MATerials MATemàtics
Volum 2008, treball no. 5, 27 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

Le calcul du nombre π

André Joyal

Résumé

La valeur du nombre π intrigua les mathématiciens depuis l'antiquité. Dans son ouvrage sur la *Mesure du cercle* Archimède (287-212 avant JC) établit les inégalités suivantes


Le dolmen de Poulnabrone

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}.$$

Sa méthode consiste à comparer la circonférence d'un cercle à celle de deux polygones réguliers de 96 côtés, l'un étant inscrit et l'autre circonscrit au cercle.

Au 3[e] siècle, le mathématicien chinois Liu Hui utilise une méthode semblable à celle d'Archimède mais avec des polygones de 192 côtés. Au 5[e] siècle, Tsu Chung-Chih et son fils obtiennent la valeur approchée

$$\pi \simeq \frac{355}{113}$$

correcte à 6 décimales. La précision du résultat restera insurpassée durant près d'un millénaire.

Au 15[e] siècle, Al-Kashi, un astronome de Samarkand au Turkestan, calcule π avec 14 décimales exactes en utilisant des polygones de 3×2^{28} côtés, près d'un *milliard* de côtés.

En 1593, François Viète donne la première expression exacte du nombre π sous forme d'un produit infini :

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \times \cdots .$$

En 1665, John Wallis obtient le produit

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\right)\left(\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\right)\left(\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\right)\cdots .$$

En 1674 Gottfried Wilhelm Leibniz découvre la série

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots .$$

En 1676, Isaac Newton obtient la série

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7\cdot 2^7} + \cdots$$

En 1706, John Machin découvre la relation

$$\frac{\pi}{4} = 4\cdot\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right),$$

ce qui lui permet de calculer 100 décimales de π.

En 1736, Leonard Euler découvre l'identité

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots .$$

En 1995, Simon Plouffe découvre la formule :

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$$

Elle permet de calculer *individuellement* des bits du développement binaire de π.

On doit à William Jones (1675-1749) l'introduction du symbole π (= périphérie = périmètre) pour désigner le rapport entre le périmètre d'un cercle et son diamètre. Euler en répandit l'usage en l'adoptant dans son traité *Introductio in anlysin infinitorum* (Lausanne 1748).

1 Archimède

Plus de deux millénaires nous séparent d'Archimède. Il ignorait la trigonométrie qui sera inventé au deuxième siècle par Ptolémé et l'algèbre qui sera inventée beaucoup plus tard par les musulmans. La méthode qu'il invente pour calculer le nombre π est de nature géométrique. Suivant Archimède, nous allons comparer le périmètre d'un polygone régulier de n côtés avec ceux des cercles inscrit et circonscrit (Archimède compare plutôt le périmètre d'un cercle à ceux des polygones inscrit et circonscrit, mais c'est équivalent). Nous avons l'immense avantage de pouvoir utiliser les notations algébriques modernes. Désignons par L la longueur des côtés du polygone. Le périmètre du polygone est égal à nL. Chaque côté du polygone est la base d'un triangle isocèle dont le sommet est situé au centre du cercle. L'angle au sommet du triangle vaut $2\pi/n$. Sa hauteur est égale au rayon r du cercle inscrit. Les deux côtés égaux du triangle ont une longueur égale au rayon R du cercle circonscrit. On en tire que $\sin(\pi/n) = L/2R$ et que $\cos(\pi/n) = r/R$. Par suite, la longueur nL de la circonférence du polygone vaut $2Rn\sin(\pi/n)$. Comme cette longueur est supérieure à celle de la circonférence du cercle inscrit et inférieure à celle du cercle circonscrit on obtient les inégalités

$$2\pi r < 2Rn\sin(\pi/n) < 2\pi R.$$

On en tire que

$$n\sin(\pi/n) < \pi < n\tan(\pi/n).$$

Archimède

Posons $p_n = n\sin(\pi/n)$ et $P_n = n\tan(\pi/n)$. On vérifie que p_n (resp. P_n) est la longueur de la circonférence du polygone régulier inscrit (resp. circonscrit) dans un cercle de diamètre 1. L'idée d'Archimède est d'exprimer les quantités p_{2n} et P_{2n} en fonction des quantités p_n et P_n. Il montre que l'on a

$$\frac{1}{P_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{P_n}\right) \quad \text{et} \quad p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}}.$$

Si on part d'un hexagone, pour lequel $p_6 = 3$ et $P_6 = 2\sqrt{3}$, on peut doubler successivement le nombre de côtés et obtenir le périmètre des polygones de 12, 24, 48 et 96 côtés. La précision obtenue sur la valeur de π augmente avec le nombre de côtés.

$$p_6 < p_{12} < p_{24} < p_{48} < p_{96} < \pi < P_{96} < P_{48} < P_{24} < P_{12} < P_6.$$

Pour obtenir les formules d'Archimède il suffit d'utiliser les identités $e^{i2\theta} = (e^{i\theta})^2$ et $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. En effet, elles donnent

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \quad \text{et} \quad \sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta.$$

Par suite

$$\frac{\sin(2\theta)}{1+\cos(2\theta)} = \tan\theta$$

ce qui donne

$$\frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sin(2\theta)} + \frac{1}{\tan(2\theta)}.$$

Si on met $\theta = \pi/(2n)$ dans cette relation et si l'on divise par $2n$ on obtient la première formule :

$$\frac{1}{P_{2n}} = \frac{1}{2n\tan(\frac{\pi}{2n})} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n\sin(\frac{\pi}{n})} + \frac{1}{n\tan(\frac{\pi}{n})}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{P_n}\Big).$$

Pour obtenir le seconde formule, il suffit de multiplier l'identité $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$ par $\tan\theta$. On obtient

$$2\sin^2\theta = \sin 2\theta \cdot \tan\theta.$$

Si on met $\theta = \pi/(2n)$ dans cette relation et si l'on multiplie par $2n^2$ on obtient

$$(p_{2n})^2 = 4n^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) = n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot 2n\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) = p_n P_{2n}.$$

