MATerials MATemàtics
Volum 2007, treball no. 7, 24 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

Sistemas electorales*

Bartolomé Barceló

1 Introducción

Los sistemas electorales o de votaciones se pueden utilizar en contextos muy diversos, siendo quizás el más claro el de las elecciones presidenciales o de una cámara de un país. Por otro lado también pueden ser usados, por ejemplo, para elegir el representante de los alumnos de una clase, elegir el presidente de una asociación de vecinos o el presidente de un club de fútbol.

El problema que se trata en este artículo es el de cómo interpretar los resultados de una elección o, incluso antes de tener ningún resultado, el de responder, si tenemos que elegir de entre varios candidatos, a ¿cómo se puede diseñar un procedimiento para escoger "el mejor"?. Un ejemplo típico podría ser el anteriormente citado de elegir delegado de curso de una clase de estudiantes. Supongamos que se presentan varios candidatos y que de entre las varias posibilidades que se pueden considerar como procedimientos de elección, decidimos que cada estudiante escribe en una lista cinco nombres, por su orden de preferencia. Esta será su papeleta de voto. Una vez que todos los estudiantes de esta clase han votado, tendremos en una caja, o en una urna, todas las papeletas y este es el resultado de la votación. ¿Qué se puede hacer ahora, tomando estos datos, para determinar quién será el delegado del curso?

*Versión en castellano del artículo "Sistemes Electorals"

Procedimientos, como veremos, puede haber muchos. En el caso del ejemplo anterior se pueden utilizar, por ejemplo, los métodos ya conocidos de la mayoría simple, segunda vuelta, Condorcet o recuento de Borda. Rápidamente se da uno cuenta de que si utilizamos métodos diferentes pueden aparecer resultados distintos. Este hecho es en principio sorprendente, ya que el resultado de una elección no dependerá tanto de los votos emitidos, sino que en gran parte del procedimiento de elección utilizado. Es decir, que con unos mismos datos de votación puede salir ganador un candidato u otro dependiendo del método de elección o de recuento de votos. Una vez observado este comportamiento, aparece de forma natural la pregunta de si es posible, de entre los varios métodos considerados, encontrar de alguna manera el que sea mejor o, al menos, el menos malo. La respuesta es compleja y ello hace que el estudio de los sistemas electorales sea interesante y apropiado para la matemática. Pueden aparecer varias paradojas, algunas de las cuales llevan nombres curiosos, como la paradoja de Alabama o la paradoja de la población de las que se hablará más adelante.

2 Un ejemplo de las elecciones de Catalunya

En la tabla siguiente se pueden ver los resultados de los partidos que obtuvieron algún escaño en las últimas elecciones de Catalunya, del 1 de noviembre de 2006:

Nombre del partido	**Votos**	**%**	**Diputados**
Convergència i Unió	935.756	31,52	48
PSC–Ciutadans pel Canvi	796.173	26,82	37
Esquerra Republicana de Catalunya	416.355	14,03	21
Partit Popular	316.222	10,65	14
Iniciativa per Catalunya Verds–EUIA	282.693	9,52	12
Ciutadans–Partido de la Ciudadanía	89.840	3,03	3
Totales	2.837.039		135

De acuerdo con lo que establece la ley de Régimen Electoral, para el reparto se ha utilizado la llamada ley D'Hont. No se incluyen los partidos o coaliciones que no superan el 3 % de los votos, tales como Els Verds–Ecologistes i Verds de Catalunya, con 17.900 votos, el 0,60 % , ya que la ley Electoral establece para poder optar a escaño se necesita superar este porcentaje del 3 %.

Si el resultado fuera proporcional, de acuerdo con los datos de la tabla, Convergència i Unió obtuvo un porcentaje[1] sobre el total de votos de

$$935.756 \ / \ 2.837.039 = 0{,}3298 = 32{,}98\,\%$$

Como el total de la cámara es de 135 diputados, a Convergència i Unió le corresponderían por tanto la misma proporción de diputados que de votos obtenidos, esto es

$$0{,}3298 \times 135 = 44{,}53 \text{ escaños.}$$

Si hacemos la misma cuenta para Iniciativa per Catalunya Verds – EUIA el porcentaje sería

$$282.693 \ / \ 2.837.039 = 0{,}096 = 9{,}6\,\%$$

y le corresponderían

$$0{,}0996 \times 135 = 13{,}45 \text{ escaños.}$$

El primero obtuvo en realidad 48 escaños, más que los que su proporción parecería indicar. Mientras que el segundo obtuvo 12, menos de los que corresponden a su proporción. Esta es una de las consecuencias de ley D'Hont, que favorece a los partidos más votados. Puede parecer injusto, pero es un efecto a veces buscado en este método, con el argumento de que favorece las coaliciones y por tanto la estabilidad política. En realidad la ley D'Hont no se aplica directamente a los resultados globales de votos de Catalunya, sino a cada una de las cuatro circunscripciones electorales de Catalunya, a saber Barcelona, Girona, Lleida y Tarragona. Por lo tanto para reflejar con exactitud la realidad habría que haber estudiado las proporciones en cada circunscripción, pero el comportamiento sería similar.

Aunque se intentara que cada partido tuviera por representantes a su proporción en votos, el reparto no habría sido fácil ya que en el resultado final tienen que aparecer números enteros. No podemos elegir una fracción decimal de diputado. Repartir adecuadamente las partes decimales que aparecen es de hecho imposible, si lo que se busca es un método que no presente ciertas

[1]En la tabla aparece un porcentaje del 31,52 % (distinto del que se calcula), pero esto es porque está calculado sobre el total de 2.968.534 votos válidos y en los cálculos, para mayor simplicidad, se han considerado sólo los datos mostrados. La diferencia corresponde a los votos destinados a partidos con menos del 3 %. Este pequeño cambio no afecta al argumento que estamos considerando.

anomalías no deseadas como por ejemplo la llamada paradoja de Alabama, ya mencionada, u otras que veremos más adelante.

