

Matemáticas y literatura

María J. Rivera

Literatura y Matemáticas se dan la mano pocas veces en el territorio del relato. Cualquiera diría que los secretos de los números humildes se observan mejor desde la música o la poesía que desde la ficción. Algunos autores se han acercado al infinito de una forma casi mística para construir historias con más metafísica que matemáticas. Dino Buzzati es un autor atípico. Periodista, reportero de guerra, autor de corte kafkiano e ilustrador de sus propias historias, escribió un cuento incómodo, de esos que para entenderlo bien hay que coger papel y lápiz y traducir los datos al lenguaje de los números. Sólo se necesita paciencia y también no dejarse engañar por lo que parece importante pero resulta ser sólo superfluo. Y en un determinado momento, dar el paso de generalizar. Todo lo que plantea es muy sencillo y entra dentro de lo que llamaríamos matemática elemental, de modo que cualquier estudiante de primeros cursos de Instituto debería estar capacitado para entender hasta el fondo la tristeza del príncipe. Pero estoy casi segura de que muy pocos lectores lo han intentado. Ese es el reto.

Veamos en primer lugar el texto íntegro del cuento “Los siete mensajeros” de Dino Buzzati, publicado en italiano en 1942 (*I sette messaggeri*) y del que se puede encontrar la edición en castellano de Alianza editorial del 2005 bajo el título “Los siete mensajeros y otros relatos”.



Los siete mensajeros

de Dino Buzzati

Habiendo salido a explorar el reino de mi padre, día a día voy alejándome de la ciudad y las noticias que me llegan son cada vez más raras.

Comencé el viaje cuando tenía poco más de treinta años y han pasado ya más de ocho años, seis meses y quince días de ininterrumpido camino.

Creía, en el momento de partir, que en pocas semanas habría alcanzado los confines del reino; por el contrario, seguí encontrando nuevas gentes y países y en todas partes hombres que hablaban mi mismo idioma y que decían ser mis súbitos. A veces pienso que la brújula de mi geógrafo se ha enloquecido y que, creyendo avanzar siempre hacia el sur, en realidad damos vueltas sobre nuestros propios pasos sin aumentar jamás la distancia que nos separa de la capital; esto podría explicar por qué no estamos ahora junto a la extrema frontera.

Pero más frecuentemente me atormenta la duda de que este confín no existía, que el reino se extienda sin límite alguno y que, por más que yo avance, jamás podré arribar a la frontera. Empecé el viaje cuando tenía más de treinta años, demasiado tarde, quizás. Los amigos, los mismos familiares, se burlaban de mi proyecto, opinando que iba a despilfarrar los mejores años de mi vida. Pocos de mis leales, en realidad, aceptaron partir.

Si bien era algo descuidado —mucho más que ahora— me preocupé de poder comunicarme, durante el viaje, con mis seres queridos; entre los caballeros de la escolta elegí los siete mejores para que me sirvieran de mensajeros. Creí, ignorante de mí, que tener siete mensajeros era una verdadera exageración.

Con el transcurso del tiempo advertí, por el contrario, que eran ridículamente pocos, a pesar de que ninguno de ellos fue asaltado por los bandidos ni malogró su cabalgadura. Los siete me han servido con una tenacidad y una devoción que difícilmente podré recompensar.

Para distinguirlos con facilidad les puse nombres cuyas iniciales eran alfabéticamente progresivas: Alejandro, Benito, Carlos, Daniel, Eduardo, Federico, Gregorio.

Poco acostumbrado a estar lejos de mi casa, envié al primero, Alejandro, al caer la noche del segundo día de viaje, cuando habíamos recorrido ya unas ochenta leguas. A la noche siguiente, para asegurarme la continuidad de las comunicaciones, envié al segundo, después al tercero, después al cuarto,

consecutivamente, hasta la octava tarde del viaje en que partió Gregorio. El primero todavía no había regresado.

Llegó la décima noche mientras acampábamos en un valle deshabitado. Supe por Alejandro que su rapidez había sido menor a la prevista; había pensado que, yendo separado y en un corcel inmejorable, podría recorrer en el mismo tiempo el doble de distancia que nosotros, pero no había recorrido el doble, sino sólo una vez y media; en una jornadas, mientras nosotros avanzábamos cuarenta leguas, él avanzaba sesenta, pero no más.

