{rcl} x - y + z + t &=& 3 \\ 2x + y - 5t &=& 10 \end{array}$$

obtenim $y = 5t - 2x + 10, z = 4t - 3x + 13$. Per tant, $(x,y,z,t) = (x, 5t - 2x + 10, 4t - 3x + 13, t) = x(1,-2,-3,0) + t(0,5,4,1)$ El pla demanat és doncs

$$(1,2,3,4) + \langle (1,-2,-3,0), (0,5,4,1) \rangle$$

Les seves equacions paramètriques es poden escriure doncs com

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 1 + \lambda \\ y &=& 2 - 2\lambda + 5\mu \\ z &=& 3 - 3\lambda + 4\mu \\ t &=& 4 + \mu \end{array} \right.$$

I les equacions cartesianes es troben imposant

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ -2 & 5 & y-2 \\ -3 & 4 & z-3 \\ 0 & 1 & t-4 \end{pmatrix} = 2.$$

Esglaonant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 0 & 5 & y+2x-4 \\ 0 & 4 & z+3x-6 \\ 0 & 1 & t-4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 0 & 5 & y+2x-4 \\ 0 & 0 & 7x-4y+5z-14 \\ 0 & 0 & -2x-y+5t-16 \end{pmatrix}$$

i, per tant, les equacions cartesianes del pla són

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 7x - 4y + 5z - 14 &=& 0 \\ -2x - y + 5t - 16 &=& 0 \end{array} \right.$$

b) Escrivint

$$(x,y,z,t) = (2u+v, u+v, u-2v+1, v-2) = (0,0,1,-2) + u(2,1,1,0) + v(1,1,-2,1)$$

veiem que el pla demanat és

$$(1,2,3,4) + \langle (2,1,1,0), (1,1,-2,1) \rangle$$

I les equacions cartesianes es troben imposant

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 2 & 1 & x-1 \\ 1 & 1 & y-2 \\ 1 & -2 & z-3 \\ 0 & 1 & t-4 \end{pmatrix} = 2.$$

Esglaonant

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & x-1 \\ 0 & 1 & -x+2y-3 \\ 0 & -5 & 2z-5-x \\ 0 & 2 & 2t-8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & x-1 \\ 0 & 1 & -x+2y-3 \\ 0 & 0 & -6x+10y+2z-20 \\ 0 & 0 & 2x-4y+2t-2 \end{pmatrix}$$

i, per tant, les equacions cartesianes del pla són

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -3x+5y+z-10 & = & 0 \\ x-2y+t-1 & = & 0 \end{array} \right.$$

Exercici 6.2: Trobeu un sistema d'equacions cartesianes i paramètriques del pla Π de l'espai afí $\mathbb{R}^4$ generat per la recta $(1,1,1,1)+\lambda(2,-1,0,-1)$ i el punt $(0,0,-2,3)$. ¿Hi ha algun pla Π' que passi pel punt $(0,1,0,1)$ i tal que la intersecció $\Pi \cap \Pi'$ es redueixi al punt $(0,0,-2,3)$?

Solució: Com els punts $P=(1,1,1,1)$ i $Q=(0,0,-2,3)$ pertanyen a Π el vector $\overrightarrow{PQ}=(-1,-1-3,2)$ pertany a l'espai vectorial director de Π. Així $\Pi=(1,1,1,1)+\langle(2,-1,0,-1),(-1,-1,-3,2)\rangle$. Les equacions cartesianes s'obtenen imposant

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & -1 & x-1 \\ -1 & -1 & y-1 \\ 0 & -3 & z-1 \\ -1 & 2 & t-1 \end{pmatrix} = 2.$$

Esglaonant

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & x-1 \\ 0 & -3 & 2y+x-3 \\ 0 & 0 & x+2y-z-2 \\ 0 & 0 & x+y+t-3 \end{pmatrix}$$

de manera que les equacions cartesianes del pla Π són

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+2y-z-2 & = & 0 \\ x+y+t-3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Per trobar Π' observem que aquest pla ha de ser de la forma

$$(0,1,0,1)+\langle(0,-1,-2,2),v\rangle$$

per a un cert vector v, que ha de ser linealment independent amb el vectors directors de Π i amb $(0,-1,-2,2)$ (aquest vector és el determinat pels punts $(0,1,0,1)\in\Pi'$ i $(0,0,-2,3)\in\Pi'$).

Posant $v=(a,b,c,d)$ ha de ser

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = -3(a+2b-c) \neq 0$$

Equivalentment, passant a cartesianes, Π' està donat per

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -(2b+d)x+2ay+at-3a & = & 0 \\ -(c+d)x+az+at-a & = & 0 \end{array} \right.$$

amb la condició $a+2b-c=0$.

Per exemple $v=(0,0,1,0)$ compleix aquesta condició de manera que el pla Π' donat per

$$(0,1,0,1)+\langle(0,-1,-2,2),(0,0,1,0)\rangle$$

o, en cartesianes,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ 2y+t-3 & = & 0 \end{array} \right.$$

compleix les condicions requerides

Exercici 6.3: Sigui Π el pla de l'espai afí $\mathbb{R}^4$ donat per:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z & = & 2, \\ 4x+t & = & 5. \end{array}\right.$$

Determineu totes les rectes L que passen pel punt $(0,1,0,1)$ i que satisfan $\Pi + L = \mathbb{R}^4$.

Solució: Escrivim Π en forma vectorial. Resolent el sistema obtenim $x = 5/4 - t/4$, $z = -t/2 + y + 1/2$ és a dir,

$$\Pi = P + [F] = (5/4, 0, 1/2, 0) + \langle (0,1,1,0), (-1/4, 0, -1/2, 1) \rangle$$

Si posem $L = Q + [G] = (0,1,0,1) + \langle v \rangle$ per a un cert v s'ha de complir que

$$\begin{array}{rl} & (P+[F]) + (Q+[G]) = P + [F + G + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle] \\ = & (5/4, 0, 1/2, 0) + [\langle (0,1,1,0), (-1/4, 0, -1/2, 1) \rangle + \langle v \rangle + \langle (-5/4, 1, -1/2, 1) \rangle] \end{array}$$

Per tant, per tal de que aquesta suma sigui $\mathbb{R}^4$ la única condició és que v sigui linealment independent amb $(0,1,1,0), (-1/4, 0, -1/2, 1), (-5/4, 1, -1/2, 1)$. Posant $v = (a,b,c,d)$ la condició és doncs

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & -1/2 & 1 \\ -5/4 & 1 & 1/2 & 1 \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = -b + c + d/2 \neq 0$$

Exercici 6.4: Considerem la referència $\mathcal{R}$ de l'espai afí $\mathbb{R}^3$ donada, respecte de la referència canònica, per

$$\mathcal{R} = \{(1,1,1); ((1,1,1), (0,1,0), (2,1,0))\}.$$

Quines coordenades té el punt $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ respecte d'aquesta nova referència? I el punt $(1,1,1) \in \mathbb{R}^3$? ¿Hi ha algun punt que tingui les mateixes coordenades respecte $\mathcal{R}$ que respecte la referència canònica $\mathcal{C}$? Trobeu les equacions del canvi de coordenades entre les referències $\mathcal{R}$ i $\mathcal{C}$.

Solució: La matriu del canvi de base entre $\mathcal{R}$ i $\mathcal{C}$, denotant (x', y', z') les coordenades respecte $\mathcal{R}$ i (x,y,z) les coordenades respecte $\mathcal{C}$ tenim

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, calculant la inversa d'aquesta matriu,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Així per calcular les coordenades de $(0,0,0)$ respecte $\mathcal{R}$ fem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i així les coordenades de $(0,0,0)$ respecte $\mathcal{R}$ són $(-1,0,0)$.

Per calcular les coordenades de $(1,1,1)$ respecte $\mathcal{R}$ fem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i així les coordenades de $(0,0,0)$ respecte $\mathcal{R}$ són $(0,0,0)$, cosa òbvia ja que $(1,1,1)$ és l'origen de $\mathcal{R}$.

Els punts amb iguals coordenades compleixen doncs

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Són solució, doncs, del sistema

$$\begin{array}{rcl} x & = & z-1 \\ y & = & (-1/2)x + y - (1/2)z \\ z & = & (1/2)x - (1/2)z \end{array}$$

però aquest sistema és incompatible i per tant no hi ha punts amb les mateixes coordenades respecte $\mathcal{R}$ i $\mathcal{C}$.

Exercici 6.5: A l'espai afí $\mathbb{R}^3$ considerem les referències $\mathcal{C}$ i $\mathcal{R}$ donades per

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C} & = & \{(0,0,0); ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))\}, \\ \mathcal{R} & = & \{(-1,0,0); ((1,1,0),(0,-1,0),(0,0-1))\}. \end{array}$$

a) Donat un punt P de coordenades $(1,2,-1)$ respecte de $\mathcal{C}$, determineu les coordenades de P respecte de $\mathcal{R}$.

b) Trobeu l'equació respecte de $\mathcal{R}$ del pla Π donat, respecte de $\mathcal{C}$, per l'equació $2x-y+z+2=0$.

c) Trobeu les equacions respecte de $\mathcal{R}$ de la recta r donada, respecte de $\mathcal{C}$, per les equacions

$$\begin{cases} 2x+y=0, \\ x-2y+z=1. \end{cases}$$

Solució: L'equació que dóna el canvi de coordenades, denotant (x',y',z') les coordenades respecte $\mathcal{R}$ i (x,y,z) les coordenades respecte $\mathcal{C}$, és

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

i per tant, trobant la matriu inversa,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y' \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Les coordenades de $P=(1,2,-1)$ respecte $\mathcal{R}$ són doncs

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y' \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

és a dir, P té coordenades $(2,0,1)$ respecte $\mathcal{R}$.

b) El pla es pot escriure com

$$(2,-1,1,0)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

i per tant

$$(2,-1,1,0)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

Així, l'equació de Π respecte de $\mathcal{R}$ és

$$x' + y' - z' = 4.$$

c) Les equacions de r es poden escriure com

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i per tant

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Així les equacions de r respecte de $\mathcal{R}$ són

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x' - y' - 2 & = & 0 \\ -x' + 2y' - z' & = & 2. \end{array}\right.$$

(és habitual treure les primes).

Exercici 6.6: Sigui $\triangle ABC$ un triangle d'un pla afí real. Determinem els punts P sobre la recta AB per la condició $(B,P,A) = \frac{3}{2}$, Q sobre la recta BC per la condició $(C,Q,B) = \frac{3}{2}$, i R sobre la recta AC per la condició $(A,R,C) = -\frac{1}{8}$. Demostreu que els punts P,Q,R estan alineats i doneu, respecte de la referència $\mathcal{R} = \{A; (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\}$, l'equació de la recta que els conté.

Solució: Només hem de reordenar els punts en aquestes raons simples. Tenim (vegeu secció 1.13 de [2])

$$(P,A,B) = \frac{3/2-1}{3/2} = \frac{1}{3}; \quad (Q,B,C) = \frac{3/2-1}{3/2} = \frac{1}{3}, \quad (R,C,A) = \frac{-1/8-1}{-1/8} = 9.$$

Per tant

$$(P,A,B)(Q,B,C)(R,C,A) = 1$$

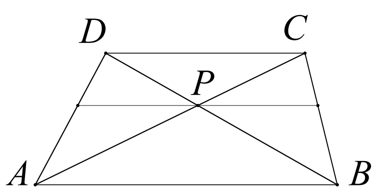
i, pel recíproc del teorema de Menelau (exrecici **??**), els punts estan alineats.

Per trobar l'equació de la recta que ens demanen observem que $P = (p,0)$ i $R = (0,r)$. Així, com $\overrightarrow{PA} = (0,0)-(p,0) = (-p,0)$ i $\overrightarrow{PB} = (1,0)-(p,0) = (1-p,0)$ la igualtat $\overrightarrow{PA} = (P,A,B)\overrightarrow{PB}$ en coordenades implica $-p = (1/3)(1-p)$, és a dir, $p = -1/2$. Anàlogament $\overrightarrow{RC} = (R,C,A)\overrightarrow{RA}$ en coordenades implica $1-r = -9r$, és a dir, $r = -1/8$. L'equació de la recta $P + \lambda\overrightarrow{PR}$ és doncs

$$(x,y) = (-1/2,0) + \lambda(1/2,-1/8),$$

o equivalentment $2x + 8y + 1 = 0$.

Exercici 6.7: Considerem un trapezi A,B,C,D, amb el costat AB paral-lel al costat DC. Sigui P el punt d'intersecció de les diagonals AC i BD. Demostreu que P és el punt mitjà del segment que passa per ell, és paral·lel al costat AB i té els extrems en BC i AD.



Solució: Prenem la referència $\mathcal{R} = \{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$ de manera que e, coordenades tenim $A = (0,0), B = (1,0), D = (0,1), C = (c,1)$. Llavors P ha de tenir coordenades de la forma $P = (\lambda c, \lambda)$ ja que està a la recta AC, però també és de la forma

$$D + \mu\overrightarrow{DB} = (0,1) + \mu(1,-1) = (\lambda c, \lambda)$$

resolent aquest sistema de dues equacions amb dues incògnites obtenim $\lambda = \frac{1}{c+1}, \mu = \frac{c}{c+1}$. Per tant $P = \frac{1}{c+1}(c,1)$. Si $c = -1$ les rectes AC i BD no es tallen.

El segment que passa per P i és paral·lel a AB talla AD en un punt

$$M = (0,m) = P + t(1,0), \quad t \in \mathbb{R}$$

de manera que $m = \frac{1}{c+1}$ i $M = (0, \frac{1}{c+1})$. I talla BC en un punt

$$N = (n_1, n_2) = P + t(1,0) = (1,0) + s(c-1,1), \quad t, s \in \mathbb{R}$$

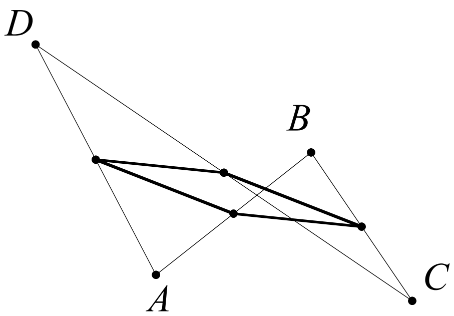
de manera que

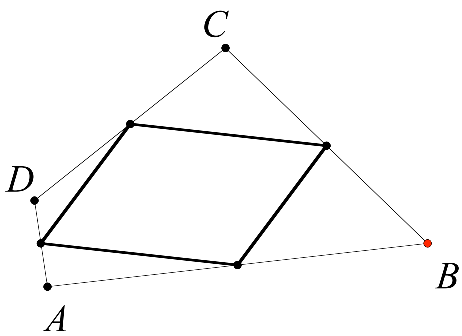
$$\begin{aligned} \frac{c}{c+1} + t &= 1 + s(c-1) \\ \frac{1}{c+1} &= s \end{aligned}$$

per tant $N = (\frac{2c}{c+1}, \frac{1}{c+1})$

Ara ja és clar queles coordenades de P són la semisuma de les coordenades de M i N.

Exercici 6.8: Siguin A, B, C, D els vèrtexs d'un quadrilàter en un pla afí, és a dir, quatre punts del pla afí tals que tres qualssevol d'ells no estan alineats. Demostreu que els punts mitjans dels segments AB, BC, CD, DA són els vèrtexs d'un paral·lelogram.[17] Demostreu també que un quadrilàter és un paral·lelogram si i només si les diagonals es tallen al punt mitjà.



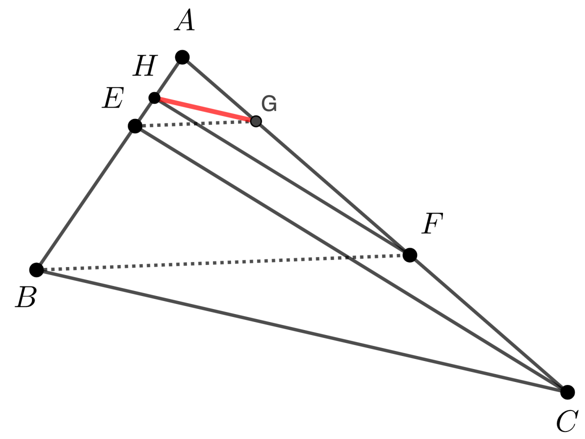


Solució: Exercicis III.13 i III.14 Aguadé.

Exercici 6.9: Siguin ABC un triangle, E un punt de AB, F un punt de AC. La recta paral·lela a BF que passa per E talla AC en G; la recta paral·lela a $.CE$ que passa per F talla AB en H. Proveu que GH és paral·lela a BC.

Solució: Prenem la referència $\mathcal{R} = \{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ de manera que $A = (0,0), B = (1,0), C = (0,1), E = (e,0), F = (0,f)$.

[17] Teorema de Varignon (1791).



Calculem G.

$$(e,0)+\lambda(-1,f)=\mu(0,1)$$

d'on $\lambda = e$ i $G=(0,ef)$.

Calculem H.

$$(0,f)+\lambda(e,-1)=\mu(1,0)$$

d'on $\lambda = f$ i $H=(ef,0)$

Així $\overrightarrow{HG}=ef(-1,1)=ef\overrightarrow{BC}$ i HG té la mateixa direcció que BC.

Exercici 6.10: Comproveu si són afinitats o no les aplicacions següents:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} & ; & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 & ; & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ z & \mapsto & \overline{z} & & (x,y) & \mapsto & (x,-y) & & (x,y,z) & \mapsto & (1+x,\sqrt{\pi}) \end{array}$$

Al primer exemple considereu $\mathbb{C}$ com a espai afí sobre $\mathbb{C}$ i també sobre $\mathbb{R}$.