Otro ejemplo de resultado en principio no esperado que presentan los sistemas electorales mayoritarios se dio también en las elecciones para el Parlament de Catalunya del 16 de Noviembre del 2003, donde el Partit del Socialistes de Catalunya (PSC) consiguió el mayor número de votos, pero quedó detrás de Convergència i Unió (CiU) en términos de escaños. El PSC con 1.026.030 votos, el 31,17 % de los válidos, ganó a CiU (con 1.018.115 votos, o el 30,93 % de los válidos). Pero el PSC consiguió 42 escaños frente a los 46 de CiU. Este hecho "paradójico" ya se había dado en las elecciones anteriores de 1999, donde el PSC había obtenido con 1.183.299 votos (el 37,85 %) 50 escaños, mientras que CiU obtuvo seis escaños más, 56, con sólo 1.178.420 votos (el 37,69 %). Entonces, aunque había obtenido menos votos que el PSC, CiU formó un gobierno minoritario que se mantuvo durante toda la legislatura.

3 Historia de los métodos electorales

La historia de lo métodos electorales va bastante pareja a la de la democracia. La palabra "democracia", viene del griego δημοκρατία y combina dos palabras *demos* ("pueblo") y *kratos* ("fuerza, poder"). Fue un sistema inventado por los atenienses para mejorar su sistema de gobierno alrededor del 508 AC. En una de sus primeras formas, introducida por Cleistenes, era una manera más bien negativa de elección ya que cada año se pedía a los votantes que emitieran un voto por el político a quién deseaban desterrar por un periodo de diez años.

La teoría de los métodos electorales fue estudiada por los miembros de la Academia de Ciencias de Paris en tiempos de la Revolución Francesa. En particular, Jean-Charles Borda propuso el "recuento Borda" en 1770 como un método para elegir los miembros de la Academia mientras que el marqués de Condorcet, por su parte, propuso un método en el que los candidatos se enfrentan de dos en dos.

Los sistemas parlamentarios modernos tienen su modelo en la constitución de los Estados Unidos de 1789. Allí se experimentaron y se fueron refinando los métodos más usados actualmente. De ahí los nombres tales como *paradoja de Alabama, método de Hamilton o método de Jefferson*.

Es curioso que sólo muy recientemente, en 2001, se ha observado que tanto Ramón Llull (1235-1316) como Nicolás de Cusa (1401-1464) escribieron textos sobre métodos electorales. De Ramón Llull se conservan tres textos, *Artifitium electionis personarum* (1270's), el capítulo 24 de su novela *Blanquerna* (1283) cuando la protagonista Nathana es elegida superiora de su convento y *De arte electionis* (1299). No deja de ser llamativo que el método introducido por Llull sea ahora el importante y conocido método de Condorcet.

Thomas Le Myésier: Breviculum ex artibus Raimundi Lulli (1336)

4 El problema del reparto

La constitución de los Estados Unidos de 1787 establece que la legislatura federal esté formada por dos cámaras: el Senado con dos senadores por estado y la Cámara de Representantes, cuyos "escaños serán asignados entre los varios estados dentro de esta unión según sus números respectivos..." (Artículo I, Sección 2).

La mayoría de nuestras democracias siguen un esquema similar. La constitución española establece por ejemplo que los escaños de la cámara se asignan por circunscripciones electorales (provincias) "en proporción a la población respectiva". El problema de un método de reparto es saber como se consigue esta proporción.

Por ejemplo, según los datos del censo electoral de 1790, el estado de Carolina del Norte tenía una población de 353.523 personas con derecho a voto, mientras que en todo EEUU había 3.615.920, por lo tanto la *porción representativa* de Carolina del Norte era

$$\frac{353523}{3615920} \simeq 0{,}0977 \simeq 9{,}77\,\%$$

Como la cámara constaba entonces de 105 miembros, a Carolina del Norte le correspondía una *cuota* de

$$105 \times 0{,}0977 \simeq 10{,}265 \text{ escaños}$$

que no es un número entero ¿Cómo se reparte una proporción semejante? En los Estados Unidos, para conocer el número de representantes en la Cámara que corresponden a cada uno de los estados de la unión, se han usado varios métodos. Éstos se han ido cambiando a medida que se han conocido mejor sus virtudes y sus problemas, ya que como veremos ninguno de ellos es matemáticamente perfecto y su aplicación depende en gran medida de una decisión política. Entre los más usados e importantes están los métodos de Alexander Hamilton, Thomas Jefferson, Daniel Webster y el actual, llamado de Hill-Huntington.

Antes de pasar a describirlos es conveniente precisar algunas definiciones. Sea n es el número de estados (o provincias) que forman la unión (o el país). Sea p la población total de la unión con derecho a voto. Sean $p_1, p_2, \ldots, p_n$ el censo electoral de los respectivos estados y sea e el número total de escaños a repartir.

Definición.

Se llama *porción representativa* del estado i a la proporción entre la población de este estado y la total, esto es,

$$\frac{p_i}{p}$$

Definición.

Se llama *cuota* del estado i a la proporción de escaños correspondientes a este estado, es decir:

$$q_i = \frac{p_i}{p}e$$

Recordemos que cada número tiene una parte entera y una parte decimal, así por ejemplo la parte entera de 10,265 es $[10{,}265] = 10$, mientras que su parte decimal es 0,265. La cuota es, en general, un número con una parte entera y una parte decimal, a su parte entera se le llama la *cuota inferior*, mientras que su parte entera más uno es la *cuota superior*.