Cela montre que

$$p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}}.$$

Utilisons ces formules pour calculer p_{12} et P_{12}. Comme on a $p_6 = 3$ et $P_6 = 2\sqrt{3}$ on obtient que

$$\frac{1}{P_{12}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\Big) = \frac{2+\sqrt{3}}{12} \quad \text{et} \quad p_{12} = \sqrt{3P_{12}}.$$

Cela donne

$$p_{12} = 3.105828543\dots < \pi < P_{12} = 3.21539030\dots$$

Mais Archimède ne connaît pas les fractions décimales qui furent inventées au 16^{e} siècle par Simon Stevin. Pour calculer, il utilise des fractions rationnelles. Pour borner π supérieurement il remplace certaines quantités irrationnelles rencontrées en cours de calcul par des fractions rationnelles plus grandes mais proches. Cela donne des nombres plus grands $g_i > p_i$ et $G_i > P_i$. Il obtient que $G_{96} = 22/7$. Pour borner π inférieurement il applique la même procédure mais avec des fractions rationnelles plus petites. Cela donne des nombres plus petits $l_i < p_i$ et $L_i < P_i$. Il obtient que $l_{96} = 223/71$. Cela donne l'encadrement

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}.$$

Certaines des approximations rationnelles utilisées par Archimède sont remarquables. Par exemple, pour approximer $\sqrt{3}$, il utilise l'encadrement

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

L'erreur est inférieure à 10^{-4} :

$$\frac{1351}{780} - \frac{265}{153} = \frac{3}{780 \cdot 153} = \frac{1}{39780}.$$

Comment Archimède a-t-il trouvé ces fractions ? La question a fait l'objet de beaucoup de spéculations chez les historiens des mathématiques. Certains pensent que les connaissances arithmétiques d'Archimède étaient très en avance sur son époque.

La valeur approchée $\pi \simeq 22/7$ obtenue par Archimède était bien meilleure que celles que l'on pouvait trouver à son époque. Elle se répandit rapidement dans le monde antique, de l'Egypte à l'Inde jusqu'en Chine. C'est la valeur que mes maîtres d'école m'ont enseignées.

La méthode d'Archimède fournit un algorithme pour calculer π à un degré de précision aussi élevé que l'on veut. L'erreur commise est supérieure à la différence $P_n - p_n$. On peut évaluer cette différence en calculant les quantités $p_n = n\sin(\pi/n)$ et $P_n = n\tan(\pi/n)$ directement avec un ordinateur. On trouve que

$$\begin{aligned}
P_{96} - p_{96} &= 0.001682648\ldots \\
P_{192} - p_{192} &= 0.000420578\ldots \\
P_{384} - p_{384} &= 0.000105139\ldots \\
P_{768} - p_{768} &= 0.000026284\ldots
\end{aligned}$$

On voit qu'il faudrait utiliser des polygones de plus de 384 côtés pour obtenir une valeur approchée de π exacte à quatre décimales. Ces données montrent aussi que la différence $P_n - p_n$ est divisée par 4 environ si n est doublé. On peut confirmer ces observations théoriquement. En effet, comme on a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad \text{et} \quad \tan x = x + 2\cdot\frac{x^3}{3!} + 16\cdot\frac{x^5}{5!} + \cdots$$

on obtient que

$$P_n - p_n = n\tan(\pi/n) - n\sin(\pi/n) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{\pi^3}{2} + \frac{1}{n^2}\frac{\pi^5}{8} + \cdots\right).$$

On voit que $P_n - p_n$ est divisé par 4 environ si n est doublé. On peut essayer d'améliorer la précision de l'approximation de π en prenant une moyenne pondérée entre les quantités p_n et P_n. Pour cela, il faut prendre un pondération de $(2/3, 1/3)$. En effet, cette pondération permet de faire disparaître le terme en x^3 :

$$(2/3)\sin x + (1/3)\tan x = x + \frac{x^5}{20} + \cdots$$

Si $n = 96$ on a $p_{96} = 3.141031953\ldots$, $P_{96} = 3.142714601\ldots$. On obtient

$$(2/3)p_{96} + (1/3)P_{96} = 3.141592836\ldots,$$

alors que $\pi = 3.141592654\ldots$ Bien sûr, Archimède ne pouvait connaître cette pondération.

Les techniques de calcul ont fait des progrès immenses avec l'invention du système décimal. Déjà au 2e siècle, l'astronome Claude Ptolémée utilisait un système de numération sexagésimal. En construisant des polygones réguliers de 20 et 24 côtés, il calcula le côté d'un polygone régulier de 120 côtés. Il publia des tables de trigonométrie avec la valeur de $\sin(1°)$ avec quatre décimales exactes. Il obtint la valeur approchée

$$\pi \simeq 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} = 3.1416\ldots$$

Au 15e siècle, Al-Kashi, un astronome de Samarkand (Turkestan), calcula π avec 14 décimales exactes en utilisant des polygones de 3×2^{28} côtés. Il obtint que

$$\pi \simeq 3 + \frac{08}{60} + \frac{29}{60^2} + \frac{44}{60^3} + \frac{00}{60^4} + \frac{47}{60^5} + \frac{25}{60^6} + \frac{53}{60^7} + \frac{07}{60^8} + \frac{25}{60^9}.$$

Au 16[e] siècle, un Hollandais, Adrian van Romanus, utilisa le système décimal pour calculer π avec une précision de 15 décimales. Il fut surpassé quelques années plus tard par un autre Hollandais d'origine Allemande, Ludolph van Ceulen (1539-1610). Dans un premier temps, Ceulen calcula π avec une précision de 20 décimales en utilisant des polygone de $2^{33} \cdot 60 > 500$ *milliards* de côtés. Plus tard, dans des notes non publiées de son vivant, il calcula π avec une précision de 35 décimales avec des polygones de 2^{62} côtés. Il les fit inscrire sur son épitaphe, croyant s'assurer une gloire éternelle. En Allemagne, on dit encore que π est le *nombre de Ludolph*.

