MAT^2

MATerials MATemàtics

Versió per a e-book del

treball no. 5 del volum 2013

`www.mat.uab.cat/matmat`

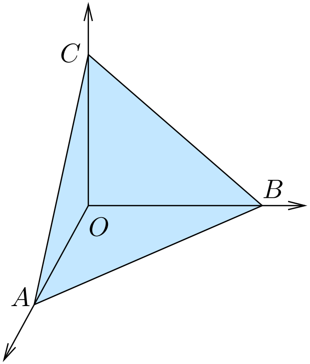
Teorema de Pitàgoras '3D'

Miquel Dalmau Vilaldach,

Francesc Tomàs Pons

Teorema de Pitàgoras

Si un amic fa el dibuix següent



i diu "l'àrea de OAB al quadrat, més l'àrea de OBC al quadrat, més ...", segurament l'aturarem per afegir "més l'àrea de OCA al quadrat" abans que ell ho hagi dit (o, si més no, ho pensarem). Llavors és possible que emergeixi el següent Teorema de Pitàgoras:

$$\begin{aligned}\text{Àrea}^2(ABC) = \text{Àrea}^2(OAC) + \text{Àrea}^2(OAB)\\ + \text{Àrea}^2(OBC)\end{aligned}$$

on la “tapa” ABC fa d’hipotenusa i els altres tres triangles (que són la projecció ortogonal de la superfície del triangle ABC sobre els tres plans coordenats) fan de catets. Naturalment que els eixos del dibuix han de ser ortogonals.

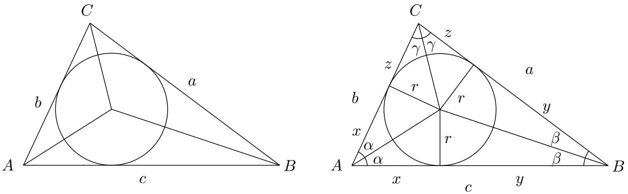
Aquest resultat ja era conegut de J.P. de Gua de Malves (1712-1785), qui el presentà el 1783 a l’Académie des Sciences de Paris, i posteriorment ha estat retrobat una i altra vegada. Sembla raonable suposar que potser ja era conegut pels matemàtics grecs, i més encara quan admet una demostració “a la grega”, usant la fórmula de Heron d’Alexandria que dóna l’àrea d’un triangle de costats

a, b, c en termes del semiperímetre $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$:

$$\text{Àrea} = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

Prova de la fórmula de Heron

Per ambientar-nos donem una prova de l'esmentada fórmula. L'elegant presentació que segueix es deguda a Robert B. Nelsen [3]. En la figura següent



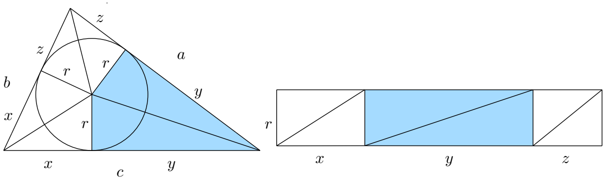
la circumferència té per centre l'incentre (intersecció de les bisectrius). Es satisfà

$$p = x + y + z = x + a = y + b = z + c$$

Els segments r, perpendiculars a cada costat, són els inradis.

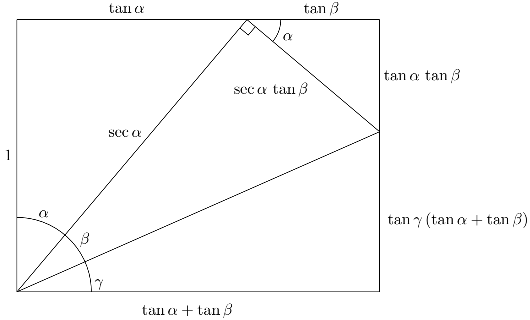
Són rellevants dos lemes que R. B. Nelsen demostra sense paraules:

Lema 1 *L'àrea del triangle precedent és el producte de l'inradi r pel semiperímetre p:*