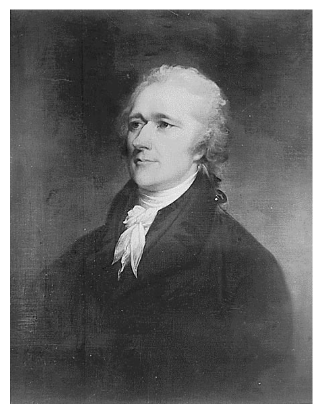
Claramente la suma de las poblaciones de cada estado es la población total, esto es,

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = p$$

El problema del reparto consiste en asignar escaños $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a cada estado de tal manera que cada a_i sea lo más cercano posible a la cuota q_i y que la suma de todos estos escaños sea $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = e$.

5 Método de Hamilton

Este método lleva el nombre de Alexander Hamilton, que fue el primer secretario del tesoro y ayudante de George Washington. Para conseguir que cada estado reciba un número de representantes lo más cercano a su cuota, Hamilton asigna a cada estado, en una primera aproximación, la parte entera de su cuota. Luego, los escaños aún no repartidos se reparten por orden de mayor a menor a los que tienen parte decimal más grande.



Alexander Hamilton
(1755-1824)

En el ejemplo anterior, Carolina del Norte tenía una cuota de 18,31 escaños. Otro estado, Pensilvania, al ser su población de 432.879 habitantes tendría una cuota de

$$\frac{432879}{3615920} \times 105 \simeq 12{,}57$$

El método de Hamilton daría en primer lugar $[10{,}265] = 10$ escaños a Carolina del Norte y $[12{,}57] = 12$ escaños a Pensilvania. Si hubiera un escaño más a repartir entre estos dos se asignaría a Pensilvania, ya que su parte decimal 0,57 es mayor.

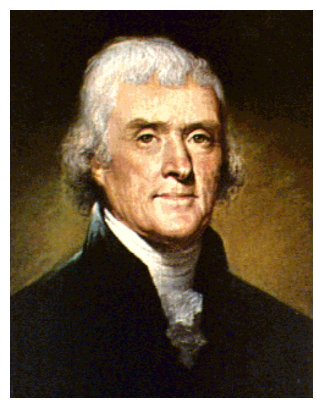
El método de Hamilton se estaba usando para repartir la Cámara de Representantes en 1880, cuando apareció una circunstancia curiosa. Para modificar el número de escaños de la cámara con vistas a futuras elecciones, se hizo un estudio de repartos con una cámara de diferentes tamaños, que abarcaban desde 270 a 350 miembros. Entonces se observó que Alabama tenía derecho a 8 representantes si el tamaño de la cámara era de 299, pero disminuía a 7 representantes si el tamaño de la cámara era de 300. El congreso decidió entonces un tamaño de 325 escaños, ya que entonces este número parecía no presentar problemas.

Este hecho se conoce con el nombre de *paradoja de Alabama* y se dice que el método de Hamilton *no es monótono*, ya que si se aumenta el número de escaños a repartir, y aunque los datos de población no cambien, puede que haya estados para los que, sorprendentemente, disminuya su número de representantes.

6 Los métodos del divisor

6.1 Método de Jefferson

El primer método de reparto que se adoptó por el Congreso en los Estados Unidos (1792) fue el de Hamilton, pero no llegó a usarse entonces porque George Washington, en el primer veto presidencial de la historia de los Estados Unidos, rechazó el proyecto de ley insistiendo en que el reparto resultante debía ser más proporcional a la población. En los Estados Unidos cada estado se divide en circunscripciones electorales, cada una de las cuales tiene que elegir su representante por mayoría relativa (esto es, gana el que más votos tiene). El número de circunscripciones de un estado es por tanto igual al número de escaños que tiene.



Thomas Jefferson (1743-1826)

Thomas Jefferson, que era secretario de estado con Washington, propuso entonces un método que consistía en elegir un divisor d que fuera aproximadamente el tamaño medio de los distritos a los que corresponde un congresista y luego dividir la población de cada estado por d. El número de representantes era entonces la parte entera de este cociente, eliminando simplemente la parte decimal.

Por ejemplo, el estado Virginia, de donde era original Jefferson, tenía una población de 630.560 habitantes y el valor d era 33.000. Al ser

$$\frac{630560}{33000} \simeq 19{,}108$$

Jefferson elimina la parte fraccionaria 0,108 de este cociente y asigna 19 escaños a Virginia.

Si se decide utilizar este método, se decide un divisor d y el tamaño de la cámara queda determinado por este divisor, siendo el número total de representantes

$$[\frac{p_1}{d}] + [\frac{p_2}{d}] + \cdots + [\frac{p_n}{d}]$$

Como puede observase, cuanto mayor sea el divisor, menor serà el número total de miembros de la cámara.

Por otra parte, si se eligiera en primer lugar el tamaño de la cámara, se ajustaría el divisor d hasta obtener el número correcto de miembros.

Cuando el número total de escaños de la cámara está ya fijado, para saber cuántos escaños corresponden a cada estado en particular podemos proceder de la siguiente manera: empezamos con un divisor $d = p_1$ donde p_1 es la población del estado más grande. El cociente entre p_1 y este divisor es 1, así que el estado con mayor población recibe el primer representante y los cocientes de las poblaciones de los demás estados por el divisor d són menores que 1. De este modo, de momento, sólo se ha repartido 1 escaño. Ahora vamos disminuyendo el divisor. El estado de mayor población recibirá un segundo escaño cuando $p_1/d = 2$ (esto es, si despejamos d, cuando $d = p_1/2$), mientras que los demás estados habrán recibido un escaño si en su caso ha sido $p_i/d > 1$. Continuando con este proceso el estado i recibirá su $n+1$ escaño cuando para un cierto d

$$\frac{p_i}{d} = n + 1$$

lo que sucede cuando, despejando d de esta última relación, $d = \dfrac{p_i}{n+1}$.