2 François Viète

On doit à François Viète (1540-1603) la première expression exacte du nombre π. La méthode de Viète ressemble à celle d'Archimède sauf qu'il parvient à exprimer π sous la forme d'un produit infini. La longueur de la circonférence d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1 est donnée par

$$C_n = 2n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Si on utilise la relation $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$, on voit que

$$\frac{C_n}{C_{2n}} = \frac{2n \cdot \sin(\frac{\pi}{n})}{4n \cdot \sin(\frac{\pi}{2n})} = \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

F. Viète

On en déduit que

$$\frac{C_n}{C_{2^k n}} = \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8n}\right)\cdots\cos\left(\frac{\pi}{2^k n}\right).$$

La circonférence d'un polygone régulier tend vers la circonférence du cercle lorsque le nombre de côtés s'accroît indéfiniment. Un passage à la limite lorsque $k \to \infty$ donne

$$\frac{C_n}{2\pi} = \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{16n}\right)\cdots.$$

En posant $n = 2$ on obtient que

$$\frac{2}{\pi} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)\cos\left(\frac{\pi}{32}\right)\cdots$$

Posons $c_n = \cos(\frac{\pi}{n})$. Pour obtenir la formule de Viète il suffit d'exprimer c_{2n} en fonction de c_n. L'identité $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ entraîne que

$$c_{2n} = \sqrt{\frac{1 + c_n}{2}}.$$

Comme $c_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ on obtient successivement que

$$\begin{aligned} c_8 &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ c_{16} &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \\ c_{32} &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Par suite,

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\right)\cdots.$$

Malgré son élégance, la formule de Viète ne permet pas de calculer π d'une façon vraiment plus efficace que l'algorithme d'Archimède.

3 John Wallis

Après Viète, il faut attendre le développement du calcul différentiel et intégral pour assister à de nouveaux progrès dans le calcul du nombre π. La méthode suivie par John Wallis (1616-1703) pour obtenir sa formule est obscure mais originale. Dans son *Arithmética Infinitorum* de 1665 il obtient la valeur des intégrales

$$\int_0^1 x^{p/q}\,dx = \frac{1}{\frac{p}{q}+1} = \frac{q}{p+q}$$

Il se propose de calculer π en calculant l'aire d'un quart de cercle de rayon 1 au moyen de l'intégrale

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

Pour y arriver il commence par calculer les intégrales

$$I(p,q) = \int_0^1 (1-x^{1/p})^q\, dx.$$

pour p et q des entier positifs. Il dresse alors un tableau de $A(p,q) = I(p,q)^{-1}$ pour tous les entiers $p, q \leq 10$.

	$q=0$	$q=1$	$q=2$	$q=3$	$q=4$	$q=5$	$q=6$	$q=7$	$q=8$	$q=9$	$q=10$
$p=0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$p=1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$p=2$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
$p=3$	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
$p=4$	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
$p=5$	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
$p=6$	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
$p=7$	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448
$p=8$	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758
$p=9$	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378
$p=10$	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756

Wallis reconnaît le triangle de Pascal avec

$$A(p,q) = \frac{(p+q)!}{p!q!}.$$

J. Wallis

Il observe aussi la symétrie $A(p,q) = A(q,p)$ et les relations $A(p,q) = \dfrac{p+q}{q} A(p,q-1)$ et $A(p,q) = \dfrac{p+q}{p} A(p-1,q)$.

Wallis fait alors l'hypothèse que ces relations sont vraies même pour des valeurs fractionnaires de p et q. Par exemple, posons $b_n = A(1/2, n/2)$. On a $b_2 = 3/2$. On obtient alors que

$$b_{2n} = A\left(\frac{1}{2}, n\right) = \frac{n+\frac{1}{2}}{n} A\left(\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}\right) = \frac{2n+1}{2n} b_{2n-2} = \frac{(2n+1)\cdots 5\cdot 3}{(2n)\cdots 4\cdot 2}.$$

De même,

$$b_{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1} b_{2n-1} = \frac{(2n+2)\cdots 4 \cdot 2}{(2n+1)\cdots 5 \cdot 3} \cdot b_1.$$

Wallis observe que la suite $b_1, b_2, \ldots$ est croissante car la suite

$$\frac{1}{b_n} = \int_0^1 (1-x^2)^{n/2}\, dx.$$

est décroissante. Les inégalités $b_{2n-2} < b_{2n-1} < b_{2n}$, impliquent que l'on a

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n-2} < b_1 \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{2n+1}{2n}.$$

On sait que $b_1 = A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \dfrac{4}{\pi}$. On obtient par suite que

$$\begin{aligned} \frac{2\cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} &< \frac{\pi}{2} \\ &< \frac{2\cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right). \end{aligned}$$

Ce qui prouve que

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\right)\left(\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\right)\left(\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\right)\cdots .$$

Les calculs de Wallis ont grandement inspirés Newton dans sa découverte de la formule du binôme. Ils ont donné naissance à la théorie de l'interpolation dont Wallis est l'initiateur. Ils ont inspiré Euler dans sa découverte de la fonction $\Gamma(x)$.