Solució: En cada cas fixarem un punt arbitrari P del corresponent espai afí i mirarem si l'aplicació $f_P(\overrightarrow{PQ})=\overrightarrow{f(P)f(Q)}$, per qualsevol punt Q de l'espai afí, és lineal.

Primer cas. $\mathbb{C}$ com espai afí de dimensió 1 sobre $\mathbb{C}$. És a dir, él conjunt és $\mathbb{A}=\mathbb{C}$ i l'espai vectorial és també $E=\mathbb{C}$ sobre el cos $k=\mathbb{C}$, per tant de dimensió 1. I l'acció $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ és la suma de nombres complexos.

Prenem $P=0\in\mathbb{C}$ i identifiquem $\overrightarrow{0z}=z$. Llavors l'aplicació $f_P(\overrightarrow{PQ})=\overrightarrow{f(P)f(Q)}$ s'escriu $f_P(z)=\bar{z}$.

Mirem si és lineal. Prenem $\lambda\in\mathbb{C}$ i tenim $f_P(\lambda z)=\overline{\lambda z}=\bar{\lambda}\bar{z}$. Per tant, f_P no és lineal. Però el mateix càlcul demostra que f_P seria lineal (la suma no dóna problemes) si multipliquem només per nombre reals. Resumint, l'aplicació que associa a cada nomtre complex el seu conjugat no és una afinitat sobre el $\mathbb{C}$ espai afí $\mathbb{C}$ però sí que ho és en el $\mathbb{R}$ espai vectorial $\mathbb{C}$ (de dimensió dós). En aquest cas, l'expressió en coordenades de respecte la referència canònica de f_P, $P=(0,0)$, és

$$\left\{\begin{array}{ccc} x' & = & x \\ y' & = & -y \end{array}\right.$$

Sego cas. Cas anterior amb $\mathbb{C}=R^2$.

Tercer cas. En aquest cas, identificant com abans $(x,y,z)=\overrightarrow{(0,0,0),(x,y,z)}$, i anàlogament a $\mathbb{R}^2$, tenim

$$f_P(x,y,z))=\overrightarrow{(1,\sqrt{\pi})(1+x,\sqrt{\pi})}=(x,0)$$

Així $f_P(\lambda(x,y,x))=(\lambda x,0)=\lambda f_P(x,y,z)$ i $f_P((x,y,z)+(x',y',z'))=f_P(x,y,z)+f_P(x',y',z')$, per tant f és una afinitat. La seva expressió respecte de la base canònica és

$$\left\{\begin{array}{ccc} x' & = & x \\ y' & = & \sqrt{\pi} \end{array}\right.$$

Exercici 6.11: Trobeu, en el pla afí $\mathbb{R}^2$, les equacions de la projecció sobre la recta $r : x + y = 1$, en la direcció de la recta $s : x - y = 2$.

Solució: La projecció de que parla l'enunciat és l'aplicació que envia cada punt $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ el punt en que la recta per P paral·lela a s talla r. Només hem de resoldre el sistema

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ x - y & = & a - b \end{array}$$

que dóna

$$x = \frac{1}{2}(1 + a - b), \quad y = \frac{1}{2}(1 - a + b)$$

Amb la notació habitual és l'afinitat

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ y' & = & -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

El determinant de la part lineal és 0 d'acord a la idea que estem col·lapsant el pla sobre una recta.

Exercici 6.12: $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una afinitat de l'espai afí $\mathbb{R}^3$ tal que deixa fixos els punts del pla $\Pi : x + z = 1$ i que compleix $f(0, 0, 0) = (0, -3, 0)$.

a) Trobeu la matriu de f en la referència canònica $\mathcal{C}$ de l'espai afí $\mathbb{R}^3$.

b) Demostreu que f actua com una translació sobre els plans paral·lels a Π, i determineu el vector de translació.

Solució: a) Prenem una referència adaptada al pla. Per exemple $\mathcal{R} = \{(1, 0, 0); (1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$. I la completem a una base de $\mathbb{R}^3$ per exemple afegint el pla normal al pla: $(1, 0, 1)$ Llavors

$$M(f, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja que els dos primers vectrors de la base sónm fixos per $\tilde{f}$; per tant

$$\begin{array}{rcl} M(f, \mathcal{C}) & = & M(\mathcal{R}, \mathcal{C}) M(f, \mathcal{R}) M(\mathcal{R}, \mathcal{C})^{-1} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ & = & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + c + 1 & 0 & a + c - 1 & -a - c + 1 \\ b & 2 & b & -b \\ -a + c - 1 & 0 & -a + c + 1 & a - c + 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Imposem ara que $f(0, 0, 0) = (0, -3, 0)$ i tenim

$$\begin{array}{rcl} -a - c + 1 & = & 0 \\ b & = & 6 \\ a - c + 1 & = & 0 \end{array}$$

que implica $a = 0, b = 6, c = 1$. L'afinitat buscada és doncs

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Els plans paral·lels a Π són els de la forma $x+z=c$, amb $c \in \mathbb{R}$. És a dir, són punts de la forma $(x,y,c-x)$ amb $x \in \mathbb{R}$. Llavors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ c-x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+3c-3 \\ c-x \\ 1 \end{pmatrix}$$

que clarament torna a ser un punt del pla $x+z=c$, i per calcular el vector de translació només hem de fer $\overrightarrow{Pf(P)}$ amb $P=(x,y,c-x)$ i veure que no depèn de x. En efecte, $\overrightarrow{Pf(P)} = (x, y+3c-3, c-x) - (x,y,c-x) = (0, 3-3c, 0)$. Per tant f restringida al pla $x+z=c$ és la translació T_v amb $v=(0,3-3c,0)$.

Nota. Una altra forma de veure que f restringida al pla $x+z=c$ és la translació és vueure que $\tilde{f}$ restringida a l'espai director del pla és la identitat. Però això és clar ja que una base d'aquest pla és, per exemple, $u=(1,0,-1), v=(0,1,0)$, i tots dos vectors són fixos per la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercici 6.13: En un pla afí, fixem una referència $\mathcal{R} = \{P; (e_1, e_2)\}$. Calculeu les equacions de les simetries axials respecte de les rectes donades respecte de $\mathcal{R}$, per les equacions $r : 2x+3y=2$, $s : x+3y=2$, en les direccions respectives e_1+e_2 i e_1. Trobeu les equacions de les seves composicions.

Solució: Trobem primerament la simetria respecte r en direcció e_1+e_2.

Primer mètode. La recta r es pot escriure com

$$r : P + [F] = (1,0) + \langle(-3,2)\rangle$$

Descomponem $\mathbb{R}^2$ com suma directa

$$\mathbb{R}^2 = F \oplus G = \langle(-3,2)\rangle \oplus \langle(1,1)\rangle.$$

Sabem que la simetria axial demanada es calcula a partir de

$$s_r(P+v) = P + v_1 - v_2, \quad v \in F \oplus G, v_1 \in F, v_2 \in G$$

Per tant, donat un punt arbitrari (x,y) tenim $s_r(x,y) = s_r((1,0)+(x-1,y))$ i ara descomponem $(x-1,y)$ a l'anterior suma directa. Obtenim

$$(x-1,y) = \frac{1}{5}(-x+y+1)(-3,2) + \frac{1}{5}(2x+3y-2)(1,1).$$

i així

$$\begin{aligned} s_r(x,y) &= (1,0) + \frac{1}{5}(-x+y+1)(-3,2) - \frac{1}{5}(2x+3y-2)(1,1) \\ &= (\frac{1}{5}(x-6y+4), \frac{1}{5}(-4x-y+4)) \end{aligned}$$

Segon mètode. Prenem la referència $\mathcal{R} = \{(1,0); (-3,2), (1,1)\}$. En aquesta referència

$$M(s_r, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant

$$M(s_r, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ -4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

exactament com havíem vist pel primer mètode.

Simetria respecte s en direcció e_1. La recta s es pot escriure com

$$s : Q + [G] = (2,0) + \langle(-3,1)\rangle$$

Prenem la referència $\mathcal{R} = \{(2,0);(-3,1),(1,0)\}$. En aquesta referència

$$M(s_s,\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$M(s_s,\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per trobar la composició de les dues simetries tant sols hem de multiplicar les matrius.

$$M(s_r,\mathcal{C})M(s_s,\mathcal{C}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ -4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -12 & 8 \\ 4 & 23 & -12 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Es pot comprovar que el punt d'intersecció de r i s, $(0,2/3)$, és fix.

Exercici 6.14: Sigui f una afinitat d'un pla afí $\mathbb{A}$, tal que en una certa referència $\mathcal{R} = \{P;(e_1,e_2)\}$ té per equació $f(x,y) = (x-y+1, y+2)$. Trobeu l'equació de f en la referència $\mathcal{R}' = \{(3,2);(e_1-e_2, 2e_1+e_2)\}$.

Solució: La fórmula del canvi de base és (Proposició 2.22 de [2])

$$M(f,\mathcal{R}) = M(\mathcal{R},\mathcal{R}')^{-1}M(f,\mathcal{R}')M(\mathcal{R},\mathcal{R}').$$

Tenim

$$M(f,\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(\mathcal{R}',\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant

$$\begin{aligned} M(f,\mathcal{R}') &= M(\mathcal{R},\mathcal{R}')M(f,\mathcal{R})M(\mathcal{R},\mathcal{R}')^{-1} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercici 6.15: Considerem l'afinitat de l'espai afí $\mathbb{R}^3$ que té per equació:

$$f(x,y,z) = (1+x+2y+z, 2+y-z, -1+x+9z).$$

a) És bijectiva? Trobeu l'endomorfisme associat.
b) Calculeu la imatge de la recta r donada per $x = a, y = 2-a, z = -1$.
c) Calculeu la imatge del pla $2x+y-z = 1$.
d) Calculeu l'antiimatge d'aquestes mateixes varietats lineals.
e) Trobeu els punts fixos.
f) Trobeu l'equació de f en la referència $\mathcal{R} = \{(1,0,4);((1,1,0),(2,0,1),(8,0,7))\}$.

Solució: a) La matriu de f respecte la base canònica és

$$M = M(f,\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com el determinant d'aquesta matriu és diferent de zero T és bijectiva, i l'endomorfisme associat està donat pel menor format per les tres primeres files i les tres primeres columnes d'aquesta matriu.

b) Apliquem M a les coordenades de la recta r.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a \\ 2-a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a \\ 5-a \\ a-10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obtenim la recta $(4,5,-10)+a(-1,-1,1)$, $a \in \mathbb{R}$. Equival a haver transformat el vector director de r, $(1,-1,0)$, per la part lineal de f (el menor 3×3 abans considerat) i la imatge d'un punt.

c) Com el pla $2x+y-z-1=0$ es pot escriure com

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

i

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

tenim

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 9 & -18 & -3 & 24 \\ -1 & 8 & 1 & -14 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

que canviant x' per x, y' per y i z' per z, dóna $3x-5y-z+5=0$.

Nota. Podem refer l'apartat b) transformant, com acabem d'explicar, els plans $x-a=0$, $y-2+a=0$ i $z+1=0$. Tindrem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

i.e., $3x'-6y'-z'+8-2a=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & a-2 \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

i.e., $-x'+8y'+z'+6a-26=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

i.e., $-x'+2y'+z'+4=0$

Resolent el sistema format per aquestes tres equacions obtenim $x=4-a, y=5-a, z=a-10$ com ja havíem vist a l'apartat anterior.

d) Busquem un vector $u=(u_1,u_2,u_3)$ tal que sigui aplicat al vector director de la recta donada, $(1,-1,0)$, per la part lineal de f.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicant la matriu inversa obtenim $(u_1, u_2, u_3) = (27/6, -3/2, -1/2)$.

I ara només necessitem la antiimatge d'algun punt de la recta i ja estarem. Per exemple, prenem $a = 0$ i busquem un punt (α, β, γ) tal que

$$M \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aplicant la inversa de M obtenim $(\alpha, \beta, \gamma) = (-3/2, 1/6, 1/6)$ i per tant l'antiimatge de r és la recta $(-3/2, 1/6, 1/6) + \lambda(27/6, -3/2, -1/2)$.

Busquem ara un pla

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

tal que la seva imatge per l'afinitat, que hem vist que és

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

coincideixi amb el pla donat per

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Per tant

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

és a dir, el pla buscat és $x + 5y - 8z + 4 = 0$.

e) Per trobar els punts fixos resolem el sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

equivalentment

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolent obtenim que lúnic punt fix és $P = (-15, -3/2, 2)$.

f) Utilitz(ant la fórmula del canvi de referència

$$M(f, \mathcal{R}) = M(\mathcal{C}, \mathcal{R}) M(f, \mathcal{C}) M(\mathcal{C}, \mathcal{R})^{-1}$$

que és més còmode escriure com

$$M(f, \mathcal{R}) = M(\mathcal{R}, \mathcal{C})^{-1} M(f, \mathcal{C}) M(\mathcal{R}, \mathcal{C})$$

ja que la informació a tenim respecte la base canònica, tenim

$$
\begin{aligned}
M(f,\mathcal{R}) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -14 & -4 \\ 2 & -20 & -138 & -69 \\ 0 & 6 & 40 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Nota. Comprovem com a control que aquesta fórmula funciona aplicant-la a l'origen $O = (1,0,4)$ de $\mathcal{R}$. Les seves coordenades respectes $\mathcal{R}$ són $(0,0,0)$ i per tant la seva imatge per f escrita respecte $\mathcal{R}$ és $(-2,-69/2,19/2)$. És a dir,

$$(x,y,z)-(1,0,4) = -2(1,1,0) - 69/2(2,0,1) + 19/2(8,0,7)$$

que dóna $(x,y,z) = (6,-2,36)$.

Si apliquem f directament a $(1,0,4)$ obtenim el mateix resultat $(6,-2,36)$.

Exercici 6.16: Sigui f l'afinitat d'un espai afí de dimensió 3, donada, respecte d'una referència $\mathcal{R}$, per:

$$\begin{cases} x' = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z, \\ y' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z, \\ z' = -1 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z. \end{cases}$$

Trobeu, respecte de $\mathcal{R}$,

a) Els punts fixos i les rectes invariants.

b) La transformada de la recta
$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}.$$

c) L'antiimatge del pla $x' - y' - z' = 2$.

Solució: Problema 32 Tedi. Només falta calcular les rectes invariants. Pel Corol·lari 2.25 de [2] sabem que la direcció d'aquestes rectes ve donada per un vector propi de $\tilde{f}$ i a més s'ha de complir que el vector $\overrightarrow{Pf(P)}$, on P és qualsevol punt de la recta, tingui la direcció de la recta.

El polinomi característic de $\tilde{f}$ és

$$\begin{vmatrix} -1/3-x & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3-x & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3-x \end{vmatrix} = -x^3 - x^2 + x + 1$$

i les seves arrels són $\lambda = 1$ i $\mu = -1$, aquesta amb multiplicitat 2.

Per cada valor propi calculem el vector propi.

$\lambda = 1$.
$$\begin{pmatrix} -1/3-1 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3-1 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
que dona $u = (1,1,1)$.

Estudi de rectes invariants de direcció $(1,1,1)$.

Ara hem de trobar P tal que $\overrightarrow{Pf(P)} = \lambda(1,1,1)$. Dient (x,y,z) les coordenades de P i (x',y',z') les de $f(P)$ ha de ser

$$
\begin{aligned}
1-(4/3)x+(2/3)y+(2/3)z &= \lambda \\
(2/3)x-(4/3)y+(2/3)z &= \lambda \\
-1+(2/3)x+(2/3)y-(4/3)z &= \lambda
\end{aligned}
$$

que resolent dóna $\lambda = 0$, que vol dir $P = f(P)$ i $y = x - (1/2), z = x - 1$, que vol dir que la recta

$$(0, -1/2, -1) + x(1, 1, 1), \quad x \in \mathbb{R}$$

és una recta fixa de punts fixos.

$\mu = -1$.

$$\begin{pmatrix} -1/3+1 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3+1 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que dona $z = -x - y$ que vol dir que tenim dos vectors propis $v = (1, 0, -1)$, $w = (0, 1, -1)$.

Estudi de rectes invariants de direcció $(1, 1, -1)$.

Hem de trobar P tal que $\overrightarrow{Pf(P)} = \lambda(1, 0, -1)$.

Dient (x, y, z) les coordenades de P i (x', y', z') les de $f(P)$ ha de ser

$$\begin{aligned} 1 - (4/3)x + (2/3)y + (2/3)z &= t \\ (2/3)x - (4/3)y + (2/3)z &= 0 \\ -1 + (2/3)x + (2/3)y - (4/3)z &= -t \end{aligned}$$

que resolent dóna $y = (t/2) + x - (1/2)$, $z = t + x - 1$, és a dir, qualsevol punt P del pla

$$\Pi_1 : (0, -1/2, -1) + t(0, 1/2, 1) + x(1, 1, 1), \quad x, t \in \mathbb{R}$$

és tal que la recta $P + \langle(1, 0, -1)\rangle$, que està continguda en aquest pla, és invariant. En particular aquest pla és invariant. L'equació de Π_1 en cartesianes és $-x + 2y - z = 0$.

Estudi de rectes invariants de direcció $(0, 1, -1)$.