Podemos afirmar entonces que se van asignando los escaños siguiendo un orden de prioridades por medio de la *función de clasificación* $R_i = \dfrac{p_i}{n+1}$.

Esta función de clasificación da un procedimiento más sencillo para hacer el reparto. Veamos como hacerlo con un ejemplo tomado de las elecciones generales de 1996 en la provincia de Burgos. En este ejemplo, en vez de repartir el total de escaños de la Cámara de Representantes por estado, repartiremos los 4 escaños que corresponden a Burgos entre los distintos partidos políticos según su número de votos. Es decir, sustituiremos “número de representantes de la Cámara” por “número de escaños a repartir en los resultados electorales de esta provincia”, sustituiremos “estado” por “partido político” y “número de habitantes” por “número de votos”.

Ejemplo: Resultados electorales de las elecciones generales de 1996 en la provincia de Burgos. Se reparten un total de 4 escaños. En la primera fila colocamos los votos de los partidos que han conseguido más del 3 % del total. Luego en las sucesivas columnas hacia abajo dividimos los votos por 1, 2, 3, ... Vamos asignando los escaños por prioridades en orden decreciente, esto es, el primer escaño se lo lleva en este caso el PP por tener 126.837 votos, el número más alto de la tabla. El segundo escaño se asigna al PSOE ya que le corresponde el segundo número más alto, 71.804, de la tabla, y así sucesivamente.

	PP partido popular		izquierda unida
Votos	126.837	71.804	25.880
Votos/1	126837^{1}	71804^{2}	25880
Votos/2	63419^{3}	35902	
Votos/3	42279^{4}		
Reparto	3	1	0

En nuestras democracias occidentales el *método de Jefferson* se llama *método de los divisores naturales* o también *regla D’Hondt*, nombre que proviene del matemático belga Victor D’Hondt. En España utilizamos la regla D’Hont, por ejemplo, para repartir en cada provincia los escaños a los distintos partidos según los resultados electorales.

Calculemos la cuota de los distintos partidos del ejemplo anterior de la provincia de Burgos. La suma total de votos es

$$126837 + 71804 + 25880 = 224521$$

Por tanto

$$\text{Cuota (PP)} = \frac{126837}{224521} \times 4 \simeq 2{,}26$$
$$\text{Cuota (PSOE)} = \frac{71804}{224521} \times 4 \simeq 1{,}28$$

Louisiana fue explorada por los españoles en el s. XVI y se convirtió en colonia francesa a finales del s. XVII. En 1762 Francia cedió a España los territorios del oeste del Mississippi y un año más tarde, los situados al este del río pasaron al Reino Unido por el tratado de Paris. Por el tratado secreto de San Ildefonso, Napoleón consiguió de Carlos IV la devolución de la Louisiana (1802) y la vendió a los Estados Unidos en 1803. El presidente era entonces Thomas Jefferson.

$$\text{Cuota (IU)} = \frac{25880}{224521} \times 4 \simeq 0{,}46$$

Observemos que la cuota del PP es 2,26, su cuota inferior es 2 y su cuota superior 3. Con la regla D'Hondt el PP ha obtenido 3 escaños, esto es, un número de escaños igual a su cuota superior. Lo mismo ha pasado con los demás partidos PSOE e IU, han obtenido un número de escaños igual o bien su cuota inferior o bien su cuota superior.

Esto no siempre sucede con la regla D'Hondt, a veces hay partidos que obtienen más escaños que lo que indica su cuota superior, lo cual no parece muy equitativo. Se dice por ello que este método *no satisface la condición de la cuota*. Esta anomalía apareció, por ejemplo, en las elecciones generales de 2004 en la circunscripción de Madrid: se repartían 35 diputados y el PP con un 45,02 % de los votos obtuvo 17 diputados con una cuota de 15,76.

Podemos observar también en los resultados de la tabla anterior, relativos a la provincia de Burgos en las elecciones de 1996, que el PP no consiguió más del doble de los votos que el PSOE, y sin embargo obtuvo más del doble en escaños. Este es un hecho general con la regla D'Hondt y por ello se dice que es un método que tiene un *sesgo* hacia los partidos mayoritarios. En el caso español es un hecho políticamente deseado, ya que ello favorece las coaliciones y por tanto evita la atomización en muchos partidos. Este hecho parece dar más estabilidad al sistema y evita lo que sucede por ejemplo en Italia, donde hay una gran cantidad de partidos.

6.2 Otros métodos del divisor

Se han utilizado otros métodos del divisor, que se pueden definir por sus diferentes funciones de clasificación. Además del de Jefferson cabe destacar los métodos de Webster, de Hill-Huntington, de Dean y de Adams, cuyas funciones de clasificación son

Jefferson	$R_i = \dfrac{p_i}{n_i + 1}$
Webster	$R_i = \dfrac{p_i}{2n_i + 1}$
Hill-Huntington	$R_i = \dfrac{p_i}{\sqrt{n_i(n_i + 1)}}$
Dean	$R_i = \dfrac{p_i(2n_i + 1)}{2n_i(n_i + 1)}$
Adams	$R_i = \dfrac{p_i}{n_i + 1}$
Reparto	$R_i = \dfrac{p_i}{n_i}$

Todos ellos se han usado an algún momento para el Congreso de los Estados Unidos. Con los métodos de Hill-Huntington, de Dean y de Adams, cada estado empieza con un escaño antes de empezar el proceso, pero con los métodos de Jefferson y Webster la asignación inicial de cada estado es 0.