4 Leibniz

En 1671, James Gregory (1638-1675) découvre le développement de Taylor de la fonction arctangente :

$$\arctan(x) = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots .$$

Leibniz (1646-1716) la découvrira indépendamment quelques années plus tard en 1674. On ignore comment Gregory fit sa découverte. On sait toutefois que

Leibniz utilisa le calcul différentiel et intégral. Il a l'idée de substituer $x = 1$ dans le développement. Il obtient la *série de Leibniz* :

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots .$$

La simplicité de cette formule pour π est étonnante si on la compare à celle de Viète. Mais sa convergence est lente. Rappelons qu'une série de la forme

$$S = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$$

avec $a_n \geq 0$ est une série *alternée*. Supposons que $a_n \geq a_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$ et que $a_n \to 0$ lorsque n croit. Dans ce cas, la série alternée converge. En effet, considérons les sommes partielles

$$S_n = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n.$$

On a

$$S_n - S_{n+2} = \begin{cases} (a_n - a_{n+1}) \geq 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -(a_n - a_{n+1}) \leq 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Par suite,

$$S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \cdots \leq S_4 \leq S_2 \leq S_0.$$

Comme la différence $S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}$ tend vers 0, on voit que les sommes partielles S_n s'approchent d'une limite S :

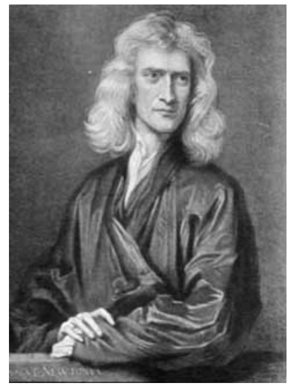
$$S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \cdots \leq S \leq \cdots \leq S_4 \leq S_2 \leq S_0.$$

De plus, l'erreur $\mid S_n - S \mid$ est inférieure à la différence $\mid S_n - S_{n+1} \mid = a_{n+1}$. Cela montre que l'erreur $\mid S_n - S \mid$ est toujours inférieure au premier terme négligé en valeur absolu. Si S_n désigne la somme des n premiers termes de la série de Leibnitz, alors on a

$$\mid 4S_n - \pi \mid \leq \frac{4}{2n+3}$$

puisque l'erreur est inférieure au premier terme négligé en valeur absolu. Pour que cette erreur soit $< 10^{-N}$ il faudrait prendre $n \geq 2 \cdot 10^N$. Par exemple, il faudrait additionner plus de 20 000 termes pour calculer π avec 4 décimales exactes, et plus de 2 000 000 pour avoir 6 décimales exactes.

Leibnitz



Newton

5 Newton

C'est en étudiant attentivement les travaux de Wallis en 1665 que Newton découvre la *formule du binôme* :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}. \qquad |\, x \,| < 1.$$

La formule est valable pour un exposant α fractionnaire ou négatif si $|\, x \,| < 1$. En changeant le signe de α et de x on obtient la formule

$$\frac{1}{(1-x)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\frac{x^n}{n!}$$

C'est par un raisonnement géométrique que Newton trouve en 1669 que

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Il utilise alors la formule du binôme pour développer le membre de droite en série :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)\frac{x^{2n}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\, x^{2n}. \end{aligned}$$

En intégrant cette série terme à terme il obtient que

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Il est important de noter que c'est seulement *ensuite* que Newton trouve le développement

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

en inversant la série de $\arcsin(x)$. En 1676(?) Newton entretient une correspondance avec Leibniz. Il substitue $x = 1/2$ dans la série de $\arcsin x$ pour obtenir

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \cdots .$$

Cette série converge assez rapidement car son terme de rang n est $< 4^{-n}$. Mais son terme général est compliqué. Newton calcula 15 décimales de π avant d'abandonner.

En 1690, A. Sharp (1651-1742) utilise la série

$$\frac{\pi}{6} = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \cdots \right)$$

pour calculer π à 72 décimales exactes.

6 John Machin

En 1706 John Machin (1680-1752) découvre la relation

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

Elle permet d'accélérer grandement la convergence de la série de Gregory-Leibniz pour calculer π. La relation est une conséquence de l'identité

$$\tan(\theta + \psi) = \frac{\tan(\theta) + \tan(\psi)}{1 - \tan(\theta)\tan(\psi)}.$$

Si on pose $\tan\theta = 1/5$ on obtient que

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{5}{12}$$

$$\tan(4\theta) = \frac{2\tan(2\theta)}{1-\tan^2(2\theta)} = \frac{120}{119}$$

Cette dernière quantité est légèrement supérieure à 1. Cela signifie que 4θ est légèrement supérieur à $\pi/4$. On a

$$\tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan(4\theta) - \tan(\frac{\pi}{4})}{1+\tan(4\theta)\tan(\frac{\pi}{4})} = \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

Cela démontre la formule de Machin. Cette fois, il suffit d'additionner 70 termes de la première série et 20 termes de la seconde pour calculer π avec 100 décimales exactes. C'est ce que fit John Machin en 1706 :

$$\begin{aligned}
16 \cdot \arctan\frac{1}{5} &= 3.158328957598092133920796243116644695161361\,6 \\
&\quad 6060563362428302304385654351965190057172316 \\
&\quad 524859660870580205\ldots \\
-4 \cdot \arctan\frac{1}{239} &= 0.0167363040082988954581528598371418109641922 \\
&\quad 6123052780330807845154872711336569157309513 \\
&\quad 042325449163781990\ldots \\
\pi &= 3.1415926535897932384626433832795028841971693 \\
&\quad 9937510582097494459230781640628620899862803 \\
&\quad 482534211706798215\ldots
\end{aligned}$$

La course aux décimales de π était bien lancée. En 1719, F. de Lagny calcule 127 décimales de π en utilisant la série de Gregory-Leibniz. La course ne connaîtra pas de repos avant le milieu du 19$^{\text{e}}$ siècle. Avant de parler de ces développements, nous allons discuter d'une contribution d'Euler dont la valeur est surtout de nature théorique.