Ara busquem Q tal que $\overrightarrow{Qf(Q)} = \lambda(0, 1, -1)$. El sistema que hem de resoldre ara és

$$\begin{aligned} 1 - (4/3)x + (2/3)y + (2/3)z &= 0 \\ (2/3)x - (4/3)y + (2/3)z &= t \\ -1 + (2/3)x + (2/3)y - (4/3)z &= -t \end{aligned}$$

que dóna $y = -t/2 + x - 1/2, z = t/2 + x - 1$ és a dir, qualsevol punt Q del pla

$$\Pi_2 : (0, -1/2, -1) + t(0, -1/2, 1/2) + x(1, 1, 1), \quad x, t \in R$$

és tal que la recta $Q + \langle(0, 1, -1)\rangle$, que està continguda en aquest pla, és invariant. L'equació de Π_2 en cartesianes és $-4x + 2y + 2z + 3 = 0$.

Òbviament si tallem els plans Π_1 i Π_2 obtenim la recta de punts fixos.

Exercici 6.17: Trobeu les afinitats d'un pla afí $\mathbb{A}$ que deixen fix un vèrtex d'un triangle i permuten els altres dos. Trobeu les afinitats de $\mathbb{A}$ que deixen invariant una recta L donada. Trobeu les afinitats d'un espai afí de dimensió 3 que tenen una recta de punts fixos i deixen invariant una altra recta paral·lela a l'anterior.

Solució: a) Donat el triangle $\triangle ABC$ i una afinitat f tal que $f(A) = A$, $f(B) = C$, $f(C) = B$, prenem com referència $\mathcal{R} = \{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\}$ i tenim

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Si L es pot escriure com $L : P + \langle e_1 \rangle$ prenem com referència $\mathcal{R} = \{P; e_1, e_2\}$ amb e_2 linealment independent amb e_1.

Llavors

$$M(f; \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja que $\overrightarrow{Pf(P)} = de_1$.

c) Prenem una referència afí $\mathcal{R} = \{P; e_1, e_2, e_3\}$ amb $P + \langle e_1 \rangle$ la recta r de punts fixos, $e_2 = \overrightarrow{PQ}$, amb Q un punt qualsevol de la recta paral·lela $s : Q + \langle e_1 \rangle$ paral·lela a l'anterior, i prenem e_3 tal que e_1, e_2, e_3 linealment independents.

Observem que $f(P + e_1) = P + \tilde{f}(e_1) = P + e_1$, per tant e_1 és vector propi de valor propi 1 de $\tilde{f}$. Observem també que com $Q = P + e_2$ les coordenades de Q en aquesta referència són $Q = (0, 1, 0)$.

Llavors

$$M(f, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & a & a' & 0 \\ 0 & b & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per certs $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$.

Com ha de ser invariant ha de passar que $f(Q + \lambda e_1) = Q + \mu e_1$ ($\mu = \mu(\lambda)$). Així,

$$f(Q) + \lambda \tilde{f}(e_1) = f(Q) + \lambda e_1 = Q + \mu e_1,$$

per tant, ha de ser

$$\overrightarrow{Qf(Q)} = \nu e_1, \nu \in \mathbb{R} \tag{11}$$

Les coordenades de Q respecte de $\mathcal{R}$ les coordenades de $f(Q)$ són

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a' & 0 \\ 0 & b & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i, per tant, la igualtat (11) s'escriu en coordenades com

$$(a, b - 1, 0) = \nu(1, 0, 0).$$

Per tant ha de ser $b = 1$, i l'afinitat demanada és

$$M(f, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & a & a' & 0 \\ 0 & 1 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

amb $a', b', c' \in \mathbb{R}$ arbitraris.

Exercici 6.18: Considereu l'aplicació $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ donada per

$$f(x, y, z, t) = (1 + x + y, -1 + y + z, 2 + z + t, 1 + \alpha x + t).$$

Trobeu el valor de α per al qual f no és bijectiva. Per a aquest valor, trobeu la relació entre a, b, c, d perquè l'hiperplà $ax + by + cz + dt = 1$ de l'espai afí $\mathbb{R}^4$, es transformi en una subvariet lineal de dimensió més petita que 3.

Solució: Hem d'imposar

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

i obtenim $\alpha = 1$. És a dir, per a $\alpha = 1$ aquesta aplicació no es bijectiva.

Transformem l'hiperplà donat.

Com un dels quatre coeficients a, b, c, d és diferent de zero suposem per començar $d \neq 0$.

Els transformats per f dels punts de l'hiperplà són punts de coordenades (x', y', z', t') donades per

$$\begin{aligned}
x' &= 1 + x + y \\
y' &= -1 + y + z \\
z' &= (2 + \frac{1}{d}) - \frac{a}{d}x - \frac{b}{d}y + (1 - \frac{c}{d})z \\
t' &= (1 + \frac{1}{d}) + (1 - \frac{a}{d})x - \frac{b}{d}y - \frac{c}{d}z
\end{aligned}$$

Punts que es poden escriure com

$$\begin{aligned}
(x', y', z', t') &= (1, -1, 2 + \frac{1}{d}, 1 + \frac{1}{d}) + x(1, 0, -\frac{a}{d}, 1 - \frac{a}{d}) \\
&+ y(1, 1, -\frac{b}{d}, -\frac{b}{d}) + z(0, 1, 1 - \frac{c}{d}, -\frac{c}{d})
\end{aligned}$$

Per tal de que aquest subespai, al variar $x, y, z \in \mathbb{R}$, tingui dimensió menor a tres ha de ser que tots els menors 3×3 de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a/d & 1 - a/d \\ 1 & 1 & -b/d & -b/d \\ 0 & 1 & 1 - c/d & -c/d \end{pmatrix}$$

siguin zero. Però tots els menors són iguals a $\frac{1}{d}(-a + b - c + d)$ així doncs la condició demanada és $-a + b - c + d = 0$.

Si $d = 0$ i suposem $c \neq 0$ podem posar $z = \frac{1}{c}(1 - ax - by)$ i ells transformats per f dels punts de l'hiperplà són punts de coordenades (x', y', z', t') donades per

$$\begin{aligned}
(x', y', z', t') &= (1, -1 + \frac{1}{c}, 2 + \frac{1}{c}, 1) + x(1, -\frac{a}{c}, -\frac{a}{c}, 1) \\
&+ y(1, 1 - \frac{b}{c}, -\frac{b}{c}, 0) + t(0, 0, 1, 1)
\end{aligned}$$

Per tal de que aquest subespai, al variar $x, y, t \in \mathbb{R}$, tingui dimensió menor a tres ha de ser que tots els menors 3×3 de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -a/c & -a/c & 1 \\ 1 & 1 - b/c & -b/c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

siguin zero. Però tots els menors són iguals a $\frac{1}{c}(a - b + c)$ així doncs la condició demanada quan $d = 0$ és $a - b + c = 0$, que coincideix amb la condició donada quan era $d \neq 0$ però canviant al final d per zero.

Anàlogament si $d = c = 0$ i $b \neq 0$ el mateix argument mostra que la condició és $a - b = 0$ de manera que podem englobar tots els casos en la condició

$$-a + b - c + d = 0$$

Si $b = c = d = 0$, ha de ser $a \neq 0$ i la imatge per f de $ax = 1$ té sempre dimensió 3.

Exercici 6.19: Sigui f una afinitat d'un espai afí modelat sobr un k- espai vectorial. Demostreu que

a) si f^2 té algun punt fix, f també.

b) Si existeix un $n \in \mathbb{N}$, invertible al cos base, tal que f^n té algun punt fix, aleshores f també.

Solució: a) Suposem $f^2(P) = P$. Sigui G el punt mitjà entre P i $f(P)$. Llavors

$$f(G) = f(P + \frac{1}{2}\overrightarrow{Pf(P)}) = f(P) + \frac{1}{2}\tilde{f}(\overrightarrow{Pf(P)}) = f(P) + \frac{1}{2}\overrightarrow{f(P)P} = f(P) - \frac{1}{2}\overrightarrow{Pf(P)} = G.$$

En característica 2 no podríem fer això.

b) Canviem el punt mitjà de l'apartat anterior pel baricentre. Ara tenim $f^n(P) = P$. El baricentre

$$G = P + \frac{1}{n}(\overrightarrow{Pf(P)} + \cdots + \overrightarrow{Pf^{n-1}(P)})$$

(necessitem n invertible) és fix ja que

$$\begin{aligned} f(G) &= f(P) + \frac{1}{n}(\overrightarrow{f(P)f^2(P)} + \cdots + \overrightarrow{f(P)P}) \\ & P + \overrightarrow{Pf(P)} + \frac{n-1}{n}\overrightarrow{f(P)P} + \frac{1}{n}(\overrightarrow{Pf^2(P)}) + \cdots + \overrightarrow{Pf^{n-1}(P)}) \\ & -\frac{1}{n}\overrightarrow{f(P)P} + \frac{1}{n}(\overrightarrow{Pf^2(P)}) + \cdots + \overrightarrow{Pf^{n-1}(P)}) = G. \end{aligned}$$

Finalment observem que si el cos inicial té característica p i considerem una translació T es complirà que T^p és la identitat però T no té punts fixos.

Exercici 6.20: Demostreu que donats dos triangles T_1 i T_2 d'un pla afí $\mathbb{A}$, existeix una afinitat bijectiva $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que $f(T_1) = T_2$. Quantes n'hi ha? És certa l'afirmació anterior si canviem els triangles per quadrilàters o paral·lelograms?

Solució: El teorema 2.2.3 de [2] diu directament que existeix una única afinitat que porta tres punts independents (com és el cas dels tres vèrtexs de T_1) sobre tres punts donats. Si aquests tres punts donats són els vèrtexs de T_2, i per tant punts independents, aquesta afinitat és bijectiva (observació 2..35 de [2].)

En el nostre cas com no s'especifica l'ordre dels tres segons punts, sinó tan sols que són els vèrtexs de T_2, tenim $3! = 6$ possibilitats un cop elegit un ordre en els vèrtexs de T_1. Com aquest ordre també es pot elegir de 6 maneres diferents tenim 36 possibilitats.

Si canviem triangles per quadrilàters pot ser que no existeixi cap afinitat que porti l'un sobre l'altre ja que un cop fixada la imatge de tres dels vèrtexs, per la unicitat comentada abans, la imatge del quart vèrtex queda determinada i pot ser o no el quart vèrtex dels segon quadrilàter.

En el cas dels paral·lelograms observem que si elegim tres vèrtexs del primer i tres vèrtexs del segon, tenim una única afinitat que porta la primera terna sobre la segona. El quart vèrtex del primer quadrilàter va a parar automàticament al quart vèrtex del segon quadrilàter ja que rectes paral·leles van a parar a rectes paral·leles. Com podem elegir tres vèrtexs de quatre (tenint en compte l'ordre) de $V_4^3 = \binom{4}{3}3! = 24$ maneres diferents tenim $24 \times 24 = 576$ afinitats que porten un quadrilàter sobre un altra.

Exercici 6.21: Siguin $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ triangles de costats respectivament paral·lels. Demostreu que existeix una translació o una homotècia que porta l'un sobre l'altre.

Solució: Desargues. Si les rectes AA', BB' es tallen en un punt O forçosament la recta CC' passa també per aquest punt (la recta OC tallaria la recta $B'C'$ en un punt C'' que per Desargues és tal que $A'C''$ és para l.lela a AC i per tant $C' = C''$). Així els triangles estan en perspectiva des de O i són doncs homotètics. Vegeu l'apartat b) de l'exercici 1.28.

Si les rectes AA', BB' no es tallen la recta CC' és també paral·lela a elles (raonament semblant al del paràgraf precedent). Per tant la translació de vector $\overrightarrow{AA'}$ porta B a B' i C a C'.

Exercici 6.22: Observeu que una afinitat parabòlica $\mathcal{P}(a)$ transforma una recta r paral·lela a l'eix en una altra recta r' paral·lela a l'eix, tal que la raó simple $(e, r', r) = a$ (amb la definició natural de raó simple de tres rectes paral·leles).

Justifiqueu, a partir d'aquests comentaris, les dues construccions de la imatge d'un punt per una afinitat parabòlica donades a la secció 3.9 de [2].

Solució: Les equacions canòniques de les afinitats parabòliques són

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' &=& ax \\ y' &=& x + ay, \quad a \neq 1 \end{array} \right.$$

Així és clar que $(0,0)$ és l'únic punt fix, la recta $x = 0$ és invariant (és l'eix) i les rectes $x = c$ (paral·leles a l'eix) van a parar a les rectes $x = ac$.

La raó simple dels punts $(0,0), (ac, 0), (c, 0)$, en aquest ordre, és a. La raó simple de tres rectes paral·leles és la raó simple dels tres punts que s'obtenen al tallar-les per una tercera recta. Pel teorema de Tales aquesta raó simple no depèn de la recta escollida.

Construcció de la imatge d'un punt quan es coneixen dos punts homòlegs sobre l'eix i dues rectes homòlogues pel centre.

Seguint [2] els passos es veuen justificats per conservació de raó simple i Tales.

Exercici 6.23: Justifiqueu la construcció de la imatge d'un punt per una afinitat hiperbòlica donada a la secció 3.9 de [2].

Solució: Left to the reader

Exercici 6.24: Considereu les dues afinitats d'un pla afí real $\mathbb{A}$, donades, respecte d'una certa referència $\mathcal{R}$, per

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (-2x-y-1, 9x+4y+4), \\ g(x,y) &= (3x+4y+3, -x-y-1). \end{aligned}$$

Són equivalents?

Solució: El més fàcil és veure quines són les seves expressions canòniques. Es veu fàcilment que cap de les dues té punts fixos. Les matrius de les parts lineals admeten, en els dos casos, el valor propi $\lambda = 1$, amb multiplicitat 2. En els dos casos, tant $\tilde{f}$ com $\tilde{g}$, admeten un sol vector propi, $u = (1,-3)$ per a $\tilde{f}$ i $v = (-2,1)$ per a $\tilde{g}$.

Rectes invariants. Utilitzarem., per variar una mica, el mètode de la secció l'observació 3.21.7 de [2].

Per f. La recta $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ és invariant si

$$(\alpha,\beta,\gamma) \in \ker(\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 9 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t - \mu\, id)$$

on μ és un valor propi de $\tilde{f}$.

Per tant

$$\begin{pmatrix} -3 & 9 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aquest sistema només admet la solució $\alpha = \beta = 0$ i per tant no hi ha rectes invariants per f.

El mateix mètode per g dóna el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aquest sistema només admet la solució $\alpha = \beta = 0$ i per tant no hi ha rectes invariants per g.

Aix´doncs, segons la taula 3.3 de [2], tant f com g són una homologia especial seguida de translació.

Per trobar l'expressió canònica prenem $e_1 = \overrightarrow{Pf(P)}$ amb P punt arbitrari. Com no hi rectes invariants aquest vector és linealment independent amb el vector propi de valor propi 1 ($(1,-3)$ per a f. En la referència $\mathcal{R} = \{P; e_1, u\}$ tenim

$$M(f,\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La traça ha de ser 2 i canviant v per bv tenim l'expressió canònica

$$M(f,\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El mateix faríem per a g.

Exercici 6.25: a) Calculeu, respecte de la referència canònica de l'espai afí $\mathbb{R}^2$, les equacions d'una homotècia de centre $(1,1)$ i raó 3.

b) Poden ser similars dues homotècies de centres diferents?

c) Poden ser similars dues homotècies de raons diferents?

Solució: a)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

és a dir

$$\begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 3y - 2 \end{cases}$$

b) i c) Veure Corol·lari 3.10 de [2].

Exercici 6.26: Sigui $\mathcal{R} = \{P; (e_1, e_2)\}$ una referència en un pla afí real $\mathbb{A}$. Estudieu l'afinitat $f = S \circ T_u$ de $\mathbb{A}$, donada com a composició de la translació T_u de vector $u = (3, 4)$, amb la simetria S respecte de la recta $L_1 = P + \langle e_1 \rangle$ en la direcció $\langle e_2 \rangle$. Determineu els punts fixos, les rectes invariants, i una referència $\mathcal{R}'$ respecte de la qual $M(f, \mathcal{R}')$ sigui l'expressió canònica de f.

Solució:

$$M(S \circ T, \mathcal{R}) = M(S, \mathcal{R})M(T, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Punts fixos. Hem de resoldre

$$\begin{cases} x = x + 3 \\ -y - 4 = y \end{cases}$$

que no té solució.

Mirem rectes invariants de direccions els vectors propis.

Rectes invariants en direcció e_1. Hem de trobar $P = (x, y)$ tal que $\overrightarrow{Pf(P)} = \mu e_1$, és a dir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que dóna $y = -2$. Com aquesta recta té la direcció de e_1 és la (única) recta invariant amb aquesta direcció. Per la taula 3.3 de [2] sabem que $S \circ T$ és una homologia general seguida de translació.

Rectes invariants en direcció e_2. Hem de trobar $P = (x, y)$ tal que $\overrightarrow{Pf(P)} = \mu e_2$, és a dir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sistema incompatible i per tant no hi ha rectes invariants amb aquesta direcció. Per la taula 3.3 de [2] sabem que $S \circ T$ és una homologia general seguida de translació.

Per trobar l'expressió canònica prenem la referència $\mathcal{R} = \{O = (0, -2); e_2, 3e_1\}$ de manera que

$$M(S \circ T, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Hem usat que la tercera columna de la matriu són les components de vector $\overrightarrow{Of(O)}$ escrites en la base $(e_2, 3e_1)$). Aquesta és l'expressió canònica d'una homologia general seguida de translació.

Exercici 6.27: Sigui $\mathcal{R} = \{P; (e_1, e_2)\}$ una referència en un pla afí real $\mathbb{A}$. Estudieu l'afinitat $f = T_u \circ S$ de $\mathbb{A}$ donada com a composició de la simetria S respecte de la recta $L_1 = P + \langle e_1 \rangle$ en la direcció $\langle e_2 \rangle$, i la translació T_u de vector $u = (2, 5)$. Determineu els punts fixos, les rectes invariants, i una referència $\mathcal{R}'$ respecte de la qual $M(f, \mathcal{R}')$ sigui l'expressió canònica de f.