El método de Webster, que lleva el nombre del hombre de estado y orador Daniel Webster (1782-1852), también se llama de los divisores impares o de

Sainte-Laguë en los paises escandinavos. Veamos como sería el reparto de escaños por Webster con los datos anteriores de la provincia de Burgos

	PP partido popular		IU izquierda unida
Votos	126.837	71.804	25.880
Votos/1	126837^{1}	71804^{2}	25880^{4}
Votos/3	42279^{3}	23935	
Votos/5	25367		
Reparto	2	1	1

El método de Hill-Huntington lleva el nombre de Joseph A. Hill, de la Oficina del Censo de los EEUU, y de Edward V. Huntington, profesor de mecánica y matemáticas de la Universidad de Harvard. También se llama el método de la media geométrica y es el que se usa desde 1941 para repartir la Cámara de los Estados Unidos. Los sucesivos divisores de Hill-Huntington son $\sqrt{1 \times (1+1)} = \sqrt{2} \simeq 1{,}41$, $\sqrt{2 \times (2+1)} = \sqrt{6} \simeq 2{,}45$, $\sqrt{3 \times (3+1)} = \sqrt{12} \simeq 3{,}46$, $\sqrt{5 \times (4+1)} = \sqrt{20} \simeq 4{,}47$, $\sqrt{5 \times (5+1)} = \sqrt{30} \simeq 5{,}48, \ldots$ Aplicado este método al ejemplo de la provincia de Burgos anterior sería:

	PP partido popular		IU izquierda unida
Votos	126.837	71.804	25.880
Votos/1.41	89955^{1}	50925^{3}	18355
Votos/2.45	51770^{2}	29308	
Votos/3.46	36658^{4}		
Reparto	3	1	0

6.3 ¿Cuál es el mejor método del divisor?

Tal como hemos dicho antes, la regla D'Hondt favorece ligeramente a los partidos mayores. Si se van aumentando los divisores al aplicar un método del divisor, se observa que progresivamente va aumentando el coste de cada escaño. Luego se reduce la ventaja de los grandes partidos. Esto se puede comprobar comparando los dos ejemplos que hemos tratado antes en la provincia de Burgos cuando se usaban la regla D'Hondt y el método de Webster.

Una variante de estos métodos es la modificación del método de Sainte-Laguë que se usa en Suecia desde 1952. Se van tomando los divisores sucesivos 1,41, 3, 5, 7,... Aumentando el primer divisor se persigue dificultar la obtención de escaños por parte de los partidos pequeños mientras que luego, elevando la distancia entre los miembros de la serie, se reduce la ventaja de los partidos más grandes.

Se puede medir matemáticamente la *injusticia* en el reparto. Hay varias definiciones de injusticia, pero una de las más usadas fue introducida por Huntington y define la injusticia entre dos partidos i, j como la diferencia

$$\frac{a_i}{p_i} - \frac{a_j}{p_j}$$

donde a_i es el el número de escaños del partido i, p_i el número de votos del partido i y lo mismo para el partido j. De entre todos los métodos del divisor posibles, el método de Webster minimiza la injusticia o, en otras palabras, que si se transfirieran escaños de un partido a otro de una manera distinta a como lo hace Webster, aumentaría la injusticia.

Proposición: *El método de Webster minimiza la injusticia.*

Demostración. Supongamos que dos partidos P_1 y P_2 compiten por el siguiente escaño. Sean p_1 el número de votos del partido P_1 y n_1 el número de escaños que ya ha obtenido. Análogamente sean p_2 el número de votos del partido P_2 y n_2 su número de escaños ya adjudicados.

El método de Webster dará el siguiente escaño a P_1 si se verifica

$$\frac{p_2}{2n_2+1} < \frac{p_1}{2n_1+1} \tag{1}$$

Entonces la diferencia de porción representativa entre P_1 y P_2 sería

$$D_{12} = \frac{n_1+1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2}$$

Si el escaño lo hubiera recibido P_2 en vez de P_1, la diferencia de porción representativa sería

$$D_{21} = \frac{n_2+1}{p_2} - \frac{n_1}{p_1}$$

Cuya injusticia habría sido mayor, ya que, como podemos comprobar, se tiene $D_{12} < D_{21}$. En efecto, la relación $D_{12} < D_{21}$ es

$$\frac{n_1+1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2} < \frac{n_2+1}{p_2} - \frac{n_1}{p_1}$$

y si pasamos a la izquierda todos los términos de P_1 y a la derecha los de P_2, queda

$$\frac{n_1+1}{p_1}+\frac{n_1}{p_1}<\frac{n_2+1}{p_2}+\frac{n_2}{p_2}$$

y esto es lo mismo que

$$\frac{2n_1+1}{p_1}<\frac{2n_2+1}{p_2}$$

que es cierta porque es equivalente (multiplicando en cruz) con la asignación que había hecho Webster en (1).

7 No existe un método matemáticamente perfecto

Los métodos vistos hasta ahora presentan problemas, ya que en Hamilton puede aparecer la paradoja de Alabama y con los métodos del divisor no se satisface la condición de la cuota. En los años 70, dos matemáticos, Michel L. Balinski y H. Peyton Young se propusieron encontrar un método que satisfaciera a la vez la condición de la cuota y que sea monótono. Encontraron un nuevo método, llamado el método de la cuota. Este nuevo método presentó sin embargo un problema indeseable: *la paradoja de la población*.