7 Euler

C'est en 1736 qu'Euler (1707-1783) parvint à sommer les inverses des carrés :

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots .$$

Sa méthode est nouvelle. Il commence par noter que si $x_1, \ldots, x_n$ sont les racines d'un polynôme

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

avec $a_0 \neq 0$ alors on a

$$p(x) = a_0\Big(1 - \frac{x}{x_1}\Big)\Big(1 - \frac{x}{x_2}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{x}{x_n}\Big).$$

En effet, pour le voir il suffit de diviser le produit

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

par $a_0 = p(0) = a_n(-x_1)(-x_2)\cdots(-x_n)$. On obtient que

$$\frac{p(x)}{a_0} = \frac{a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)}{a_n\ \ (-x_1)\ \ (-x_2)\ \ \cdots(-x_n)} = \Big(1 - \frac{x}{x_1}\Big)\Big(1 - \frac{x}{x_2}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{x}{x_n}\Big).$$

L. Euler

La formule n'est valable qui si $a_0 \neq 0$. Toutefois, si $a_0 = 0$ et $a_1 = p'(0) \neq 0$ on obtient que

$$p(x) = a_1 x\Big(1 - \frac{x}{x_1}\Big)\Big(1 - \frac{x}{x_2}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{x}{x_{n-1}}\Big).$$

où $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont les racines non nulles de $p(x)$. Rappelons qu'un polynôme $p(x)$ est dit *pair* s'il vérifie $p(x) = p(-x)$, et qu'il est dit *impair* si $p(x) = -p(-x)$. Un polynôme $p(x)$ est pair si, et seulement si, il ne contient que des monômes de degré pair, et il est impair si et seulement si il ne contient que des monômes de degré impair. Si a est racine d'un polynôme $p(x)$ pair (resp. impair) alors $-a$ est aussi racine de $p(x)$. Dans ce cas on peut regrouper les facteurs

$$\Big(1 - \frac{x}{a}\Big)\Big(1 + \frac{x}{a}\Big) = \Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big).$$

Si $x_1, -x_1, \ldots, x_n, -x_n$ sont les racines d'un polynôme pair $p(x)$ de degré $2n$ avec $a_0 = p(0) \neq 0$ alors obtient une factorisation

$$p(x) = a_0\Big(1 - \frac{x^2}{x_1^2}\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{x_2^2}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{x^2}{x_n^2}\Big).$$

Si $0, x_1, -x_1, \ldots, x_n, -x_n$ sont les racines d'un polynôme impair $p(x)$ de degré $2n+1$ avec $a_1 = p'(0) \neq 0$, alors on obtient une factorisation

$$p(x) = a_1 x\Big(1 - \frac{x^2}{x_1^2}\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{x_2^2}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{x^2}{x_n^2}\Big).$$

L'idée d'Euler est de traiter les fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$ comme des polynômes (de degré infini) ! La fonction $\sin(x)$ s'annule en $x = \pm n\pi$ $(n \geq 0)$. C'est un fonction impaire et $a_1 = 1$ comme le montre le développement de Taylor

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Euler en déduit que l'on a

$$\sin(x) = x\Big(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\Big)\cdots .$$

De même, la fonction $\cos(x)$ s'annule pour $x = \pm(2n+1)\pi/2$ $(n \geq 0)$. C'est une fonction paire et $a_0 = \cos(0) = 1$. Euler en déduit que l'on a

$$\cos(x) = \Big(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\Big)\Big(1 - \frac{4x^2}{3^2\pi^2}\Big)\Big(1 - \frac{4x^2}{5^2\pi^2}\Big)\cdots .$$

La justesse du raisonnement d'Euler fut contestée à son époque. Euler répond à ses critiques en fournissant une preuve plus rigoureuse dans son *Introductio analysin infinitorium* de 1748. Nous en verrons une démonstration. Mais auparavant, tirons-en quelques conséquences. Il est souvent commode d'écrire les formules d'Euler comme suit :

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \Big(1 - \frac{x^2}{1^2}\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{2^2}\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{3^2}\Big)\cdots .$$

$$\cos\Big(\frac{\pi x}{2}\Big) = \Big(1 - \frac{x^2}{1^2}\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{3^2}\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{5^2}\Big)\cdots .$$

Si on substitue $x = 1/2$ dans la première, on obtient

$$\frac{2}{\pi} = \Big(1 - \frac{1}{2^2}\Big)\Big(1 - \frac{1}{4^2}\Big)\Big(1 - \frac{1}{6^2}\Big)\cdots .$$

C'est la formule de Wallis ! Si on égalise les coefficients de x^2 de chaque membre de l'égalité

$$1 - \frac{\pi^2 x^2}{3!} + \frac{\pi^4 x^4}{5!} - \frac{\pi^6 x^6}{7!}\cdots = \Big(1 - \frac{x^2}{1^2}\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{2^2}\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{3^2}\Big)\cdots$$

on obtient la somme des inverses des carrés :

$$\frac{\pi^2}{3!} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots .$$

En comparant les coefficients de x^{2n} pour chaque n, Euler obtient une infinité d'identités semblables. Pour y voir clair, il est bon de transformer le produit en somme en prenant le logarithme. Il est plus simple de prendre la dérivée du logarithme. Si $f(x)$ est une fonction, on dit que la fonction

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

est la *dérivée logarithmique* de $f(x)$; nous la dénoterons $Df(x)$. On vérifie que la dérivée logarithmique du produit de deux fonctions est égale à la somme de leur dérivée logarithmique :

$$D(f(x)g(x)) = Df(x) + Dg(x).$$

C'est vrai plus généralement pour un produit de n fonctions :

$$D(f_1(x) \cdots f_n(x)) = Df_1(x) + \cdots + Df_n(x).$$

Supposons que c'est également vrai pour le produit (infini)

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right) \cdots .$$

En prenant la dérivé logarithmique de chaque membre on obtient que

$$\pi \cot(\pi x) - \frac{1}{x} = \frac{-2x}{1^2 - x^2} + \frac{-2x}{2^2 - x^2} + \frac{-2x}{3^2 - x^2} + \cdots .$$

Par suite,

$$\pi x \cot(\pi x) = 1 - 2\left[\frac{x^2}{1^2 - x^2} + \frac{x^2}{2^2 - x^2} + \frac{x^2}{3^2 - x^2} + \cdots\right]$$

