



***MAT*<sup>2</sup>**

**MATerials MATemàtics**

Versió per a e-book del  
treball no. 3 del volum 2014  
[www.mat.uab.cat/matmat](http://www.mat.uab.cat/matmat)

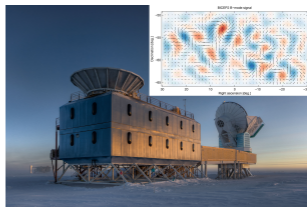
**Una explicació a fons de la  
radiació còsmica de fons**

**Joan Girbau**

# 1 Introducció

La comunitat científica utilitza sempre l'abreviació CMB per designar la radiació còsmica de fons (en anglès, *Cosmic Microwave Background*). Darrerament aquesta radiació està de

moda, perquè el 17 de març de 2014 astrònoms d'algunes institucions americanes (California Institute of Technology, the Harvard Smithsonian Center for Astrophysics, Stanford University i Minnesota University) van anunciar que, amb el telescopi Bicep 2 situat a prop del Pol Sud, havien trobat al CMB traces febles de llum polaritzada, atribuïbles a les ones gravitatòries produïdes durant el període de la inflació. Cal dir que la inflació és



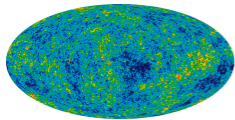
<http://apod.nasa.gov/apod/ap140318.html>

una teoria, fins ara no confirmada, que sosté que poc després del Big Bang va haver-hi un curt període de temps en què l'acceleració de la dilatació còsmica va ser positiva (en canvi, els models d'univers de Friedmann-Robertson-Walker amb constant cosmològica prediuen una acceleració negativa des del Big Bang fins a una època bastant recent). La notícia, de ser certa, confirmaria aquesta teoria, que fins ara era purament especulativa, i donaria també una prova de l'existència d'ones gravitatòries.

Hem de dir, tanmateix, que aquesta notícia, recollida en la majoria de diaris, no ha estat encara explicada en articles científics i que, per tant, s'ha d'acollir amb totes les reserves pertinents. Però, a banda d'aquest anunci recent que la posa d'actualitat, la radiació còsmica de fons (CMB) juga un paper importantíssim en la nostra comprensió de

la formació de l'univers, i val la pena conèixer-ne els trets fonamentals.

El 20 de maig de 1964 els astrònoms Arno Penzias i Robert Woodrow Wilson, amb un ràdio-telescopi situat a Holmehd Township, a l'estat de New Jersey, van detectar un senyal de microones que es comportava com una espècie de soroll de fons i que es captava en totes direccions. Aquest “soroll de fons” no era altra cosa que la cèlebre radiació còsmica de fons, predita teòricament per Ralph Alpher i Robert Hermann el 1948.



[http://wmap.gsfc.nasa.gov/  
media/121238/index.html](http://wmap.gsfc.nasa.gov/media/121238/index.html)

Si es dibuixa la gràfica de la intensitat d'aquest senyal en funció de la freqüència, s'obté una gràfica ben familiar i coneguda pels físics: la de l'espectre de radiació del cos negre. Mesuraments fets l'any 1989 pel satèl·lit CO-

BE (*Cosmic Background Explorer*), també conegut com *Explorer 66*, posen de manifest una coincidència espectacular entre la gràfica de la intensitat del senyal del CMB en funció de la freqüència i la gràfica teòrica de l'espectre de radiació del cos negre corresponent a una temperatura de 2,725 graus Kelvin (o sigui, només 2,725 graus per sobre del zero absolut).

Aquest fet planteja les preguntes següents: Com s'explica que la radiació còsmica de fons sigui la d'un cos negre? Que potser l'univers és, actualment, un cos negre? No ho sembla pas! D'altra banda, el fet que la radiació correspongui a la d'un cos negre d'una temperatura de 2,725 K, vol dir que la temperatura mitjana de l'univers és actualment de 2,725 K? Si fos així, això implicaria que a l'univers fa un fred que pela! Nosaltres estaríem calents per ser a prop d'una estufa, però si no, ens

moriríem de fred. I si la temperatura de l'univers fos realment aquesta, no deixaria de ser sorprenent que la poguéssim conèixer amb tres xifres decimals exactes, quan la majoria de paràmetres cosmològics només els coneixem amb un marge d'error descomunal.

D'altra banda, el CMB ens mostra l'espectacular grau d'homogeneïtat de l'univers primitiu (pocs anys després del Big Bang) i l'estudi de les seves petites irregularitats és una preciosa font d'informació de la infància de l'univers. Però no només això, sinó que el CMB ens proporciona dades sobre temes que aparentment no hi tenen cap relació. Per exemple, ens permet tenir una prova que el sistema solar es mou a una velocitat de 369 km/s cap a un punt de coordenades galàctiques  $(l, b) = (264^\circ, 48^\circ)$ .

L'objecte d'aquesta redacció és explicar amb la menor artilleria matemàtica possible els fets bàsics

sobre el CMB i respondre les preguntes anteriors. Per això cal, primer, donar una sèrie d'idees sobre temes aparentment inconnexos com la radiació del cos negre, l'equació d'ionització de Saha i els models cosmològics de Friedmann-Robertson-Walker. El lector que vulgui ampliar coneixements pot consultar [1] i [2] en relació amb el tema de la radiació del cos negre, [4] i [5] pel que fa al tema de l'equació de Saha, i [3], [4], [5] i [6] pels models cosmològics i el CMB.

