MAT^2

MATerials MATemàtics
Volum 2010, treball no. 2, 34 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

La capacitat matemàtica, simplificadora i lúdica, en l'obra d'Euler.

Josep Pla i Carrera

1 Introducció

Leonhard Euler
Basilea, 15 d'abril de 1707
Sant Petersburg, 18 de setembre 1783

Aquest article es basa, de manera molt fidel, en els continguts que vaig exposar en la meva darrera lliçó[1] com a professor ordinari de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona. De fet, era una lliçó extraordinària, però, de forma volguda, la vaig desenvolupar dins del semestre *Història de la matemàtica: de l'època de Descartes a l'època d'Euler*, i alhora era la darrera classe del semestre.

És ben conegut que l'obra de Leonhard Euler constitueix una síntesi de les troballes d'alguns prohoms dels segles XVI i XVII, com ara Galileo Galilei [1564–1642], Johannes Kepler [1571–1630], René Descartes [1596–1650], Pierre de Fermat [1601–1665], Christiaan Huygens [1629–1695], Isaac Newton [1643–1727], Gottfried Wilhelm Leibniz [1646–1716], Jacob Bernoulli [1654–1705], Johann Bernoulli [1667–1748], entre d'altres.

En ella, doncs, vaig pretendre dos objectius: d'una banda, volia fer una classe una mica diferent, on quedés ben palès l'*enorme capacitat alliçonadora*

[1] Podeu consultar en aquest enllaç la introducció o "Introito" d'aquesta lliçó.

de la *Història de la matemàtica*, però d'una altra tenia molt d'interès d'inaugurar la *celebració del tercer aniversari del naixement* de Leonhard Euler [1707–1783], un dels matemàtics més insignes de tots els temps, i al mateix temps el matemàtic que donava nom a la darrera part del semestre d'història de la matemàtica que estava impartint. Fonamentalment estava interessat a posar de manifest —i això és el que recull aquest text— alguns fets.

En primer lloc, com és possible d'arribar a un mateix resultat però amb un canvi de *paradigma epistemològic*, quelcom que Euler fa amb una naturalitat i simplicitat que colpeix tota persona interessada a conèixer de primera mà com es desenvolupen les idees matemàtiques.

Seguidament, com és possible —i també en això Euler és un mestre— aprofitar un recurs —a voltes ben simple— per resoldre problemes que, d'antuvi, poden semblar ben diferents.

Una altra característica pròpia dels grans matemàtics és no fer escarafalls a cap mena de problema. Per això són capaços de posar el seu interès, la seva capacitat matemàtica, i el seu poder creador al servei de *problemes* que, a voltes, als matemàtics més mediocres ens poden semblar *problemes sense interès*. Sembla que aquests matemàtics ens diguin —figuradament és clar—, i en això Euler és també un mestre, les paraules següents:

> «Companys, no hi ha cap problema matemàtic menor, que no tingui interès matemàtic, i que no proporcioni punts de vista realment interessants i generalitzables».

I finalment, com mètodes que ens han semblat ben senzills, aplicats de forma adequada, porten el matemàtic a una profunditat creadora d'ens matemàtics que aclapara, durant segles, els matemàtics més profunds i rics. Aquesta és, doncs, en definitiva, la síntesi que pretenc d'oferir en aquest article que, alhora que parla d'Euler, parla també de com es fan les matemàtiques i de com cal que ens hi apropem.[2]

[2] Vull recordar que, per l'amabilitat i generositat de l'amic Sabastià Xambó, aquesta lliçó s'inclogué en el volum que la FEM de la UPC dedicà, l'any 2007, a l'insigne matemàtic suís en ocasió del tres-cents aniversari del seu naixement.

També vull fer palès el meu agraïment a l'oferiment del Departament de Matemàtiques de la UAB d'incloure-la en aquest número de la MAT^2. Aquesta publicació, en format electrònic, de la meva lliçó darrera permetrà quelcom que sempre desitgem tots els qui fem lliçons: arribar a un públic tan ampli com sigui possible, perquè el format electrònic és, quin dubte hi ha!, el millor camí per assolir-ho i també el més democràtic en el sentit que és a l'abast de tots els ciutadans i ciutadanes.

2 Tot emulant Euclides

És conegut que Euclides, a la proposició 20 del llibre nonè dels *Elements*, estableix el

> **Teorema (euclidià) dels nombres primers.** *Hi ha més nombres primers que qualsevol quantitat (finita) de nombres primers.*[3]

Aristòtil
Estagira, ∼384 aC
Chalcis, ∼322 aC

Euclides
?, ∼350 aC
Alexandria, ∼265 aC

Ambdues figures formen part de l'*Escola d'Atenes*, pintada per Rafael de Sanzio entre 1508 i 1511.[4]

És important adonar-se de la manera com Euclides enuncia el teorema, tot evitant l'expressió: "infinits nombres primers", a diferència de com l'enunciaríem actualment:

> **Enunciat actual del teorema d'Euclides.** *Hi ha infinits nombres primers.*

Aquest fet no és, en absolut, arbitrari, i m'interessa remarcar-lo.

A Grècia, i en concret a l'època d'Euclides, els ensenyaments d'Aristòtil prohibien l'*infinit actual.* Solament era acceptable l'*infinit potencial* o *infinit*

[3] Veieu [Euc], a [Ver70, I, pàgines 853–854].
[4] Actualment es troba a les *Estances de Rafael* a la ciutat del Vaticà.

sincategoremàtic.[5] Aquesta és la raó que obliga Euclides a establir l'enunciat anterior, i més important encara, una demostració sincategoremàtica del teorema dels primers d'Euclides.

Demostració.[7] Si $p_1, p_2, \ldots, p_m$ són nombres enters primers, aleshores el nombre enter $N = p_1 \times p_1 \times \cdots \times p_m + 1$ és primer o compost. Si és primer, hi ha un nombre primer que no pertany a la col·lecció finita $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$. Si és compost, hi ha un nombre primer p que divideix N, i $p \neq p_i, i = 1, \ldots, m$, com es veu fàcilment.[8] □

Arquimedes[6]
Siracusa, 287 aC
Siracusa, 212 aC

La impossibilitat d'usar l'infinit actual és també la raó per la qual Arquimedes de Siracusa, no pot sumar directament la sèrie geomètrica

$$\mathcal{T} + \frac{1}{4}\mathcal{T} + \frac{1}{4^2}\mathcal{T} + \cdots + \frac{1}{4^m}\mathcal{T} + \frac{1}{4^{m+1}}\mathcal{T} + \cdots{}^{9},$$

on $\mathcal{T}$ designa l'àrea del triangle inscrit en el segment de paràbola.[10]

Ha de recórrer, doncs, a la suma parcial *finita*

$$\mathcal{S}_m := \mathcal{T} + \frac{1}{4}\mathcal{T} + \frac{1}{4^2}\mathcal{T} + \cdots + \frac{1}{4^m}\mathcal{T},$$

i determinar aleshores el que avui anomenen el *romanent de la sèrie* $\mathcal{R}_m := \frac{1}{4^{m+1}}\mathcal{T} + \frac{1}{4^{m+2}}\mathcal{T}\cdots$. I així ho fa, tot afirmant que allò que cal afegir a $\mathcal{S}_m$ per aconseguir $a(P)$ és $\frac{1}{3}\frac{1}{4^m}\mathcal{T}$.

[5]Veieu [Ari34, $\Gamma\, 6, 206$ a 14-17; b 3-4, edició de 1934, pàgina 380]: ≪Ara "ser" s'usa en el sentit d'existir en acte o en potència, mentre que l'infinit és infinit per addició o per divisió. Ja hem establert que l'extensió espacial no és mai infinita en acte, però ho és per divisió [...] L'infinit per addició és, en aquest sentit, el mateix que l'infinit per divisió [...]≫. Ho podem resumir tot dient: "L'infinit per addició també és infinit potencial".

[6]La pintura, realitzada a Màntua l'any 1620, és de Domenico Fetti, pintor italià de l'època barroca. Giovanni Ventura Rossi la comprà per a la col·lecció d'August III de Saxònia. Avui és al museu d'art *Alte Meister* de Dresde (Alemanya).

