

Una reflexió sobre el racó de l'univers on vivim i la seva relació amb un instant crucial de la història de la ciència*

Jaume Llibre

Introducció

Un dels instants més brillants del pensament científic va ésser la comprensió dels moviments dels planetes mitjançant la llei de gravitació de Newton.

En aquesta breu comunicació vull remarcar que aquest crucial descobriment de la ciència va ser possible no només gràcies a la brillantor del pensament d'homes com Copèrnic, Galileo, Kepler, Newton, etc., sinó també al fet que la humanitat hagi nascut en aquest racó de l'univers on el moviment dels planetes al voltant del Sol és molt proper a un moviment integrable, i per tant llunyà dels moviments caòtics.

La comunicació està estructurada en els següents apartats:

1. Una visió breu de l'univers.
2. El Sistema Solar.
3. El moviment caòtic.



Imatge des de l'Apolo XVII

*Aquest text és una versió ampliada de la conferència donada per l'autor a la VI Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica que va tenir lloc a la Universitat de Vic el mes d'octubre de 2000.

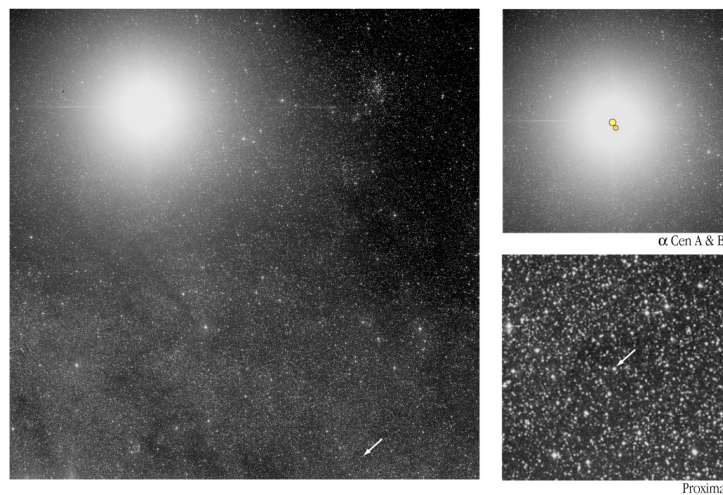
4. Caos determinístic
5. Hem estat afortunats.
6. Referències.

Els lectors que vulguin aprofundir en algunes de les idees que apareixen en aquesta reflexió poden consultar les referències que donem.

1 Una visió breu de l'univers

Un llarg procés educatiu s'inicia quan un nen se n'adona que la casa on viu no és l'única casa existent, que la seva família no és l'única família, de que arreu existeixen comunitats molt semblants a la que ell habita. D'igual manera, el procés de maduració de l'home implica que aquest se n'adoni que els planetes i les estrelles no són només uns punts lluminosos al cel, que existeixen altres mons i altres sols, diferents del nostre.

Avui sabem que la Terra és un dels vuit planetes que giren al voltant de l'estrella que anomenem Sol. A diferència de les estrelles, els planetes no brillen amb llum pròpia, sinó que tant sols reflecteixen la llum de la seva estrella o estrelles. El Sol, els planetes, els satèl·lits, els asteroides, alguns cometes, i altres objectes formen el nostre Sistema Solar, aquest racó de l'univers on hem nascut.



The Triple Stellar System Alpha Centauri
(ESO 1-m Schmidt Telescope)

ESO PR Photo 07a/03 (15 March 2003)

© European Southern Observatory



El següent sistema solar es troba a unes set mil vegades la distància de la Terra a Plutó, en direcció a la constel·lació Alfa de Centaure. Entre nosaltres i aquest sistema existeixen vastos abismes d'espai interestel·lar, un buit més perfecte que qualsevol dels que podem produir a la Terra. Però, tot i així, aquest espai no és completament buit. Per terme mig, conté un únic àtom a cada centímetre cúbic d'espai interestel·lar.