Remarquer que

$$\frac{x^2}{n^2 - x^2} = \frac{x^2}{n^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{n^2}} = \frac{x^2}{n^2} + \frac{x^4}{n^4} + \frac{x^6}{n^6} + \cdots .$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\pi x \cot(\pi x) &= 1 - 2\Bigg[\left(x^2 + x^4 + x^6 + \cdots\right) + \left(\frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4} + \frac{x^6}{2^6} + \cdots\right) \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{x^2}{3^2} + \frac{x^4}{3^4} + \frac{x^6}{3^6} + \cdots\right) + \cdots\Bigg] \\
&= 1 - 2\Bigg[\left(x^2 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^2}{3^2} + \cdots\right) + \left(x^4 + \frac{x^4}{2^4} + \frac{x^4}{3^4} + \cdots\right) \\
&\qquad\qquad + \left(x^6 + \frac{x^6}{2^6} + \frac{x^6}{3^6} + \cdots\right) + \cdots\Bigg] \\
&= 1 - 2\Bigg[\left(1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right)x^4 \\
&\qquad\qquad + \left(1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots\right)x^6 + \cdots\Bigg]
\end{aligned}$$

Pour tout $n \geq 2$, posons

$$\zeta(n) = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots .$$

Nous avons montré que

$$\pi x \cot(\pi x) = 1 - 2\Big(\zeta(2)x^2 + \zeta(4)x^4 + \zeta(6)x^6 + \cdots\Big).$$

Pour obtenir la valeur de $\zeta(2n)$ il suffit de calculer les coefficients du développement en série de la fonction $g(x) = x\cot(x)$. Comme $g(x)$ est une fonction paire on peut poser

$$g(x) = 1 - c_2x^2 - c_4x^4 - c_6x^5 - \cdots .$$

La relation $\cos x = \cot(x)\,\sin(x)$ entraîne que

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \Big(1 - c_2x^2 - c_4x^4 - c_6x^6 - \cdots\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots\Big).$$

En égalant les coefficients de x^{2n} de chaque membre, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2!} &= c_2 + \frac{1}{3!} \\
\frac{1}{4!} &= -c_4 + \frac{c_2}{3!} + \frac{1}{5!} \\
\frac{1}{6!} &= c_6 - \frac{c_4}{3!} + \frac{c_2}{5!} + \frac{1}{7!} \\
\frac{1}{8!} &= -c_8 + \frac{c_6}{3!} - \frac{c_4}{5!} + \frac{c_2}{7!} + \frac{1}{9!} \\
\cdots & \qquad \cdots
\end{aligned}$$

On peut résoudre ces équations successivement pour obtenir les valeurs de $c_2, c_4, \ldots$ On obtient,

$$c_2 = \frac{1}{3},\ c_4 = \frac{1}{45}\ c_6 = \frac{2}{945},\ c_8 = \frac{1}{4725},\ c_{10} = \frac{2}{93555},\ c_{12} = \frac{1382}{638512875}.$$

De la relation

$$g(\pi x) = \pi x \cot(\pi x) = 1 - 2\Big(\zeta(2)x^2 + \zeta(4)x^4 + \zeta(6)x^6 + \cdots\Big)$$

on tire que

$$\zeta(2n) = \frac{\pi^{2n}}{2} c_{2n}.$$

Admirons les résultats d'Euler :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{2\cdot 3} &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \\
\frac{\pi^4}{2\cdot 3^2\cdot 5} &= \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots \\
\frac{\pi^6}{3^3\cdot 5\cdot 7} &= \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \cdots \\
\frac{\pi^8}{2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7} &= \frac{1}{1^8} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \cdots \\
\frac{\pi^{10}}{3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 11} &= \frac{1}{1^{10}} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \cdots \\
\frac{691\cdot \pi^{12}}{3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13} &= \frac{1}{1^{12}} + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \cdots \\
\cdots & \qquad \cdots
\end{aligned}$$

On peut démontrer que les coefficients du développement en série de la fonction cotangente s'expriment en terme des nombres de Bernoulli. La valeur de la série $\zeta(n)$ pour n impair demeure inconnue. Euler a calculé $\zeta(3)$ jusqu'à plus de 15 décimales sans pouvoir l'exprimer avec des constantes connues. Toutefois, Apery a démontré récemment que $\zeta(3)$ est un nombre irrationnel.

Dans ce qui suit, nous allons établir le développements en produit d'Euler des fonctions $\sin x$ et $\cos x$. Pour cela, nous utiliserons les *polynômes de Chebyshev* $T_n(x)$. Par définition, $T_n(x)$ est un polynôme de degré n pour lequel on a identiquement

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta).$$

Par exemple, on a $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$, ce qui signifie que $T_2(x) = 2x^2 - 1$. Il est facile d'obtenir une expression pour $T_n(x)$. En effet, $\cos(n\theta)$ est la partie réelle de

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} i^k \binom{n}{k} \sin^k\theta \, \cos^{n-k}\theta$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\cos(n\theta) &= \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} \sin^{2k}\theta \, \cos^{n-2k}\theta \\
&= \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} (1-\cos^2\theta)^k \, \cos^{n-2k}\theta.
\end{aligned}$$

Cela montre que

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} (x^2-1)^k \, x^{n-2k}.$$

Le coefficient de x^n dans $T_n(x)$ est

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} = 2^{n-1} \qquad \text{si} \quad n > 0$$

On trouve que

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1 \\
T_1(x) &= x \\
T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\
T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \\
T_7(x) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x \\
T_8(x) &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1 \\
T_9(x) &= 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x \\
T_{10}(x) &= 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1.
\end{aligned}$$

Lemme 1 *On a* $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$.

Preuve : Si on substitue $-\cos\theta = \cos(\theta + \pi)$ dans $T_n(x)$ on obtient

$$\begin{aligned}
T_n(-\cos\theta) = T_n(\cos(\theta+\pi)) = \cos(n\theta + n\pi) &= (-1)^n \cos(n\theta) \\
&= (-1)^n T_n(\cos\theta).
\end{aligned}$$

Le polynôme $T_n(x)$ est donc pair si n est pair, et impair si n est impair.