Solució: Similar a l'anterior.

6.2 Geometria Euclidiana

Exercici 6.28: Siguin L_1 i L_2 varietats lineals d'un espai afí euclidià $\mathbb{A}$. Demostreu que si $X \in L_1$ i $Y \in L_2$ són tals que $d(L_1, L_2) = d(X, Y)$, llavors la recta determinada pels punts X i Y és perpendicular comuna a L_1 i L_2.

Solució: Sigui Z la intersecció amb L_2 de la recta per X perpendicular a L_2. Vegeu la Proposició 5.9 de [2]. Llavors el triangle X, Y, Z és rectangle en Z i $d(X,Z)^2 + d(Y,Z)^2 = d(X,Y)^2 \leq d(X,Z)^2$, ja que $d(X,Y)$ és l'ínfim de les distàncies entre punts de L_1 i L_2. Això implica $d(Y,Z) = 0$, i per tant $Y = Z$ i la recta XY és perpendicular a L_2.

Exercici 6.29: Siguin A, B, C tres punts alineats en un espai afí euclidià $\mathbb{A}$. Demostreu que

$$|(A,B,C)| = \frac{d(A,B)}{d(A,C)}.$$

Fins a quin punt, doncs, la raó simple depèn de la distància?

Solució: Per definició

$$\overrightarrow{AB} = (A,B,C)\overrightarrow{AC}$$

que prenent normes dóna el resultat.

La raó simple és un concepte afí que ha estat introduït sense recórrer al concepte de distància. En geometria axiomàtica s'introdueix el concepte de distància sense utilitzar el model algebraic que usem aquí i amb aquest concepte i el concepte axiomàtic d' "estar entre" també es pot definir raó simple amb la fórmula d'aquest exercici i un control del signe de (A,B,C) segons si A "està entre" B i C, *etc.*

Exercici 6.30: Sigui L la varietat lineal de l'espai afí euclidià $\mathbb{R}^4$ donada per

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ x + t = 3. \end{cases}$$

Trobeu el pla Π ortogonal a L tal que $L \cap \Pi = \{(1,1,1,2)\}$.

Solució: Els vectors directors d'aquest pla es poden obtenir posant $(x,x,z,3-x) = (0,0,0,3) + x(1,1,0,-1) + z(0,0,1,0)$ i.e, $L = (0,0,0,3) + [F] = (0,0,0,3) + \langle(1,1,0,-1),(0,0,1,0)\rangle$ Per trobar una base de $F^\perp$ posem

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x + y - t & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

és a dir, els punts de $F^\perp$ són de la forma $(x,y,0,x+y) = x(1,0,0,1) + y(0,1,0,1)$ i per tant $F^\perp = \langle(1,0,0,1),(0,1,0,1)\rangle$ i Π en coordenades és

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} x-a & 1 & 0 \\ y-b & 0 & 1 \\ z-c & 0 & 0 \\ t-d & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Tots els menors d'ordre 3 han de ser 0. Només cal considerar-ne dos, i obtenim

$$\left\{ \begin{array}{ccc} z & = & c \\ -x - y + t & = & d - b - a \end{array} \right.$$

Per calcular $L \cap \Pi$ resolem el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccc} z & = & c, \\ -x - y + t & = & d - b - a \\ x - y & = & 0 \\ x + t & = & 3 \end{array} \right.$$

i obtenim

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & = & \frac{1}{3}(a + b - d + 3) \\ y & = & \frac{1}{3}(a + b - d + 3) \\ z & = & c \\ t & = & \frac{1}{3}(-a - b + d + 6) \end{array} \right.$$

i imposant ara que aquest punt sigui el $(1,1,1,2)$ obtenim $d = a + b$, $c = 1$, de manera que les equacions de Π són

$$\left\{ \begin{array}{ccc} z & = & 1 \\ -x - y + t & = & 0 \end{array} \right.$$

Exercici 6.31: Sigui $\mathbb{A}$ l'espai afí $\mathbb{R}^4$ considerat com a espai afí euclidià amb el producte escalar donat, respecte de la base canònica de l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$, per la matriu

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trobeu la distància entre les varietats lineals de $\mathbb{A}$ següents:

a) El pla Π determinat per $(0,1,1,0)$, $(1,1,1,1)$, i $(-1,0,0,1)$; i la recta

$$L : \begin{cases} x+y-z & = & 1, \\ 2x+t & = & 2, \\ 2x+y-z+t & = & 0. \end{cases}$$

b) Els plans

$$\Pi_1 : \begin{cases} x+y-z=0, \\ 2x+t=3. \end{cases} \qquad \text{i} \qquad \Pi_2 : \begin{cases} x+y+z+t=2, \\ 4x+2y+2t=0. \end{cases}$$

c) Les rectes $L_1 : (1,-1,0,0) + \langle (0,1,0,1) \rangle$ i

$$L_2 : \begin{cases} x+y-2z=2, \\ y+z+t=3, \\ x+z=-1. \end{cases}$$

Solució: a) El pla Π és pot escriure com

$$\Pi : P + [F] = (0,1,1,0) + \langle (1,0,0,1), (-1,-1,-1,1) \rangle$$

i la recta L com

$$L = Q + [G] = (3,0,2,-4) + y(0,1,1,0).$$

Llavors $F+G = \langle (1,0,0,1), (-1,-1,-1,1), (0,1,1,0) \rangle$ i

$$(F+G)^{\perp} = \langle (0,1,-1,0) \rangle$$

Ara descomponem

$$\overrightarrow{PQ} = (3,-1,1,-4) = \alpha(1,0,0,1) + \beta(-1,-1,-1,1) + \gamma(0,1,1,0) + \delta(0,1,-1,0)$$

i obtenim $\delta = -1$. I el mòdul de $(0,1,-1,0)$ val

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4,$$

per tant

$$d(\Pi, L) = \|\delta(0,1,-1,0)\| = 2.$$

b) Aquests plans es poden escriure com

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: \quad P + [F] = (3/2, 0, 3/2, 0) + \langle (0,1,1,0), (-1/2, 0, -1/2, 1) \rangle \\ \Pi_2 &: \quad Q + [G] = (0,0,2,0) + \langle (1,-2,1,0), (0,-1,0,1) \rangle \end{aligned}$$

Llavors per calcular $F+G$ esglaonem la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i per tant
$$F+G=\langle(1,-2,1,0),(0,-1,0,1),(0,0,-1,-1)\rangle.$$
Per trobar el seu complement ortogonal resolem els sistema
$$\left\{\begin{array}{rcl} x-2y+z & = & 0\\ -y+t & = & 0\\ -z-t & = & 0\end{array}\right.$$
i obtenim $(F+G)^{\perp}=\langle(3,1,-1,1)\rangle$ Ara ja només hem de descompondre $\overrightarrow{PQ}$ a $(F+G)\oplus(F+G)^{\perp}$.

$$(-3/2,0,1/2,0)=\alpha(1,-2,1,0)+\beta(0,-1,0,1)+\gamma(0,0,-1,-1)+\delta(3,1,-1,1).$$
Obtenim $\delta=-5/12$.

Per tant,
$$d(\Pi_1,\Pi_2)=|-\frac{5}{12}|\sqrt{\left(\begin{array}{cccc}3 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc}5 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}3\\ 1\\ -1\\ 1\end{array}\right)}=\frac{5}{12}\sqrt{62}$$

c) La segona recta es pot escriure com $L_2:(-1,3,0,0)+[G]=(-1,3,0,0)+\langle(1,-3,-1,4)\rangle$ Llavors $F+G=\langle(0,1,0,1),(1,-3,-1,4)\rangle$. Per trobar el seu ortogonal resolem el sistema
$$\left\{\begin{array}{rcl} y+t & = & 0\\ x-3y-z+4t & = & 0\end{array}\right.$$
Obtenim $(F+G)^{\perp}=\langle(1,0,1,0),(0,-1,7,1)\rangle$ Finalment
$$(2,-4,0,0)=\alpha(0,1,0,1)+\beta(1,-1,-1,4)+\gamma(1,0,1,0)+\delta(0,-1,7,1)$$
Resolent obtenim $\delta=-2/39$.

Per tant
$$d(L_1,L_2)=\frac{2}{39}\sqrt{\left(\begin{array}{cccc}0 & -1 & 7 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc}5 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}0\\ -1\\ 7\\ 1\end{array}\right)}=\frac{2}{39}\sqrt{149}$$

continuar ULL

Exercici 6.32: Siguin O,A,B punts de l'espai afí euclidià $\mathbb{R}^2$ i suposem que
$$d(O,A)=3,\ d(O,B)=5,\ \angle OAB=\frac{\pi}{3}.$$

a) Calculeu la matriu del producte escalar estàndard de l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$ respecte de la base $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

b) Calculeu $d(A,B)$ i la distància entre O i la recta AB.

Solució: a)
$$I=\left(\begin{array}{cc}\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA}\rangle & \langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle\\ \langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle & \langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB}\rangle\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}9 & 15/2\\ 15/2 & 25\end{array}\right)$$

b) Prenem la referència afí $\mathcal{R}=\{O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\}$. Llavors
$$d(A,B)=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{\left(\begin{array}{cc}-1 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}9 & 15/2\\ 15/2 & 25\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}-1\\ 1\end{array}\right)}=\sqrt{19},$$

cosa que es veu directament amb el teorema del cosinus

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cos\alpha = 25 + 9 - 30/2 = 19.$$

El vector director unitari de la recta AB és $u = \dfrac{(-1,1)}{\sqrt{19}}$ de manera que

$$d(O, AB) = \sqrt{OA^2 - \langle \overrightarrow{AO}, u\rangle^2}$$

i

$$\langle \overrightarrow{AO}, u\rangle = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 15/2 \\ 15/2 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{19} \\ 1/\sqrt{19} \end{pmatrix} = \frac{3}{2\sqrt{19}}.$$

Per tant,

$$d(O, AB) = \sqrt{9 - 9/76} = \sqrt{675/76}$$

També com abans podem calcular directament aquesta distància utilitzant que a la fórmula de l'àrea d'un triangle no importa quina base es triï.

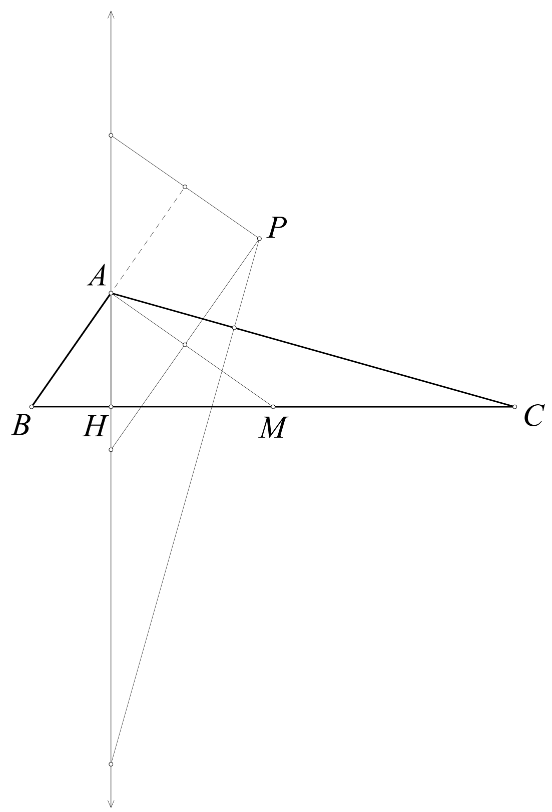
$$\frac{1}{2}\sqrt{19} \cdot h = \frac{1}{2} 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

d'on

$$h = \frac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}.$$

Exercici 6.33: Sigui $\triangle ABC$ un triangle d'un pla afí euclidià $\mathbb{A}$ i $P \in \mathbb{A}$ un punt qualsevol de $\mathbb{A}$.

Demostreu que les rectes per P perpendiculars, respectivament, a les rectes AB, AC i la mitjana corresponent al vèrtex A (recta per A i pel punt mitjà M de BC) tallen l'altura del triangle corresponent al vèrtex A en segments iguals.



Solució: Prenem una referència ortonormal $\mathcal{R} = \{H; e_1, e_2\}$ on H és el peu de l'altura des de A, e_1 en direcció HC i e_2 en direcció HA. Així $A = (0,a), B = (b,0), C = (c,0), M = ((b+c)/2, 0)$, amb $a > 0, c > 0, b < 0$.

L'altura per A és doncs la recta $x = 0$.

La perpendicular per $P = (p,q)$ a AC és la recta $P + \langle v \angle$ amb $v = (-a, -c)$.

La intersecció amb $x = 0$ és doncs el punt $Y = (0,y)$ amb

$$(p,q) + \lambda(-a,-c) = (0,y)$$

i.e, $\lambda = p/a, y = q - c(p/a) = (aq - cp)/a$.

La perpendicular per P a AB és la recta $P + \langle u \angle$ amb $u = (a,b)$.

La intersecció amb $x = 0$ és doncs el punt $X = (0,x)$ amb

$$(p,q) + \lambda(a,b) = (0,x)$$

i.e, $\lambda = -p/a, x = q - b(p/a) = (aq - pb)/a$.

La perpendicular per P a AM és la recta $P + \langle w \angle$ amb $w = (a, ((b+c)/2))$.

La intersecció amb $x = 0$ és doncs el punt $Z = (0,z)$ amb

$$(p,q) + \lambda(a, (b+c)/2) = (0,z)$$

i.e, $\lambda = -p/a, z = q - (p/a)((b+c)/2) = (2aq - p(b+c))/2a$.

Ara ja es comprova directament que $z = (x+y)/2$.

Exercici 6.34: Considereu el conjunt

$$\mathbb{A} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x + y + z - 2t = -1\},$$

i l'espai vectorial

$$E = \{(u_1,u_2,u_3,u_4) \in \mathbb{R}^4; u_1 + u_2 + u_3 - 2u_4 = 0\}.$$

Demostreu que $(\mathbb{A}, E)$ amb l'acció $\varphi : \mathbb{A} \times E \longrightarrow \mathbb{A}$ donada per

$$\varphi((x,y,z,t),(u_1,u_2,u_3,u_4) = (x+u_1, y+u_2, z+u_3, t+u_4),$$

és espai afí.

Observeu que l'espai vectorial E admet dos productes escalars: l'induït pel producte escalar ordinari de $\mathbb{R}^4$, que denotarem $\langle , \rangle_1$, i el donat a l'exercici 9 de l'apèndix A de [2], que denotarem $\langle , \rangle_2$. Per tant, tenim dos espais afins euclidians: $(\mathbb{A}, E, \langle , \rangle_1)$ i $(\mathbb{A}, E, \langle , \rangle_2)$.

Per a cadascun d'aquests dos espais afins euclidians calculeu:

a) La distància entre els punts $P = (1,1,1,2)$ i $Q = (0,0,0,1/2)$.

b) Els angles del triangle $\triangle PQR$, amb $R = (1,0,0,1)$, i la seva suma.

c) La distància entre el punt P i la subvarietat lineal

$$L = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{A}; x + y + z + t = 0\}.$$

Nota: L'hiperplà $\mathbb{A}$ és l'hiperplà tangent a l'hiperboloide de dos fulls $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = -1$ en el punt $(1,1,1,2)$. Aquest hiperboloide és un model de l'espai hiperbòlic de dimensió 3, quan sobre ell es considera la mètrica induïda per la mètrica de Lorentz de $\mathbb{R}^4$, donada a l'exercici 9 de l'apèndix A de [2]. La mètrica de Lorentz no és definida positiva, però la seva restricció a l'hiperplà sí que ho és. Exercici proposat per Carmen Safont.

Solució: a) Amb la mètrica habitual

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{15/2}$$

Amb la mètrica de Lorentz

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -3/2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

b) Angle en P.

$$\cos P = \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{\|\overrightarrow{PQ}\|\cdot\|\overrightarrow{PR}\|} = \frac{(-1,-1,-1,-3/2)(0,-1,-1,-1)}{\sqrt{21/4}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

Angle en Q.

$$\cos Q = \frac{\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}}{\|\overrightarrow{QP}\|\cdot\|\overrightarrow{QR}\|} = \frac{(1,1,1,3/2)(1,0,0,1/2)}{\sqrt{21/4}\cdot\sqrt{5/4}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{15}}$$

Angle en R.

$$\cos R = \frac{\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}}{\|\overrightarrow{RP}\|\cdot\|\overrightarrow{RQ}\|} = \frac{(0,1,1,1)(-1,0,0,-1/2)}{\sqrt{5/4}\cdot\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{15}}$$

Aquests tres angles sumen π.

Amb la mètrica de Lorentz.
Angle en P.
Hem de calcular $\|\overrightarrow{PR}\|$.

$$\|\overrightarrow{PR}\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}} = 1,$$

així

$$\cos P = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3/4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Angle en Q. Hem de calcular $\|\overrightarrow{QR}\|$.

$$\|\overrightarrow{QR}\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\cos Q = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}}{\sqrt{3/4}\sqrt{3/4}} = \frac{1}{3}.$$

Angle en R.

$$\cos R = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}}{\sqrt{3/4}\sqrt{3/4}} = \frac{2}{3}.$$

$$\arccos(\sqrt{3}/3) + \arccos(1/3) + \arccos(2/3) = 3.2..... < \pi.$$

c) Fem el cas de Lorentz.