Alfa de Centaure és, en realitat, un sistema estel·lar triple, tres estrelles movent-se una al voltant de les altres en una dansa majestuosa i quasi eterna. A simple vista només veiem un focus de llum, però els telescopis ens mostren tres sols diferents: un de color groc, un altre de taronja i un de vermell.

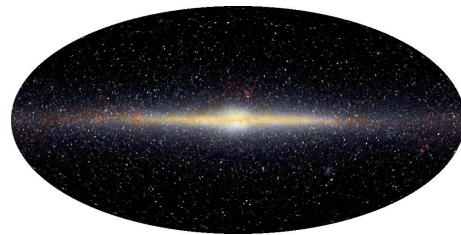
La següent estrella més propera a nosaltres és una diminuta i pàl·lida estrella vermellova, visible només a través dels telescopis, que es troba a una distància d'uns sis anys-llum. Rep el nom d'estrella de Barnard, en homenatge a l'astrònom que la va observar per primera vegada, i es troba a la constel·lació del Serpentari.

Més enllà d'aquests veïns existeixen altres estrelles, i més enllà encara d'altres, sigui quina sigui la direcció en què mirem. Totes les estrelles que podem veure a simple vista en una nit clara formen part d'una gran agrupació d'estrelles que anomenem la nostra Galàxia. Ja que ens trobem dins d'aquest conjunt, la determinació de la seva forma no ha estat fàcil. Seria com fer-se una idea completa del cos humà observant-lo des de l'interior de l'estómac.

Avui sabem que la nostra Galàxia és un disc pla d'estrelles, gasos i pols, amb un nucli bulbós, al voltant del qual giren vastos braços, que s'estenen vers l'exterior.

El Sol és una de les estrelles que, en un nombre que pot oscil·lar entre 200.000 i 400.000 milions, formen la nostra Galàxia, i ni la seva grandària, brillantor o localització presenten cap peculiaritat. No estem al centre de la Galàxia. Ni tan sols a un dels seus braços espirals principals. Ens trobem en un petit espigó, a una distància d'uns 30.000 anys-llum del centre. Si a alguna organització de reconeixement còsmic se li acudís de fer una llista dels llocs interessants de la Galàxia, no existeix cap seguretat que hi fóssim.

Des del lloc que ocupem als ravals de la Galàxia, veiem el disc que aquesta forma com una franja que travessa el cel. La tènue resplendor de les estrelles



Imatge del satèl·lit COBE de la Via Làctia

més properes es barreja amb ella formant la Via Làctia. Molt més antiga que el Sol i la Terra, molt més gran que les parts que podem observar, la Via Làctia és la nostra illa o continent còsmic: un petit disc que roda lentament en la foscor de l'espai.

Més enllà de la Galàxia es troba l'espai intergalàctic, un buit tan gran que la concentració mitja de matèria és només d'un àtom per metre cúbic. Però en aquest espai, fins allà on arriben els nostres telescopis, existeixen altres illes d'estrelles, i altres encara més enllà. Hem arribat a l'hàbitat de les galàxies, on els nostres veïns més propers, les dues galàxies anomenades Núvols de Magallanes, es troben a 150.000 anys-llum. A l'igual que les estrelles, les galàxies també formen agrupacions o cúmuls, unes més grans i altres més petites.

Hi ha moltíssimes galàxies a l'univers, milers de milions. Algunes estan isolades, però la majoria d'elles estan agrupades en cúmuls, que poden contenir des d'unes poques a alguns milers de galàxies. En mitjana, les galàxies estan distribuïdes en l'espai en la mateixa proporció que una moneda de cinc cèntims per metre cúbic.

La Via Làctia forma part d'un grup escampat d'unes dues dotzenes de galàxies denominades el Grup Local. Més enllà dels seus confins existeixen altres grups i cúmuls, els quals, a la vegada, semblen agrupar-se en supercúmuls que s'estenen fins a molts milions d'anys-llum.

Fins fa molt poc, els astrònoms no han començat a investigar si, a la seva vegada, els cúmuls i supercúmuls no podrien agrupar-se en estructures més grans. Existeix la possibilitat que les cadenes de cúmuls i supercúmuls poguessin formar una sèrie de bombolles tridimensionals que envoltarien les parts més desertes de l'univers.