Lo mismo pasó con los otros. Benito, que partió la tercera noche del viaje, retornó recién a la décima quinta; Carlos, que partió a la cuarta noche, nos alcanzó en la vigésima. Muy pronto comprendí que bastaba multiplicar por cinco los días que llevábamos viajando para saber cuándo volvería el mensajero.

Al alejarnos constantemente de la capital, el itinerario de los mensajeros se hacía cada vez más largo. Después de cincuenta días de camino el intervalo entre un arribo u otro comenzó a espaciarse sensiblemente; mientras antes veía llegar al campamento un mensajero cada cinco días, el intervalo llegó a hacerse de veinticinco días; la voz de mi ciudad, de esa manera, se volvía cada vez más apagada: pasábamos semanas enteras sin tener ninguna noticia.

Una vez que transcurrieron seis meses —ya habíamos atravesado los montes Fasani— el intervalo entre uno y otro arribo de los mensajeros aumentó a cuatro meses. Ahora ellos me traían noticias lejanas; el sobre me llegaba ajado, muchas veces con manchas de humedad, debido a las noches que el portador se había visto obligado a pasar al sereno.

Avanzábamos aún. En vano buscaba persuadirme de que las nubes que se deslizaban rápidamente sobre mí eran iguales a las de mi niñez, que el cielo de la ciudad lejana no era diferente de la cúpula azul que tenía sobre mí, que el aire era el mismo, igual el soplo del viento, idénticas las voces de los pájaros. Las nubes, el cielo, el aire, los vientos, los pájaros se me aparecían en verdad, como cosas nuevas y diversas; y yo me sentía extranjero.

¡Adelante! ¡Adelante! Vagabundos encontrados por la llanura me decían que los confines no estaban lejos. Yo incitaba a mis hombres a no descansar, borraba las palabras descorazonadoras que se formaban sobre sus labios.

Ya habían pasado cuatro años de mi partida. ¡Qué larga fatiga! La capital, mi casa, mi padre, se habían vuelto extrañamente remotos, casi no me parecían reales. Ahora pasaban fácilmente veinte meses entre las sucesivas apariciones de los mensajeros. Me traían curiosas misivas amarillentas por el tiempo y en ellas encontraba nombres olvidados, modos de decir insólitos para mí, sentimientos que no lograba comprender. A la mañana siguiente, después de

una sola noche de reposo, mientras nosotros nos poníamos en camino, el mensajero partía en dirección opuesta, llevando a la ciudad las cartas que yo había preparado en ese mismo tiempo.

Pero ya han transcurrido ocho años y medio. Esta noche cenaba solo en mi tienda cuando entró Daniel, que aún lograba sonreír, aunque estaba muerto de cansancio. Hace casi siete años que no lo veía. Durante todo este período larguísimo no ha hecho más que correr, atravesando praderas, bosques y desiertos, cambiando quién sabe cuántas veces de cabalgadura, para traerme el paquete de sobres que hasta ahora no he tenido deseos de abrir. Ya se fue a dormir y volverá a partir mañana mismo, al amanecer.

Partirá por última vez. Consultando el calendario calculé que, aunque todo salga bien, yo continuando mi camino como lo he hecho hasta ahora y él el suyo, no podré volver a ver a Daniel hasta dentro de treinta y cuatro años. Entonces tendré setenta y dos.

Pero comienzo a sentirme cansado y es probable que me muera antes. No lo volveré a ver. Dentro de treinta y cuatro años (quizás antes, mucho antes) Daniel descubrirá, inesperadamente, los fuegos de mi campamento y se preguntará por qué nunca antes le resultó el trayecto tan corto.

Como esta noche, el buen mensajero entrará en mi tienda con las cartas amarillas, llenas de absurdas noticias de un tiempo ya sepultado; pero se detendrá en el umbral y me verá inmóvil tendido sobre el camastro, flanqueado por dos soldados con antorchas, muerto.

¡Anda, pues, Daniel, y no me digas que soy cruel! Lleva mi último saludo a la ciudad donde nací. Tú eres la última ligazón con el mundo que en un tiempo fue también mío. Los mensajes recientes me han hecho saber que han cambiado muchas cosas, que mi padre ha muerto, que la corona pasó a mi hermano mayor, que me consideran perdido, que han construido altos palacios de piedra, allá, donde estaban las encinas a cuya sombra solíamos jugar. De cualquier manera, siempre seguirá siendo mi vieja patria. Tú eres la última atadura con ella, Daniel.