Hay varias definiciones de esta paradoja. En su forma más elemental, se puede describir del siguiente modo: Supongamos que hay dos elecciones consecutivas y un partido obtiene x escaños en la primera elección y aumenta el número de votos en la segunda. Si los demás partidos obtienen igual número de votos en ambas elecciones, es lógico pensar que el partido que ha aumentado en votos no disminuye su número de escaños obtenidos en la primera elección. Sin embargo puede que esto suceda. Otra definición un poco más realista de la misma paradoja es la siguiente:

La paradoja de la población: Supongamos que el tamaño de la Cámara y el número de estados es fijo, pero cambia el número de habitantes. Entonces un estado puede perder un representante en favor de otro estado, incluso si la población del primer estado crece más que la del segundo.

Veamos esta paradoja con un ejemplo tomando datos similares a los de las elecciones españolas de 1989 en la provincia de Badajoz, donde se asignaban 6 escaños, y substituyendo "representantes de un estado" por "diputados de un partido político". Vamos a llamar A, B, C, D a los partidos que obtuvieron más del 3 % de votos y usaremos el método de Hamilton[2].

Hamilton	A	B	C	D
Votos	208.560	82.000	38.000	30.000
Cuota	3,49	1,37	0,64	0,50
Escaños	3	1	$0+1$	$0+1$

Sin embargo, con datos electorales algo distintos

Hamilton	A	B	C	D
Votos	206.600	72.000	38.000	32.000
Cuota	3,56	1,24	0,65	0,55
Escaños	$3+1$	1	$0+1$	0

Observemos de estos datos que el partido A ha perdido unos 2.000 votos y el partido D los ha ganado. Sin embargo A gana un escaño y D lo pierde.

¿Hay alguna esperanza de encontrar un método mejor? La respuesta es negativa. Balinski y Young demostraron en 1982 que todos los métodos de reparto, excepto los métodos del divisor, presentan la paradoja de la población.

Así que estamos en un callejón sin salida. El método de Hamilton puede presentar las paradojas de Alabama y de la población y los métodos del divisor no satisfacen en general la condición de la cuota. Y cualquier método que se pueda inventar va a presentar alguno de estos problemas. No hay ningún método matemáticamente perfecto. Por tanto la elección de uno u otro método tiene que ser una decisión política. Se considera que la paradoja de la población y la de Alabama son más dañinas que la violación ocasional de la condición de la cuota, por lo que normalmente se decide usar los métodos del divisor.

8 Sistemas de voto preferente

Una manera diferente de diseñar métodos electorales que intenta evitar los problemas que aparecen en las secciones anteriores son los llamados *sistemas de voto preferente*.

[2]Los escaños se reparten primero por la parte entera de la cuota y los restantes por el orden de la parte decimal. De esta manera, en el primer caso el partido A recibe 3 escaños por la parte entera y ninguno por la parte decimal, mientras que en el segundo vuelve a recibir 3 escaños por la parte entera y uno más por la parte decimal.

Para simplificar la exposición, supongamos que hay que elegir solamente una persona o un partido de entre varios candidatos posibles en una circunscripción electoral y supongamos también que cada elector hace una lista donde coloca los nombres de varios candidatos por su orden de preferencia. Esta situación puede presentarse por ejemplo cuando se elige delegado de curso en una clase, cuando una comunidad de vecinos elige a su presidente o cuando una sociedad o empresa elige a su director.

A continuación veremos un ejemplo hipotético, donde aplicaremos cuatro métodos diferentes. Supongamos que en unas elecciones cada votante tiene que elegir tres partidos por orden de preferencia y que una vez contabilizados los votos los resultados son como sigue:

6 millones de votantes eligen por orden de preferencia PP, IU, PSOE.

5 millones de votantes eligen por orden de preferencia PSOE, IU, PP.

4 millones eligen IU, PSOE, PP.

Ya se tienen los resultados. Para su mejor manejo se pueden colocar en forma de tabla

	6	5	4
1ª	PP	PSOE	IU
2ª	IU	IU	PSOE
3ª	PSOE	PP	PP

¿Quién es el ganador?

1. Mayoría simple o relativa. Gana el candidato que más votos tiene.

   En este caso gana el PP (6 votos) frente al PSOE (5 votos) e IU (4 votos). Sin embargo 9 millones de votantes, esto es, el 60 % del total, no le han votado. De hecho es posible que estos votantes prefieran otra alternativa a tener este ganador. ¿Es esto justo?

2. Segunda vuelta. En el primer recuento de votos, la primera vuelta, eliminamos todos los candidatos excepto los dos que más votos tienen. Luego en la segunda vuelta se enfrentan estos dos y gana el que más votos tiene.

En el ejemplo, eliminamos primero a IU porque sólo tiene 4 votos. Ahora, en la segunda vuelta, compiten únicamente PP y PSOE. Si tachamos IU de la tabla de preferencias anterior, el PP obtiene 6 millones de votos y el PSOE $5 + 4 = 9$ millones. Gana el PSOE por 9 a 6.

Observemos que ahora aparece un ganador distinto al del método anterior. Observemos también que, aunque haya ganado el PSOE, $6+4 = 10$ millones de votantes preferían a IU frente al PSOE.

Una variante de este método, cuando hay más contendientes, se llama eliminación del perdedor. En este nuevo método se van dando sucesivas vueltas en el recuento y se elimina en cada una de ellas al candidato menos votado.

Otra variante es la que se usa en Francia, donde la primera vuelta es por mayoría absoluta, es decir, gana un partido si obtiene un resultado mayor que la mitad más uno de los votos. Si no hay ganador en esta primera vuelta, se realiza una segunda votación donde no se pueden presentar los partidos más minoritarios y en la se decide el ganador por mayoría relativa. Muchas veces se producen coaliciones entre una y otra vuelta.