2 El Sistema Solar

Tornem al nostre racó de l'univers. Els cossos del Sistema Solar, amb l'excepció de la majoria dels cometes, estan tots continguts en una esfera centrada en el Sol i de radi igual a la distància a l'estrella més propera dividida per 60.000. Són essencialment el Sol, els planetes, els satèl·lits, els asteroides, els cometes, els meteorits i les partícules interplanetàries.

El Sol és una estrella típica que domina el Sistema Solar en grandària i massa (veure Taula 1). La gran massa del Sol respecte de les masses planetàries fa que els planetes es moguin com si fossin atrets únicament per la

força gravitatòria del Sol, i per tant les seves òrbites són molt properes a el·lipses de diferent mida que tenen al Sol a un dels seus focus. Aquestes el·lipses són gairebé cercles, que estan quasi en un mateix pla, excepte en el cas de Mercuri.

Mercuri	$0.17 \cdot 10^{-6}$
Venus	$2.45 \cdot 10^{-6}$
Terra	$3.00 \cdot 10^{-6}$
Mart	$0.32 \cdot 10^{-6}$
Júpiter	$954.00 \cdot 10^{-6}$
Saturn	$285.60 \cdot 10^{-6}$
Urà	$43.80 \cdot 10^{-6}$
Neptú	$51.90 \cdot 10^{-6}$

Taula 1. Masses planetàries, prenent la massa del Sol com la unitat.

Els planetes presenten dos moviments, aparentment molt regulars: el moviment de *translació* al voltant del Sol, seguint aquestes òrbites quasi circulars, i el moviment de *rotació* al voltant d'un eix. En el cas de la Terra, aquests dos moviments donen lloc a la successió de les estacions, i dels dies i de les nits, respectivament. La gran regularitat d'aquests dos moviments ha portat a l'home a utilitzar-los per a definir les unitats per a mesurar el temps (l'*any* i el *dia* amb les seves divisions). Això ha estat així fins fa pocs anys.

3 El moviment caòtic

Les lleis de la Mecànica permeten determinar el moviment d'un cos si coneixem tant la força que actua sobre ell en tot moment com la seva posició i velocitat en un instant de temps donat. Aquestes dues darreres dades s'anomenen les *condicions inicials*.

Si petites variacions en les condicions inicials s'amplifiquen exponencialment amb el pas del temps es diu que el moviment que determinen és *caòtic*. És a dir, el caos apareix quan petites variacions en les condicions inicials originen grans variacions al cap d'un temps finit. Això fa que quan un cos està en moviment caòtic no podem predir on es trobarà al cap d'un cert temps finit. Per contra, per a un cos en moviment *regular* (és a dir no caòtic) podem, en general, predir on es trobarà al cap de qualsevol interval de temps.

En un llenguatge una mica més matemàtic podem dir que els cossos que no presenten caos són aquells que les seves equacions de moviment són *integrables*. Fins fa poc més de 100 anys hom pensava que tots els moviments eren integrables, és a dir, que no hi havia moviments caòtics. Per tant, es pensava que només era qüestió de temps poder conèixer els moviments per als sistemes dels quals encara no se sabia resoldre les equacions de moviment. Semblava que només calia esperar a que els mètodes matemàtics s'anessin desenvolupant i que, tard o d'hora, es podria determinar el moviment de qualsevol sistema.

Fa poc més de 100 anys, Poincaré va ser el primer en constatar que hi havia moviments no integrables, és a dir, moviments caòtics. Durant la segona meitat d'aquest darrer segle els matemàtics i físics han provat que els moviments més abundants no són els integrables, sinó els caòtics. Això ha canviat completament la nostra concepció del món. La ironia de la nova situació és que les equacions de moviment són conegudes i les podem resoldre (al menys numèricament), però les solucions que obtenim són tan sensibles a les condicions inicials que perdem la predictibilitat.