[7]És molt coneguda.

[8]Veieu [Ver70, I, pàgines 853-854].

[9]D'haver-ho pogut fer —de ben segur que ho sabia fer— hauria obtingut la suma $a(P) = \frac{\mathcal{T}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\mathcal{T}$, que és el valor que buscava.

[10]En aquest context, "inscrit" significa el següent: Tenim un segment de paràbola, determinat per una corda d'extrems A i B, i un arc de paràbola. Tirem la tangent paral·lela a la corda AB del segment de paràbola. Determina un punt de tangència C. Aleshores $\mathcal{T} := \triangle ABC$.

Finalment, estableix que, afegint $\frac{1}{3}\frac{1}{4^m}\mathcal{T}$ a $\mathcal{S}_m$,[11] s'aconsegueix el valor $\frac{4}{3}\mathcal{T}$ que és precisament el valor $a(P)$ que corresponpon a l'àrea del segment de paràbola P. És a dir, obté la *quadratura del segment de paràbola*.[12]

Nicole d'Oresme
Allemagne, 1323
Lisieux, 11 de juliol de 1382

Al segle divuit, en l'entorn en què es desenvolupa la matemàtica d'Euler, el paradigma de l'infinit és un altre. Això és el que permet a l'il·lustre matemàtic suís fer servir, amb naturalitat, les *sèries infinites*. I, usant les idònies, de forma adequada, pot fer una demostració alternativa —epistemològicament i matemàtica molt diferent de la d'Euclides— de l'*existència d'infinits nombres primers*.

Per aconseguir el seu objectiu li fan falta tres resultats: Un és simplement aritmètic, però els altres dos fan referència explícita a les sèries, un objecte matemàtic aparegut durant el segle XVII. Aquests tres resultats són, en concret:

(1) **El teorema fonamental de l'aritmètica.** *Tot nombre natural és, si ometem l'ordre dels factors, un producte únic de nombres primers.*

(2) **Un teorema de Nicole d'Oresme.** *La sèrie harmònica és divergent.*[13]

(3) **Un teorema de convergència de les sèries geomètriques.** *Si* $x \in \mathbb{R}$, *amb* $|x| < 1$, *aleshores la sèrie geomètrica —és a dir, la sèrie* $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$ *— és convergent, i la seva suma és* $\frac{1}{1-x}$. [14]

---

[11] Aquest còmput el fa enrere: suma el darrer terme de $\mathcal{S}_m$ amb $\frac{1}{3}\frac{1}{4^m}\mathcal{T}$ —o sigui, $\frac{1}{4^m}\mathcal{T} + \frac{1}{3}\frac{1}{4^m}\mathcal{T}$— i obté $\frac{1}{4^{m-1}}\mathcal{T}$. Per tant, iterant un nombre *finit* de passos enrere, arriba a $\frac{4}{3}\mathcal{T}$.

[12] Veieu [Ver70, II, pàgines 236–237]. És clar que, per veure que efectivament s'obté el valor $a(P)$, ha de raonar per doble reducció a l'absurd, suposant que les dues possibilitats $a(P) > \frac{4}{3}\mathcal{T}$ i $a(P) < \frac{4}{3}\mathcal{T}$ menen a contradicció.

[13] Recordem que la *sèrie harmònica* és la sèrie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

Es constata amb facilitat que

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = 1 + 1 + 1 + \cdots .$$

[14] Dues observacions. A l'època d'Euler, en general, la qüestió de la convergència ni preocupava ni es precisava. Ara bé, quan x és un valor real per al qual existeix el valor de

Amb aquestes eines, Euler pot establir el resultat següent:

Teorema dels primers d'Euler. *No és possible que la col·lecció de nombres primers sigui finita.*[15]

Demostració. Euler suposa inicialment que només existeix una quantitat finita de nombres primers: $p_1, \ldots, p_m$. Aleshores, considera les sèries geomètriques

$$\frac{1}{1-p_i^{-1}} = 1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \cdots + \frac{1}{p_i^n} + \cdots, \text{ amb } i = 1, \ldots, m,$$

i observa que el producte d'aquestes sèries és finit. És a dir:

$$\prod_{i=1}^{m} \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \cdots + \frac{1}{p_i^n} + \cdots\right) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1-p_i^{-1}} = \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i}{p_i - 1}.$$[16]

Però, en virtut del teorema fonamental de l'aritmètica, el primer dels productes —el de l'esquerra— de la fórmula precedent és la sèrie harmònica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots .$$

perquè és precisament la suma de tots els productes finits dels inversos de totes les potències dels nombres primers.[17] Per tant, la sèrie harmònica seria convergent. Contradicció amb el resultat d'Oresme! □

la suma $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$, aleshores és fàcil, com tots sabem prou bé, determinar-ne el valor en funció de la variable x. Si fem $S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$, aleshores $x\,S = x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$. Si ara restem ambdues expressions resulta que $S(1-x) = 1$. Així docs, $S = \frac{1}{1-x}$.

[15]Veieu [Eul44, teorema 8, corol·lari 2]. Aquest article va ser presentat el 25 d'abril de 1727, però es va publicar l'any 1744. Euler ofereix també una demostració d'aquest teorema —l'existència d'infinits nombres primers— a [Eul48, volum I, capítol IX].

[16]Concretant,

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{p_m} + \frac{1}{p_m^2} + \cdots\right) = 2 \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{p_m}{p_m - 1},$$

que és un nombre racional.

[17]Només cal observar que la potència $p_1^{\mu_1} \cdots p_n^{\mu_n}$, on eventualment μ_i pot ser igual a zero, és un dels productes del primer membre que s'obté quan multipliquem el terme $\mu_1 + 1$ del primer factor amb el terme $\mu_2 + 1$ del segon, etc., amb el terme $\mu_n + 1$ del darrer.

Atenció. Pot sorprendre el fet que ens limitem a un nombre finit de nombres primers. Però el teorema fonamental de l'aritmètica només estableix que *tot nombre natural factoritza en nombres primers de forma única, si es prescindeix de l'ordre dels factors*, i no diu res de la quantitat de primers que hi ha d'haver.

3 Aprofitem un recurs: les particions

Ara veurem com Euler, amb aquella capacitat de síntesi que el caracteritza —una qualitat que fa que les seves descobertes siguin simples o, en tot cas, ho semblin, de simples— aprofita el recurs que li proporciona el fet de conèixer el valor de la suma de les sèries geomètriques per resoldre el problema de les *particions*.[18]

D'entrada plantegem el problema que vol resoldre l'eminent matemàtic.

Problema. *Volem determinar de quantes maneres diferents es pot aconseguir el nombre natural* n*, com a suma d'altres nombres naturals* $k < n$*, si no atenem l'ordre dels sumands.*

Com a exemple, veieu la taula adjunta.

$1 = 1;$	$2 = 2,$ $= 1+1;$
$3 = 3,$ $= 2+1,$ $= 1+1+1;$	$4 = 4,$ $= 3+1,$ $= 2+2,$ $= 2+1+1,$ $= 1+1+1+1;$
$\vdots$	$\vdots$

Primers casos del problema de les *particions* d'Euler

Hem obtingut, en aquests pocs casos particulars —$n = 1, 2, 3$ i 4— les *particions* $p(n)$ del nombre natural n. Si prosseguim amb més i més casos particulars, obtindrem la taula:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$	100
$p(n)$	3	5	7	11	15	22	30	42	$\cdots$	$190_1569.292$

La funció $p(n)$ creix de forma molt ràpida. Per exemple,

$$p(1\,000) = 24_5061.467_4864.032_3622.473_2692.149_1727.991\ .$$

No sembla, però, que la taula, ni encara que la perllonguem una mica més, proporcioni cap fórmula per a determinar la funció $n \mapsto p(n)$.

Tanmateix Leonhard Euler recorre a una propietat ben senzilla que tots hem après a l'escola, d'infants. És la llei següent:

[18] Ens basarem en el text [Eul48, volum I, capítol XVI].

Propietat del producte de les potències de la mateixa base. *Quan multipliquem dues potències de la mateixa base s'obté una altra potència de la mateixa base, que té com a exponent la **suma** dels exponents. És a dir,* $x^m \times x^n = x^{m+n}$.