Lema 2 *Si α, β, γ són angles positius tals que $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ aleshores*

$$\tan\alpha\,\tan\beta + \tan\beta\,\tan\gamma + \tan\gamma\,\tan\alpha = 1\ \ :$$



Aplicant el Lema 2 als angles α, β, γ del nostre triangle i usant també el Lema 1 tenim

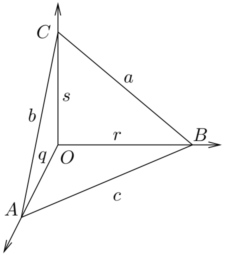
$$\begin{aligned} 1 &= \tan\alpha\ \tan\beta + \tan\beta\ \tan\gamma + \tan\gamma\ \tan\alpha \\ &= \frac{r}{x}\cdot\frac{r}{y} + \frac{r}{y}\cdot\frac{r}{z} + \frac{r}{z}\cdot\frac{r}{x} \\ &= \frac{r^2(x+y+z)}{x\,y\,z} = \frac{r^2\,p}{x\,y\,z} = \frac{\text{Àrea}^2}{p\,x\,y\,z} \end{aligned}$$

és a dir

$$\text{Àrea}^2 = p\,x\,y\,z = p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)$$

Prova del teorema de Pitàgoras

Posem totes les dades del teorema de Pitágoras en una figura:



i la fórmula de Heron dóna:

$$
\begin{aligned}
S^2 &= \text{Àrea}^2(ABC) = p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c) \\
&= \frac{1}{2^4}(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c) \\
&= \frac{1}{2^4}((b+c)^2-a^2)\,(a^2-(b-c)^2) \\
&= \frac{1}{2^4}(b^2+c^2+2\,b\,c-a^2)(a^2-b^2-c^2+2\,b\,c) \\
&= \frac{1}{2^4}\big(2\,b\,c-(a^2-b^2-c^2)\big)\,\big(2\,b\,c+(a^2-b^2-c^2)\big) \\
&= \frac{1}{2^4}\big(4\,b^2\,c^2-(a^2-b^2-c^2)^2\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}(s^2\, q^2 + s^2\, r^2 + q^2\, r^2) \\
&= \text{Àrea}^2(OAC) + \text{Àrea}^2(OBC) + \text{Àrea}^2(OAB)
\end{aligned}
$$

En el darrer pas hem usat que $a^2 = r^2 + s^2$, $b^2 = q^2 + s^2$ i $c^2 = q^2 + r^2$, igualtats degudes a ser els triangles projecció rectangles.

La demostració 'contemporània', usant eines avui corrents, és molt més curta: recordem que l'àrea d'un triangle amb costats els vectors $\mathbf{e}, \mathbf{e}'$ és

$$
\text{Àrea} = \frac{1}{2}\left|\mathbf{e} \times \mathbf{e}'\right|
$$

Aplicat al cas que ens ocupa, siguin $\mathbf{e} = \overrightarrow{AB} = (-q, r, 0), \mathbf{e}' = \overrightarrow{AC} = (-q, 0, s)$; calculant $\mathbf{e} \times \mathbf{e}'$ tenim

$$
\begin{aligned}
\text{Àrea}^2(ABC) &= \frac{1}{4}\left|\mathbf{e} \times \mathbf{e}'\right|^2 = \frac{1}{4}\left|(r\, s, s\, q, q\, r)\right|^2 \\
&= \frac{1}{4}(r^2 s^2 + s^2 q^2 + q^2 r^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2} r\, s\right)^2 + \left(\frac{1}{2} s\, q\right)^2 + \left(\frac{1}{2} q\, r\right)^2 \\
&= \grave{\text{A}}\text{rea}^2(OAC) + \grave{\text{A}}\text{rea}^2(OAB) \\
&\qquad\qquad + \grave{\text{A}}\text{rea}^2(OBC)
\end{aligned}
$$