Hem de trobar el subespai complement ortogonal al subespai director de L (que d'identifica amb L ja que passa per l'origen). Com els punts de L són $(x, y, z, -x-y-z) = x(1,0,0,-1) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,-1)$ busquem (a,b,c,d) ortogonal a $F = \langle(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\rangle$, és a dir, tal que

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Trobem $F^\perp = \langle(1,1,1,-1)\rangle$

Ara descomponem $OP = (1,1,1,2)$ a $F \oplus F^\perp$ (O=(0,0,0,0)).

$$(1,1,1,-1) = \alpha(1,0,0,-1) + \beta(0,1,0,-1) + \gamma(0,0,1,-1) + \delta(1,1,1,-1)$$

Obtenim $\delta = 1$

i per tant

$$d(P,L) = \|(1,1,1-1)\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}.$$

Exercici 6.35: Suposem que, en una certa referència, una afinitat d'un espai afí euclidià està donada per les equacions

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1, \\ x_2' &= x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Pot ser un moviment?

Solució: L'aplicació lineal associada té el valor propi 1 i un únic vector propi. Això en principi és compatible amb ser moviment, però pel Teorma A.34 de [2] sabem que les isometries del pla o tenen dos vectors propis linealment independents de valors propis 1 i -1 respectivament, o no tenen vectors propis (excepte la identitat). Aquest argument no depèn de la referència elegida per donar l'afinitat, així que l'afinitat donada no pot ser un moviment.

Nota. També es pot veure aquest resultat d'altres maneres. Per exemple, si la matriu del producte escalar en la referència donada és

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

la condició de moviment $\|\tilde{f}(v)\| = \|v\|$ s'escriu (l'origen $(0,0)$ és fix)

$$Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 = Ex^2 + 2Fx(x+y) + G(x+y)^2$$

de la que deduïm

$$x(2F+G) + yG = 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

i per tant $G = 0$ contradicció.

També es pot argumentar que l'afinitat donada té una recta de punts fixos i això implica que ha de ser una simetria respecte aquesta recta, però llavors tindria un segon vector propi. Etc.

Exercici 6.36: Suposem que, en una certa referència, una afinitat d'un espai afí euclidià està donada per

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 20 \\ -4 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Podem dir que és un moviment? I si la referència és ortonormal?

Solució: Si la referència és ortonormal no és un moviment ja que la matriu de la part lineal no és ortogonal.

Com els valors propis de la matriu de la part lineal són 1 i -1 podria ser que aquesta afinitat representés un moviment. Els vectors propis són $u = (5, -2)$ i $v = (2, -1)$.

Per que sigui un moviment aquests vectors propis han de ser ortogonals (Teorema A.22 de [2]).

Si imposem que $\mathcal{B} = (u, v)$ sigui base ortonormal d'un cert producte escalar que respecte la referència inicial s'escrigui com

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

obtenim que aquest producte està donat per la matriu

$$I = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & 29 \end{pmatrix}$$

Això és pot veure per càlcul directe o per la fórmula del canvi de base de les aplicacions bilineals.

Sabem que

$$M(I, \mathcal{B}) = M(\mathcal{B}, \mathcal{C})^t M(I, \mathcal{C}) M(\mathcal{B}, \mathcal{C})$$

on $\mathcal{C}$ és la base de la referència inicial. Per tant si volem $M(I, \mathcal{B}) = id$ tenim

$$M(I, \mathcal{C}) = [M(\mathcal{B}, \mathcal{C}) M(\mathcal{B}, \mathcal{C})^t]^{-1} = [\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}]^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & 29 \end{pmatrix}.$$

Prenem com nova referència $\mathcal{R}' = \{(0, 0); u, v\}$ de manera que

$$M(f, \mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 \\ 0 & -1 & -27 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La darrera columna prové d'escriure $f(0, 0) = x(5, -2) + y(2, -1) = (1, 5)$. Com $\mathcal{R}'$ és ortonormal és clar que aquesta matriu representa un moviment.

I aquest moviment canviat de base és el que ens dóna l'enunciat, en efecte,

$$M(f, \mathcal{R}) = M(\mathcal{R}', \mathcal{R}) M(f, \mathcal{R}') M(\mathcal{R}', \mathcal{R})^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 20 & 1 \\ -4 & -9 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

que és exactament l'afinitat donada al principi del problema.

Resumint, l'afinitat donada és un moviment respecte el producte escalar que fa ortonormal la base de vectors propis.

Exercici 6.37: Escriviu, respecte de la referència canònica de l'espai afí euclidià $\mathbb{R}^2$, les equacions d'un gir $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ d'angle $\pi/6$ radians en sentit antihorari.

a) Sigui $M(\tilde{g}, \mathcal{C})$ la matriu, respecte de la base canònica de l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$, de l'aplicació lineal $\tilde{g}$ associada a aquest gir. Comproveu que és una matriu ortogonal.

b) Calculeu $M(\tilde{g}, \mathcal{B})$ quan $\mathcal{B} = (u, v)$ amb

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \qquad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1).$$

c) Demostreu que la matriu $M(\tilde{g}, \mathcal{D})$, on $\mathcal{D}$ és una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, només pren dos valors, segons que $\mathcal{D}$ tingui la mateixa orientació o no que la base canònica.

Solució: a) Si $P=(a,b)$ és el centre del gir

$$M(g,\mathcal{C})=\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & a \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(per comprovar que és sentit antihorari és suficient en mirar on va a parar el punt $(1,0)$). Així és clar que $M(\vec{g},\mathcal{C})$ és ortogonal.

b)

$$\begin{aligned} M(\tilde{g},\mathcal{B}) &= M(\mathcal{C},\mathcal{B})M(\tilde{g},\mathcal{C})M(\mathcal{B},\mathcal{C}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

és a dir, hem obtingut que $M(\tilde{g},\mathcal{B})=M(\tilde{g},\mathcal{C})$

c) Les matrius ortogonals 2×2 s'escriuen d'una d'aquestes dues maneres següents segons tinguin determinant 1 o -1 (per a un cert valor de γ, vegeu la Nota més avall).

$$P=\begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}, \quad Q=\begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ \sin\gamma & -\cos\gamma \end{pmatrix}$$

Llavors es veu directament que

$$M(\tilde{g},\mathcal{B})=PM(\tilde{g},\mathcal{C})P^t=\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

i

$$M(\tilde{g},\mathcal{B})=QM(\tilde{g},\mathcal{C})Q^t=\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Nota. Si

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

és ortogonal tenim

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= 1 \\ c^2+d^2 &= 1 \\ ad-bc &= \pm 1 \\ ac+bd &= 0 \end{aligned}$$

i per tant

$$a=\cos\alpha, b=\sin\alpha, \quad c=\cos\beta, d=\sin\beta$$

amb

$$ac+bd=\cos(\alpha-\beta)=0$$

$$ad-bc=\sin(\alpha-\beta)=\pm 1$$

Per tant, $\alpha=\beta+\pi/2$ o $\alpha=\beta+3\pi/2$ i tenim el resultat.

Exercici 6.38: Sigui f un moviment d'un espai afí euclidià $\mathbb{A}$. Demostreu que

$$\tau(f)=\inf_{P\in\mathbb{A}} d(P,f(P)).$$

Solució: Recordem que $\tau(f)=\|u_f\|$ on u_f és el vector de lliscament. (Definició 6.12 de [2]). Descomponem l'espai vectorial E associat a $\mathbb{A}$ en suma directa

$$E=\ker(\tilde{f}-id)\oplus\ker(\tilde{f}-id)^{\perp}$$

i per qualsevol punt P descomponem

$$\overrightarrow{Pf(P)} = u_f + v.$$

És a dir, el vector de lliscament és la component sobre l'espai de vectors propis de valor propi 1 del vector $\overrightarrow{Pf(P)}$ quan el descomponem a la suma directa anterior. Aquest vector u_f no depèn de P.

Així

$$\begin{aligned} \inf_{P\in\mathbb{A}} d(P, f(P)) &= \inf_{P\in\mathbb{A}} \|\overrightarrow{Pf(P)}\| = \inf_{P\in\mathbb{A}} \sqrt{\|u_f\|^2 + \|v\|^2} \\ &= \|u_f\|. \end{aligned}$$

Perquè la darrera igualtat sigui certa només necessitem que existeixi un punt P tal que $\overrightarrow{Pf(P)}$ sigui un vector propi amb valor propi 1. Això passa sempre que f tingui alguna subvarietat invariant (observació 6.14 de [2]). Però a l'observació 6.20 del mateix llibre es comenta que tot moviment té o bé un punt fix o bé una recta invariant.

Exercici 6.39: Si f és un lliscament d'un espai afí euclidià de dimensió tres, demostreu que el vector de lliscament u_f està donat per la fórmula

$$v_f = \frac{1}{2}(\tilde{f} + id)\overrightarrow{Pf(P)},$$

on $\tilde{f}$ és l'aplicació lineal associada a f i P és un punt qualsevol.

Solució: Per definició de lliscament (en dimensió 3) l'aplicació lineal associada $\tilde{f}$ té dos vectors propis de valor propi 1 i un vector propi de valor propi -1 Com vectors propis de valors propis diferents d'una isometria són ortogonals tenim

$$\mathbb{R}^3 = \ker(\tilde{f} - id) \oplus \ker(\tilde{f} - id)^\perp = \ker(\tilde{f} - id) \oplus \ker(\tilde{f} + id)$$

Així, per definició de vector de lliscament, tenim

$$\overrightarrow{Pf(P)} = u_f + v, \quad u_f \in \ker(\tilde{f} - id), v \in \ker(\tilde{f} + id)$$

Per tant

$$(\tilde{f} + id)(\overrightarrow{Pf(P)}) = (\tilde{f} + id)(u_f + v) = u_f + u_f - v + v = 2u_f$$

com volíem veure.

6.3 Geometria Projectiva

Exercici 6.40:

a) Traceu, utilitzant únicament un regle, la recta que uneix un punt d'un full de paper amb el punt d'intersecció de dues rectes del full que es tallen fora d'aquest.

b) Donades dues rectes paral·leles i un punt fora d'aquestes, traceu, usant només un regle, la recta que passa per aquest punt i és paral·lela a les rectes donades.

Solució: a) Diguem A al punt i r, s les dues rectes donades. Tracem dues rectes qualsevol per A que tallen r i s en punts A', A'' respectivament (utilitzo la notació de la figura de l'exercici 1.19, teorema de Desargues).

Des d'un punt qualsevol I de AA' tracem una tercera recta auxiliar que talla r en un cert punt B'.

Des d'un punt qualsevol J de AA'' tracem la recta JI. Sigui K la intersecció d'aquesta recta amb la recta $A'A''$. Sigui B'' la intersecció de la recta KB' amb s.

Sigui $B = JB'' \cap IB'$. La recta BA és la recta buscada ja que talla r i s en O.

L'apartat b) és idèntic a l'apartat a) només que les dues rectes inicials donades són paral·leles.

Exercici 6.41:

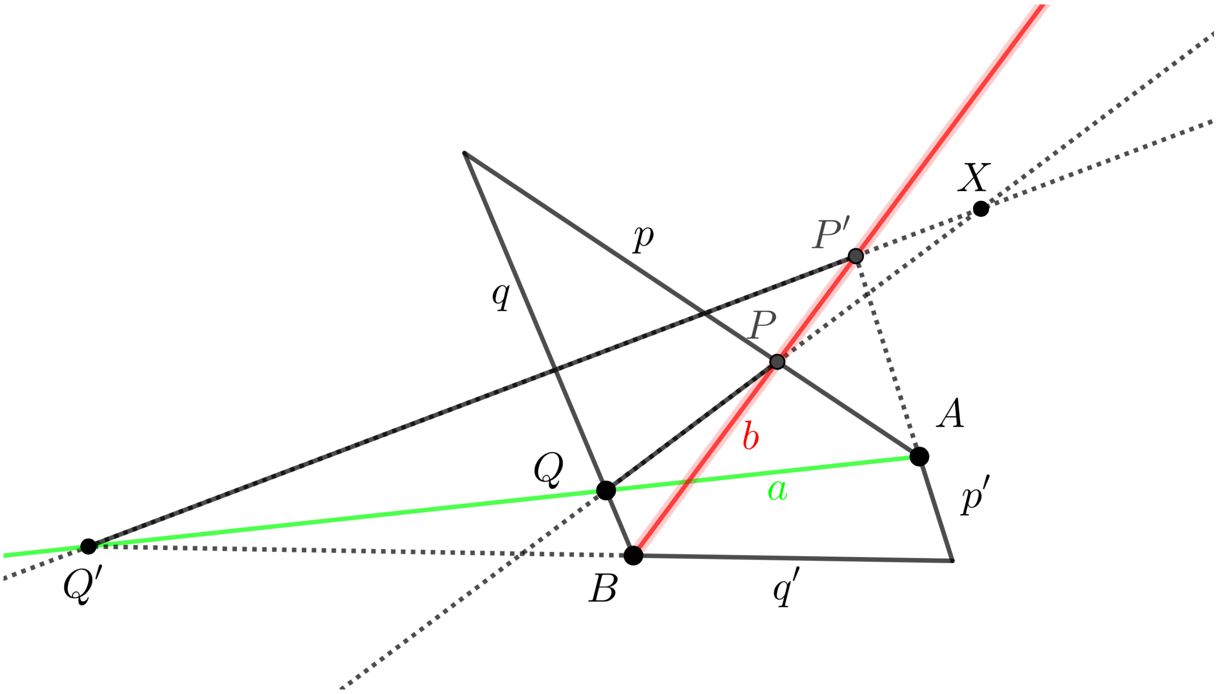
a) Les rectes p, p' (que es tallen en el punt A) i les rectes q, q' (que es tallen en el punt B) formen un quadrilàter. Una recta a que passa per A talla q i q' en Q i Q' respectivament, una recta b que passa per B talla p i p' en P i P' respectivament. Trobeu el lloc geomètric dels punts $PQ \cap P'Q'$ en variar a i b.

b) Els costats d'un triangle variable passen per tres punts fixos P, Q, R que estan col·locats sobre una mateixa recta. Dos dels vèrtexs estan col·locats sobre dues rectes fixes r, s. Demostreu que el lloc geomètric determinat pel tercer vèrtex és una recta concurrent amb les anteriors.

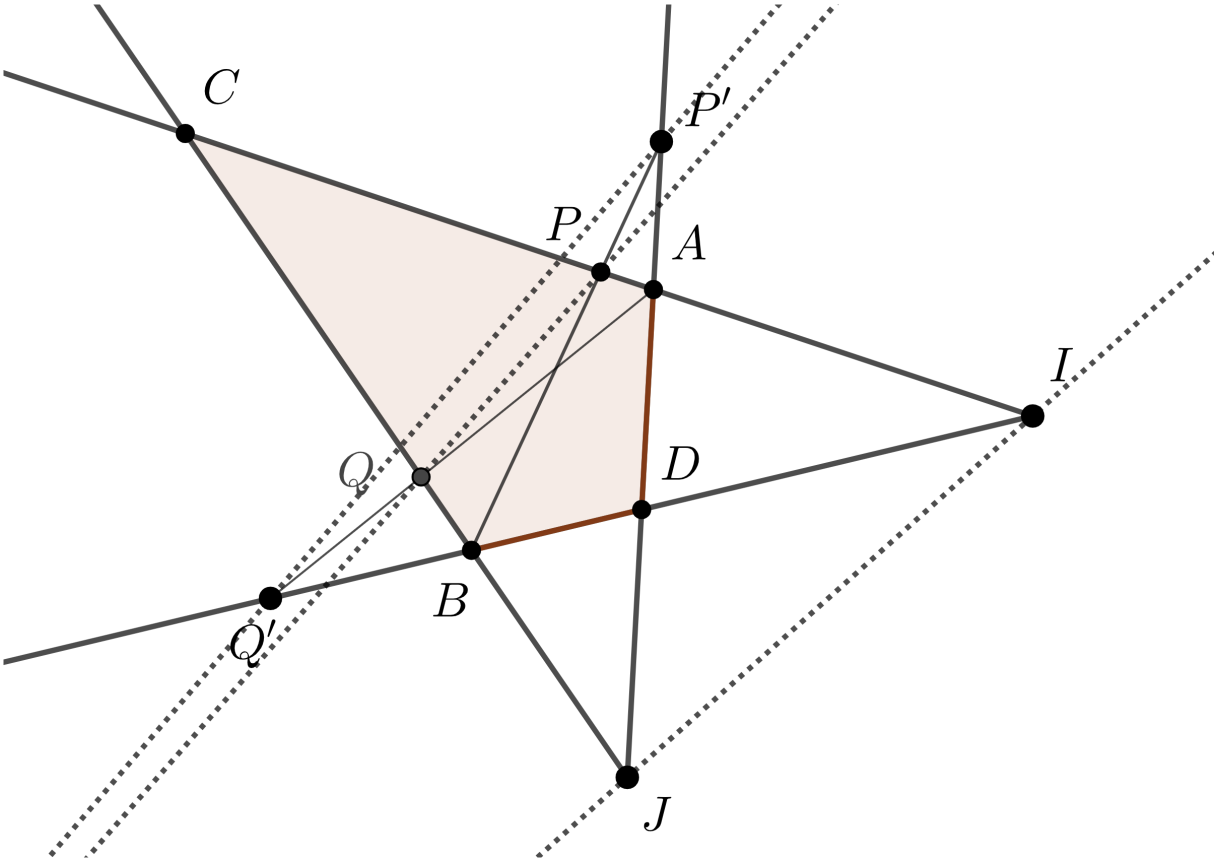
Solució: a) Apliquem Pappus a les rectes a, b.