La pregunta que cal fer-se és:

> *Podem usar, d'alguna manera, la propietat anterior per aconseguir que l'exponent de x sigui n, multiplicant potències de base x, i usant tots els nombres possibles?*

La resposta d'Euler és afirmativa.

De fet, tot rau a adonar-se del fet que els exponents de x en el producte

$$\begin{aligned}\left(1 + x^{1(=1)} + x^{2(=1+1)} + x^{3(=1+1+1)} + \cdots\right)& \\ \times \left(1 + x^{2(=2)} + x^{4(=2+2)} + x^{6(=2+2+2)} + \cdots\right)& \\ \times \left(1 + x^{3(=3)} + x^{6(=3+3)} + x^{9(=3+3+3)} + \cdots\right)& \\ \times \qquad\qquad \cdots\qquad\qquad & \\ = 1 + \cdots + a_n\, x^n + \cdots&\end{aligned}$$

proporciona un valor a_n que precisament és $p(n)$. O sigui, $a_n = p(n)$.

Aprofitant, doncs, *el recurs anterior* —el que proporciona el valor de la suma de les sèries geomètriques—, segons el qual

$$\frac{1}{1-x^k} = 1 + x^k + x^{2k(=k+k)} + x^{3k(=k+k+k)} + \cdots + x^{mk(=k+\overset{m)}{\cdots}+k)+\cdots},$$

en resulta que

$$1 + \cdots + p(n)\, x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^3} \times \cdots .$$

La qüestió ara és:

> *El mètode permet de determinar amb facilitat $p(n)$ en funció de n?*

La resposta d'Euler és simple i sorprenent:

> *Podem conèixer $p(n)$ en funció de $p(k), k < n$, amb un algorisme senzill suggerit pel càlcul anterior.*

Comencem multiplicant-ho tot pels denominadors. Obtenim:

$$1=\Big(p(0)\big(=1\big)+p(1)x+p(2)x^2+p(3)x^3+p(4)x^4+\cdots\Big)\\ \times(1-x)\times(1-x^2)\times(1-x^3)\times(1-x^4)\times\cdots=1.$$

Ara bé,

$$(1-x)\times(1-x^2)\times(1-x^3)\times(1-x^4)\times\cdots\\ =1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+\cdots$$

Per tant,

$$\big(1+p(1)\,x+p(2)\,x^2+\cdots+p(n-k)\,x^{n-k}+\cdots\big)\\ \times\big(1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+\cdots\pm x^q\pm x^{q'}\mp\cdots\big)=1.$$

D'on en resulta:

$$0=\big(p(1)-1\big)\,x+\big(p(2)-p(1)-1\big)\,x^2+\big(p(3)-p(2)-p(1)\big)\,x^3\\ +\cdots\\ +\begin{pmatrix} p(n)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-5)+p(n-7)\\ \quad -p(n-12)-p(n-15)+p(n-22)+p(n-26)\\ \quad -p(n-35)-p(n-40)+p(n-51)+\cdots\end{pmatrix}x^n+\cdots$$

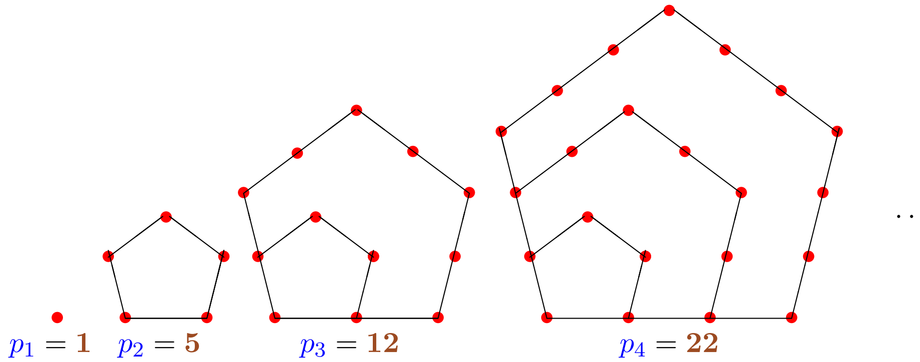
A partir d'aquesta igualtat —atès que tots els coeficients del polinomi anterior són idènticament nuls— Euler estableix el teorema que proporciona el valor de $p(n)$ en funció dels nombres $p(n-k)$, on k és un nombre pentagonal d'Euler. En concret,

$$p(n)=p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-p(n-7)+p(n-12)+p(n-15)-\cdots\,.$$

Els nombres $1,5,12,22,35,51,\ldots$, són els *nombres pentagonals*, ben coneguts pels matemàtics pitagòrics [segle VI aC] (veieu la figura següent).

Ara la qüestió que cal fer-se és:

I els altres nombres, qui són?



I aleshores Euler, amb aquella capacitat genial que tenia de copsar lleis generals de l'observació de casos particulars,[19] s'adona del fet següent:

Els nombres pentagonals grecs s'obtenen amb l'expressió

$$\text{pentagonal grec}(n) = \frac{3\,n^2 - n}{2}.$$

En canvi, els altres s'obtenen amb l'expressió

$$\text{pentagonal}^*(n) = \frac{3\,n^2 + n}{2}.$$

Així apareixen sintetitzats els *nombres pentagonals d'Euler*:

$$\frac{3\,n^2 \pm n}{2}.$$

Voldria indicar que ens hem limitat al cas en què els sumands poden repetir-se. Òbviament podríem preguntar-nos què passa si no acceptem la repetició dels sumands, i naturalment Euler s'ho pregunta i en dóna una resposta.[20] I encara, quantes sumes són possibles, si els sumands han de ser necessàriament senars? No m'hi entretindré perquè l'objectiu que m'he proposat no és fer una presentació detallada, acurada i completa de cada un dels exemples que tracto, sinò fixar-me en la capacitat integradora i simplificadora d'Euler que, amb aquesta presentació, és suficient.[21]

[19]Voldria, si m'ho permeteu, fer una observació de caire docent. Hauríem de tenir més cura de fer conjecturar resultats *plausibles* als nostres estudiants abans de mostrar-los el teorema general i la seva demostració. És a dir, hauríem de potenciar molt més el *mètode inductiu, heurístic* o, com l'anomenaria, Hilbert, *genètic* i, d'una manera particular, quan no ho sembla gaire, de plausible.

[20]Veieu [Eul48, volum I, capítol XVI, pàgines 253–275].

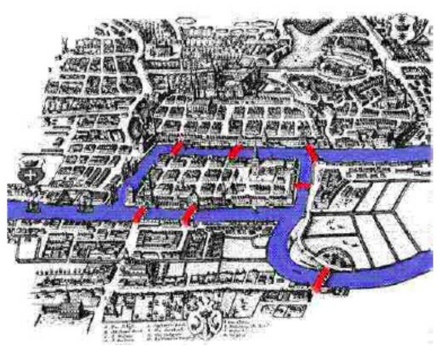
[21]Veieu, per exemple, [Eul50a].

Per acabar voldria indicar, tot seguint el propòsit de mostrar la capacitat d'interelacionar qüestions matemàtiques aparentment alienes, el treball relatiu a "una propietat de la funció $\sigma(n)$", on $\sigma(n)$, per a cada nombre natural n, computa la suma de tots els seus divisors.[22]

4 Tot problema és interessant: passejant per Könisberg

A l'època d'Euler a la ciutat de Könisberg (avui Kaliningrad) **no** aconseguien posar-se es d'acord amb el problema següent:

> **Problema dels ponts de Könisberg.** *És possible fer una passejada pels ponts del Pregel, a l'illa de Kneiphof, passant una vegada i només una per a cada un d'ells?*



Mapa dels ponts que unien les dues ribes del Pregel amb l'illa de Kneiphof

[22]És molt interessant observar, a [Eul50b, pàgines 81–83], la capacitat d'Euler per establir la "validesa" de les seves proposicions per camins realment inesperats i, a voltes, inversemblants.