3. Recuento Borda. Este nombre viene del francés Jean-Charles Borda (1770). Se puntúan los candidatos por orden de preferencia y gana el que más puntos tiene.

   En el ejemplo, si damos 3 puntos al primero de la lista, 2 al segundo y 1 al tercero, el resultado queda como sigue:

   PP $= 6 \times 3 + 5 \times 1 + 4 \times 1 = 27$ puntos

   PSOE$= 6 \times 1 + 5 \times 3 + 4 \times 2 = 29$ puntos

   IU$= 6 \times 2 + 5 \times 2 + 4 \times 3 = 34$ puntos

   El vencedor es IU.

4. Método Condorcet. Se enfrentan todos los canditados dos a dos. Gana el que haya ganado a todos los demás. Fue introducido por el marqués de Condorcet en Francia en 1785.

   En el ejemplo que nos ocupa cuando se enfrentan PP con PSOE, esto es, si tachamos IU de la lista de preferencias, el PP obtiene 6 millones de votos mientras que el PSOE obtiene $5 + 4 = 9$. Gana el PSOE. Las otras dos parejas de enfrentamientos, PP-IU y PSOE-IU producen:

PP-IU	PP$= 6$, IU$= 5 + 4 = 9$.	Gana IU.
PSOE-IU	PSOE$= 5$, IU$= 6 + 4 = 10$.	Gana IU.

Luego el ganador Condorcet es IU ya que ha ganado a los demás cuando se enfrentan cara a cara.

No siempre hay ganador Condorcet. Considérese por ejemplo una elección donde 5 millones de votantes eligen por este orden PP-PSOE-IU. Otros 5 millones eligen PSOE-IU-PP y 5 millones IU-PP-PSOE. No hay ninguno que gane a todos los demás.

Hay otros métodos de votación que tienen en cuenta el orden de preferencia. Entre ellos están

1. Voto transferible. Fue introducido por Thomas Hare en Inglaterra en 1850. Tiene en cuenta el orden de preferencia en cada papeleta de una manera un poco más complicada a las anteriores. Se usa en Irlanda y Australia.

2. "Approval voting". Cada votante escribe los nombres de los candidatos a los que da el visto bueno. Gana el que más votos tiene. Este sistema evita que gane alguien a quien la mayoría se opone.

De entre todos los métodos de votación de este tipo no hay ninguno que sea completamente satisfactorio. Kenneth J. Arrow demostró en 1951 que no puede haber ningún método que satisfaga a la vez las tres propiedades razonables que debería tener cualquier sistema de votación, a saber:

- *Condición de Pareto:* Si todos los votantes prefieren la alternativa x sobre la y, entonces x queda por encima de y en la lista de preferencias del grupo.

- *Monotonía:* Si un método da lugar a que x quede por encima de y en la lista de preferencias del grupo y un votante que prefiere y a x cambia su preferencia, el método debe seguir produciendo que x quede por encima de y en la lista de preferencias del grupo.

- *Independencia de las alternativas irrelevantes (IAI):* Un método de elección satisface IAI si consideradas dos alternativas x e y para las cuales el método hace que x sea preferida a y, cuando los votantes cambian sus preferencias con respecto a otras alternativas que no sean x e y, el método continua haciendo que x sea preferida a y. Por tanto, la posición de las alternativas que no sean x e y en las listas de preferencias de los individuos es irrelevante para decidir la ordenación de x e y en la lista de preferencias del grupo.

El *teorema de imposibilidad de Arrow* afirma que no puede haber ningún método de elección social que satisfaga a la vez estas tres condiciones. Ello destrozó las esperanzas de poder encontrar alguna vez mecanismos que fueran justos y no manipulativos de elección. Cualquier método que se considere puede presentar algún tipo de comportamiento no deseado. Kenneth J. Arrow, profesor de economía de la Universidad de Stanford recibió el premio Nobel de Ciencias Económicas en 1972.

9 El sistema electoral de los Estados Unidos

En las elecciones de los Estados Unidos se eligen los representantes del Congreso, los miembros del Senado y los electores presidenciales. Algunos estados eligen también a su gobernador y se consultan a referendum ciertas medidas legislativas o de interés social.

El Congreso de los Estados Unidos, *the U. S. House of Representatives*, tiene actualmente un total de 435 miembros que se reparten entre los 50 estados de la unión por el método de Hill-Huntington. Luego cada estado tiene sus circunscripciones electorales. Por ejemplo Minnesota, a la que le corresponden 10 representantes, tiene el mismo número de circunscripciones. En cada circunscripción los electores eligen el nombre de su elección de la lista de candidatos que se presentan en esa circunscripción y gana el que más votos tiene. Este es el sistema de mayoría simple o relativa, llamada también *first-past-the-post*, esto es, el primero que pasa la meta gana.

El presidente de los Estados Unidos se elige en una asamblea formada por 538 electores. Cada estado contribuye con un bloque de estos delegados o compromisarios, cuyo número es igual a la suma de sus representantes más sus senadores. Excepto Washington DC, que no tiene congresistas, pero si tres electores.

En las papeletas cada candidato a presidente lleva adjunto el nombre de su vicepresidente junto con el partido al que pertenece, en su caso. En cada estado gana el candidato que más votos tiene, pero estos votos no eligen de momento presidente, sino que eligen en bloque a los compromisarios de esta opción que irán después al colegio electoral. Como hay 538 compromisarios en total, un candidato necesita al menos 270 para ser elegido.