Sobre a tenim els punts A, Q', Q. Sobre b tenim els punts B, P, P'. Atenció a l'ordre, ja que ara unim primer amb segon, segon amb primer, etc

Per tant els punts $I = AP \cap BQ' = p \cap q'$ (punt donat i fixat de bon principi), $J = AP' \cap QB = p' \cap q$ (punt donat i fixat de bon principi), i $X = PQ \cap P'Q'$ estan alineats. és a dir, el lloc geomètric buscat, quant a i b varien, és la recta IJ.



En coordenades. Prenem $I = p \cap q'$ com origen de coordenades amb primer eix sobre p i segon sobre q'. Concretament $\mathcal{R} = \{I; \overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\}$.



Així tindrem $I=(0,0), A=(1,0), C=(c,0), P=(p,0), D=(0,d), B=(0,1), Q'=(0,q')$, amb $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ fixats i $p,q'\in\mathbb{R}$ variables.

Recta BC.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

és a dir, $x+cy-c=0$.

Recta AD.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & d & 1 \end{vmatrix} = 0$$

és a dir, $-dx-y+d=0$.

Per tant

$$J = AD\cap BC = (\frac{c(d-1)}{dc-1}, \frac{d(c-1)}{dc-1}).$$

Recta PB.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

és a dir, $x+py-p=0$.

Així

$$P' = PB\cap AD = (\frac{p(1-d)}{1-dp}, \frac{d(1-p)}{1-dp})$$

Recta AQ'.

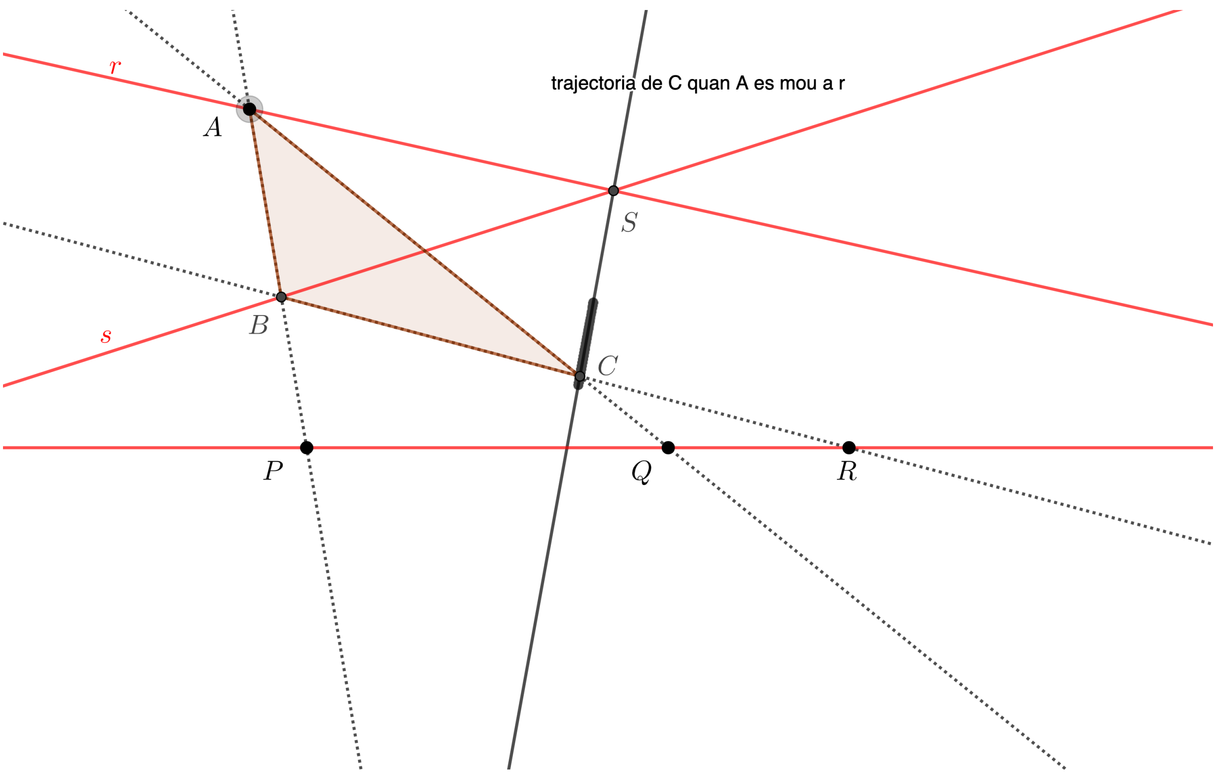
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & q' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

és a dir, $-q'x-y+q'=0$.

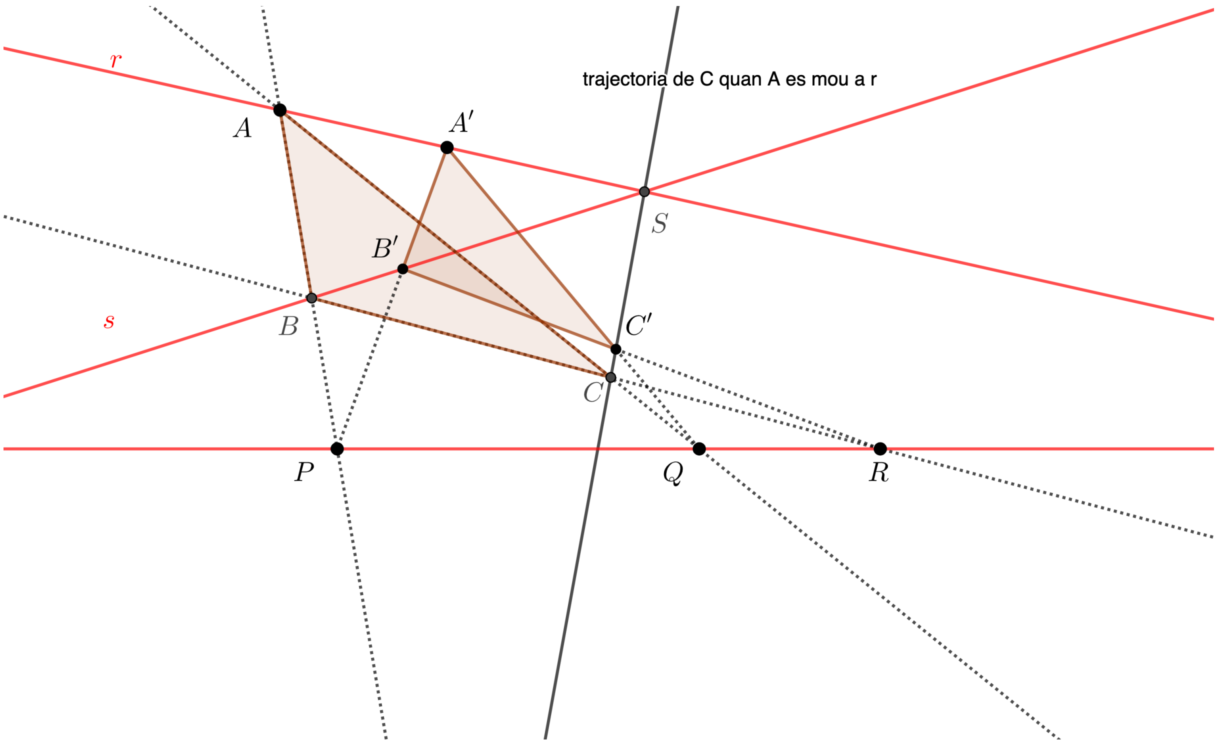
Per tant
$$Q = AQ' \cap BC = (\frac{c(1-q')}{1-cq'}, \frac{q'(1-c)}{1-cq'})$$
Finalment trobem les equacions de les dues rectes que hem d'intersecar: PQ i $P'Q'$.

Recta PQ.
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p & 0 & 1 \\ \frac{c(1-q')}{1-cq'} & \frac{q'(1-c)}{1-cq'} & 1 \end{vmatrix} = 0$$
que desenvolupant per la primera fila ens dóna
$$-q'(1-c)x + ((c-p) + cq'(p-1))y + pq'(1-c) = 0$$
Recta $P'Q'$.
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & q' & 1 \\ \frac{p(1-d)}{1-dp} & \frac{d(1-p)}{1-dp} & 1 \end{vmatrix} = 0$$
que desenvolupant per la primera fila ens dóna
$$(q'(1-dp) + d(p-1))x + p(1-d)y + pq'(d-1) = 0.$$
Així (resolent els sistema format per aquestes dues últimes equacions, millor amb ordinador) obtenim
$$X = PQ \cap P'Q' = (\frac{c(d-1)pq'}{c(dpq'+d-q')-dp}, \frac{dpq'(c-1)}{c(dpq'+d-q')-dp})$$
punt que clarament pertany a la recta
$$y = \frac{d(c-1)}{c(d-1)}x$$
que és la recta IJ.

b) Aclarim l'enunciat. El vèrtex A es mou sobre r i B queda llavors determinat com $B = AP \cap s$. Es demana el lloc geomètric de C quan A varia en r (i, per tant B varia en s). Observem que $C = AQ \cap BR$.



Si movem A sobre r obtenim la figura següent.



Per resoldre aquest exercici només hem d'aplicar Desargues als triangles $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ (aquest segon triangle s'obté movent A sobre r),

$$\begin{array}{rcl} AB \cap A'B' & = & P \\ AC \cap A'C' & = & Q \\ BC \cap B'C' & = & R \end{array}$$

Per tant, les rectes AA', BB' i CC' són concurrents (en S, i això acaba el problema).

Solució analítica. Sigui $S = r \cap s$ i denotem per M, N respectivament els punts d'intersecció de les rectes r, s amb la recta P, Q, R. Prenem la referència $\mathcal{R} = \{S; \overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SN}\}$. Així $A = (0, a), B = (b, 0), P = (p, 1-p), Q = (q, 1-q), R = (r, 1-r)$.

Per trobar B imposem que A, B, P estiguin alineats.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ b & 0 & 1 \\ p & 1-p & 1 \end{vmatrix} = 0$$

i obtenim

$$b = \frac{ap}{a+p-1}.$$

L'equació de la recta AQ s'obté posant

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & a & 1 \\ q & 1-q & 1 \end{vmatrix} = 0$$

i obtenim

$$(a+q-1)x + qy - qa = 0.$$

L'equació de la recta BR s'obté posant

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ b & 0 & 1 \\ r & 1-r & 1 \end{vmatrix} = 0$$

i obtenim

$$(1-r)x + (b-r)y + b(r-1) = 0,$$

que substituint el valor de b dóna

$$(1-r)(a+p-1)x+(ap-r(a+p-1))y+ap(r-1)=0.$$

Per obtenir el punt C només hem de tallar les rectes AQ i BR. Obtenim

$$x=\frac{aq(p-r)}{a(p-r)+(p-1)(q-r)}, \quad y=\frac{a(r-1)(q-p)}{a(p-r)+(p-1)(q-r)}$$

de manera que

$$y=\frac{(r-1)(q-p)}{q(p-r)}x$$

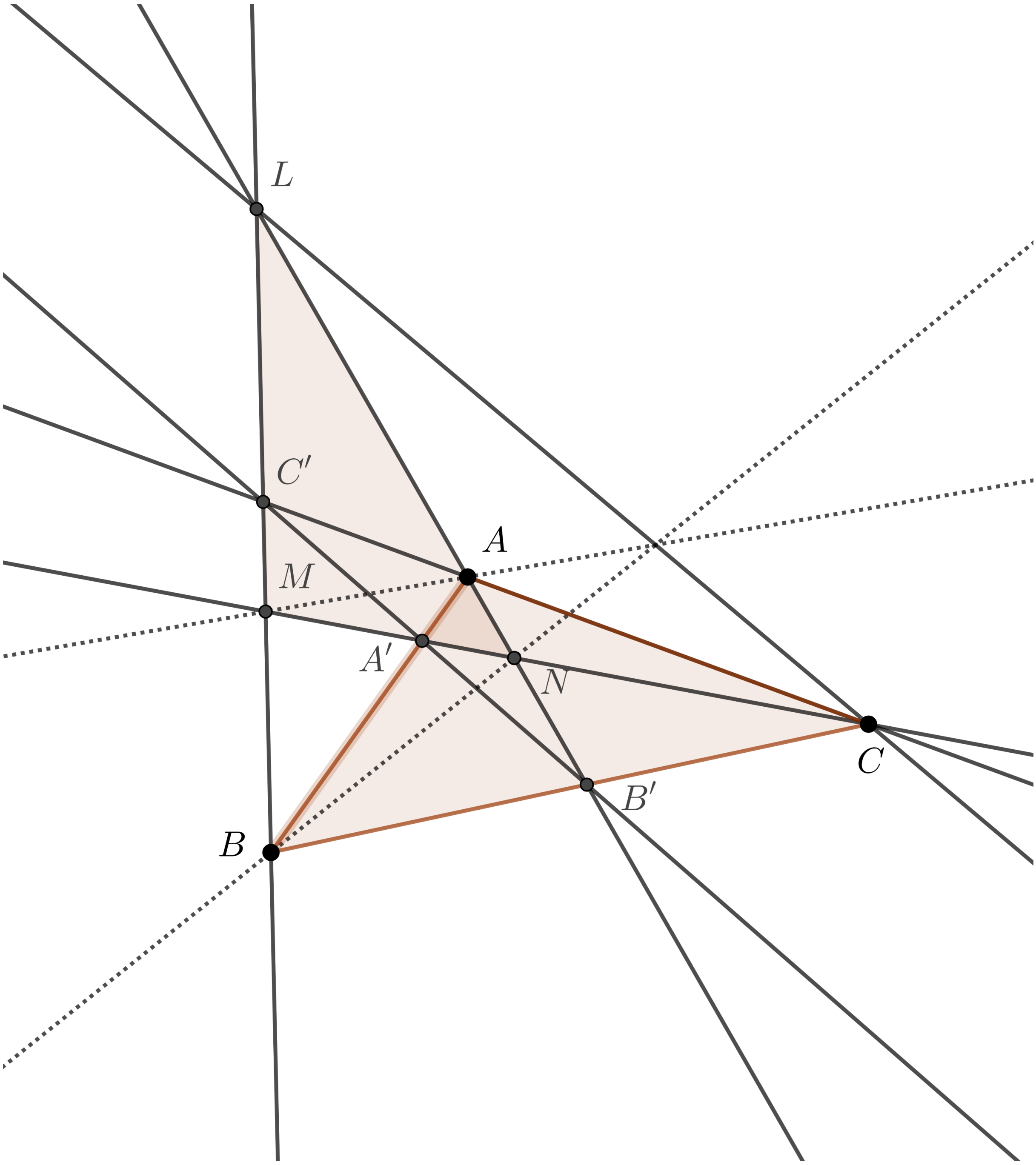
que no depèn de a i és una recta per l'origen (S), com volíem veure.

Exercici 6.42: Una recta d talla els costats AB, BC, CA d'un triangle ABC en A', B', C' respectivament. Sigui $L = AB' \cap BC', M = BC' \cap CA'$ i $N = CA' \cap AB'$.

Demostreu que les rectes AM, BN, i CL són concurrents.

Solució: Considerem els triangles $\triangle ABC$ i MNL. Observem que

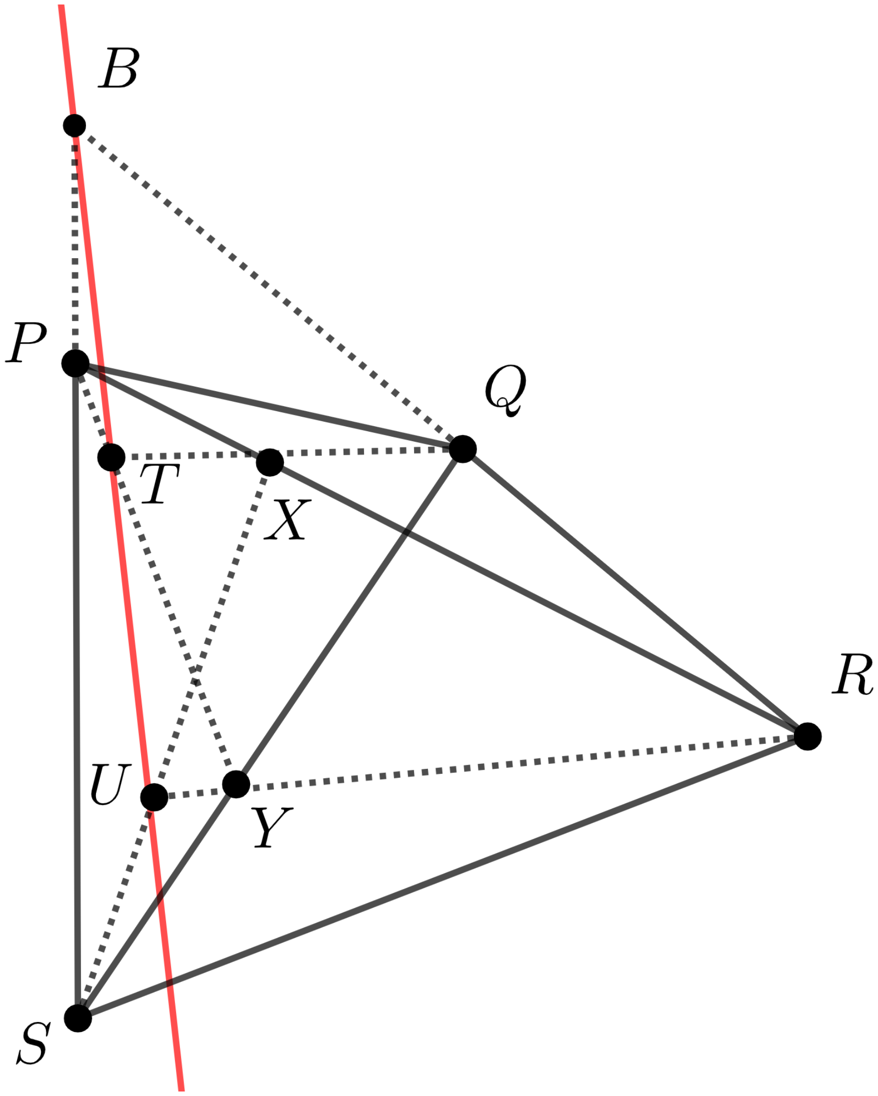
$$\begin{aligned} AB \cap MN &= A' \\ AC \cap ML &= C' \\ BC \cap NL &= B' \end{aligned}$$



Com A', B', C' estan alineats les rectes AM, BN, CL són concurrents.