El quinto mensajero, Eduardo, que me alcanzará, si dios quiere, dentro de un año y ocho meses, no podrá volver a partir porque no tendrá tiempo de regresar. Después de ti, el silencio, ¡oh, dios mío!, a menos que encuentre los anhelados confines. Pero cuanto más avanzo, más me convenzo de que no existe frontera. No existe, sospecho, frontera alguna, por lo menos en el sentido que habitualmente le damos. No hay muralla de separación, ni ríos divisorios, ni montañas que cierran el paso. Probablemente atravesaré el límite sin ni siquiera advertirlo e, ignorante de mí, continuaré mi camino. Por eso

he decidido que cuando Eduardo y los demás mensajeros, después de él, me alcancen nuevamente, en vez de volver a tomar el camino de la capital, se me adelanten, para que yo pueda saber con anterioridad lo que me espera.

Desde hace un tiempo una ansiedad inusitada se apodera de mí por las noches y ya no se trata de la añoranza de las alegrías pasadas, como en los primeros tiempos del viaje; más bien es la impaciencia de conocer la tierra ignota a la que me dirijo.

Advierto —y no se lo he confiado hasta ahora a nadie— cómo de día en día, a medida que avanzo hacia la improbable meta, el cielo irradia una luz insólita como jamás había visto, ni siquiera en sueños. Ha quedado definitivamente atrás el último cielo azul.

Las plantas, los montes, los ríos que atravesamos, parecen hechos de una esencia diferente de lo ya conocido y el aire me acerca presagios que no sé transmitir.

Una nueva esperanza me llevará mañana por la mañana aun más adelante, en dirección a aquella montaña inexplorada que ahora ocultan las sombras de la noche. Una vez más levantaré el campamento, y Daniel desaparecerá en el horizonte en dirección opuesta, para llevar a la ciudad remota mi inútil mensaje.

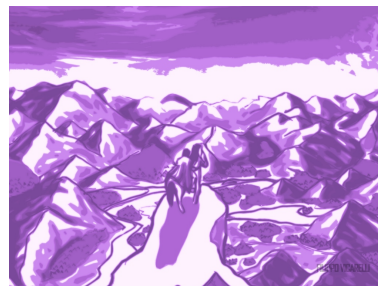


Ilustración de Filippo Vicarelli

Las matemáticas elementales del cuento: análisis detallado

Las matemáticas son ante todo un lenguaje. Los matemáticos, cuando se nos presenta un problema, si es posible lo primero que hacemos es traducirlo al lenguaje matemático. A cada actuación de los siete mensajeros la llamaremos ronda. Los nombres de los mensajeros son Alejandro, Benito, Carlos, Daniel, Eduardo, Federico, Gregorio, y Buzzati nos dice que no son reales sino que los ha elegido así por tener iniciales alfabéticamente progresivas, es decir, para establecer un orden de actuación entre ellos. Eso está muy bien para un cuento pero en matemáticas resulta totalmente inadecuado. Parece que lo más útil es recurrir a la herramienta de los subíndices,

y así $M_{i,k}$, $i = 1, 2, \dots, 7$, $k = 1, 2, \dots$, representa el mensajero i cuando hace la ronda k . Utilizaremos también subíndices para indicar el tiempo y el espacio que recorren los mensajeros y el príncipe en cada ronda.

Los matemáticos estamos acostumbrados a hacer hipótesis con el fin de establecer un modelo sencillo de la realidad. En la mayoría de los hechos reales intervienen tantos factores que sería imposible tenerlos todos en cuenta y por tanto nos encontraríamos ya desde el principio con una dificultad insalvable. Las hipótesis que haremos tienen por objeto simplificar el problema y hacerlo asequible a la hora de establecer cuál es su esencia. En este caso es el propio Buzzati quien indica cuáles deben de ser esas simplificaciones. Supondremos, como el autor sugiere, que todos ellos avanzan hacia los confines del reino con velocidad uniforme. El cuento establece esas velocidades en 40 leguas/día en el caso del príncipe y en 60 leguas/día para todos los mensajeros. En nuestro sencillo movimiento uniforme, se cumple que el espacio recorrido por un móvil es igual a la velocidad multiplicada por el tiempo que tarda en recorrerlo. Supondremos también, como hace el autor, que el camino es una especie de línea recta por la que hay que ir y volver; sin esa suposición, Buzzati lo sabe muy bien, caeríamos de nuevo en lo inabordable. Los dos primeros días de viaje van todos juntos, príncipe y mensajeros, y el ritmo, como no podría ser de otro modo, lo marca el príncipe. Por tanto en esos dos días la comitiva completa recorre 80 leguas.