## 2 Què és un cos negre

Tots els cossos radien energia en forma de calor (pel fet de tenir una temperatura per sobre del zero absolut), i aquesta radiació pot contenir ones de totes les freqüències. Considerem un determinat cos limitat per una superfície  $S$ . Òbviament la radiació d'aquest cos té lloc a través de  $S$ . Sigui

$R_\nu d\nu$  l'energia calorífica per unitat de temps i unitat d'àrea, radiada pel cos a través de  $S$ , entre les freqüències  $\nu$  i  $\nu + d\nu$  (la lletra  $R$  de  $R_\nu$  és la inicial de «radiada»).  $R_\nu$  és una funció sobre  $S$ . Evidentment, l'energia emitida pel cos, per unitat de temps (potència), entre les freqüències  $\nu$  i  $\nu + d\nu$ , vindrà donada per  $(\int_S R_\nu dA) d\nu$ , on  $dA$  és l'element d'àrea de la superfície  $S$ . I l'energia total emitida pel cos, per unitat de temps, serà  $\int_0^\infty (\int_S R_\nu dA) d\nu$ . No cal dir que  $R_\nu$  depèn de la temperatura  $T$  del cos.

Però tot cos, a part d'emetre energia calorífica, també en rep. Per a una certa temperatura  $T$  fixada, designarem per  $I_\nu d\nu$  la densitat d'energia calorífica que incideix sobre el cos per unitat de temps (potència) i per unitat d'àrea, entre les freqüències  $\nu$  i  $\nu + d\nu$ , a través de  $S$ . De tota l'energia incident, el cos només n'absorbeix una fracció, i la



resta la reflecteix. Denominarem *poder absorbent* del cos corresponent a la freqüència  $\nu$  a la fracció de  $I_\nu$  que el cos absorbeix. Aquest poder absorbent el designarem per  $a_\nu$ . Per definició,  $a_\nu \leq 1$ . L'energia absorbida per unitat de temps i unitat d'àrea entre les freqüències  $\nu$  i  $\nu + d\nu$  és, doncs,  $a_\nu I_\nu d\nu$ . Si el cos està en equilibri tèrmic, l'energia emesa ha de ser igual a l'energia absorbida, perquè, en cas contrari, el cos s'escalfaria o es refredaria. Per tant,  $R_\nu = a_\nu I_\nu$ . Suposem ara que tenim diversos cossos ficats dintre d'un forn. A la figura 1 es mostra un forn esfèric amb tres cossos diferents al seu interior. Les fletxes indiquen la radiació calorífica del forn. Suposem que tot aquest sistema està en equilibri tèrmic a una certa temperatura  $T$ . L'energia  $I_\nu$  que incideix sobre cada un d'aquests cossos per unitat d'àrea és la mateixa. No depèn del cos perquè tots ells estan ficats dintre del ma-

teix forn a una temperatura estable. Per tant:

$$I_\nu = \frac{R_\nu \text{ del cos 1}}{a_\nu \text{ del cos 1}} = \frac{R_\nu \text{ del cos 2}}{a_\nu \text{ del cos 2}} = \dots \text{ etc.}$$

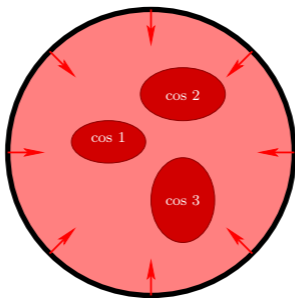


Figura 1

Dit en altres paraules, el quocient  $R_\nu/a_\nu$  no depèn de la naturalesa del cos (sí que depèn de la temperatura  $T$ ). Aquest fet es coneix com a «lleï de Kirchoff».

Un cos ideal per al qual  $a_\nu = 1$  per a totes les freqüències  $\nu$  i totes les temperatures  $T$  s'anomena

*cos negre*. Com que  $a_\nu$  s'ha definit com la fracció d'energia incident que el cos absorbeix, el fet que  $a_\nu = 1$  vol dir que el cos absorbeix tota l'energia incident. Així, doncs, un cos negre és aquell que sempre absorbeix tota l'energia calorífica incident, per a tota freqüència i per a qualsevol temperatura.

Una cosa que s'aproxima bastant a un cos negre és un cos amb una superfície rugosa pintada de negre. Si es vol un exemple de cos negre més perfecte, hem de recórrer a una cavitat de parets rugoses i negres amb un petit forat. El forat es comporta com un cos negre molt perfecte perquè la major part de rajos que entren pel forat a dintre de la cavitat estan subjectes a múltiples reflexions a les parets, i com que aquestes són negres i rugoses, a cada reflexió s'absorbeix gran part de l'energia. De manera que la probabilitat que surti pel forat energia de la que ha entrat és molt petita. Vegeu

la figura 2.

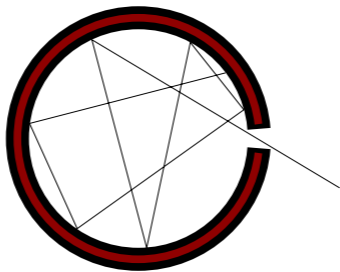


Figura 2

Un cos negre no només és el que absorbeix tota l'energia calorífica que hi arriba, sinó que també és el que radia més energia de tots els cossos, en igualtat de condicions. Per veure-ho, tornem a l'experiment de la figura 1. Suposem dos cossos a dintre d'un forn, un dels quals és un cos negre. La llei de Kirchoff aplicada a aquests dos cossos dirà:

$$\frac{R_{\nu}(\text{cos no negre})}{a_{\nu}(\text{cos no negre})} = \frac{R_{\nu}(\text{cos negre})}{1} .$$

O sigui:

$$\begin{aligned} R_\nu(\text{cos no negre}) \\ &= a_\nu(\text{cos no negre}) R_\nu(\text{cos negre}) \\ &\leq R_\nu(\text{cos negre}) . \end{aligned}$$

Això indica que l'energia radiada per qualsevol cos (per unitat de temps i unitat d'àrea) és sempre menor o igual que la corresponent al cos negre.