Noteu que el vector $\mathbf{u} = (\grave{\text{A}}\text{rea } OBC, \grave{\text{A}}\text{rea } OCA,$ $\grave{\text{A}}\text{rea } OAB)$ és ortogonal al triangle 'hipotenusa' ABC, perquè

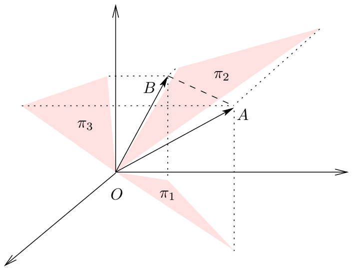
$$
\mathbf{u} = \frac{1}{2}(r\, s, s\, q, q\, r) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}
$$

i la seva norma és

$$
|\mathbf{u}| = \grave{\text{A}}\text{rea } ABC
$$

Variacions

1. Usant el mateix mètode podem veure que el resultat val per a *qualsevol* triangle OAB amb vèrtex a l'origen:



És a dir que anomenant π_1, π_2, π_3 les respectives projeccions ortogonals sobre els tres plans coordenats xy, yz, zx tindrem

$$\begin{aligned}\text{Àrea}^2(OAB) &= \text{Àrea}^2(\pi_1(OAB)) \\ &\quad + \text{Àrea}^2(\pi_2(OAB)) + \text{Àrea}^2(\pi_3(OAB))\end{aligned}$$

Per veure-ho, siguin $\vec{A} = (a, b, c)$ i $\vec{B} = (p, q, r)$; aleshores

$$\begin{aligned}\text{Àrea}^2(OAB) &= \frac{1}{4}\left|\vec{A} \times \vec{B}\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left|(c\,q - b\,r, a\,r - c\,p, b\,p - a\,q)\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\big((c\,q - b\,r)^2 + (a\,r - c\,p)^2 + (b\,p - a\,q)^2\big)\end{aligned}$$

D'altra banda

$$\grave{\text{A}}\text{rea}^2(\pi_1(OAB)) = \frac{1}{4}\,|(a,b,0)\times(p,q,0)|^2$$
$$= \frac{1}{4}\,|(0,0,a\,q-b\,p)|^2$$
$$= \frac{1}{4}(a\,q-b\,p)^2$$

i les fórmules anàlogues per a $\pi_2(OAB)$ i $\pi_3(OAB)$ proven el resultat.

2. Podem variar l'objecte que projectem i considerar el *paral·lelogram* generat pels vectors $\vec{A}, \vec{B}$. Altra cop és cert que l'àrea del paral·lelogram al quadrat és la suma dels quadrats de les àrees dels paral·lelograms projectats. Basta ometre el factor $\frac{1}{4}$ en l'argument precedent.

Notem que si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ són dos vectors unitaris i ortogonals de $\mathbb{R}^3$ amb coordenades en la base canònica

$$\mathbf{u}_1 = (u_1^1, u_1^2, u_1^3),\ \ \mathbf{u}_2 = (u_2^1, u_2^2, u_2^3)$$

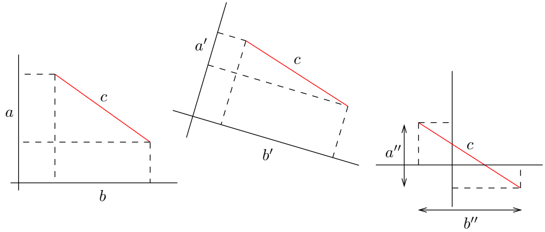
aleshores, tenint en compte que l'àrea del paral·lelogram generat pels dos vectors és 1, resulta

$$1 = \det{}^2 \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 \\ u_1^2 & u_2^2 \end{pmatrix} + \det{}^2 \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 \\ u_1^3 & u_2^3 \end{pmatrix} + \det{}^2 \begin{pmatrix} u_1^2 & u_2^2 \\ u_1^3 & u_2^3 \end{pmatrix},$$

propietat que és aplicable a qualsevol parell de vectors d'una base ortonormal.