Imatge de la sonda Cassini del satèl·lit Hyperion

Ara ja sabem que el moviment planetari, com la majoria dels moviments presents a la naturalesa, és caòtic. Hi ha dos tipus de moviments caòtics presents al Sistema Solar. El moviment caòtic lent dels planetes que es posa de manifest amb uns 4 milions d'anys en els planetes petits, i amb uns 20 milions d'anys en els planetes grans. Per exemple, una imprecisió de 15 metres en la posició de la Terra es tradueix després de 100 milions d'anys en una imprecisió de 150 milions de quilòmetres, que és la distància mitjana de la Terra al Sol. D'altre banda també hi ha moviments caòtics ràpids, com per exemple el moviment caòtic de rotació del satèl·lit Hyperion de Saturn que es manifesta en poques hores.

Avui dia comencem a entendre el moviment caòtic. Això permet, per exemple, que els enginyers utilitzin els sistemes caòtics per a estabilitzar els làsers, circuits electrònics, o el ritme del cor en els animals.

4 Caos determinístic

En aquesta secció parlarem del caos d'una manera més matemàtica. Els sistemes caòtics apareixen de manera natural a l'estudi dels sistemes dinàmics.

Parlant informalment, un sistema dinàmic és quelcom que es pot descriure amb un estat que evoluciona amb el temps d'acord amb unes regles determinístiques. En els sistemes dinàmics més simples, l'estat ve donat per un conjunt de n nombres $x = (x_1, \dots, x_n)$, on n s'anomena la dimensió del sistema. Les dues classes de sistemes dinàmics més elementals són:

- Els descrits pels iterats d'una aplicació $f = (f_1, \dots, f_n)$:

$$x_i(t+1) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in \mathbf{N},$$

o simplement

$$x(t+1) = f(x(t)),$$

o

$$x_{t+1} = f(x_t),$$

anomenats *sistemes dinàmics discrets*.

- Els donats per a un sistema d'equacions diferencials ordinàries

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in \mathbf{R},$$

o simplement

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)).$$

Aquests darrers formen part dels *sistemes dinàmics continus*, que també engloben les equacions en derivades parcials i les equacions diferencials amb retard, entre d'altres.

Quan comencen a ser entesos els fenòmens naturals, ja siguin de naturalesa física, química, ecològica, biològica, econòmica o de qualsevol altre tipus, és quan els podem modelitzar mitjançant els sistemes dinàmics. Els sistemes caòtics, i per tant l'anomenada teoria del caos, és un fenomen matemàtic que apareix en estudiar els sistemes dinàmics. I, com aquests modelitzen les ciències naturals en el sentit més ampli possible, el caos apareix en la natura a través d'ells.

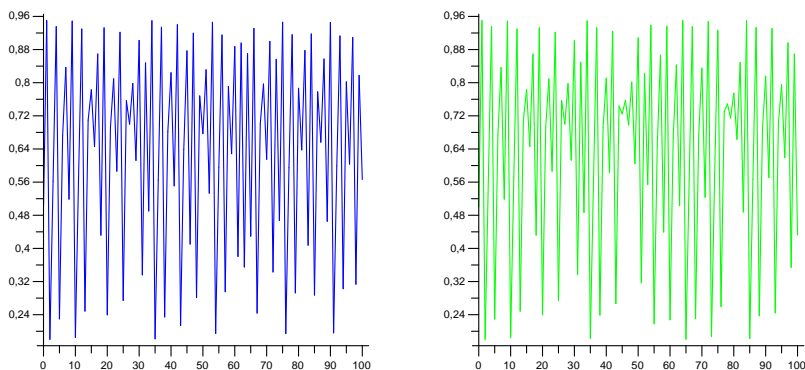
Ja hem mencionat que els sistemes caòtics van ser descoberts ara fa una mica més d'un segle, però no van començar a ser tinguts en compte per la major part de la comunitat científica fins l'ús generalitzat dels ordinadors. Dos dels sistemes pioners en l'estudi dels sistemes caòtics han estat els següents:

- (1) El sistema dinàmic discret 1-dimensional definit per

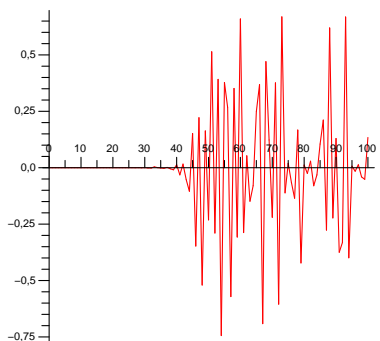
$$x_{t+1} = 4\mu x_t(1 - x_t) ,$$

amb $\mu \in [0, 1]$, conegut amb el nom d'*equació logística*.

Vegeu per exemple els 100 primers valors corresponents a l'equació logística per a $\mu = 0.95$ quan comencem per $x_0 = 0.5$ (en blau) i per $x_0 = 0.50001$ (en verd).



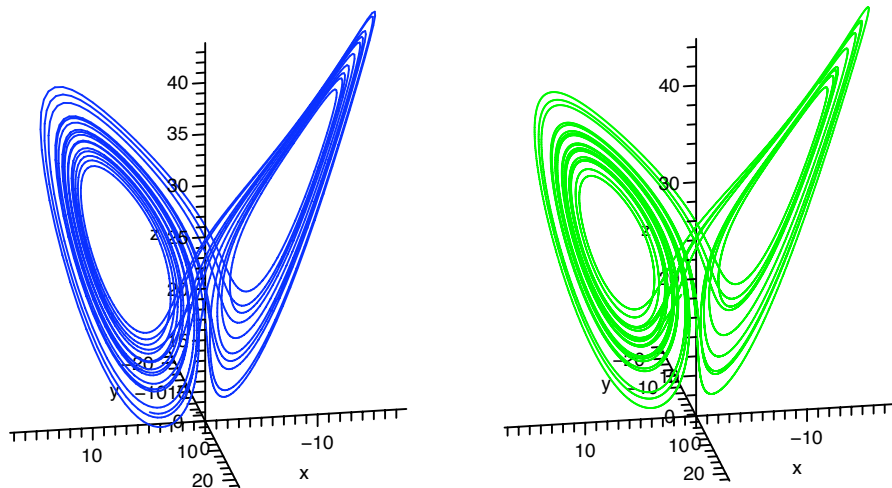
Es pot apreciar a la figura següent, on es representa la diferència entre les dues successions anteriors, que els valors es separen molt a partir de la iteració 40.



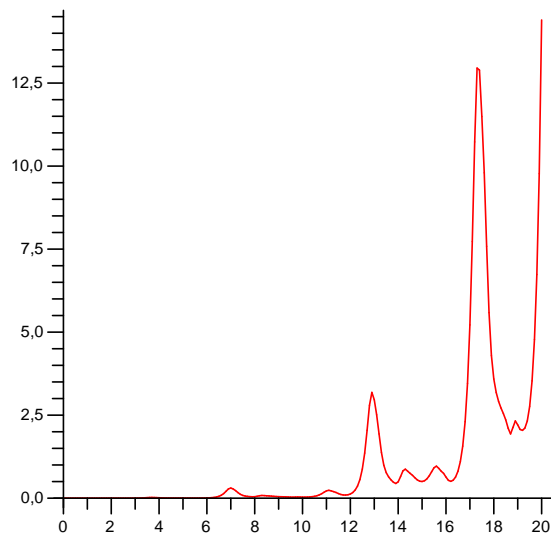
- (2) Per a trobar caos en els sistemes dinàmics continus definits per sistemes d'equacions diferencials ordinàries necessitem com a mínim treballar en dimensió 3. Probablement el sistema diferencial més famós en l'estudi del caos és el sistema de Lorenz

$$\frac{dx}{dt} = s(y - x), \quad \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \quad \frac{dz}{dt} = -bz + xy,$$

on $b, r, s \in \mathbf{R}$. En la figura següent es poden veure les solucions d'aquest sistema, obtingudes numèricament, per a $s = 10$, $r = 28$ i $b = 8/3$ que compleixen $x(0) = 2$, $y(0) = 5$, $z(0) = 20$ (en blau) i $x(0) = 2$, $y(0) = 5$, $z(0) = 20.001$ (en verd) des de $t = 0$ fins a $t = 20$.