En resum, un cos negre és el que més calor absorbeix, però també el que més calor irradia. Per tant, el cos negre és el menys aïllant del calor. Així, doncs, un radiador de calefacció negre (per dins i per fora) deixa passar més calor que un que no ho sigui. Els vestits blancs deixen passar menys calor d'un cantó a l'altre que els negres (els blancs són més aïllants). Si a l'hivern portem vestits negres, el calor del nostre cos s'escaparà cap a fora molt més fàcilment que si portem vestits blancs.

Per què, doncs, tothom creu el contrari? Si a l'estiu portéssim vestits negres, el calor del nostre cos s'escaparia millor cap a fora i estaríem més frescos, amb una única excepció: que la temperatura exterior sigui molt alta (per sobre dels 36,6 graus del nostre cos). En aquestes circumstàncies extremes ens convé protegir-nos del calor exterior i no deixar-lo entrar cap al nostre cos (vestit blanc, millor que negre).

### 3 Radiació del cos negre

Considerem un forn amb un forat (figura 3), amb les parets del forn negres i rugoses. Sigui  $R_\nu d\nu$  la densitat d'energia radiada pel forat, per unitat de temps i unitat d'àrea, entre les freqüències  $\nu$  i  $\nu + d\nu$ , a la temperatura  $T$  del forn. Sigui  $\epsilon_\nu d\nu$  la densitat d'energia per unitat de volum entre les mateixes freqüències, a l'interior del forn. Volem

veure que la relació que hi ha entre  $\epsilon_\nu$  i  $R_\nu$  és la següent:

$$\epsilon_\nu = \frac{4R_\nu}{c} , \quad (1)$$

on  $c$  és la velocitat de la llum.

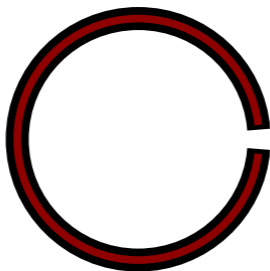


Figura 3

Per veure això, comencem considerant una porció molt petita  $D$  del forat. Sigui  $dA$  l'àrea de  $D$ . Interessem-nos per l'energia (entre les freqüències  $\nu$  i  $\nu + d\nu$ ) que travessa aquesta porció  $D$  en un

temps molt petit  $\Delta t$ . Prenem coordenades esfèriques  $(r, \varphi, \theta)$  centrades en el centre de la regió  $D$ , tal com indica la figura 4  $r$  indica la distància d'un punt qualsevol de l'interior del forat al centre del trosset de forat  $D$  que considerem,  $\varphi$  indica l'angle (colatitud) entre el radi vector del punt considerat i la perpendicular a  $D$  en el centre de  $D$  (que en el dibuix és la línia vertical) i  $\theta$  indica la longitud geogràfica d'aquestes coordenades.

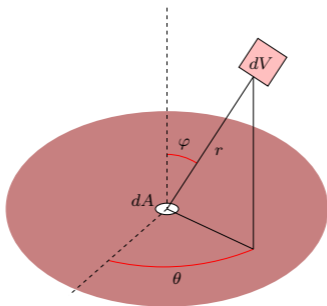


Figura 4



Considerem una regió  $U$  molt petita interior al forn, de volum  $dV$ . Recordem que en coordenades esfèriques l'element de volum  $dV$  s'escriu

$$dV = r^2 dr \sin \varphi d\varphi d\theta .$$

L'energia continguda en aquesta petita regió, entre les freqüències considerades, és  $\epsilon_\nu d\nu dV = \epsilon_\nu d\nu r^2 dr \sin \varphi d\varphi d\theta$ . Aquesta energia continguda a la regió  $U$  (de volum  $dV$ ) es propaga en totes direccions a la velocitat de la llum. Perquè una part d'ella surti per la regió superficial  $D$  d'àrea  $dA$  durant l'interval de temps  $\Delta t$  s'haurà de complir  $r \leq c \Delta t$ . Si aquesta condició es compleix, la part d'energia (de tota la que hi havia inicialment a la regió  $U$ ) que haurà sortit per la regió  $D$  és

$$\epsilon_\nu d\nu dV \frac{\cos \varphi dA}{4 \pi r^2} . \quad (2)$$

En efecte, si no hi hagués cap paret que ho impedís, al cap d'un temps  $\Delta t$ , l'energia entre les

frequències  $\nu$  i  $\nu + d\nu$  que inicialment estava continguda a la petita regió  $U$  de volum  $dV$  estaria escampada uniformement sobre l'esfera de centre el centre de  $U$  i de radi  $c \Delta t$ . La part d'aquesta energia que haurà sortit, doncs, per la petita regió d'àrea  $dA$  correspon a l'angle sòlid de centre el centre de  $U$  i que abraça la regió  $D$  d'àrea  $dA$ . Aquest angle sòlid (mesurat per la superfície corresponent de l'esfera unitat) és  $\cos \varphi dA/4 \pi r^2$ , tal com queda reflectit a (2). Si volem ara tota l'energia entre les freqüències  $\nu$  i  $\nu + d\nu$  que haurà sortit per la petita regió  $D$  d'àrea  $dA$  durant el temps  $\Delta t$ , haurem d'integrar (2) per a  $\varphi$  variant entre 0 i  $\pi/2$ ,  $\theta$  entre 0 i  $2\pi$ , i  $r$  entre 0 i  $c \Delta t$ . Com que ens interessa l'energia que surt per  $D$  per unitat de temps, prendrem  $\Delta t = 1$ . Per tant, l'energia que surt per la regió d'àrea  $dA$  per unitat de temps

entre les freqüències  $\nu$  i  $\nu + d\nu$  és

$$\epsilon_\nu d\nu dA \int_0^c \frac{r^2}{4\pi r^2} dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi . \quad (3)$$

Ara bé,

$$\int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi = \left[ \frac{\sin^2\varphi}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} .$$

Per tant, l'expressió (3) ens diu que l'energia que surt pel forat per unitat d'àrea i unitat de temps entre les freqüències  $\nu$  i  $\nu + d\nu$  val  $(c/4) \epsilon_\nu d\nu$ . Com que aquesta energia és  $R_\nu d\nu$ , igualant les dues expressions s'obté (1).