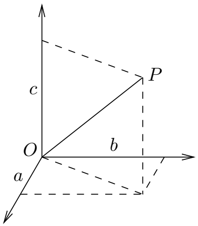
3. Fet i debatut, fins i tot que els objectes tinguin un vèrtex a l'origen és irrellevant. En canvi és crucial que el sistema de coordenades sigui ortogonal i que les projeccions siguin també ortogonals.

Llavors potser hauríem de mirar el Teorema de Pitàgoras no tant com hipotenusa-catet-catet sinó sota el punt de vista de les figures següents (el segment c té una posició fixa en el pla):



Això ens mostra el descobriment del sistema de coordenades de Descartes com un desenvolupament de la idea fonamental de Pitàgoras posada en un context més ampli. Alhora constitueix un exemple del mètode cartesià com és descompondre un problema en parts més simples: retenint a i b tenim tota la informació rellevant.

4. També podem variar la *dimensió* de l'objecte que projectem. Per exemple podem passar d'un objecte bidimensional (inicialment el triangle ABC) a un d'unidimensional. Prenguem un segment OP i projectem-lo ortogonalment sobre els *eixos*, com veiem en el dibuix següent:



El teorema de Pitàgoras clàssic (aplicat dos cops) demostra que $\overline{OP}^2 = a^2 + b^2 + c^2$, la mateixa idea.

A l'espai ordinari no podem augmentar la dimensió de l'objecte fins dimensió 3 atès que les projeccions han de tenir la mateixa dimensió que l'objecte.

Una ullada a la quarta dimensió

Sense massa feina podem donar un cop d'ull a la dimensió 4. Si en dimensió 3 hem relacionat l'àrea d'un paral·lelogram amb les àrees de les seves projeccions ortogonals sobre els plans coordenats, considerem ara a $\mathbb{R}^4$ un paral·lelepípede de dimensió 3, generat per tres vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^4$:

$$P = \{\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3, 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$$

i mirem de relacionar el seu *volum* amb els volums de les seves projeccions ortogonals sobre els hiperplans coordenats yzt, xzt, xyt, xyz. Siguin P_1, P_2, P_3, P_4 els respectius paral·lelepípedes projecció; volem veure que

$$\mathrm{Vol}^2 P = \mathrm{Vol}^2 P_1 + \mathrm{Vol}^2 P_2 + \mathrm{Vol}^2 P_3 + \mathrm{Vol}^2 P_4$$

En primer lloc sigui

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 \end{pmatrix}$$

la matriu de les columnes de components dels vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ en la base canònica. Els volums de les projeccions són el valor absolut dels determinants de les components dels vectors que les generen (vegeu p.e. [1] o [4]). Deixem primer de banda els valors absoluts i considerem volums amb signe

$\mathrm{V}(P), \mathrm{V}(P_i)$:

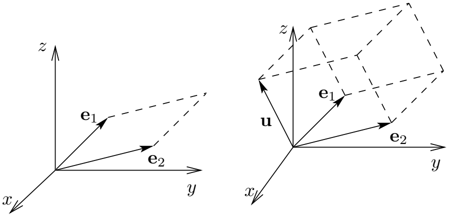
$$\mathrm{V}(P_1) = \det \begin{pmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 \end{pmatrix} = \Delta_1$$

$$\mathrm{V}(P_2) = \det \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 \end{pmatrix} = \Delta_2$$

$$\mathrm{V}(P_3) = \det \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 \end{pmatrix} = \Delta_3$$

$$\mathrm{V}(P_4) = \det \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} = \Delta_4$$

on cada subíndex indica la component que manca. Per calcular el volum (amb signe) de P recorrem a una analogia. Si a $\mathbb{R}^3$ tenim un *paral·lelogram* generat pels vectors $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, per a calcular-ne l'àrea podem formar un *paral·lelepípede* $Q(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{u})$ on $\mathbf{u}$ és un vector ortogonal a $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ i unitari, i llavors calcular el seu volum mitjançant el determinant corresponent:



A fi d'usar aquest mètode per a P hem de calcular l'esmentat vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ unitari i ortogonal a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. L'hiperplà que conté aquests tres vectors és

$$\det \begin{pmatrix} x & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ y & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ z & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \\ t & a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 \end{pmatrix} = 0$$

i desenvolupant per la primera columna resulta

$$x\,\Delta_1 - y\,\Delta_2 + z\,\Delta_3 - t\,\Delta_4 = 0$$

on podem llegir que un vector ortogonal és

$$\mathbf{v} = (\Delta_1, -\Delta_2, \Delta_3, -\Delta_4)$$

amb norma $|\mathbf{v}| = \sqrt{(\Delta_1)^2 + (\Delta_2)^2 + (\Delta_3)^2 + (\Delta_4)^2}$; el vector normal unitari que cerquem és

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}(\Delta_1, -\Delta_2, \Delta_3, -\Delta_4).$$

Segons l'analogia el volum de P és

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(P) &= \det\begin{pmatrix} \frac{1}{|\mathbf{v}|}\Delta_1 & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ -\frac{1}{|\mathbf{v}|}\Delta_2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ \frac{1}{|\mathbf{v}|}\Delta_3 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \\ -\frac{1}{|\mathbf{v}|}\Delta_4 & a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{v}|}\left((\Delta_1)^2 + (\Delta_2)^2 + (\Delta_3)^2 + (\Delta_4)^2\right)\end{aligned}$$

on hem desenvolupat el determinant per la primera columna. Així és que

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}^2(P) &= \frac{\left((\Delta_1)^2+(\Delta_2)^2+(\Delta_3)^2+(\Delta_4)^2\right)^2}{(\Delta_1)^2+(\Delta_2)^2+(\Delta_3)^2+(\Delta_4)^2}\\ &= (\Delta_1)^2+(\Delta_2)^2+(\Delta_3)^2+(\Delta_4)^2\\ &= \mathrm{Vol}^2 P_1+\mathrm{Vol}^2 P_2+\mathrm{Vol}^2 P_3+\mathrm{Vol}^2 P_4\end{aligned}$$

que és allò que volíem veure.

Incidentalment, notem que aquesta mateixa demostració val mutatis mutandis en dimensió n.

Epíleg

Però hi ha més, perquè podem considerar qualssevol paral·lelepípedes de dimensió estrictament inferior a la de l'espai ambient menys 1. Per exemple també és cert que per un paral·lelogram a $\mathbb{R}^4$ la seva àrea al quadrat és la suma dels quadrats de les àrees dels sis paral·lelograms projecció sobre els plans coordenats. I que el quadrat de la longitud d'un segment és la suma dels quadrats de les longituds de les quatre projeccions sobre els eixos coordenats (useu Pitàgoras clàssic 'ad nauseam').

Ho podem descriure amb prou generalitat: si a $\mathbb{R}^n$ considerem un paral·lelepípede de dimensió $1 \leq k < n$, el seu k-volum (longitud, àrea, volum,...) al quadrat és la suma dels quadrats dels k-volums de les $\binom{n}{k}$ projeccions. Val a dir que fins i tot hi ha resultats en dimensió infinita. Ara bé, l'eina geomètricament adaptada pel tractament d'aquest problema són les formes algebraiques i no tant els determinants. Si volguessiu punyir una mica en aquesta direcció podeu consultar [2], de pulcritud germànica i humor llatí.

Referències

[1] Burguès, J.M. *Integració i càlcul vectorial*, Pub. Universitat Autònoma de Barcelona, 2001.

[2] Jänich, K. *Vector analysis*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2000.

[3] Nelsen, R.B. *Heron's formula via proofs without words. The College Mathematics Journal*, Vol.32, No.4. (Sep., 2001),pp. 290-292.

[4] Xambó S. *Álgebra lineal y geometrías lineales*, Eunibar, Barcelona 1984.

M. Dalmau, F. Tomàs

miquel.dv@gmail.com

Publicat el 28 d'octubre de 2013