Exercici 6.43: Demostreu que si X i Y són punts sobre les rectes PR i QS del quadrilàter $PQRS$ respectivament, llavors $T = QX \cdot PY$, $U = SX \cdot RY$, i $B = PS \cdot QR$ estan alineats.

Solució: Només s'ha d'aplicar el teorema de Pappus als punts P, X, R i Q, Y, S, en aquest ordre.

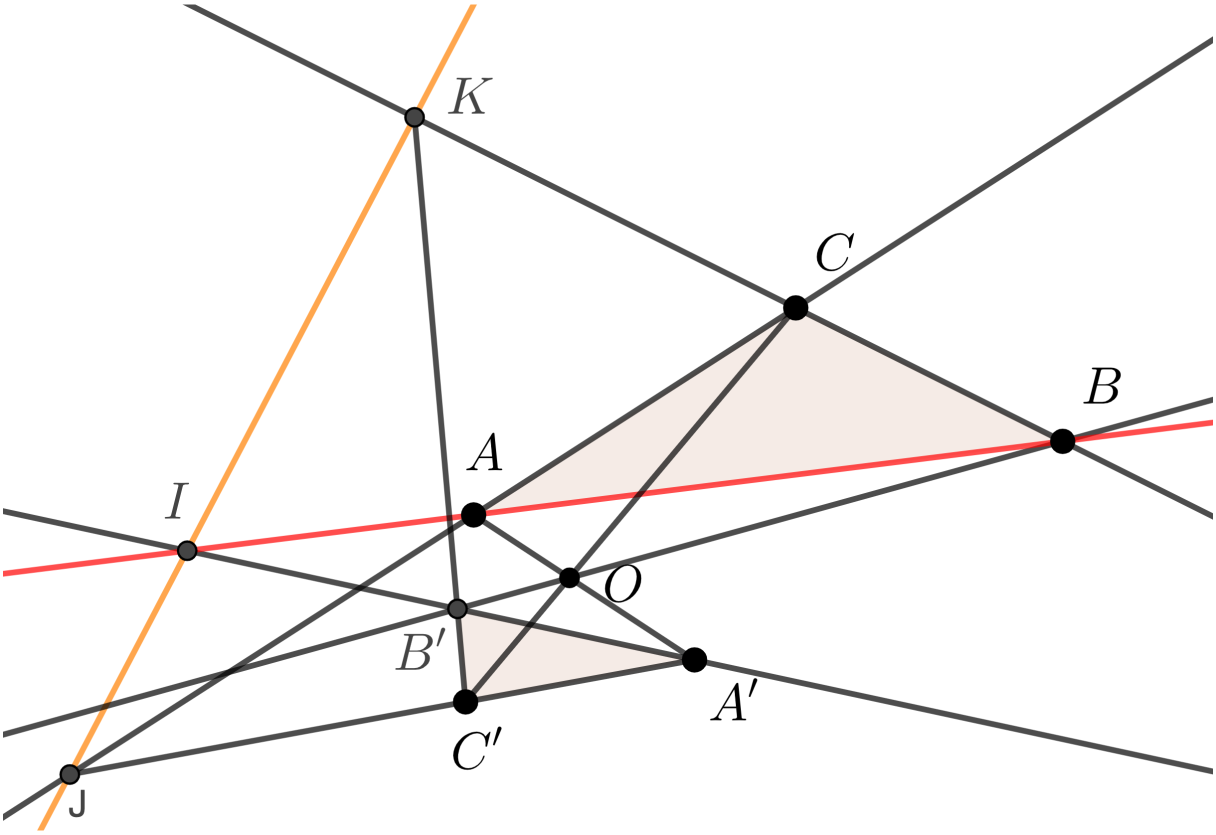


Exercici 6.44: Donada una recta r i dos punts A, B fora d'aquella, trobeu la intersecció de r amb la recta A, B sense dibuixar en cap moment la recta A, B. Enuncieu i resoleu el problema dual.

Solució:

1. Afegim un tercer punt C.
2. Considerem els punts $J = AC \cap r$, $K = BC \cap r$.
3. Sobre una recta auxiliar per J tracem dos punts arbitraris A', C'.
4. Denotem $O = AA' \cap CC'$.
5. Tracem OB.
6. $KC' \cap OB = B'$
7. El punt buscat és $I = A'B' \cap r$.

I ara és Desargues des de O aplicat als triangles $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$.

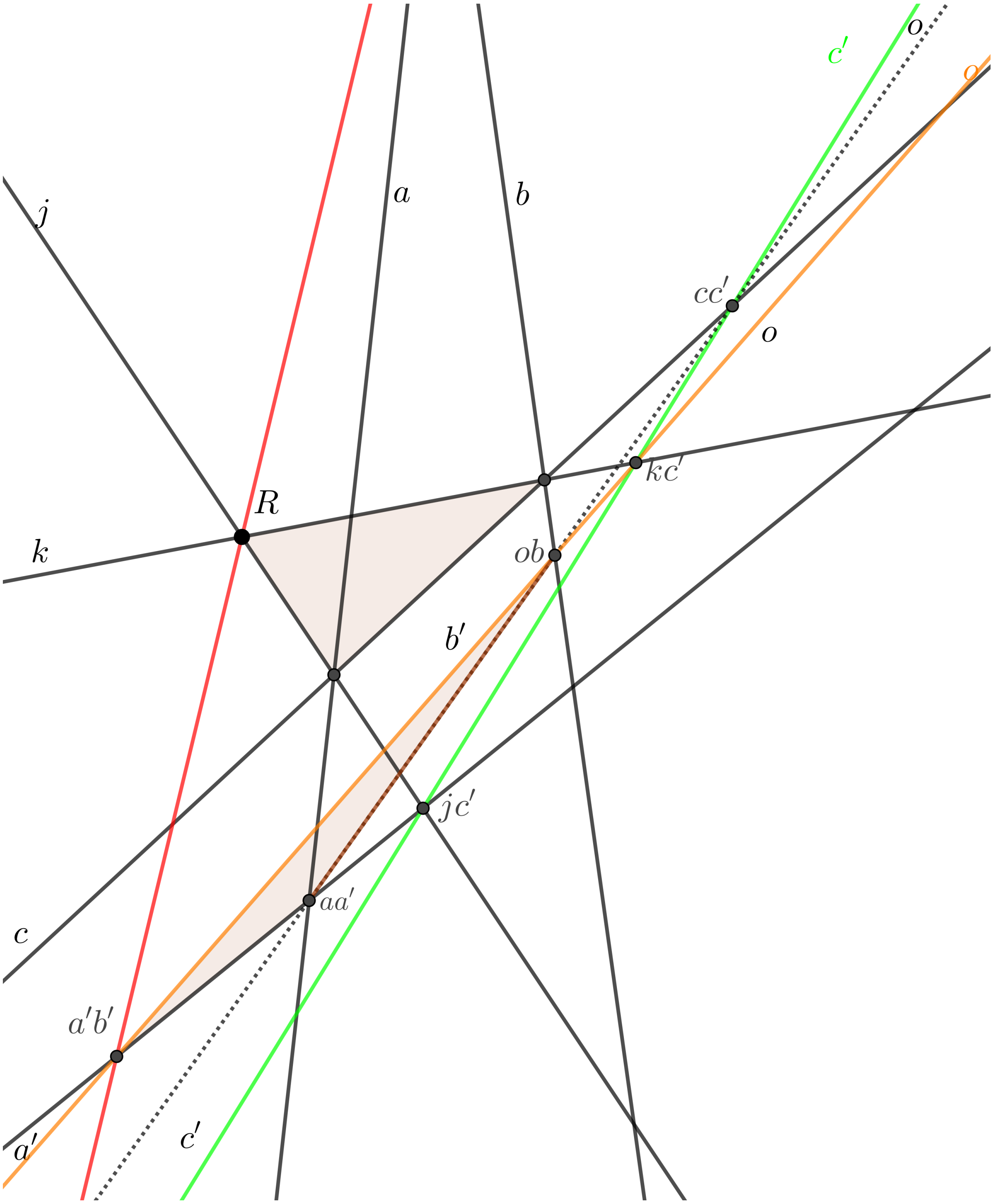


L'enunciat dual seria "Donat un punt R i dues rectes a, b que no el contenen, trobeu la recta que passa per R i pel punt d'intersecció de les dues rectes a, b sense dibuixar en cap moment el punt d'intersecció de a i b."

1. Afegim una tercera recta c.
2. Considerem les rectes $j = (a \cap c) \cup R$, $k = (b \cap c) \cup R$.[18]
3. Sobre un punt auxiliar de j tracem dues rectes arbitraries a', c'.
4. Considerem la recta $o = (a \cap a') \cup (c \cap c')$.
5. Considerem el punt $o \cap b$.
6. Tracem la recta $(k \cap c') \cup (o \cap b) = b'$
7. La recta buscada és $(a' \cap b') \cup R$.

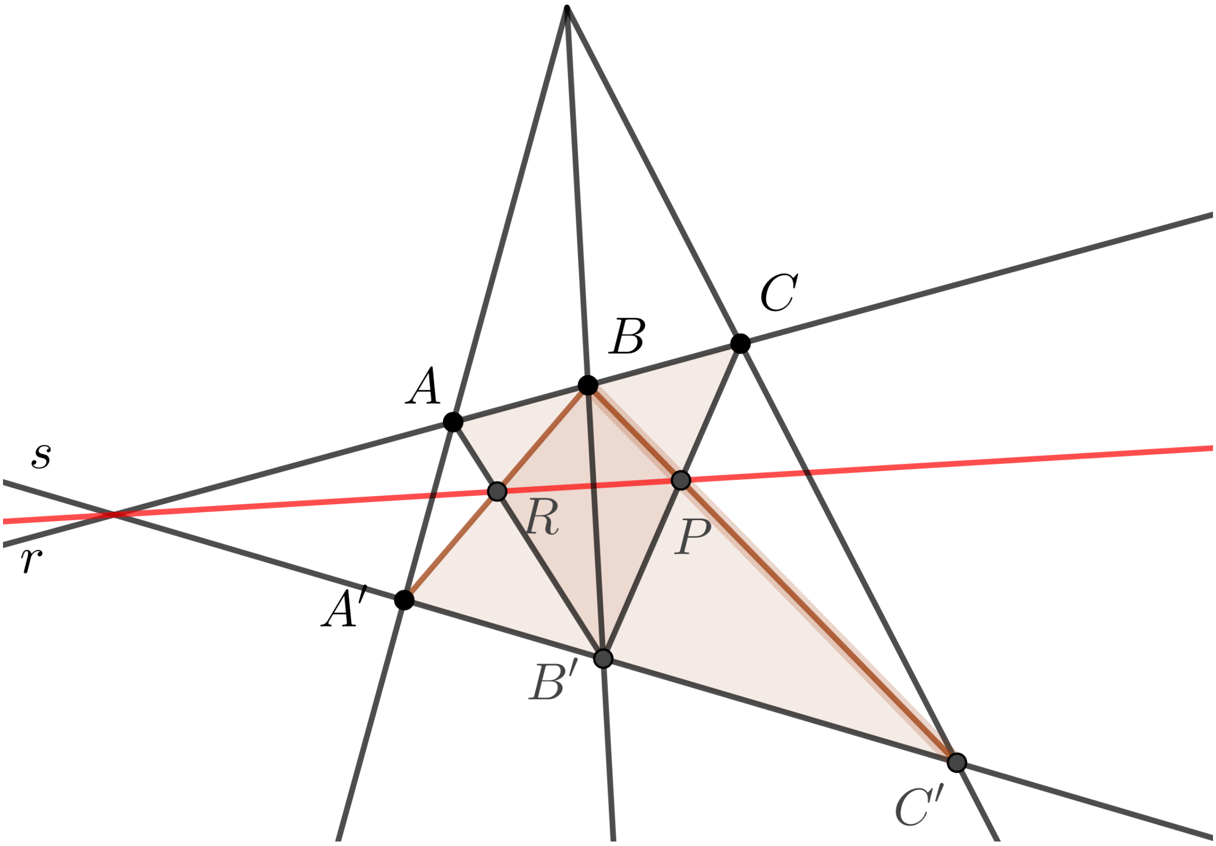
I ara és Desargues aplicat als triangles $\triangle(R, (a \cap j), (b \cap k))$, $\triangle((a \cap a'), (b \cap o), (a' \cap b'))$.

[18] En aquest context la unió de dos punts és la recta que determinen.



Exercici 6.45: Demostreu el següent cas especial del teorema de Pappus: si A, B, C són punts diferents sobre una recta r i A', B', C' són punts diferents sobre una altra recta s, i si les rectes AA', BB', CC' són concurrents, llavors els punts $P = BC' \cdot B'C, Q = AC' \cdot A'C, R = AB' \cdot A'B$ estan sobre una recta concurrent amb r i s.

Solució: Desargues aplicat als triangles $\triangle AB'C$ i $\triangle A'BC'$.



6.4 Còniques i quàdriques

Exercici 6.46: Sigui $\mathcal{Q}$ la quàdrica projectiva d'equació:

$$-2t^2 + 2tx + 4x^2 - 2ty + 2xy - 4tz + 4xz - 4yz = 0.$$

a) Classifiqueu-la.

b) Considereu el feix de plans que contenen la recta

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ y+z+t & = & 0 \end{array} \right.$$

Prenent cada un dels plans d'aquesta família com a pla de l'infinit, quina és la quàdrica afí que determina l'equació de l'apartat anterior?

Solució: a) Standard. Matriu associada

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Polinomi característic, $x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 44x + 4$. Dos canvis de signe, $r^+ = 2$ i rang $r = 4$, per tant índex $i = 2$.

b) El mètode ‘directe’ porta a unes equacions quasi intractables. Farem el canvi de variable pensant en el feix de plans i no en la quàdrica.

$$\begin{cases} X = x + y - z \\ Y = y + z + t \\ Z = z \\ T = t \end{cases}$$

respecte el qual el feix de plans és $Y = \lambda X$ i que té com canvi invers

$$\begin{cases} x = X - Y + 2Z + T \\ y = Y - Z - T \\ z = Z \\ t = T \end{cases}$$

Substituint a l’equació donada de la quàdrica obtenim

$$2T^2 + 4TX - 4TY + 10TZ + 2X^2 - 3XY + 9XZ + Y^2 - 9YZ + 12Z^2.$$

Tornem a canviar la notació, i ara el problema és estudiar la intersecció de la quàdrica

$$2t^2 + 4tx - 4ty + 10tz + 2x^2 - 3xy + 9xz + y^2 - 9yz + 12z^2 = 0,$$

amb el feix de plans $y = \lambda x$.

Ara la substitució és fàcil i dóna

$$x^2(\lambda - 1)(\lambda - 2) + 12z^2 + 2t^2 + 4xt(1 - \lambda) + 9xz(1 - \lambda) + 10tz = 0$$

El polinomi característic de la matriu associada a aquesta forma quadràtica és

$$-x^3 + x^2(\lambda^2 - 3\lambda + 16) + x(\frac{41}{4}\lambda^2 - \frac{13}{2}\lambda - \frac{11}{4}) + \frac{\lambda^2 - 1}{2}$$

Les arrels a, b del polinomi de segon grau que és el coeficient de x compleixen que $-1 < a < b < 1$. I aquest coeficient és positiu per a $\lambda < a$ i $\lambda > b$,

El polinomi de segon grau coeficient de x^2 és sempre positiu.

Fem una taula dels signes dels coeficients del característic.

$$\begin{array}{rll} \lambda < -1, & - + + +, & r^+ = 1 \\ -1 < \lambda < a, & - + + -, & r^+ = 2 \\ a < \lambda < b, & - + - -, & r^+ = 2 \\ b < \lambda < 1, & - + + -, & r^+ = 2 \\ 1 < \lambda & - + + +, & r^+ = 1 \end{array}$$

Si $\lambda^2 \neq 1$ el rang és 3 (recordem que el terme independent del característic és el determinant). I l’index és en tots els anteriors casos igual a 1, ja que $i = \min\{r^+, r - r\} = 1$. Quàdrica projectiva no singular.

Afinment, doncs,

$$(r, i, r_\infty, i_\infty) = (4, 2, 3, 1).$$

Hiperboloide d’un full. Vegeu la taula de la pàgina 175 de [1].

Cas $\lambda^2 = 1$. En aquest cas el rang és 2. I el característic té un canvi de signe, $r^+ = 1$. Per tant, índex $i = 1$. Dues rectes. Afinment, doncs,

$$(r, i, r_\infty, i_\infty) = (4, 2, 2, 1).$$

Paraboloide hiperbòlic.

Exercici 6.47: Classifiqueu les còniques afins següents:

a) $x^2 - 6xy + 8y^2 + 2y = 0$;

b) $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$;

c) $2x^2 + 3y^2 - 2xy + 4x + 3y + 4 = 0$;

d) $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 4y + 4 = 0$;

e) $x^2 - 2xy + 2x - 6y - 3 = 0$.