Així, doncs, si tenim un cos negre constituït per un forat en una cavitat de parets negres, absorbents, conèixer la funció de radiació  $R_\nu(T)$  del forat equival, en virtut de (1), a conèixer la funció de densitat d'energia  $\epsilon_\nu(T)$  dintre de la cavitat. L'any 1900 Max Planck va trobar l'expressió de la

funció  $\epsilon_\nu(T)$  en un article trascendental en la història de la ciència, perquè va suposar l'inici de la física quàntica. L'expressió que va trobar Planck va ser la següent:

$$\epsilon_\nu(T) = \frac{8 \pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (4)$$

on  $T$  és la temperatura en graus Kelvin,  $h$  és l'anomenada constant de Planck, que val  $6,62607 \times 10^{-34}$  joules  $\times$  s,  $c$  és la velocitat de la llum i  $k$  és la constant de Boltzmann que val  $1,3807 \times 10^{-23}$  joules/graus Kelvin. L'article de Max Planck va ser trascendental perquè per deduir la fórmula es va veure obligat a suposar que l'energia no podia prendre tots els valors (de manera continua), sinó que per a cada freqüència  $\nu$  havia de ser un múltiple enter de  $h\nu$ .

Hem de recordar aquí que el que representa l'energia per unitat de volum entre les freqüències  $\nu$

i  $\nu + d\nu$  no és pas  $\epsilon_\nu$  sinó  $\epsilon_\nu d\nu$ . Això cal tenir-ho molt present, perquè si volguéssim, per exemple, expressar l'energia en funció de la longitud d'ona  $\lambda$  i no pas en funció de la freqüència  $\nu$ , hauríem de fer el canvi  $\nu = c/\lambda$  no pas a l'expressió (4) de  $\epsilon_\nu$ , sinó a  $\epsilon_\nu d\nu$ .

Moltes vegades s'expressa (4) d'una altra manera, fent el canvi de variable  $x = h\nu/kT$ , que és una variable abstracta, sense unitats. Llavors (4) pren aquesta forma:

$$\epsilon_x dx = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \frac{x^3}{e^x - 1} dx ,$$

i la radiació del forat, en virtut de (1), serà

$$R_x dx = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \frac{x^3}{e^x - 1} dx .$$

Si designem per  $C_1$  la constant  $8\pi k^4/c^3 h^3$  que apareix a la primera fórmula i per  $C_2$  la constant

$2 \pi k^4 / c^2 h^3$  que apareix a la segona, això s'escriu

$$\epsilon_x dx = C_1 T^4 \frac{x^3}{e^x - 1}, \quad R_x dx = C_2 T^4 \frac{x^3}{e^x - 1}. \quad (5)$$

Els valors d'aquestes constants són els següents:

$$C_1 = 1,1652 \times 10^{-16} \frac{\text{joules}}{\text{m}^3 \times \text{graus K}^4},$$

$$C_2 = 8,7331 \times 10^{-9} \frac{\text{watts}}{\text{m}^2 \times \text{graus K}^4}.$$

Totes aquestes fórmules fan referència a energia entre les freqüències  $\nu$  i  $\nu + d\nu$ , o fent el canvi de variable, a energia entre  $x$  i  $x + dx$ . Si es vol l'energia total (corresponent a totes les freqüències), s'hauran d'integrar aquestes fórmules per a  $\nu$  variant entre 0 i  $\infty$ , o, el que és el mateix, per a  $x$  variant entre 0 i  $\infty$ . Designem per  $\epsilon$  la densitat d'energia per unitat de volum a l'interior de la cavitat, i per  $\mathcal{R}$  la densitat d'energia radiada per unitat de temps i unitat d'àrea pel forat. Per ob-

tenir les expressions de  $\epsilon$  i de  $\mathcal{R}$  s'ha d'integrar (5) entre 0 i  $\infty$ , però per fer això cal conèixer la integral  $\int_0^\infty x^3 dx / (e^x - 1)$ . A la secció 8 veurem que aquesta integral val  $\pi^4/15$ . Tenint això present, per integració de (5) obtenim:

$$\epsilon = \frac{8 \pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} T^4, \quad \mathcal{R} = \frac{2 \pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} T^4. \quad (6)$$

La segona d'aquestes fórmules, que ens diu que la densitat de potència per unitat d'àrea que radia un cos negre és proporcional a la quarta potència de la temperatura absoluta, es coneix amb el nom de *lleï de Boltzmann*.

Per formar-se una idea de com varien la densitat d'energia  $\epsilon_x$  i la densitat de potència radiada  $R_x$  en funció de la variable  $x$  (o, el que és el mateix, en funció de la freqüència  $\nu$ ), cal estudiar la funció  $f(x) = x^3 / (e^x - 1)$ . Aquesta funció (figura 5) té

un màxim en el punt  $x_M = 2,8214$  i el valor de la funció en aquest màxim és  $f(x_M) = 1,4214$ .

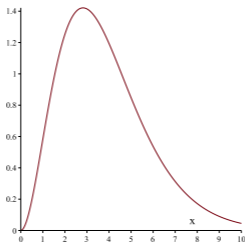


Figura 5

Per a una  $T$  fixa, el canvi de variable que hem fet,  $x = h\nu/kT$ , consisteix a multiplicar la freqüència  $\nu$  per una constant. Per tant, podem pensar que la variable  $x$  no és altra cosa que la freqüència amb unes altres unitats. Però el canvi d'unitats depèn de la temperatura. Així per exemple, per a  $T = 2,725$  graus Kelvin, el màxim  $x_M$  de la funció correspon a una freqüència



de  $1,6020 \times 10^{11}$  Hz i el valor màxim de  $R_x$ , és  $C_2 T^4 f(x_M) = 6,8446 \times 10^{-7}$  watts/m<sup>2</sup> (hem pres com a exemple la temperatura  $T = 2,725$  perquè, com hem dit a la introducció, està relacionada amb la radiació còsmica de fons). Fem ara el mateix càlcul per a una altra temperatura  $T$  per veure com varien els valors obtinguts. Prenem, per exemple,  $T = 5000$  graus Kelvin. Llavors el màxim  $x_M$  de  $f(x)$  correspon a una freqüència de  $3,5274 \times 10^{14}$  Hz, i el valor màxim de  $R_x$  és  $C_2 T^4 f(x_M) = 1,6088 \times 10^7$  watts/m<sup>2</sup>.