L'anàlisi que, de la demostració d'Euler, fa Polya a [Pól56, 90–107], en un text sobre la "plausibilitat", un dels conceptes al qual cap matemàtic no hauria de renunciar mai abans d'establir la validesa formal d'un teorema, i un mestre no hauria d'oblidar mai en presentar un resultat, sobretot quan el resultat no ho sembla gens —veieu la nota 19—, de plausible, és remarcable.

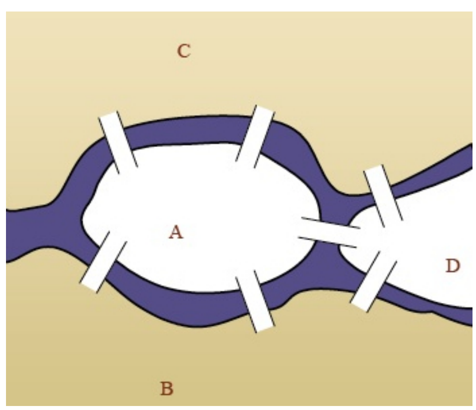
Per a una demostració curosa —i curiosa— podeu consultar [Apo76, pàgines 388–391, i 391–395], [And83], [And07], o http://garsia.math.yorku.ca/~zabrocki/math4160w03/eulerpnt.pdf.

Euler, no considera, en absolut, que aquest problema, que pot no semblar-nos un problema matemàtic, sigui un problema desprovist d'interès. Ben al contrari. Aquesta és una de les peculiaritats d'aquest insigne matemàtic suís. Considerar que no hi ha cap mena de problema que no cal resoldre. Però va més lluny. És capaç de copsar allò que de novell i de característic hi ha implícit en la seva naturalesa.

Aquesta curiositat insaciable i la seva enorme capacitat per captar allò que hi ha d'ocult i de general en cada problema és el que el porta a escriure, l'any 1736:

> . . . Ultra la geometria que tracta de les quantitats i que ha estat estudiada amb dedicació durant força temps, el primer a mencionar l'altra, fins aleshores desconeguda, fou G. Leibniz, que l'anomenà geometria de la posició ["geometria situs"]. Aquesta geometria només s'havia de preocupar de les posicions i de llurs propietats sense que entressin en joc les quantitats, ni el càlcul. . . Per això quan em vaig assabentar d'un cert problema que semblava de geometria, però que no precisava de la determinació de quantitats ni admetia solució pel càlcul que poguéssim fer amb elles, no vaig dubtar a referir-lo a la geometria de la posició. . . [23]

De fet, en el problema solament "hi ha terres" —illes i ribes— i "ponts". No hi ha distàncies ni cap altra mena de característica numèrica. Per això, segons Euler, l'únic que cal és donar nom a les illes i als ponts, i alhora una certa interpretació geomètrica. I així ho fa.



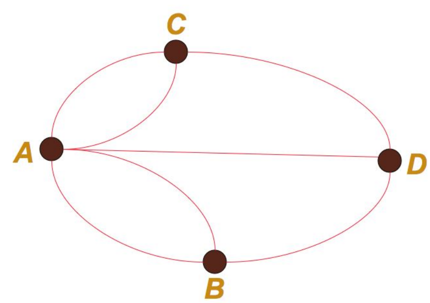
Representació més abstracta amb nom a les illes i ribes

Les terres les respresenta per mitjà *punts* i les anomena amb les *lletres*, A, B, C, D. Els ponts —o camins—, en canvi, els indica amb *línies* i els

[23]Veieu [Eul35, pàgines 128–129]

anomena usant *parelles de punts*, que corresponen als extrems de la línia, com ara, per exemple, AB. Així tenim

I molt més sintètic encara: Les terres les hem reduït a punts i els ponts a línies, tal com ja havíem indicat.



Ara, segons Euler, tot rau a considerar *dues regles*:

Regla 1: Escriure un *recorregut* és el mateix que escriure una *tirallonga* del tipus:

$$A\,C\,B\,D\,A\,\ldots$$

De fet, aquesta tirallonga indica, breument, la passejada següent:

> Èrem a A i hem anat a C per un dels ponts que uneix A amb C, i de C a B per un dels ponts que uneix C amb B, i de B a D per un dels ponts adequats, etc.

En resulta trivialment la llei següent:

> Si hi ha 7 ponts, la tirallonga ha de tenir 8 lletres.

La primera lletra indica la terra on estem inicialment. A partir d'aleshores afegim una lletra —que correspon al nom de l'indret a on arribem— cada cop que travessem un pont.

Regla 2: *El nombre de ponts* $n(A), n(B), n(C),$ *i* $n(D)$ *que incideix, respectivament, a cada una de les terres* A, B, C, *i* D, *és* senar. *Això fa que, a la tirallonga,* hi hagi d'haver*, doncs, en total:*

$$\frac{n(A)+1}{2}+\frac{n(B)+1}{2}+\frac{n(C)+1}{2}+\frac{n(D)+1}{2}$$
$$=3+2+2+2=9 \text{ lletres.}$$

En efecte. Fixem-nos, per exemple, en la terra A. Poden passar dues coses:

(1) Estem a A. Forçosament n'hem de sortit.

(2) Estem fora de A. Forçosament hi hem d'entrar.

Analitzem-les separadament:

(1) Suposem que estem a A i n'hem de sortir. Aleshores, com dèiem, n'hem de sortir necessàriament (ús del primer pont). Però, atès que, de ponts, *n'hi ha un nombre senar*, tard o d'hora *hi haurem de tornar a entrar* (ús del segon pont). Després n'hem de sortir, etc., i, per la imparitat del nombre de ponts, finalment *n'hem de sortir*. Tindrem, doncs, una tirallonga com ara

$$A\left\{\begin{array}{c} D \\ C \\ B \end{array}\right\}\cdots A\left\{\begin{array}{c} C \\ B \end{array}\right\}\cdots A\left\{\quad\right\}\cdots,$$

on la lletra A només hi apareixerà un nombre senar de vegades, tantes com ponts estiguin connectats amb la terra A.

En resulta que en calen *tres* $\left(=\frac{1}{2}\big(n(A)+1\big)\right)$ lletres A. Per analogia, calen *dues* lletres B i *dues* lletres C. Finalment, sempre en l'exemple concret dels ponts de Könisberg, cal *una* lletra D

En total, doncs, com dèiem, calen 9 lletres.

(2) Ens trobem a fora de A. Aleshores necessàriament hi hem d'entrar (ús del primer pont). Ara som al cas anterior, però solament disposem d'un nombre parell de ponts. Tindrem, doncs, una tirallonga com ara

$$\cdots\left\{\begin{array}{c} D \\ C \\ B \end{array}\right\}A\cdots.$$

En total calen també 9 lletres.

En resum, diu Euler: D'una banda, necessitem una tirallonga de 8 lletres, i de l'altra, una tirallonga de 9 lletres.

El problema dels ponts de Könisberg **no té solució**.

També, com en el problema de les particions, Euler va més lluny. Estén les lleis al cas general. Poden donar-se casos diversos:[24]

(1) En tots els casos —com s'esdevé en l'exemple concret dels ponts de Könisberg— el nombre de ponts que surt d'un territori és senar. Aleshores, com en l'exemple concret, podem concloure que el problema mai no tindrà solució?

(2) Hi ha casos en què el nombre de ponts que surten d'una regió és parell. Aleshores cal distingir dos casos:

   (a) El nombre de territoris on això passa és senar.

   (b) El nombre de territoris on això passa és parell.

   Què podem dir, en cada un d'aquests casos? La solució pot dependre del fet que sortim d'un territori que té un nombre parell de ponts, o bé del fet que hi entrem?

En matemàtiques, per comprendre allò que els nostres mestres ens han deixat —i en aquest cas Euler—, és bo mirar de completar-ho pel nostre compte, perquè, com diu Descartes al final de la *Géométrie*:

> Confio que els nostres néts em reconeixeran no només les coses que explícitament he exposat aquí, sinò també totes les que he omès voluntàriament per tal de deixar-los el plaer d'inventar-les.[25]

5 I fins i tot els jocs són dignes d'estudi: dels quadrats grecs i llatins

Leonhard Euler dedicarà també la seva atenció a l'estudi dels *quadrats màgics*. Hem de dir que és un estudi particular del tema que, a diferència d'altres, no assoleix la generalitat que acostuma a acompanyar els treballs d'Euler.[26]

[24]Veieu [New56, edició castellana, volum 4, pàgines 164-171], i [HW07].