Una vez establecidas esas premisas, vamos a describir los movimientos de los mensajeros durante la primera ronda de turnos. Los matemáticos lo haríamos de un modo más sintético, pero en ese caso la resolución se haría oscura para los no matemáticos. Preferimos inclinarnos por la claridad. Cuando haya peligro de confusión, el producto entre dos números a y b lo representaremos por " $a \times b$ ". Aplicamos una máxima de las matemáticas que suele ser muy útil: a menudo conviene más ver las operaciones que hacerlas.

Primera ronda

Mensajero 1:

Si $t_{1,1}$ es el tiempo medido en días que tarda el mensajero $M_{1,1}$ en ir a la capital del reino y volver, el espacio que recorre $M_{1,1}$ es $E_{1,1} = 60 t_{1,1}$ leguas. Durante ese tiempo el príncipe recorre $Ep_{1,1} = 40 t_{1,1}$ leguas. Como el mensajero, en esos $t_{1,1}$ días, ha tenido que recorrer además las 80 leguas que le separan de la ciudad y las 80 de vuelta, se tiene que verificar que

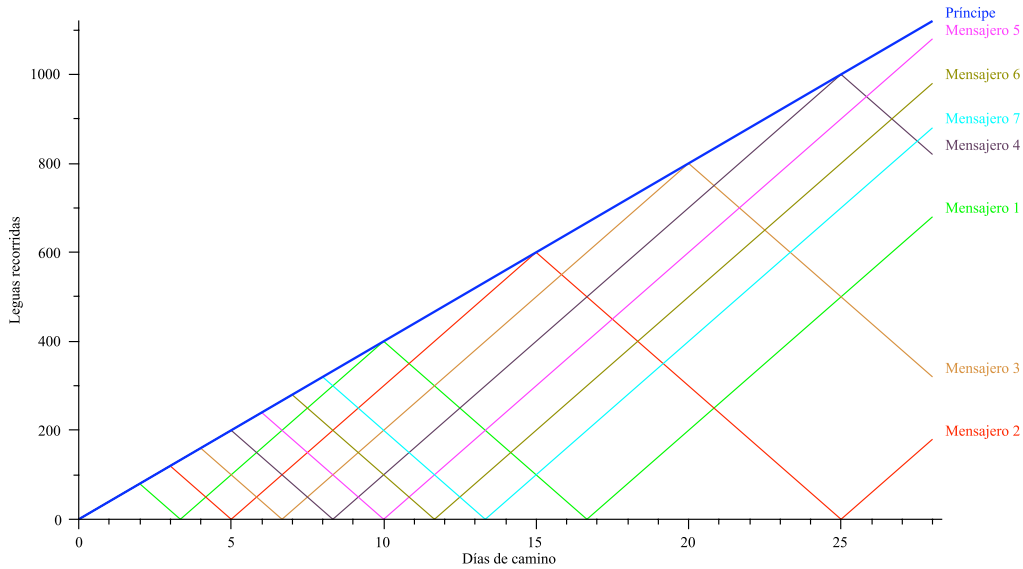


Figura 1: El recorrido de los siete mensajeros durante el primer mes.

$E_{1,1} - Ep_{1,1} = 80 \times 2$, es decir, $60 t_{1,1} - 40 t_{1,1} = 80 \times 2$, de donde se obtiene $t_{1,1} = 4 \times 2$. Por tanto el mensajero $M_{1,1}$, que salió el segundo día de viaje, encontró al rey el día $4 \times 2 + 2 = 5 \times 2$ del viaje, ver la figura 1.