Lemme 2 *Pour tout* $n \geq 1$, *on a*

$$T_n(\sin\theta) = \begin{cases} (-1)^k \cos(n\theta) & \textit{si } n = 2k \\ (-1)^k \sin(n\theta) & \textit{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

Preuve : Si on substitue $\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ dans $T_n(x)$ on obtient

$$T_n(\sin\theta) = T_n(\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)) = \cos(n\frac{\pi}{2} - n\theta) = \begin{cases} (-1)^k \cos(n\theta) & \text{si } n = 2k \\ (-1)^k \sin(n\theta) & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

Lemme 3 *Pour tout entier k posons $x_k = \sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}$ et $y_k = \sin\frac{k\pi}{2n+1}$. Alors on a*

$$(-1)^n T_{2n}(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{x_k^2}\right) \qquad \text{et} \qquad (-1)^n\frac{T_{2n+1}(x)}{2n+1} = x\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{y_k^2}\right)$$

Preuve : Le polynôme $T_{2n}(x)$ est pair de degré $2n$. Les $2n$ nombres

$$x_1, \cdots, x_n, -x_1, \cdots, -x_n$$

sont des racines de $T_{2n}(x)$ car on a

$$T_{2n}(x_k) = (-1)^n \cos((2k-1)\frac{\pi}{2}) = 0.$$

d'après le lemme 2. Le polynôme $T_{2n}(x)$ ne peut avoir d'autres racines car il est de degré $2n$. Le terme constant de $T_{2n}(x)$ est égal à $(-1)^n$ car

$$T_{2n}(0) = T_{2n}(\sin(0)) = (-1)^n\cos 0 = (-1)^n.$$

Par suite,

$$T_{2n}(x) = (-1)^n\left(1-\frac{x^2}{x_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{x_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{x_n^2}\right).$$

Le polynôme $T_{2n+1}(x)$ est impair de degré $2n+1$. Les $2n+1$ nombres

$$0, y_1, \cdots, y_n, -y_1, \cdots, -y_n$$

sont des racines de $T_{2n+1}(x)$ car on a

$$T_{2n+1}(y_k) = (-1)^n\sin(k\pi) = 0.$$

d'après le lemme 2. Le polynôme $T_{2n+1}(x)$ ne peut avoir d'autres racines car il est de degré $2n+1$. Le coefficient de x dans $T_{2n+1}(x)$ est égal à $T'_{2n+1}(0)$. Mais on a

$$\frac{d}{d\theta}T_{2n+1}(\sin\theta) = T'_{2n+1}(\sin\theta)\cos\theta = (-1)^n(2n+1)\cos\Big((2n+1)\theta\Big)$$

d'après le lemme 2. Si on pose $\theta = 0$ dans cette identité, on obtient que $T'_{2n+1}(0) = (-1)^n(2n+1)$. Par suite,

$$(-1)^n\frac{T_{2n+1}(x)}{2n+1} = x\left(1-\frac{x^2}{y_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{y_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{y_n^2}\right).$$

Théorème 4 (Euler) *On a*

$$\cos\theta = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4\theta^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)$$
$$\sin\theta = \theta\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\theta^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Preuve : Démontrons la seconde formule. Pour tout $n \geq 0$ on a

$$\sin\theta = (-1)^n T_{2n+1}(\sin(\frac{\theta}{2n+1}))$$

d'après le lemme 2. Par suite, le lemme 3 donne

$$\sin\theta = (2n+1)\sin(\frac{\theta}{2n+1})\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2(\frac{\theta}{2n+1})}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

Nous allons prendre la limite de l'expression de droite lorsque $n \to \infty$. Il est facile de voir en utilisant le théorème de Rolle que

$$\lim_{n\to\infty} \quad (2n+1)\sin(\frac{\theta}{2n+1}) = \theta.$$

Par suite,

$$\lim_{n\to\infty} \quad \frac{\sin(\frac{\theta}{2n+1})}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{\theta}{k\pi}.$$

Remarque : Notre démonstration du théorème n'est pas complètement rigoureuse car la limite d'un produit infini (ou illimité) n'est pas forcément égale au produit des limites des facteurs. On peut la rendre tout à fait rigoureuse en utilisant le théorème de convergence bornée.

Revenons à la course aux décimales de π. En 1789, G. von Vega en calcula 136 décimales en utilisant une formule d'Euler

$$\frac{\pi}{4} = 5\arctan\frac{1}{7} - 2\arctan\frac{3}{79}.$$

En 1844 le calculateur prodige Z. Dashe obtint 200 décimales avec une formule de Strassnitzky :

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}.$$

En 1847, l'astronome T. Clausen obtint 248 décimales avec la formule de Machin. En 1853, W. Rutheford en obtint 400 avec une formule d'Euler. En 1855 Richter en calcule 500. À partir du milieu du 19^{e} siècle la course aux décimales de π entre dans une période de tranquillité qui durera environ un siècle. Comme si les découvertes mathématiques des siècles précédents avaient déjà été exploitées aux maximum. La course reprendra au milieu du 20^{e} siècle avec l'apparition des ordinateurs. En 1962, D. Shanks and J. W. Wrench obtiennent 100 000 décimales en utilisant une formule de Stormer :

$$\frac{\pi}{4} = 6\arctan\frac{1}{8} + 2\arctan\frac{1}{57} + \arctan\frac{1}{239}.$$

En 1974, J. Guilloud et M. Bouyer obtiennent 1 million de décimales en utilisant une formule de Gauss

$$\frac{\pi}{64} = \frac{3}{4}\arctan\frac{1}{18} + \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{57} - \frac{5}{16}\arctan\frac{1}{239}.$$

En 1976, Eugene Salamin et Richard Brent redécouvrent indépendamment une formule non publiée de Gauss :

$$M\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2^n (a_n - a_{n-1})^2\right).$$

Elle permet de calculer π en calculant une moyenne arithmético-géométrique de Gauss. Je rappelle que la moyenne arithmético-géométrique $M(a,b)$ de deux nombres $a, b > 0$ est la limite commune des suites (a_n) et (b_n) obtenues en posant

$$\begin{aligned} a_0 &= a & b_0 &= b \\ a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} & b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} \end{aligned}$$