[25]Veieu [Des37, edició catalana, pàgina 147].

[26]Hi ha força textos dedicats a l'estudi general dels quadrats màgics. En concret, per exemple, [Bou91] i [Des00].

Tanmateix hi dedica dos treballs i, d'alguna manera, és una qüestió d'interès perquè li permet de fer una *conjectura* i per la *metodologia* que fa servir per generar els quadrats màgics.[27]

La regla de Simon de la Loubère Tolosa [21 d'abril de 1642-Montesquieu-Volvestre (prop de París, 26 de març de 1729] era coneguda pels xinesos i pels àrabs.[28]

Simon de La Loubère
Du Royaume de Siam
Il·lustració de l'edició anglesa de 1693

Val la pena indicar que l'interès de la Loubère pels quadrats màgics es despertà quan Lluís XIV l'envià, en qualitat d'embaixador seu, a Siam, on visqué els anys 1687 i 1688. Les experiències d'aquells anys les traslladà a l'obra, en dos volums, *Du Royaume de Siam* [1691], on hi descriu el *mètode de construcció de quadrats màgics d'ordre senar* que avui porta el seu nom.

Recordem que un *quadrat màgic d'ordre* n és un quadrat fet amb nombres naturals —normalment amb els n primers nombres naturals $1, 2, 3, \ldots, n^2-2, n^2-1, n^2$—, col·locats en les cel·les d'un quadrat de manera que la suma dels nombres de cada una de les files i de cada una de les columnes sigui el mateix. Hom pot afegir-hi la condició suplementària que la suma de les dues diagonals també sigui la mateixa que la de les files i de les columnes.

Ara, un cop sabem el què entenem per un quadrat màgic, donem la regla de la Loubère per al cas 5×5.

Donat el quadrat 5×5 —el límits del qual hem representat entre línies més gruixudes—, el quadriculem en vint-i-cinc cel·les iguals, que podem designar $\langle i, j\rangle$, on l'índex i indica la columa i l'índex j la fila, començant a comptar per zero. Així la cel·la $\langle 2, 3\rangle$ és la que està en la columna tercera, comptada des de l'esquerra, i a la fila quarta, comptada des de baix. Perllonguem les línies horitzontals cap a la dreta i les verticals cap el nord, i fem que la cel·la $\langle 5, 5\rangle$ estigui ocupada, quelcom que indiquem amb una estrella.

Ara procedim segons les quatre regles següents:

(1) Col·loquem l'1 en la cel·la $\langle 2, 4\rangle$.

(2) Col·loquem els cinc primers nombres naturals en diagonal cap a la dreta i cap el nord, a partir del lloc ocupat per l'1.

[27] Veieu [Eul76] i [Eul82].
[28] Veieu [Jos91, pàgines 148–156].

(3) Després tirem un lloc a l'esquerra de l'1 i dos llocs cap avall i col·loquem el sis i fins al deu, seguint la regla anterior. Iterem el procés.

(4) Quan una cel·la queda fora del quadrat original, hem d'entendre que li correspon dins el quadrat la cel·la que queda determinada agafant residu mòdul 5. Així, per exemple, el nombre 16 l'hauríem de col·locar, segons la regla tercera a la cel·la $\langle -1, -2\rangle$ que, dins el quadrat, li correspon la cel·la $\langle 4, 3\rangle$. I ho anem repetint fins a exhaurir els vint-i-cinc nombres.

De fet, només hi ha dues regles:

(1) la regla de col·locació de l'1

(2) la regla de salt que, en el nostre cas és $\langle -1, -2\rangle$, restaurant després mòdul 5.

			8							5		
			7						4			20
			6					3	10		19	
			5				2	9	★	18	25	
			4	17	24	1	8	15	17	24		
			3	23	5	7	14	16	23			
			2	4	6	13	20	22				
			1	10	12	19	21	3				
			0	11	18	25	2	9				
				0	1	2	3	4	5	6	7	8

Per comprendre-ho millor, separem, els nombres 1 al 25, segons les *unitats* de 1 a 5: $y := 1, 2, 3, 4$ i 5, i les *quinquenes*: $\mathbf{x} := \mathbf{0}, \mathbf{5}, \mathbf{10}, \mathbf{15}$ i $\mathbf{20}$. És a dir, els podem escriure en la forma $\mathbf{x} + y$:

$$\begin{array}{rrrrr}
\mathbf{0}+1 & \mathbf{0}+2 & \mathbf{0}+3 & \mathbf{0}+4 & \mathbf{0}+5 \\
\mathbf{5}+1 & \mathbf{5}+2 & \mathbf{5}+3 & \mathbf{5}+4 & \mathbf{5}+5 \\
\mathbf{10}+1 & \mathbf{10}+2 & \mathbf{10}+3 & \mathbf{10}+4 & \mathbf{10}+5 \\
\mathbf{15}+1 & \mathbf{15}+2 & \mathbf{15}+3 & \mathbf{15}+4 & \mathbf{15}+5 \\
\mathbf{20}+1 & \mathbf{20}+2 & \mathbf{20}+3 & \mathbf{20}+4 & \mathbf{20}+5
\end{array}$$

Escrivim ara el *quadrat de la Loubère* d'acord amb aquesta descomposició: A cada fila i a cada columna hi ha un nombre **en negreta** diferent i un nombre escrit normal, diferent.

Aquesta anàlisi suggereix una idea molt interessant: descompondre un quadrat màgic en la *suma* de dos *quadrats llatins*.

15 + 2	**20** + 4	**0** + 1	**5** + 3	**10** + 5
20 + 3	**0** + 5	**5** + 2	**10** + 4	**15** + 1
0 + 4	**5** + 1	**10** + 3	**15** + 5	**20** + 2
5 + 5	**10** + 2	**15** + 4	**20** + 1	**0** + 3
10 + 1	**15** + 3	**20** + 5	**0** + 2	**5** + 4

Philippe de la Hire
París, 18 de març de 1640
París, 21 d'abril de 1718

És la idea que adoptà, en diversos treballs, Philippe de la Hire [1640–1718], publicats conjuntament l'any 1770, i que serveix per a quadrats d'ordre senar i d'ordre parell $\neq 4k$.

15	**20**	**0**	**5**	**10**
20	**0**	**5**	**10**	**15**
0	**5**	**10**	**15**	**20**
5	**10**	**15**	**20**	**0**
10	**15**	**20**	**0**	**5**

2	4	1	3	5
3	5	2	4	1
4	1	3	5	2
5	2	4	1	3
1	3	5	2	4

Euler va tenir la mateixa idea, distingint els *quadrats llatins* dels *quadrats grecs*. L'única diferència que hi ha entre uns i altres és que, en l'un, usava lletres llatines per a designar els grups de nombres i, en l'altre, lletres gregues.

De fet, però, podem pensar que un d'ells fa el paper de les xifres $1, 2, 3, 4, 5$ i l'altre, el de les decenes **0**, **5**, **10**, **15**, **20**.

a	b	c	d	e
b	c	d	e	a
c	d	e	a	b
d	e	a	b	c
e	a	b	c	d

α	δ	β	ϵ	γ
β	ϵ	γ	α	δ
γ	α	δ	β	ϵ
δ	β	ϵ	γ	α
ϵ	γ	α	δ	β

Perquè tot rutlli quan els conjuntem, Euler introdueix la idea d'*ortogonalitat* de dos quadrats llatins.

Ortogonalitat de quadrats llatins. *Dos quadrats* $Q_1 := \left[a_{ij}\right]$ *i* $Q_2 := \left[\alpha_{ij}\right]$ *són ortogonals si, i només si, el quadrat llatí* $Q_1 + Q_2$ *que s'obté per la unió dels quadrats* Q_1 *i* Q_2*,* $Q_1 + Q_2 := \left[a_{ij}\,\alpha_{ij}\right]$*, té totes les parelles diferents.*

Aleshores s'obté un *quadrat grecollatí*.