Igual que en el cas anterior la distància entre els punts corresponents de les dues solucions es converteix en impredecible a partir d'un determinat moment com es pot apreciar en el gràfic següent que representa aquestes distàncies en funció de t



Moltes de les propietats dels sistemes caòtics no depenen del sistema on apareixen, per exemple tant els atractors estranys (fràgils i importants estructures matemàtiques entre l'ordre i el desordre) com els nombres de Feigenbaum¹ hi són sempre presents. Aquestes propietats van ser àmpliament estudiades en els dos sistemes mencionats, l'equació logística i el sistema de Lorenz.

L'equació logística ha estat molt estudiada degut a la seva simplicitat i a que modela l'evolució d'una població amb competència intraespecífica, però el seu caràcter no lineal fa que la seva dinàmica sigui força complicada. El sistema diferencial de Lorenz va ser introduït com un model molt simplificat per a estudiar l'atmosfera.

5 Hem estat afortunats

Al mirar l'espectacle d'un cel estrellat no podem deixar de preguntar-nos: Què és tot el que estem veient? Per començar a comprendre l'univers l'*Homo sapiens sapiens* ha hagut d'esperar milers d'anys, ser molt pacient i que algú amb molt d'enginy i en el moment adequat veiés caure una poma.

¹Es pot consultar informació sobre els nombres de Feigenbaum a l'adreça <http://mathworld.wolfram.com/FeigenbaumConstant.html>

Un dels passos més importants donats per l'home en el seu esforç per entendre el món ha estat l'obtenció de les lleis del moviment dels planetes i de la llei de gravitació universal. El fet que aquesta segona llei expliqui les primeres va catapultar cap endavant el mètode científic, que ha permès a la ciència assolir el seu estat actual de coneixements.

Deixant a un costat la brillantor del pensament dels homes que han fet possible aquests notables avenços de la ciència, el nostre objectiu és posar de manifest que la naturelesa no li ha posat gaires complicacions a l'home per deixar-se entendre sinó més aviat el contrari. Com veurem hem estat afortunats.

Avui en dia sabem que l'univers està format principalment per grups de galàxies. Al voltant de 100.000 milions de galàxies poden ser vistes amb els telescopis més potents. Les galàxies són complicades estructures gravitacionals. Algunes d'elles poden arribar a tenir més de 100.000 milions d'estrelles i molts núvols de gas. El nostre Sol és una estrella típica, situada, com ja s'ha dit, més a prop de la frontera del disc de la nostra galàxia que del seu nucli central. La Terra és un dels planetes que té el Sol. No sabem quin és el percentatge d'estrelles que tenen sistemes planetaris. Si més no, el gran nombre d'estrelles i les teories sobre la formació dels sistemes planetaris ens porten a pensar amb molta certesa que a l'univers existeixen moltíssims sistemes planetaris a més del nostre.

El destí ha volgut que l'home aparegués i evolucionés sobre un planeta (la Terra) gravitant al voltant d'una única estrella (el Sol), en companyia d'altres planetes molt allunyats els uns dels altres, i molt menys massius que l'astre central. Això ha permès que el nostre sistema planetari presenti una gran harmonia. Les òrbites dels planetes són totes quasi circulars, totes quasi en un mateix pla, totes recorregudes en un mateix sentit. Aquest ordre és en part degut a les etapes inicials de la formació del sistema planetari.