Per interpretar els resultats convé tenir present els diferents tipus de radiació segons la seva freqüència. Aquests tipus són:

1. *Ones de ràdio*, de freqüència menor que  $3 \times 10^{11}$  Hz. D'aquestes, les que tenen freqüència entre  $3 \times 10^8$  i  $3 \times 10^{11}$  Hz s'acostumen a denominar *microones*.

2. *Infraroig*, de freqüència entre  $3 \times 10^{11}$  i  $3,84 \times 10^{14}$  Hz.
3. *Visible*, entre  $3,84 \times 10^{14}$  i  $7,89 \times 10^{14}$  Hz.
4. *Ultraviolada*, entre  $7,89 \times 10^{14}$  i  $3 \times 10^{16}$ .
5. De freqüències superiors a  $3 \times 10^{16}$  Hz (raigs X, raigs  $\gamma$ ).

Veiem, doncs, que la freqüència de radiació d'energia màxima del cos negre de temperatura  $T = 2,725$  K (radiació còsmica de fons) correspon a *microones*, mentre que la de temperatura  $T = 5000$  K correspon a radiació *infraroja* (gairebé en el límit amb la zona del visible).

## 4 Equació d'ionització de Saha

Un ió no és altra cosa que un àtom que no és elèctricament neutre perquè ha guanyat o perdut elec-

trons respecte a un àtom neutre de la mateixa naturalesa. Totes les substàncies a altes temperatures s'ionitzen, és a dir, part dels seus àtoms passen a ser ions. Es defineix la fracció d'ionització  $X$  com el quocient entre la densitat del nombre de ions (per unitat de volum) i la densitat del nombre total d'àtoms, ionitzats o no (per unitat de volum). A nosaltres ens interessa només el cas de l'hidrogen, particularment senzill. Un àtom d'hidrogen ionitzat, per pèrdua de l'únic electró que té, és un protó lliure, i la fracció d'ionització  $X$  serà quocient entre la densitat del nombre de protons lliures (per unitat de volum) i el nombre total de protons, siguin o no siguin lliures.  $X = 1$  correspon al cas d'ionització completa (tots els protons que hi ha són lliures), mentre que  $X = 0$  correspon al cas d'absència d'ionització.

A la dècada dels 1920, Meghnad Saha va es-

tablir una fórmula que dóna la fracció d'ionització en funció d'una sèrie de dades, entre elles, la temperatura. De tota aquesta teoria a nosaltres aquí només ens interessa el fet que en condicions ideals, la fórmula de Saha que dóna  $X$  en funció de la temperatura  $T$  té una gràfica com la de la figura 6. A l'eix horitzontal hem representat les temperatures i a l'eix vertical la fracció d'ionització. No hem inclòs els valors de les variables, perquè aquests depenen dels valors que es prenguin per als coeficients de l'equació i aquests depenen d'hipòtesis particulars. Però, el que ens interessa remarcar és la forma de la gràfica, que mostra que per sota d'una determinada temperatura la fracció d'ionització cau de manera molt brusca.

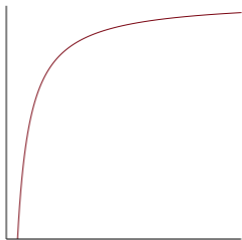


Figura 6

## 5 Models cosmològics

La física de Newton descriu amb una precisió bastant acceptable els sistemes físics en què intervenen velocitats petites i forces petites, però per descriure situacions en què apareixen grans velocitats (properes o iguals a la de la llum) i grans forces cal emprar la relativitat. Així, doncs, el marc idoni per modelitzar el comportament de l'univers, amb galàxies de masses extraordinàriament grans interac-

cionant entre elles per gravetat, és la relativitat general. L'any 1917 (un any després d'haver introduït la relativitat general) Einstein va publicar un article que obria la porta a la cosmologia moderna. Però en aquella època encara no s'havia descobert que l'univers s'expansionava i el model que Einstein va introduir el 1917 descrivia un univers estàtic, etern, que havia existit sempre i sempre existiria.

Tanmateix, a la dècada dels anys 1920, les observacions astronòmiques de Hubble van establir sense cap mena de dubte que l'univers s'expansionava i des d'aleshores el model d'Einstein de 1917 va deixar de tenir sentit. Així i tot, les idees contingudes en aquell article són les que, convenientment modificades, estan a la base dels models cosmològics posteriors. Friedmann, Robertson i Walker, en diferents articles de les dècades de 1920 i 1930, van

proposar un model d'univers que és el més acceptat en l'actualitat.