Els dos quadrats 5×5 de l'exemple anterior són ortogonals. Per tant, assignant valors numèrics adients a les lletres gregues i llatines, generen un quadrat grecollatí i, de retruc, un quadrat màgic.

En canvi la parella següent de quadrats no és ortogonal:

a	b	c	d	e
b	c	d	e	a
c	d	e	a	b
d	e	a	b	c
e	a	b	c	d

α	δ	β	ϵ	γ
δ	β	ϵ	γ	α
β	ϵ	γ	α	δ
ϵ	γ	α	δ	β
γ	α	δ	β	ϵ

La conjunció d'ambdós no genera un quadrat màgic.

En definitiva, Euler veient que no podia construir cap quadrat grecollatí 6×6 va plantejar, l'any 1782, el *problema dels sis oficials dels sis regiments*:[29]

Problema dels sis oficials dels sis regiments. *Com hem de disposar 36 oficials de sis graus diferents, pertanyents a sis regiments diferents, en un quadrat de manera que cada línia i cada columna contingui un oficial de cada regiment i de cada grau?*

[29] Veieu [Bal92, pàgines 189–192], i [KS07].

Segons Euler:

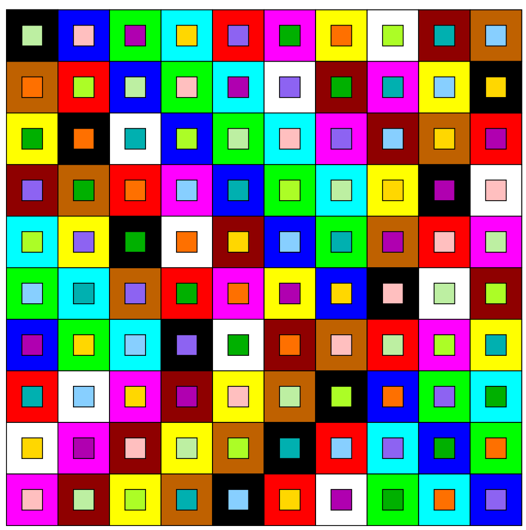
(1) Això no és possible.

(2) No hi ha quadrats grecollatins d'ordre $2n$, per a $n > 2$.

Les respostes a les conjectures d'Euler són:

(1) L'any 1901, un matemàtic amateur francès, Gaston Tarry [Villefranche de Panat (França), 27 de Setembre de 1843-Algèria, 21 de juny de 1913], va aconseguir establir la certesa de la primera de les conjectures d'Euler.

(2) En canvi, més de cinquanta anys més tard, en els anys 1959 i 1960, els matemàtics americans Bose, Parker i Shirkhande van establir que la segona conjectura és falsa.[30]



Quadrat grecollatí 10×10

6 Quan Euler és seriós, Déu n'hi do: una sèrie i una funció

Però Euler —al costat de qüestions que molts dels nostres insignes col·legues i, potser fins i tot alguns estudiants, podrien considerar poc interessants—

[30] Per a més informació veieu l'excel·lent conferència de Josep M. Brunat Blay [Bru10].

és capaç de fer treballs d'una profunditat i qualitat que no pot deixar de sorprendre'ns. Una de les raons d'aquesta sorpresa és la capacitat per fer salts, que en qualsevol altre resultarien mortals, però que, en ell, són d'una naturalitat que fa venir calfreds.

De fet, en l'article de 1768 que comentarem,[31] Euler fa la sumació de la sèrie

$$\zeta(2)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

que tant de joc donarà a l'història de la matemàtica, sobretot després del famós article de Georg Friedrich Bernhard Riemann de 1859.[32]

Sigui $X^n + a_1\, X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + 1$ un polinomi real.

G. F. B. Riemann
Breselenz (Hannover, Alemanya), 17 de setembre de 1826
Selasca (Itàlia), 20 de juliol de 1866

D'acord amb les *fórmules de Girard-Viète* sabem que, si $\alpha_1,\dots,\ \alpha_n$ en són les arrels, aleshores

$$\begin{aligned}\pm a_{n-1} &= \alpha_1\cdots\alpha_{n-1}+\cdots+\alpha_2\cdots\alpha_n,\\ \mp 1 &= \alpha_1\ \cdots\ \alpha_n.\end{aligned}$$

Per tant,

$$-a_{n-1}=\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}.$$

La pregunta que es planteja aleshores Euler és la següent:

> Podem aplicar-ho a un polinomi infinit de manera que les arrels que invertim resolguin la qüestió?

Si volem sumar una *infinitat de termes*, precisem d'una sèrie. Alhora cal, si volem estendre la propietat anterior a *polinomis infinits* —sèries—, considerar la que resulti adequada per aconseguir que els termes de la sèrie provinguin de les arrels.

Euler s'adona que tot rau a considerar la sèrie

$$(\sin x =)\, x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots\ ,$$

[31] Aquesta secció es basa en l'article d'Euler [Eul68].
[32] Veieu, per exemple, [Bay84, pàgines 101–102], [Bay07], [Pla07].

que, quan $x \neq 0$, podem reescriure en la forma

$$\left(\frac{\sin x}{x} = \right) 1 - \frac{1}{3!} y + \frac{1}{5!} y^2 - \cdots \,,$$

on $y = x^2$. Les seves arrels són $x = \pm k\,\pi$, amb $k \in \mathbb{N}, k \neq 0$. Per tant, $y = k^2\,\pi^2$, amb $k \in \mathbb{N}, k \neq 0$.

Apliquem l'esmentada llei de Girard-Viète i obtenim:

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\,\pi^2} + \cdots + \frac{1}{k^2\,\pi^2} + \cdots = \frac{1}{6},$$

d'on, finalment, en resulta, com volíem, que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ara, Euler, amb aquella naturalitat que el caracteritza, usa les *fórmules de Girard-Newton* —són les lleis que proporcionen la suma dels quadrats, cubs, quartes, etc. potències de les arrels d'un polinomi—, però aplicades a les arrels de la sèrie anterior.

D'aquesta manera obté un grapat de sumes infinites. Són les sumes:

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots &= A\,\pi^2, & A = \frac{1}{6}, \\
\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots &= B\,\pi^4, & B = \frac{2}{5}\,A^2, \\
\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \cdots &= C\,\pi^6, & C = \frac{4}{7}\,A\,B, \\
\frac{1}{1^8} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \cdots &= D\,\pi^8, & D = \frac{4}{9}\,A\,C + \frac{2}{9}\,B^2, \\
\frac{1}{1^{10}} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \cdots &= E\,\pi^{10}, & E = \frac{4}{11}\,A\,D + \frac{4}{11}\,B\,C, \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array} \tag{1}$$

I seguidament diu textualment que, canviant els signes alternativament, obté les sèries de la nostra segona espècie:[33]

[33] "D'où je conclu pour les séries de nostre seconde espece, en faisant varier alternative-

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots &= \frac{2-1}{2}\,A\,\pi^2,\\
\frac{1}{1^4}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\cdots &= \frac{2^3-1}{2^3}\,B\,\pi^4,\\
\frac{1}{1^6}-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}-\frac{1}{4^6}+\cdots &= \frac{2^5-1}{2^5}\,C\,\pi^6,\\
\frac{1}{1^8}-\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}-\frac{1}{4^8}+\cdots &= \frac{2^7-1}{2^7}\,D\,\pi^8,\\
\frac{1}{1^{10}}-\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}-\frac{1}{4^{10}}+\cdots &= \frac{2^9-1}{2^9}\,E\,\pi^{10},\\
\vdots \qquad\qquad & \qquad \vdots
\end{aligned}
\tag{2}
$$

D'altra banda, a la sèrie geomètrica $1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots=\frac{1}{1+x}$, Euler li aplica iteradament l'operador *multiplicar per x seguit de $\frac{d}{dx}$*, i aconsegueix:

ment les signes", a [Eul68, pàgines 85–86].