Exercici 6.48: Doneu la classe projectiva i la classe afí, les equacions canòniques de les següents quàdriques afins:

a) $2x^2 + 3y^2 - z^2 - 5 - 2xy + 2xz + 4yz - 2y + 4x = 0$;

b) $x^2 + 2y^2 + z^2 + 4yz - 6xz - 2x + 8y - 2z + 9 = 0$;

c) $x^2 + 5y^2 - 4z^2 + 4xy - 2yz + 2y - 1 = 0$;

d) $2x^2 - 3y^2 - 2z^2 - 8x + 6y - 12z - 21 = 0$;

e) $2x^2 + y^2 - 4z^2 - 4xy - 4yz - 4y - 2z + 2 = 0$;

f) $x^2 + 3y^2 - 3z^2 + 3 + 6xy + 6xz - 14x + 6yz - 2y = 0$.

Exercici 6.49: Classifiqueu la cònica obtinguda per la intersecció de la quàdrica afí de $\mathbb{R}^3$ definida per

$$4xz + y^2 = 0$$

amb el pla $ax + z = 1$.

Solució: Si $a = 0$ tenim la paràbola $4x + y^2$ del pla $z = 1$. Per estudiar el cas general $a \neq 0$ substituïm $z = 1 - ax$ a l'equació de la quàdrica i obtenim $-4ax^2 + y^2 + 4x = 0$ de matriu associada

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4a & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La part quadràtica

$$\begin{pmatrix} -4a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

té rang $\rho = 2$. El característic és $x^2 + x(4a - 1) - 4a$. Si $a > 0$ (independentment del signe de $4a - 1$) tenim $r^+ = 1$ i per tant índex $i = 1$. Si $a < 0$ tenim $r^+ = 2$ i per tant índex $i = 0$.

La matriu 3×3 associada a la quàdrica té polinomi característic

$$-x^3 + (1 - 4a)x^2 + 4(1 + a)x - 4$$

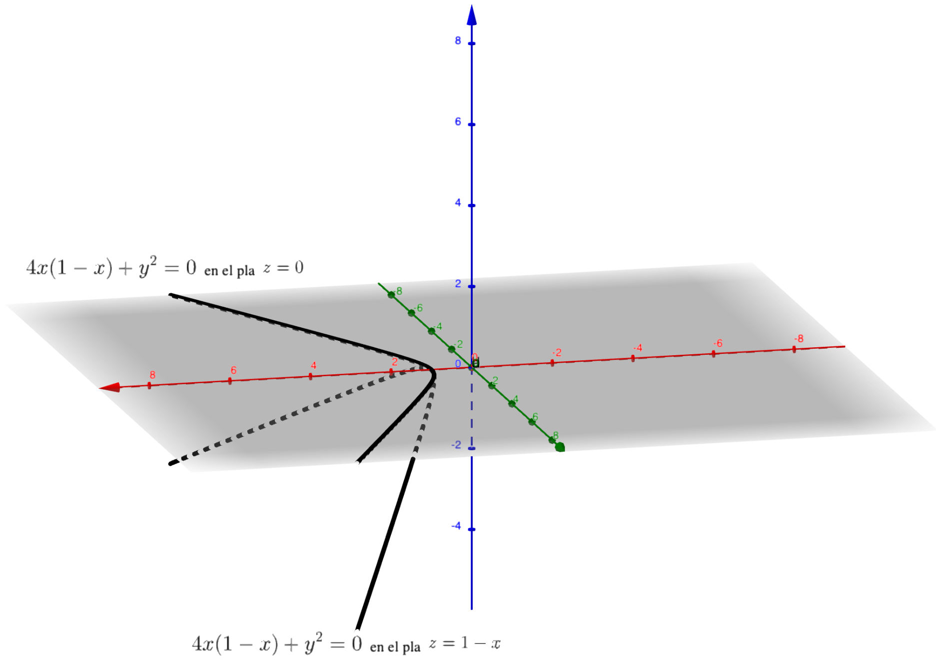
i per tant, rang $\tilde{\rho} = 3$.

Si $a > 0$ (independentment del signe de $4a - 1$), tenim $\tilde{r}^+ = 2$ i per tant índex $\tilde{i} = 1$.

Si $a < 0$, els quatre coeficients del característic tenen signes $-, ?, ?, -$. Llavors, només observant que els dos interrogants no poden ser a la vegada negatius, veiem directament que $\tilde{r}^+ = 2$ i per tant l'índex és $\tilde{i} = 1$.

Resumint, si $a > 0$ la quàdrica es codifica per $(\rho, i, \tilde{\rho}, \tilde{i}) = (2, 1, 3, 1)$ (hipèrbola) i si $a < 0$ la quàdrica es codifica per $(\rho, i, \tilde{\rho}, \tilde{i}) = (2, 0, 3, 1)$ (el·lipse).

La figura és el cas $a = 1$.



Exercici 6.50: Classifiqueu segons el valor del paràmetre λ les còniques del pla afí real donades per

$$x^2+2\lambda xy+y^2-2\lambda x+2y+2=0.$$

Exercici 6.51: Si A,B,C és un triangle de referència del pla projectiu, doneu l'equació general de les còniques tangents en B i C als costats AB i AC respectivament.

Solució: Podem suposar que tenim coordenades homogènies tals que $A=[1,0,0], B=[0,1,0], C=[0,0,1]$. En imposar que la cònica

$$ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz=0$$

passi pels punts B i C obtenim

$$\begin{cases} b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

La recta tangent en B està donada per

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & 0 & f \\ e & f & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=dx+fz=0$$

i com aquesta recta ha de ser la recta AB ($z=0$) ha de ser $d=0$ (i $f\neq 0$).

Anàlogament, la recta tangent en C està donada per

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & 0 & f \\ e & f & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=ex+fy=0$$

i com aquesta recta ha de ser la recta AC ($y=0$) ha de ser $e=0$ (i $f\neq 0$).

La cònica és doncs

$$ax^2+2fyz=0.$$

Si $a=0$ tenim dues rectes. En cas contrari podem escriure $x^2=\lambda yz, \quad \lambda\neq 0$.

Nota. Podem pensar aquest problema directament al pla afí o aprofitar els càlculs anteriors per retrobar el mateix resultat. Suposem doncs primerament donat un triangle A,B,C del pla afí i posem coordenades de manera que $A=(0,0), B=(1,0), C=(0,1)$. En imposar que la cònica

$$ax^2+by^2+c+2dxy+2ex+2fy=0$$

passi pels punts B i C obtenim

$$\begin{cases} a+2e+c=0 \\ b+2f+c=0 \end{cases}$$

La recta tangent en B està donada per

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=(a+e)x+(d+f)y+(e+c)=0$$

i com aquesta recta ha de ser la recta AB ($y=0$) ha de ser $a+e=e+c=0$ (i $d+f\neq 0$).

La recta tangent en C està donada per

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=(d+e)x+(b+f)y+(f+c)=0$$

i com aquesta recta ha de ser la recta AC ($x=0$) ha de ser $b+f=f+c=0$ (i $d+e\neq 0$).

D'aquestes igualtats deduïm $a=b=c=-e=-f$ ($a\neq d$) de manera que la cònica és

$$ax^2+ay^2+a+2dxy-2ax-2ay=0,$$

que suposant $a\neq 0$, podem escriure com

$$x^2+y^2+1+2\lambda xy-2x-2y=0, \quad \lambda\neq 1. \tag{13}$$

El característic és $-x^3+3x^2+(\lambda^2-1)x-(\lambda-1)$ de manera que és fàcil veure que si $|\lambda|<1$ queda codificada per $(2,0,3,1)$ i és una el·lipse i si $|\lambda|>1$ el codi és $(2,1,3,1)$ i és una hipèrbola.

Ara intentarem recuperar aquest resultat a partir del resultat projectiu que hem obtingut abans.

Prenem com hiperplà de l'infinit $\Pi: x+y+z=0$. La única condició per agafar aquest hiperplà i no un altre és que els punts $A=[1,0,0], B=[0,1,0], C=[0,0,1]$ donats a l'inici no hi pertanyin.

Identifiquem $\mathbb{R}P^3\setminus\Pi$ amb $x+y+z=1$. Els punts A,B,C pertanyen a aquest pla. Prenem la referència afí en aquest pla $\mathcal{R}=\{A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\}$. Els punts (x,y,z) d'aquest pla tenen coordenades afins (x',y') respecte $\mathcal{R}$ donades per

$$(x,y,z)-(1,0,0)=x'(-1,1,0)+y'(-1,0,1)$$

d'on

$$\begin{cases} x'=y \\ y'=z \end{cases}$$

(recordem $x+y+z=1$).

Llavors l'equació $x^2=\lambda yz$, $\lambda\neq 0$, obtinguda a la primera part del problema, en coordenades afins esdevé

$$(1-y-z)^2-\lambda yz=1+y^2+z^2-2y-2z+(2+\lambda)yz=0, \lambda\neq 0$$

que és l'equació (13) abans obtinguda (canviant x,y per y,z).

Exercici 6.52: Classifiqueu les còniques afins

a) $x^2+5xy+y^2-2x-y+1=0$;

b) $(x+2y)^2+2x-y+3=0$.

Exercici 6.53: Donada la quàdrica de l'espai projectiu real

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 - 2xz + 2yz + 2zt = 0$$

i un hiperpla Π que passa pel punt $[1, 0, 1, 0]$,

a) Classifiqueu-la.

b) Classifiqueu-la afinment si el pla de l'infinit és Π.

Solució: a)[19] El polinomi característic és

$$\begin{vmatrix} 1-x & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1-x & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1-x \end{vmatrix} = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x.$$

Per tant, rang $r = 3$ i com $r^+ = 2$ l'índex és $i = 1$. Un con.

b) L'hiperplà $ax+by+cz+dt = 0$ compleix $a+c = 0$, de manera que l'escriurem com $ax+by-az+dt = 0$.

Suposem $a \neq 0$. L'hiperplà es pot escriure doncs $x + by - z + dt = 0$ Substituint $x = z - by - dt$ a l'equació de la quàdrica tenim

$$(z-by-dt)^2 + y^2 + z^2 - t^2 - 2(z-by-dt)z + 2yz + 2zt = (1+b^2)y^2 + (d^2-1)t^2 + 2bdty + 2tz + 2yz = 0$$

El polinomi característic és $-x^3 + (b^2 + d^2)x^2 + (b^2 - d^2 + 3)x - (b - d)^2$, per tant, si $b \neq d$, tenim rang $r_\infty = 3$, i $r^+ = 2$ (no depèn del signe del coeficient de x) de manera que $i_\infty = 1$. Es tracte, doncs, de la quàdrica

$$(r, i, r_\infty, i_\infty) = (3, 1, 3, 1).$$

Con.

Si $b = d$, tenim rang $r_\infty = 2$ i $i_\infty = 1$. Es tracte, doncs, de la quàdrica

$$(r, i, r_\infty, i_\infty) = (3, 1, 2, 1).$$

Cilindre hiperbòlic.

Falta estudiar el cas $a = 0$. En aquest cas l'hiperplà és $by + dt = 0$. Si $b \neq 0$, $y = \mu t$ que substituint a l'equació de la quàdrica ens dóna

$$x^2 + (\mu^2 - 1)t^2 + z^2 - 2xz + 2(\mu + 1)zt = 0$$

El polinomi característic és

$$\begin{vmatrix} 1-x & -1 & 0 \\ -1 & 1-x & \mu+1 \\ 0 & \mu+1 & \mu^2-1-x \end{vmatrix} = -x^3 + (\mu^2+1)x^2 + (-\mu^2 + 2\mu + 3)x - (1+\mu)^2.$$

Si $\mu = -1$, el rang és $r_\infty = 1$ i $r^+ = 1$, per tant índex $i_\infty = 0$. Es tracte, doncs, de la quàdrica

$$(r, i, r_\infty, i_\infty) = (3, 1, 1, 0).$$

Cilindre parabòlic.

Si $\mu \neq -1$, el rang és $r_\infty = 3$ i el característic té, independentment del signe del coeficient de x, dos canvis de signe, $r^+ = 2$, per tant índex $i_\infty = 1$. Es tracte, doncs, de la quàdrica

$$(r, i, r_\infty, i_\infty) = (3, 1, 3, 1).$$

Con.

[19] Es veu directament que aquest polinomi es pot escriure com $(x-z)^2 + (y+z)^2 - (z-t)^2$, és a dir, $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$, un con.

Exercici 6.54: Donada la quàdrica de l'espai projectiu real

$$x^2 - 2xy + 2xz + 2y^2 - 4yz + 2yt - 4zt - 4t^2 = 0$$

i un hiperpla Π que passa pel punt $[4, 3, 2, -1]$,

a) Classifiqueu-la.

b) Classifiqueu-la afinment si el pla de l'infinit és Π.

Exercici 6.55: Considereu la cònica afí $y^2 + 2xy - 2x + 4y = 0$.

a) Classifiqueu-la.

b) Trobeu l'equació de la recta tangent en el punt de coordenades afins (0,0).

c) Trobeu el centre.

Exercici 6.56:

a) Classifiqueu la quàdrica de $\mathbb{R}P^3$

$$-4xy + z^2 - t^2 = 0.$$

b) Classifiqueu, en funció del paràmetre λ, la quàdrica afí que s'obté en restringir la quàdrica anterior a l'espai afí $\mathbb{R}P^3 \setminus \Pi$, on

$$\Pi : x - y + \lambda z - t = 0.$$

Solució: a) El polinomi característic és

$$\begin{vmatrix} -x & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = x^4 - 5x^2 + 4$$

per tant rang $r = 4$, $r^+ = 2$ i per tant índex $i = 2$. Quàdrica reglada.

b) Substituint $x = y + t - \lambda z$ a l'expressió de la quàdrica[20] obtenim

$$-4y^2 + z^2 - t^2 + 4\lambda yz - 4yt = 0.$$

El polinomi característic és

$$\begin{vmatrix} -4-x & 2\lambda & -2 \\ 2\lambda & 1-x & 0 \\ -2 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = -x^3 - 4x^2 + (5 + 4\lambda^2)x + 4\lambda^2$$

Si $\lambda \neq 0$, tenim rang $r_\infty = 3$ i índex $i_\infty = 1$. La quàdrica afí és doncs

$$(r, i, r_\infty, i_\infty) = (4, 2, 3, 1).$$

Hiperboloide de 2 fulls ([1], p. 164)

Si $\lambda = 0$, tenim rang $r_\infty = 2$ i índex $i_\infty = 1$. La quàdrica afí és doncs

$$(r, i, r_\infty, i_\infty) = (4, 2, 2, 1).$$

Paraboloide hiperbòlic.

Exercici 6.57:

[20] Sempre que fem aquest procés obtenim una quàdrica que depèn només de les variables y, z, t i que manipulem a partir d'aquest moment com si estiguéssim en el pla $x = 0$. Però les quàdriques donades per l'equació anterior amb y, z, t en el pla $x = 0$ o en el pla $x = y + t - \lambda z$ són afinment equivalents, ja que una és projecció de l'altra.

a) Classifiqueu la quàdrica de $\mathbb{R}P^3$

$$x^2 - 4xy + 2xz - t^2 = 0.$$

b) Classifiqueu, en funció del paràmetre λ, la quàdrica afí que s'obté en restringir la quàdrica anterior a l'espai afí $\mathbb{R}P^3 \setminus \Pi$, on

$$\Pi : x - y + \lambda z = 0.$$

Exercici 6.58:

a) Classifiqueu la quàdrica de $\mathbb{R}P^3$

$$x^2 + 2xz - t^2 = 0.$$

b) Classifiqueu, en funció del paràmetre λ, la quàdrica afí que s'obté en restringir la quàdrica anterior a l'espai afí $\mathbb{R}P^3 \setminus \Pi$, on

$$\Pi : 2x + \lambda y - 3z = 0.$$

Solució: La matriu associada és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El polinomi característic és $x^4 - 2x^2 - x$ i per tant rang $r = 3$ (el determinant és el terme independent i hi ha menors 3×3 diferents de zero). I $r^+ = 1$, d'on l'índex $i = 1$. Per tant, és un con (vegeu [1], p. 103).

Substituint $x = \frac{3}{2}z - \frac{\lambda}{2}y$ a l'equació de la quàdrica obtenim

$$\frac{\lambda^2}{4}y^2 + \frac{21}{4}z^2 - t^2 - \frac{5}{2}\lambda yz = 0$$

El polinomi característic de la matriu associada és

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda^2}{4} - x & -\frac{5}{4}\lambda & 0 \\ -\frac{5}{4}\lambda & \frac{21}{4} - x & 0 \\ 0 & 0 & -1 - x \end{vmatrix} = -x^3 + (\frac{17 + \lambda^2}{4})x^2 + (\frac{21 + 2\lambda^2}{4})x + \frac{\lambda^2}{4}$$

Si $\lambda = 0$, el rang és $r_\infty = 2$ i com $r^+ = 1$, l'índex és $i_\infty = 1$, de manera que la quàdrica afí és

$$(r, i, r_\infty, i_\infty) = (3, 1, 2, 1)$$

Cilindre hiperbòlic.

Si $\lambda \neq 0$, el rang és $r_\infty = 3$ i com $r^+ = 1$, l'índex és $i_\infty = 1$, de manera que la quàdrica afí és

$$(r, i, r_\infty, i_\infty) = (3, 1, 3, 1)$$

Un con.

Referències

[1] Agustí Reventós, *Geometria Projectiva*, Materials UAB, n. 85, 2000.

[2] ———, *Affine Maps, Euclidean Motions and Quadrics*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2011, traducció de *Afinitats, Moviments i Quàdriques*, Manuals UAB, Vol. 50, 2008.