Mensajero 2:

Si $t_{2,1}$ es el tiempo medido en días que tarda en mensajero $M_{2,1}$ en ir a la capital del reino y volver, el espacio que recorre $M_{2,1}$ es $E_{2,1} = 60 t_{2,1}$ leguas. Durante ese tiempo el príncipe recorre $Ep_{2,1} = 40 t_{2,1}$ leguas. Como $M_{2,1}$ salió un día después de $M_{1,1}$, en los $t_{2,1}$ días tuvo que recorrer además las $80 + 40$ leguas que le separan de la ciudad y las $80 + 40$ de vuelta, se tiene que verificar $E_{2,1} - Ep_{2,1} = 80 \times 2 + 80 = 80 \times 3$, de donde se obtiene $t_{2,1} = 4 \times 3$. Por tanto el mensajero $M_{2,1}$, que salió el tercer día de viaje, encontró al rey el día $4 \times 3 + 3 = 5 \times 3$ del viaje, ver de nuevo la figura 1.

Uno de los objetivos de las matemáticas es precisamente evitarnos repetir hasta la saciedad operaciones como esa. ¿Y cómo? Generalizando, tratando de encontrar alguna ley que nos permita realizar todos esos cálculos de un golpe.

Mensajero i :

Si $t_{i,1}$ es el tiempo medido en días que tarda en mensajero $M_{i,1}$ en ir a la capital del reino y volver junto al príncipe para contarle las noticias, el espacio que recorre $M_{i,1}$ es $E_{i,1} = 60 t_{i,1}$ leguas. Durante ese tiempo el príncipe recorre $Ep_{i,1} = 40 t_{i,1}$ leguas. Pero en esos $t_{i,1}$ días, $M_{i,1}$ tuvo que recorrer además $160 + (i - 1) 80 = 80 (i + 1)$ leguas, por tanto $E_{i,1} - Ep_{i,1} = 80 (i + 1)$, de donde se obtiene $t_{i,1} = 4 (i + 1)$. Por tanto el mensajero $M_{i,1}$ encuentra a la comitiva el día $4 (i + 1) + (i + 1) = 5 (i + 1)$ del viaje.

Buzzati nos obliga a hacer una reflexión: cuando sale el mensajero $M_{i,1}$, el príncipe lleva $i + 1$ días de viaje. Por tanto para saber cuándo va a volver cada mensajero en esa primera ronda, al príncipe le basta con multiplicar por cinco el número de días que lleva de viaje en el momento en que éste parte. Justo como nos dice Buzzati: parece que vamos bien. . . , por ahora.

Una de las cosas que nos enseñan las matemáticas es a ser desconfiados. Cuando parece que el problema está resuelto, nos damos cuenta de que la generalización que hemos hecho no puede ir más allá de esa primera ronda de turnos. ¿Por qué? Porque todo el razonamiento que hemos hecho hasta ahora se basa, entre otras cosas, en que los mensajeros, en esa primera ronda, van saliendo uno tras otro con un solo día de diferencia entre cada dos consecutivos. Pero claro, eso no podrá mantenerse en la segunda ronda. El noveno día de viaje ya han salido los siete mensajeros y no ha vuelto ninguno. El príncipe pasa un día solo y el décimo vuelve el primer mensajero como habíamos calculado y empieza la segunda ronda. ¿Qué pasa después?

Segunda ronda

El príncipe, impaciente, vuelve a mandar al primer mensajero a la capital del reino, pero hasta cinco días después no vuelve el segundo mensajero, luego en esta segunda ronda los mensajeros van saliendo a intervalos de cinco días. Parece que tenemos que volver a hacer cálculos. Si repetimos el mismo razonamiento que hicimos en la primera ronda pero incorporando esa diferencia, veremos que si en la primera ronda $t_{(i+1),1} - t_{i,1} = 4$, en la segunda $t_{(i+1),2} - t_{i,2} = 4 \times 5$. Por tanto si $M_{i,2}$ vuelve el día $D_{i,2}$, $M_{(i+1),2}$ vuelve $4 \times 5 + 5 = 5^2$ días más tarde, ver la figura 2.