Nosaltres podem conjecturar que simplement féu el càlcul següent:

$$K_n\pi^{2n}=\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}+\cdots$$

implica

$$K_n\pi^{2n}-\left(\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}+\cdots\right)=\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\cdots$$

Per tant,

$$K_n\pi^{2n}-2\left(\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}+\cdots\right)=\frac{1}{1^{2n}}-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}-\cdots$$

En resulta que

$$K_n\pi^{2n}-\frac{2}{2^{2n}}\left(\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots\right)=\frac{1}{1^{2n}}-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}-\cdots,$$

que finalment mena a

$$K_n\pi^{2n}-\frac{1}{2^{2n-1}}K_n\pi^{2n}=\frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n-1}}K_n\pi^{2n}=\frac{1}{1^{2n}}-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}-\cdots,$$

com volíem.

$$\begin{aligned}
1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-\cdots &= \frac{1}{(1+x)^2},\\
1-2^2x+3^2x^2-4^2x^3+5^2x^4-\cdots &= \frac{1-x}{(1+x)^3},\\
1-2^3x+3^3x^2-4^3x^3+5^3x^4-\cdots &= \frac{1-4x+xx}{(1+x)^4},\\
1-2^4x+3^4x^2-4^4x^3+5^4x^4-\cdots &= \frac{1-11x+11xx-x^3}{(1+x)^5},\\
1-2^5x+3^5x^2-4^5x^3+5^5x^4-\cdots &= \frac{1-26x+66xx-26x^3+x^4}{(1+x)^6},\\
1-2^6x+3^6x^2-4^6x^3+5^6x^4-\cdots &= \frac{1-57x+302xx-302x^3+57x^4-x^5}{(1+x)^7},\\
\vdots \qquad\qquad &\vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Aleshores fa $x = 1$ i d'acord amb els valors de A, B, C, D, etc. de (1), obté:

$$\begin{aligned}
1-2^0+3^0-4^0+5^0-6^0+\cdots &= \frac{1}{2},\\
1-2^1+3^1-4^1+5^1-6^1+\cdots &= \frac{1}{4} = +1\times\frac{2^2-1}{2}A,\\
1-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots &= 0,\\
1-2^3+3^3-4^3+5^3-6^3+\cdots &= -\frac{2}{16} = -1\times 2\times 3\times\frac{2^4-1}{2^3}B,\\
1-2^4+3^4-4^4+5^4-6^4+\cdots &= 0,\\
1-2^5+3^5-4^5+5^5-6^5+\cdots &= \frac{16}{64} = +1\times 2\times\cdots\times 5\times\frac{2^6-1}{2^5}C,\\
1-2^6+3^6-4^6+5^6-6^6+\cdots &= 0,\\
1-2^7+3^7-4^7+5^7-6^7+\cdots &= -\frac{272}{256} = -1\times 2\times\cdots\times 7\times\frac{2^8-1}{2^7}D,\\
\vdots \qquad\qquad &\vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Seguidament divideix aquestes darreres expressions per les (2) de la pàgina anterior i obté les sorprenents relacions següents:

$$\begin{aligned}
\frac{1-2+3-4+5-6+\cdots}{1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\cdots} &= +\frac{1(2^2-1)}{(2-1)\pi^2},\\
\frac{1-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots}{1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{6^3}+\cdots} &= 0,\\
\frac{1-2^3+3^3-4^3+5^3-6^3+\cdots}{1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}-\frac{1}{6^4}+\cdots} &= -\frac{3!(2^4-1)}{(2^3-1)\pi^4},\\
\frac{1-2^4+3^4-4^4+5^4-6^4+\cdots}{1-\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}-\frac{1}{4^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{6^5}+\cdots} &= 0,\\
\frac{1-2^5+3^5-4^5+5^5-6^5+\cdots}{1-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}-\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}-\frac{1}{6^6}+\cdots} &= +\frac{5!(2^6-1)}{(2^5-1)\pi^6},\\
\vdots \qquad\qquad & \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

En general, d'acord amb allò observat, obté:

$$\frac{\Phi(1-n)}{\Phi(n)} = N(n) \times \frac{(n-1)!(2^n-1)}{(2^{n-1}-1)\pi^n},$$

on

$$\Phi(m) = 1 - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} - \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} - \frac{1}{6^m} + \cdots$$

i $N(n) = \left\{ \begin{array}{rl} +1, & \text{si } n = 4\,k+2, \\ 0, & \text{si } n = 4\,k \pm 1, \\ -1, & \text{si } n = 4\,k \end{array} \right\}.$

Per tant,

$$\frac{\Phi(1-n)}{\Phi(n)} = \frac{-(n-1)!(2^n-1)}{(2^{n-1}-1)\pi^n} \cos\frac{n\,\pi}{2}$$

Aleshores Euler diu:

> Per tot això aventuro proposar la conjectura següent: l'expressió anterior val per a tot valor de l'exponent n.

És a dir,

$$\frac{\Phi(1-s)}{\Phi(s)} = \frac{-(2^s-1)(s-1)!\cos\frac{s\pi}{2}}{(2^{s-1}-1)\pi^s}.$$

Hi ha, però, un problema:

Quin és el significat de s!?

Però Euler l'ha resolt en un altre indret introduint la *funció gamma* $\Gamma(s)$ que, quan s és enter positiu, coincideix amb $(s-1)!$.[34]

I afegeix:

És una conjectura molt agosserada.

En definitiva, usant una terminologia actual i atès que, com ja hem usat a la nota explicativa 33,

$$\Phi(s) = \bigl(1 - 2^{1-s}\bigr)\zeta(s),$$

Euler ha establert el resultat següent:

$$\zeta(1-s) = \pi^{-s}\, 2^{1-s}\, \Gamma(s) \cos\frac{s\,\pi}{2}\, \zeta(s),$$

que és realment notable per a l'època i fins i tot actualment.

* * *

En aquesta secció he estat molt seriós i detallista i ho he fet intencionadament. Volia respectar al màxim l'estil i el contingut d'Euler. Hem establert, tal com ell ho féu, un grapat de sumes de sèries i la funció zeta (real).

Tanmateix cal observar que $\Phi(s)$ solament és convergent quan $s > 0$ però, en el raonament anterior, l'hem —seguint sempre Euler— usada per a valors *negatius* de s.

Ens trobem amb un problema realment important: el problema de les *sèries divergents*, i l'ús que podem fer-ne en les demostracions matemàtiques, un ús que, l'any 1826, Abel considerà del tot nefast.[35] Però, per a Euler, la

[34] Veieu [Eul38, pàgines 44, i 46–47].

[35] Bastant més tard, el 1826, Abel es va fer ressò d'aquest sentiment i va dir, en una carta de gener d'aquell any a Holmböe [HSLS02, pàgina 16]:

> Les sèries divergents són *in toto* una invenció del Dimoni i és una desgràcia que ningú s'arrisqui a fundar-hi la més mínima demostració. [...]Si hom fa excepció dels casos de més extrema senzillesa —per exemple, les sèries geomètriques— no hi ha gairebé en totes les matemàtiques una sola sèrie infinita la suma de la qual es pugui determinar de manera rigorosa. [...]Moltes de les coses són exactes, és veritat, i això és extraordinàriament sorprenent.

En la línia de la manera de fer d'Euler en l'ús de les sèries, veieu l'excel·lent article [BVP07].

qüestió era una altra i així ho fa palès a l'article relatiu a les sèries divergents, quan diu textualment:

> [...] Atès que, en anàlisi, les sèries sorgeixen del desenvolupament de fraccions, expressions irracionals o àdhuc transcendents, en el càlcul s'ha de permetre substituir, allà on calgui, la sèrie per l'expressió que l'ha generada. Si usem aquesta definició de suma, tots els dubtes relatius a les sèries divergents desapareixen i ja no hi hauria d'haver cap mena de controvèrsia sobre aquesta qüestió, perquè aquesta definició és aplicable alhora a les sèries convergents i a les divergents.[36]

7 Exhordi: "Ite missa est"

Amb aquests exemples queda ben palesa la gran naturalitat amb què Euler analitza els problemes tant pel que fa a la metodologia com pel que fa al tema. Res no li és estrany, res no li és abstrús: sempre hi ha un camí, el camí admet generalitzacions i, a voltes, planteja qüestions noves que, en cap cas, s'han de defugir.[37]

Per això m'ha semblat adequat acabar aquest article —que no és altra cosa que la lliçó darrera, escrita amb més cura— amb les paraules amb les qual em vaig acomiadar dels meus familiars, col·legues i estudiants, a la Facultat

[36] Veieu [Eul60, 211–212]. Val a dir que a l'època d'Euler era important perquè hom desconeixia encara el significat exacte d'aquest fet i la necessitat d'evitar-les. Vegeu, per exemple, `http://www.maa.org/editorial/euler/How%20Euler%20Did%20It%2032%20divergent%20series.pdf`. Però, després d'Henri Poincaré, les sèries divergents asimptòtiques adquireixen tot un nou significat que ha donat moltíssims fruits i encara avui el seu estudi és una qüestió ben actual. Com a primera aproximació, podeu consultar [BG97, pàgines 19, 45–46, 103, 113–114, 116, 126–127, 141–142, 156, 157–159, 191, 223].