Matemàticament l'harmonia que presenten els moviments dels planetes del nostre Sistema Solar es deu a un fet importantíssim que rarament es dona quan s'estudia el moviment d'uns quants cossos sota l'acció de les seves forces gravitatòries. El nostre Sistema Solar està molt a prop d'ésser un sistema integrable. Això es degut a que la major part de la massa del nostre sistema solar es troba en el Sol (veure la Taula 1), i que el moviment d'un planeta segueixi en primera aproximació les solucions d'un problema de dos cossos, el format pel Sol i el planeta corresponent. De fet les òrbites que segueixen els planetes són molt simples, quasi cercles (el·lipses amb molt poca excentricitat). La simplicitat dels moviments planetaris del nostre

Sistema Solar ha permès a l'home en un temps relativament curt arribar a obtenir la llei de gravitació que ens ha donat la clau principal per a entendre l'univers. Diem en un temps relativament curt donat que, dels milers d'anys d'existència de l'home, no arriba ni a un 1 per cent l'existència del *Homo sapiens sapiens*.

L'harmonia del moviment dels planetes al voltant del Sol va permetre a Kepler deduir les lleis dels seus moviments, que Newton les explicués amb la llei de gravitació universal, utilitzant idees de Copèrnic i Galileo, i que més tard Einstein, amb la teoria general de la relativitat o gravitació, donés l'eina bàsica per a l'estudi de l'univers, donat que la gravitació és la força dominant a escala còsmica.

Sembla ser que la majoria dels sistemes planetaris de l'univers poden tenir més d'una estrella, dues o més. De fet sabem que la majoria d'estrelles no estan soles com el nostre Sol. Així, per exemple, existeixen moltes estrelles aparellades girant una al voltant de l'altra. Són les anomenades estrelles binàries.

Poden haver-hi sistemes planetaris amb diverses estrelles i que tinguin planetes en òrbites estables. Sabem matemàticament que aquestes òrbites poden existir i que poden ser molt complicades en comparació amb les òrbites que segueixen els planetes del nostre Sistema Solar. Per exemple, en un sistema planetari amb dues estrelles pot haver un planeta que descriu òrbites quasi circulars primer al voltant d'una de les estrelles i després al voltant de l'altra, de manera que el nombre de voltes al voltant d'una mateixa estrella abans de canviar i començar a donar voltes a l'altra estrella sigui completament arbitrari. A més l'òrbita d'aquest planeta sempre estaria a l'entorn d'una corba en forma de vuit. És clar, un sistema planetari amb dues estrelles, contenint algun planeta movent-se en una òrbita tan complicada com la que acabem de descriure, està molt més lluny de ser un sistema integrable que el nostre Sistema Solar, en el qual tots els planetes pràcticament es mouen en òrbites quasi circulars al voltant d'una única estrella.

Imaginem un planeta movent-se en una òrbita tan complicada com la que acabem de descriure, i que neix una vida intel·ligent sobre un planeta amb aquestes característiques. Podria passar moltíssim temps abans que aquests éssers intel·ligents poguessin comprendre que el moviment tan complicat del seu planeta està governat per una llei tan simple com la llei de gravitació de Newton. Per a aquests éssers intel·ligents el camí del coneixement de l'univers seria molt més penós i lent que el nostre. Hem estat afortunats de néixer en aquest racó de l'univers on el moviment dels planetes del nostre Sistema

Solar no està gaire lluny d'èsser integrable.

Referències

1. F. DIACU AND P. HOLMES, *Celestial Encounters. The Origins of Chaos and Stability*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1996.
2. J. LLIBRE, *Una visió breu de l'univers*, Fundació Pública Institut d'Estudis Ilerdencs, *Varia Mathematica* **1**, 1–14.
3. J. LLIBRE, *Caos en el sistema solar*, Fundació Pública Institut d'Estudis Ilerdencs, *Varia Mathematica* **1**, 165–173.
4. I. PETERSON, *Newton's Clock. Chaos in the Solar System*, W.H. Freeman and Company, New York, 1993.
5. I. STEWART, *Does God Play Dice? The Mathematics of Chaos*, Basil Blackwell, Cambridge, Massachusetts, 1989.

Les il·lustracions astronòmiques d'aquest article s'han obtingut a les pàgines de la *Astronomy Picture of the Day* (<http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod>) de la NASA



Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
jllibre@mat.uab.cat

Publicat el 28 de novembre de 2006