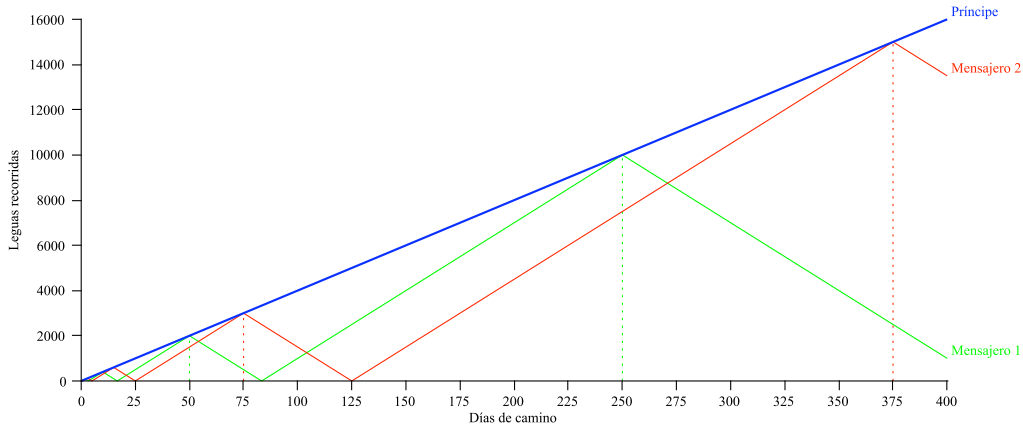


Figura 2: El recorrido de los dos primeros mensajeros durante el primer año.

Tercera ronda

Y en la tercera ronda los mensajeros van saliendo a intervalos de 5^2 días, y $t_{(i+1),3} - t_{i,3} = 4 \times 5^2$. Entonces si $M_{i,3}$ vuelve el día $D_{i,3}$, $M_{(i+1),3}$ vuelve $4 \times 5^2 + 5^2 = 5^3$ días más tarde, ver de nuevo la figura 2.

Otra vez podemos generalizar:

Ronda k -ésima

En la ronda k -ésima los mensajeros van saliendo a intervalos de $5^{(k-1)}$ días y $t_{(i+1),k} - t_{i,k} = 4 \times 5^{(k-1)}$. Entonces si $M_{i,k}$ vuelve el día $D_{i,k}$, $M_{(i+1),k}$ vuelve $4 \times 5^{(k-1)} + 5^{(k-1)} = 5^k$ días más tarde.

El príncipe empieza a tener problemas: la llegada de los mensajeros se va espaciando de forma rapidísima y el tiempo que pasa solo es cada vez mayor. La sucesión $\{5^k, k = 1, 2, \dots\}$, por tratarse de una exponencial con base mayor que uno, resulta letal: tiende a infinito rápidamente como se puede apreciar en la tabla adjunta. La angustia de que nos habla Buzzati está plenamente justificada: de forma inexorable llegará un día en que el príncipe estará solo para el resto de su vida, en que su edad finita no le alcanzará para volver a ver a ningún mensajero. Y entonces, justo antes de que eso suceda, en el momento en que calcula que si manda de nuevo a sus mensajeros a la ciudad los perderá para siempre, en vez de detener un proceso

absurdo que le conduce al desastre, ordena a sus emisarios no que vuelvan hacia atrás sino que le adelanten, por si con su andar más veloz logran algún día encontrar los confines del reino. A pesar de saber lo que sabe, el príncipe de Buzzati intenta lo imposible. La esperanza suele ser así de vana. Esa es la historia.

Ronda	Salida del mensajero 1	Días de viaje a la llegada del mensajero 1	Tiempo entre mensajeros
1	día 2	10 días	5 días
2	día 10	50 días	$5^2 = 25$ días
3	día 50	250 días (8 meses)	$5^3 = 125$ días (4 meses)
4	día 250	1250 días (3,4 años)	$5^4 = 625$ días (20 meses)
5	día 1250	6250 días (17,1 años)	$5^5 = 3125$ días (8,6 años)
6	día 6250	31250 días (85,6 años)	$5^6 = 15625$ días (42,8 años)
⋮	⋮	⋮	⋮

Tiempos de viaje de los mensajeros en función de la ronda.

Comentario final

Cuando el príncipe afirma *“Muy pronto comprendí que bastaba multiplicar por cinco los días que llevábamos viajando para saber cuándo volvería el mensajero”* ha llegado al quid de la cuestión ya que, con unos pocos cálculos más, se puede verificar que si un mensajero deja al príncipe el día d del viaje vuelve a encontrarse con él el día $5d$. A partir de este hecho se pueden reinterpretar todos los cálculos anteriores.



Departamento de Matemática Aplicada
 Universidad Politécnica de Valencia
mjrivera@mat.upv.es

Publicat el 6 de maig de 2009