Malgrat que la redacció del present article no pressuposa per part del lector coneixements específics de varietats de Riemann i varietats de Lorentz, explicarem per als lectors que sí que coneixen aquests temes, que l'univers de Friedmann, Robertson i Walker ve descrit per una varietat de Lorentz  $(V, \tilde{g})$ , on  $V$  és un producte  $V = M \times I$ , en què  $I$  és un cert interval de  $\mathbb{R}$  i  $M$  és una varietat de Riemann de dimensió 3, amb una mètrica  $g$  de curvatura constant  $k = +1, 0, -1$ , i la mètrica de Lorentz  $\tilde{g}$  sobre  $V$  és de la forma

$$\tilde{g} = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \pi^*(g) ,$$

on  $\pi$  és la projecció canònica  $\pi : M \times I \rightarrow M$ ,  $t$  és la coordenada canònica de  $I \subset \mathbb{R}$ , i  $a(t)$  és una certa funció positiva de  $t$ . En aquesta presentació es renuncia a explicar el que passa dintre de les di-

ferents galàxies i aquestes es pensen com si fossin punts  $p \in M$ . Cada corba (vertical) de  $V = M \times I$  de la forma  $\gamma_p(t) = (p, t)$  representa la vida (per als diferents instants de temps) de la galàxia corresponent al punt  $p \in M$ . Es pot comprovar que  $\gamma_p(t)$  és geodèsica i que  $\tilde{g}(d\gamma_p(t)/dt, d\gamma_p(t)/dt) = -c^2$ , per tant,  $t$  és el temps propi d'aquesta galàxia. Fixeu-vos, doncs, que  $t$  és un temps propi comú a totes les galàxies (temps galàctic). En cada instant d'aquest temps,  $t = t_0$ , la subvarietat  $M_{t_0} = M \times \{t_0\} \subset V$  representa l'espai (de tres dimensions) comú a totes les galàxies en aquell instant.

Els lectors que no vulguin entrar en el llenguatge de les varietats de Lorentz es poden quedar amb la idea que els models de Friedmann-Robertson-Walker parteixen de la base que hi ha un temps  $t$  comú a totes les galàxies, i que hi ha una funció positiva  $a(t)$ , universal, que té la propietat següent:



Si designem per  $t = t_0$  l'instant de temps galàctic corresponent a l'actualitat, i si  $d$  és la distància actual entre dues galàxies qualssevol, la distància entre aquestes dues galàxies al llarg de la història ve donada en funció del temps  $t$  per  $\frac{a(t)}{a(t_0)} d$ .

Naturalment, la funció  $a(t)$  queda determinada per la matèria i l'energia presents a l'univers a través de l'equació de gravitació d'Einstein, la qual es tradueix en aquest cas amb una equació diferencial ordinària coneguda amb el nom d'equació de Friedmann, que permet determinar  $a(t)$  si es coneixen uns certs paràmetres cosmològics que hi apareixen. Però, tot això, que està explicat amb molt detall a [3], no cal conèixer-ho per seguir el present article. De la funció  $a(t)$  només cal saber, de moment, que és una funció creixent i que la densitat d'energia per unitat de volum,  $\epsilon_{\text{rad}}$ , de qualsevol radiació còsmica composta per fotons es comporta segons

la llei següent:

$$\epsilon_{\text{rad}} = \epsilon_{\text{rad},0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^4, \quad (7)$$

on  $a_0$  significa  $a(t_0)$  i  $\epsilon_{\text{rad},0}$  vol dir el valor de  $\epsilon_{\text{rad}}$  a l'instant actual,  $t = t_0$ . Això, que és la fórmula (18) de [3], es pot justificar intuïtivament amb el següent raonament: Imaginem que en un determinat volum  $V$  a l'instant actual hi ha  $n$  fotons de freqüència  $\nu$ . Imaginem que passa el temps i les longituds es dilaten amb un factor 2. Els volums es dilataran amb un factor 8. Com que a cada fotó se li assigna una energia  $e = h\nu$  (on  $h$  és la constant de Planck), la densitat d'energia (per unitat de volum) de fotons d'aquesta freqüència serà  $n h \nu / V$ . Com que la freqüència  $\nu$  està relacionada amb la longitud d'ona  $\lambda$  per  $\nu = c/\lambda$ , si les longituds han augmentat amb un factor 2, les freqüències hauran quedat dividides per 2, i l'energia de cada fotó haurà quedat dividida per 2. Per tant,  $\epsilon$  haurà quedat

dividit per 8 (perquè el volum figura en el denominador) i per 2 (a causa de la variació de  $\nu$ ). O sigui, per 16, tal com indica la fórmula (7).

## 6 Origen i naturalesa del CMB

Tal com hem explicat a la introducció, el CMB és un senyal que capten els ràdio-telescopis en qualsevol direcció, la intensitat del qual està relacionada amb la freqüència per una corba que és amb molta exactitud la que correspon a la radiació d'un cos negre de temperatura 2,725 K. D'on prové aquesta radiació?

Disseguem per  $\epsilon_{\text{rad}}$  la densitat d'energia per unitat de volum d'aquestes ones. Com que l'univers s'expandeix el valor de  $\epsilon_{\text{rad}}$  va variant, de manera que  $\epsilon_{\text{rad}}$  és funció del temps. Com que ara constatem que la representació del seu valor en funció de la freqüència correspon a la gràfica de radiació

d'un cos negre, no és gaire agosarat suposar que això sempre ha estat així i, per tant, que  $\epsilon_{\text{rad}}$  compleix la llei de Boltzmann (6), i, per tant, que és proporcional a la quarta potència de la temperatura absoluta  $T$ . És a dir,

$$\epsilon_{\text{rad}} = \sigma T^4, \quad (8)$$

on  $\sigma$  és una certa constant. Diguem aquí que, tot i que els cossos negres la compleixen, aquesta llei és molt més general. Qualsevol cos el poder absorbent del qual no depengui de la freqüència la compleix. Aquests cossos s'anomenen *cossos grisos*. Doncs, suposarem que  $\epsilon_{\text{rad}}$  compleix aquesta llei sempre (per a qualsevol instant de temps galàctic). Combinant ara (7) i (8) obtenim que la temperatura  $T$  és proporcional al quocient  $a_0/a$ . O sigui,

$$T = T_0 \frac{a_0}{a}, \quad (9)$$

on  $T_0$  és la temperatura actual.

Anem a explicar l'origen del CMB i per què actualment encara la gràfica de la seva intensitat respecte a la freqüència és la d'un cos negre.