10 El sistema electoral español

La Constitución de 1978 ha establecido que las Cortes Generales estén formadas por el Congreso de los Diputados y por el Senado. La constitución establece también que el Congreso contará con un mínimo de 300 y un máximo de 400 Diputados, debiendo la ley electoral concretar este número. La normativa vigente (Ley Orgánica del Régimen Electoral General de 19 de Junio de 1985) ha fijado en 350 el número de miembros de la Cámara. Para garantizar que todas las provincias tengan Diputados, la ley electoral asigna dos escaños a cada una de ellas y uno a cada una de las ciudades de Ceuta y Melilla. Puesto que hay 50 provincias, se tienen asignados 102 escaños. El resto de los escaños, esto es, $350 - 102 = 248$, se distribuyen proporcionalmente entre todas las provincias, según su número de votantes censados, por el método de Hamilton. Por otro lado, y tal y como ya se ha comentado anteriormente, se utiliza la regla D'Hont para repartir los escaños a las diferentes formaciones políticas según sus resultados electorales en cada circunscripción (provincia en este caso). Entran en el reparto únicamente los partidos que han sacado más del 3 % de los votos.

11 El sistema electoral catalán

El Parlament de Catalunya consiste de una sola cámara, que se compone de 135 miembros electos de manera directa por sufragio universal para un término de cuatro años. Cada una de las cuatro provincias de Catalunya, Barcelona, Girona , Lleida y Tarragona, forman una circunscripción. Barcelona elige a un diputado por cada 50.000 habitantes, hasta un máximo de ochenta y cinco escaños, mientras que Girona, Lleida y Tarragona eligen a un mínimo de seis diputados cada una, más uno por cada 40.000 habitantes. En todas las elecciones celebradas a partir de 1980, los escaños parlamentarios se han repartido de la siguiente manera:

Provincia	Escaños
Barcelona	85
Girona	17
Lleida	15
Tarragona	18
Total	135

Este reparto favorece a las tres provincias menos pobladas a expensas de Barcelona. Para la asignación de escaños, el sistema electoral catalán es idéntico al sistema utilizado para escoger a los miembros del Congreso de los Diputados de España. Esto es, se utiliza la regla D'Hondt entre aquellas listas que reciban por lo menos el tres por ciento de los votos válidos emitidos en la circunscripción, incluyendo los votos en blanco.

12 ¿Son realmente adecuados los sistemas electorales que tenemos en el estado español?

En esta exposición hemos intentado mostrar que los sistemas electorales son mucho más complicados que lo que muchas personas podrían en principio suponer y que las matemáticas nos pueden ayudar a entender su funcionamiento. Hemos visto también que no hay ningún método perfecto. Cualquier posible método de elección social que se considere puede presentar en determinadas circunstancias comportamientos que parecen injustos y no deseados.

Surge también de manera natural la pregunta de si nuestro sistema electoral es adecuado y de si podría ser mejorado de algún modo. A este respecto vamos a exponer dos consideraciones para invitar a la reflexión:

1. En el sistema actual cada partido presenta una lista larga de nombres en cada papeleta. En general el votante conoce sólo los primeros candidatos de la lista, pero no los demás que aparecen después. Esto puede llevar a sorpresas, como ocurrió por ejemplo en las elecciones de Mayo de 2003 en la Comunidad de Madrid cuando la deserción de los diputados Eduardo Tamayo y María Teresa Sáez tuvo el efecto de cambiar

el posible gobierno socialista de Rafael Simancas por el popular de Esperanza Aguirre. En el sistema anglosajón por distritos cada distrito, esto es cada zona, barrio o pequeño condado, elige su o sus candidatos. Los electores les conocen mejor y existe más cercanía con sus representantes. Tiene el inconveniente de que puede ser poco proporcional, en el sentido en que si un partido gana por mayoría simple en cada distrito tendría la totalidad de la cámara. Pero quizás se podrían encontrar sistemas mixtos que intentaran equilibrar todos los factores.

2. En el sistema actual el elector debe elegir una papeleta dando su voto por completo a un partido o coalición y en el orden en que ha sido fijado y en el que aparecen los candidatos. Las tecnologías actuales permiten sin problema que el elector de su voto en digamos por ejemplo un 60 % a un partido, un 30 % a otro y un restante 10 % a otro. Podría también elegir o tachar los nombres de una lista que considere más adecuados.

Bibliografía

• *Régimen electoral general. Ley orgánica 5/1985 del 19 de Junio.* Instituto Nacional de estadística, 1985.
• *Las elecciones.* F. de Carreras, J. M. Vallés, Ed. Blume 1977.
• *Fair Representation, Meeting the ideal of One Man, One Vote.* M. Balinski, H. Young, Yale University Press, 1982.
• *Un examen en profundidad de los sistemas electorales, todos ellos imperfectos. ¿Resulta posible una adaptación fraudulenta de un sistema?* Ian Stewart, Investigación y Ciencia, mayo 1995.
• *Juegos matemáticos: Matemáticas electorales.* Juan M. R. Parrondo, Investigación y Ciencia, mayo 2004.
• *Las matemáticas en la vida cotidiana.* COMAP, Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, 1999.
• *Democràcia: dels vots als escons.* A. Alabert, Materials Matemàtics, 2006, no. 11.
• *Chaotic Elections! A Mathematician Looks at Voting.* D. G. Saari, American Math Society, Providence, 2001.
• En la web: Wikipedia. Por ejemplo, http://en.wikipedia.org/wiki/Voting_system

• Sobre Ramón Llull http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Llull.html. Sus textos electorales se encuentran en la univ. de Augsburg http://www.math.uni-augsburg.de/stochastik/llull/

Departamento de matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
bartolome.barcelo@uam.es

Publicat el 4 de juliol de 2007