La convergence est quadratique, ce qui signifie que le nombre de décimales exactes est *doublé* à chaque itération. Avec 40 itérations on peut obtenir théoriquement $2^{40} \simeq 10^{12} =$ *mille milliards* de décimales exactes de $M(a,b)$. Bien sûr, il faut pouvoir multiplier des nombres de plusieurs milliards de décimales. C'est devenu possible avec l'usage de la transformée de Fourier rapide en analyse numérique. La formule de Brent-Salamin-Gauss permet de calculer π en calculant $M(1, \frac{1}{\sqrt{2}})$. En 1982, elle sera utilisée par Tamura pour calculer plus de 2 millions de décimales de π, et par Tamura et Kanada en 1989 pour en calculer plus de 1 milliard. En 1999, Takahashi et Kanada parviennent à calculer plus de 200 milliards de décimales de π.

8 Simon Plouffe

En 1995, Simon Plouffe et les frères Peter et Jonathan Borwein font une annonce surprenante. Ils affirment pouvoir calculer les bits de π individuellement, sans devoir calculer les bits qui précèdent. À l'époque, les chercheurs savaient déjà calculer individuellement les bits de $\log 2$ grâce à la série

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Voici comment. Le bit de rang $l+1$ d'un nombre $0 < x < 1$ est le premier bit de la partie fractionnaire du produit $2^l \times x$. Pour calculer le bit de rang $l+1$ de $\log 2$ on calcule $2^l \log 2$ modulo 1 avec la série

$$\begin{aligned} 2^l \log 2 &= \sum_{n=1}^{l} \frac{1}{n} \cdot 2^{l-n} + \sum_{n=l+1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^{n-l}} \\ &\equiv \sum_{n=1}^{l} \frac{2^{l-n} \bmod n}{n} + \sum_{n=l+1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^{n-l}} \quad \text{modulo } 1 \end{aligned}$$

L'économie de calcul provient de la réduction modulo n. Il existe des algorithmes permettant de calculer efficacement une exponentielle modulo n. Pour le cas de π, il faut disposer d'une série appropriée. C'est la formule que trouve Simon Plouffe en utilisant un ordinateur :

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right).$$

C'est une formule remarquable qui semble avoir échappé à Euler, Gauss et Ramanujan ! Sa démonstration est élémentaire. Remarquons d'abord que

$$\frac{16}{16 - x^8} = \frac{1}{1 - \frac{x^8}{16}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{8n}}{16^n}.$$

Par suite,

$$\int_0^1 \frac{16x^k}{16 - x^8}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n(8n+k+1)}$$

et

$$16 \int_0^1 \frac{x^5 + x^4 + 2x^3 - 4}{x^8 - 16}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right).$$

Pour calculer l'intégrale, on utilise les fractions partielles. Remarquer les factorisations

$$x^8 - 16 = (x^2-2)(x^2+2)(x^2-2x+2)(x^2+2x+2),$$

$$x^5 + x^4 + 2x^3 - 4 = (x-1)(x^2+2)(x^2+2x+2).$$

Par suite,

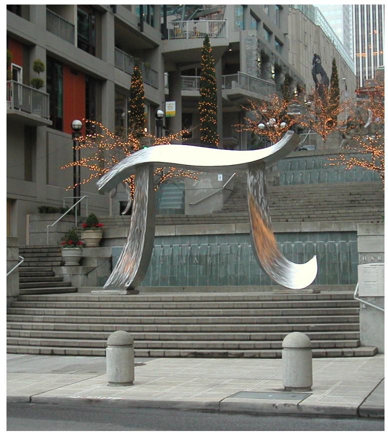
$$\frac{x^5+x^4+2x^3-4}{x^8-16} = \frac{x-1}{(x^2-2)(x^2-2x+2)} = \frac{1}{4}\left[\frac{x}{x^2-2} - \frac{x-2}{x^2-2x+2}\right].$$

Il vient

$$\begin{aligned}
8\int_0^1 \frac{x^5+x^4+2x^3-4}{x^8-16}\,dx &= \int_0^1 \frac{2x\,dx}{x^2-2} - \int_0^1 \frac{2x-4}{x^2-2x+2}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{2x\,dx}{x^2-2} - \int_0^1 \frac{(2x-2)\,dx}{x^2-2x+2} + 2\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2+1} \\
&= \log \frac{2-x^2}{x^2-2x+2}\Bigg]_0^1 + 2\arctan(x-1)\Bigg]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

9 Épilogue

Le calcul du nombre π est-il aujourd'hui plus qu'un amusement ? On peut le soutenir, car tout nouveau progrès dans le calcul de π dépend d'une avancée dans nos connaissances. On aurait détecté des erreurs dans la construction physique de certains ordinateurs en faisant tourner des programmes pour calculer π. Mais le propre de la science est de chercher à connaitre sans trop se soucier des applications. L'histoire des sciences a montré que les applications suivront bien un jour, peut-être beaucoup plus tard. Il parait raisonnable de penser que les intelligences extra-terrestres connaissent π, sous une forme ou une autre. Le nombre π sera-t-il toujours un mystère ?



π à Seattle

Références

[AH] J. Arndt, C. Haenel. π *unleashed*, Springer-Verlag, New York, Berlin.

[BBB] L. Berggren, J. Borwein et P. Borwein. π *a source book*. Springer-Verlag, New York, Berlin.

[D] J. Delahaye. *Le fascinant nombre* π*.* Bibliothèque pour la science, Diffusion Belin, 1997.

[EL] P. Eymard, J. P. Lafon. *Autour du nombre* π*.* Actualités Scientifiques et Industrielles [Current Scientific and Industrial Topics], 1443. Hermann, Paris, 1999.

[O] T.J. Osler. *The union of Vieta and Wallis products for* π, Amer. Math. Monthly Vol 106, 1999.

Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal
joyal.andre@uqam.ca

Publicat el 23 de juliol de 2008