Després del Big Bang les temperatures eren altíssimes. Tingueu present que el Big Bang es defineix com l'instant (fora del model) en què  $a(t)$  s'anul·la. Per tant (9) ens diu que la temperatura tendeix a infinit quan  $t$  s'acosta al Big Bang. A unes temperatures tan altes no hi podia haver de cap manera àtoms neutres formats, perquè qualsevol electró que intentés aparellar-se amb un protó per formar un àtom neutre d'hidrogen era escopit immediatament per la immensa energia d'aquella temperatura. L'univers era, doncs, un mar de partícules elementals lliures. En aquest mar de partícules els fotons no podien circular perquè eren de seguida absorbits pels electrons (la dispersió de Thomson, *Thomson scattering*, consisteix en el xoc

d'un fotó amb un electró en què aquest últim aprofita l'energia cedida pel fotó per canviar de trajectòria). Tingueu en compte també que com que l'energia d'un fotó és  $h\nu = hc/\lambda$ , on  $\lambda$  és la longitud d'ona, i com que les longituds es fan molt petites a prop del Big Bang, els fotons tenen molta energia. En resum, la trajectòria mitjana que seguien els fotons sense xocar amb cap partícula era molt petita i això feia que l'univers fos completament opac (els fotons no hi podien circular).

En anar-se expandint, l'univers es va anar refredant d'acord amb (9). Però, segons la fórmula de Saha que hem explicat a la secció 4, la gràfica de la fracció d'ionització cau en picat a partir d'una determinada temperatura. Per tant, a partir d'aquella temperatura els electrons lliures s'aparellen amb els protons lliures per formar àtoms neutres d'hidrogen i el mar de partícules, cada una cam-

pant al seu aire, desapareix de cop i volta. En molt poc temps, doncs, l'univers passa de ser opac a ser transparent. Aquesta breu època es coneix amb el nom d'època de la recombinació (*recombination epoch*), encara que pròpiament s'hauria de dir època de la combinació perquè els electrons es combinen amb els protons per formar àtoms neutres, i això s'esdevé per primera vegada. Per tant, aquí el prefix «re» no és gaire adient.

Abans de la recombinació l'univers era opac perquè els fotons no hi podien circular i actuava com un perfecte cos negre, perquè era molt calent i absorbia qualsevol fotó. De cop i volta aquest univers es torna transparent i els fotons poden circular-hi lliurement en totes direccions. Això es pot comparar amb un forn tancat amb parets absorbents en el qual de cop i volta desapareixen les parets (recordeu que el forat en un forn és l'exem-

ple més reeixit de cos negre). La radiació còsmica de fons que ara veiem es va originar llavors.

Quina era la temperatura de l'univers a l'època de la recombinació? Tot i que es poden fer simulacions a partir de la fórmula de Saha, això no és un problema fàcil, perquè en aquella època hi deuria haver heli, a més d'hidrogen, i molts altres condicionants. Ara bé, hi ha bastant acord a situar aquesta temperatura entre 4000 i 3000 K (més a prop de 3000 que de 4000). Nosaltres, a mode d'exemple per als càlculs que segueixen, la situarem en els 3500 K. Com a la secció 3, designarem per  $x = h\nu/kT$ . Amb aquesta notació, la densitat d'energia per unitat de volum entre  $x$  i  $x + dx$  a l'època de la recombinació era

$$(\epsilon_x dx)_{\text{rec}} = \frac{8 \pi k^4 T_{\text{rec}}^4}{c^3 h^3} \frac{x^3}{e^x - 1} dx, \quad (10)$$

on el subíndex «rec» indica «a l'època de la recombinació».

$$T_{\text{rec}} = 3500 \text{ K.}$$



El temps passa, l'univers es va dilatant i la temperatura va disminuint. De (9) es dedueix que la relació entre la temperatura  $T$  en un instant determinat en què  $a(t)$  pren el valor  $a$ , i la temperatura  $T_{\text{rec}}$  a l'època de la recombinació és  $T = (a_{\text{rec}}/a) T_{\text{rec}}$ . D'altra banda, una longitud que a l'època de la recombinació mesurava  $\lambda_{\text{rec}}$ , a l'instant  $t$  en què  $a(t)$  val  $a$  mesurarà  $\lambda = (a/a_{\text{rec}})\lambda_{\text{rec}}$ , i com que les freqüències  $\nu$  estan relacionades amb les longituds d'ona per  $\nu = c/\lambda$ , queda clar que la relació entre la freqüència  $\nu_{\text{rec}}$  d'un determinat fotó a l'època de la recombinació i la freqüència del mateix fotó a l'instant  $t$  en què  $a(t) = a$  és  $\nu = (a_{\text{rec}}/a)\nu_{\text{rec}}$ .

Si calculem, doncs, la  $x$  que correspon a un determinat fotó de freqüència  $\nu$  a l'època de la recombinació i la  $x$  que correspon al mateix fotó a l'època en què  $a(t)$  val  $a$ , trobem el mateix valor,

perquè  $x$  és el quocient  $h\nu/kT$ , i en aquest quocient, tant  $\nu$  com  $T$  queden multiplicats pel mateix factor. Així, doncs, quan passa el temps, del segon membre de (10) només canvia  $T_{\text{rec}}$  que passa a ser la temperatura de l'univers quan  $a(t)$  val  $a$  i que és  $(a_{\text{rec}}/a)T_{\text{rec}}$ . El segon membre de (10) queda, doncs, multiplicat per  $(a_{\text{rec}}/a)^4$ , tal com ha de ser en virtut de la fórmula (7). El que és important de tot aquest raonament, és la constatació que el segon membre de (10) conserva sempre la forma de la densitat d'energia d'un cos negre donada per (5). Això explica que ara trobem que la gràfica de la intensitat de la radiació còsmica de fons és la d'un cos negre, i ens fa entendre que la temperatura de 2,725 K que correspon a aquesta gràfica és la temperatura actual de l'univers.

Els resultats del COBE recullen una intensitat de radiació uniforme, pràcticament igual en totes

les direccions del cel, i sempre seguint la gràfica de radiació del cos negre corresponent a una temperatura de 2,725 K, però mostren també un lleuger corriment del senyal cap a les freqüències del vermell en una meitat de l'hemisferi celeste i un lleuger corriment cap a les freqüències del blau en l'altre hemisferi, que posen de manifest un efecte Doppler corresponent a la velocitat del satèl·lit respecte a la referència en què el CMB és isotròpic (la referència galàctica). Corregit aquest efecte respecte a la velocitat del satèl·lit entorn de la Terra (petita, només d'uns 8 km/s) i respecte a la velocitat de la Terra entorn al Sol (també petita, d'uns 30 km/s), es troba finalment que el sistema solar es mou a una velocitat de 369 km/s cap a un punt de coordenades galàctiques  $(l, b) = (264^\circ, 48^\circ)$ .

No deixa de ser curiós que després que la relativitat posés en qüestió l'existència d'un espai abso-

lut i d'un temps absolut, les teories cosmològiques basades precisament en la relativitat tornin a donar sentit a aquests termes, afirmant l'existència d'un temps comú a totes les galàxies (temps galàctic) i en cada instant d'aquest temps, l'existència d'un espai comú amb unitats de mesura comunes, respecte del qual el CMS és gairebé isotròpic.

## 7 Fa gaire temps que va tenir lloc la recombinació?

Si, per fixar les idees, admetem que la recombinació va tenir lloc quan l'univers tenia una temperatura  $T_{\text{rec}} = 3500$  K i ara l'univers té una temperatura  $T_0 = 2,725$  K, l'equació (9) ens diu que

$$\frac{a_0}{a_{\text{rec}}} = \frac{T_{\text{rec}}}{T_0} = \frac{3500}{2,725} = 1284,4 .$$

O sigui, que la recombinació va tenir lloc quan les distàncies a l'univers eren 1284,4 vegades més pe-

tites que ara. Però, quant temps fa d'això? Per respondre aquesta pregunta cal conèixer la funció  $u(t) = a(t)/a_0$ . Tal com hem dit a la secció 5, aquesta funció ve donada per l'equació de Friedmann, equació (27) de [3]. Aquesta equació depèn d'una sèrie de paràmetres cosmològics que no es coneixen amb precisió. A [3] consideràvem, en primer lloc, el sistema de paràmetres següent, obtingut de les dades del projecte d'observació de supernoves:

1. Univers de curvatura positiva, amb  $\Omega_{m,0} = 0,65$ ,  $\Omega_{\Lambda,0} = 1,2$ ,  $\Omega_{\text{rad},0} = 8,4 \times 10^{-5}$ .

Dèiem a [3] que, a banda del projecte d'observació de supernoves, els astrònoms han intentat determinar el valor dels diferents paràmetres cosmològics per mètodes molt variats i que el 2008 va aparèixer un article que ha tingut molt ressò, que intentava conciliar totes les dades recents obtingudes pels diferents mètodes i després d'una anàlisi

estadística acurada proposava els següents valors dels paràmetres cosmològics:

2. Univers de curvatura gairebé nul·la, amb  $\Omega_{m,0} = 0,285$ ,  $\Omega_{\Lambda,0} = 0,724$ ,  $\Omega_{\text{rad},0} = 8,4 \times 10^{-5}$ .

No costa gaire de resoldre numèricament l'equació de Friedmann per aquests dos sistemes de valors, i els resultats que s'obtenen són els següents: L'edat actual de l'univers que correspon als valors del model de curvatura positiva és de  $12,9 \times 10^9$  anys, i l'edat de l'univers a l'època de la recombinació, en aquest model, era de 211 000 anys. Per al sistema de valors corresponent al model de curvatura gairebé nul·la, l'edat actual de l'univers és de  $13,5 \times 10^9$  anys i l'edat de l'univers a l'època de la recombinació era de 278 000 anys.

## 8 Apèndix: càlcul de la integral

$$\int_0^{\infty} x^3 dx / (e^x - 1)$$

Oferim aquí la solució que ens ha facilitat el professor Armengol Gasull de la integral  $\int_0^{\infty} x^3 dx / (e^x - 1)$  que apareix a la secció 3.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} &= \int_0^{\infty} \frac{x^3 e^{-x} dx}{1 - e^{-x}} \\ &= \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} \left( \sum_{m=0}^{\infty} e^{-mx} \right) dx . \end{aligned}$$

Tenint en compte que es tracta d'una sèrie de termes positius, tindrem:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x^3 e^{-(m+1)x} dx .$$

Fem ara el canvi  $u = (m + 1)x$  a cada una de les integrals de la suma. Tindrem

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{u^3 e^{-u} du}{(m + 1)^4} .$$

Ara bé,

$$\int_0^{\infty} u^3 e^{-u} du = [-(6 + 6u + 3u^2 + u^3)e^{-u}]_0^{\infty} = 6 .$$

Per tant,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 6 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^4} = 6 \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15} .$$

## Referències

- [1] R. Eisberg, R. Resnik, Física cuántica, Editorial Limusa, 1994.
- [2] S. Gasiorowicz, Quantum Physics. John Wiley and Sons, 1996.
- [3] J. Girbau, Un curs accelerat d'acceleració còsmica, Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, 28 (2013), 147-181.
- [4] A. Liddle, An Introduction to Modern Cosmology, John Wiley and Sons, 2004.



- [5] J.V. Narlikar, *An Introduction to Cosmology*, Cambridge University Press, 2002.
- [6] B. Ryden, *Introduction to Cosmology*, Addison Wesley, 2003.



Dpt. de Matemàtiques  
Univ. Autònoma de Barcelona  
[girbau@mat.uab.cat](mailto:girbau@mat.uab.cat)

*Publicat el 9 de juny de 2014*