[37] En homenatge a Euler la MAA ha publicat diversos llibres relacionats amb la vida i l'obra d'Euler. D'entre ells val la pena esmentar l'editat per William Dunham —conté un recull d'articles de 34 autors diferents publicats des de finals del segle XIX— i el de C. Edward Sandifer —que recull una cinquantena de treballs originals d'Euler, de la primera època. Ambdues obres [veieu [Dun07] i [San07b]] —que vaig conèixer un cop ja havia donat la lliçó aquí recollida— palesen a bastament la intenció que vaig mirar de donar en aquella acasió. I ara, en el moment de tancar aquest text [dia 20 de setembre de 2007], he rebut el *200 Summer/Fall Catalog* de la MAA, on veig que acaben d'aparèixer tres obres més dedicades a l'insigne matemàtic suís i la seva obra, però que encara no he tingut ocasió de consultar. Són [BMe07], [BDe07], i [San07a], on l'autor recull els textos que ja havia penjat a l'adreça `http://www.maa.org/news/howeulerdidit.html`.

de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona, el dia 22 de desembre de 2006.

Abans, en començar, he dit que era afortunat.[38] I ho he dit perquè haver pogut ensenyar matemàtiques a la Universitat on em vaig formar, a més de satisfer plenament el meu desig —ser professor, ser professor de matemàtiques, ser professor universitari de matemàtiques— m'ha permès, com ja vaig intentar d'exposar a la novel·la *Damunt les espatlles dels gegants*, enfilar-me prou amunt per veure-hi prou lluny i, després, mirar de transmetre-ho.

Ara hi voldria afegir una altra raó. He estat afortunat perquè la meva feina m'ha permès de ser copartícep de la civilització occidental, encara que només hagi estat com a transmissor d'una certa manera de comprendre els seus valors. És una tradició que té molts defectes, em direu, i certament és així, però també ha tingut molts d'encerts.

S'inicià amb el "racionalisme grec" que realimentat pels aires orientals de l'islam portà al racionalisme del segle XVII, amb homes de ciència com Galileo, Kepler, Descartes i Newton, per esmentar solament els pioners, i Euler, com a síntesi. Tots ells, conjuntament amb la influència d'una Església fonamentada en les arrels jueves, han configurat una manera d'entendre el món i de desenvolupar la nostra racionalitat. Penso sincerament que una part important de la manera com hem evolucionat ha vingut promoguda pels enfrontaments tantes vegades repetits i amb tanta contundència —el "dogmatisme"— d'aquesta Església quan ha pretès d'incidir en el Dret que la Persona Humana té d'ésser simplement això: una persona humana. Ara, amb això que hom anomena la "confrontació de les civilitzacions", si es tracta de "fonamentalisme versus universitas", malauradament podríem tornar a situacions que crèiem ja superades.

En les meves classes i en els meus treballs —en particular en els de divulgació i en els d'història de la matemàtica— he intentat sempre —i ho seguiré fent— de ser copartícep d'aquesta civilització —l'occidental— que respecto, sense, per això, menystenir-ne d'altres que desconec. No voldria que se m'apliquessin els versos de Machado "…desprecia cuanto ignora". I ho he volgut transmetre també en aquesta darrera lliçó: no hi ha res que no valgui la pena de ser pensat i repensat i, a partir d'allí, si se n'és prou capaç, crear.[39] Com diria

[38] Veieu l'introito

[39] L'autèntica capacitat creadora, pel que fa a la matemàtica, és molt escassa. Però els qui l'aconsegueixen, assoleixen un plaer estètic, humà i personal indescriptible.

Richard Dedekind: "som déus perquè podem crear". I això ha configurat, ben certament, una part important de la meva personalitat que, encara que mai he volgut transmetre explícitament a classe, he transmès —així ho espero— de forma implícita. A voltes, aquesta forma de ser i "de voler ser" ha produït conflictes intel·lectuals —que voldria que no anessin més lluny d'això— amb persones que estimo.

No ho sé explicar gaire bé. Permeteu-me, doncs, que recorri al poeta Josep Vicens Foix de Sarrià i a un dels seus sonets de *Sol i de Dol*, del qual els que m'heu tractat més íntimament me n'haureu sentit recitar algun vers espars.

Sonet *a Manuel Pla i Salat*

És per la Ment que se m'obre Natura
A l'ull golós; per ella em sé immortal
Puix que l'ordén, i ençà i enllà del mal,
El temps és u ï pel meu ordre dura.

D'on home só. I alluny tota pastura
Al meu llanguir. En ella l'Irreal
No és el fosc, ni el son, ni l'Ideal,
Ni el foll cobeig d'una aurança futura,

Ans el present; i amb ell, l'hora i el lloc,
I el cremar dolç en el meu propi foc
Fet de voler sense quixa ni usura.

Del bell concret faig el meu càlid joc
A cada instant, i en els segles em moc
Lent, com el roc davant la mar obscura.

Sol, i De Dol [1936]
Josep Vicens Foix

Referències

[And83] George E. Andrews. "Euler's pentagonal number theorem". *Mathematics Magazine* 56(5), pàgines 279–284, 1983.

[And07] George E. Andrews. "Euler's Pentagonal Number Theorem". In William Dunham, editor, *The Genius of Euler*, pàgines 225–232. The Mathematical Association of America, Washington, DC, 2007.

[Apo76] Tom M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer-Verlag, Nova York, 1976. Traducció castellana de Josep Pla, *Introducción a la teoría analítica de números*. Editorial Reverté. Barcelona, 1980.

[Ari34] Aristòtil. *Física*. Librería Bergua, Madrid, 1934.

[Bal92] W. W. Rouse Ball. *Recreations anf Problems Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1892. Hi ha una edició francesa a Jacques Gabay, *Récréations et Problèmes Mathématiques*, i una edició més actualitzada amb HSM Coxeter, *Recreations Mathematics and Essays*. Dover Publications, Inc. Nova York, 1987.

[Bay84] Pilar Bayer. "Variæ Observationes circa Series infinitas". Dins *Leonard Euler (1707–1783)*, pàgines 75–127. Editor Julià Cufí. Societat Catalana de Matemàtiques. IEC, Barcelona, 1984.

[Bay07] Pilar Bayer. "La hipòtesi de Riemann". Dins *El set problemes del mil·leni*, pàgines 29–62. Editor Jordi Quer. Caixa de Sabadell, Sabadell, 2007.

[BDe07] Robert E. Bradley, Lawrence A. D'antonio i C. Edward Sandifer (editors). *Euler at 300. An Appretiation*. The Mathematical Association of America, Washington, 2007.

[BG97] June Barrow-Green. *Poincaré and the three body problem*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1997.

[BMe07] N. N. Bogolyubov, G. K. Mikhaĭlov i A. P. Yushkevich (editors). *Euler and Modern Science*. The Mathematical Association of America, Washington, 2007.

[Bou91] Jacques Bouteloup. *Carrés Magiques. Carrés Latins et Eulériens*. Éditions du Choix, París, 1991.

[Bru10] Josep M. Brunat. "EULER: Idees Seminals en Combinatòria". Dins *Conferències* FME*/Facultat de Matemàtiques i Estadística,* *Universitat Politècnica de Catalunya, cursos 2003–2010*: curs Euler 2006-2007, pàgines 171–200. Editor Sebastià Xambó Descamps. Universitat Politècnica de Catalunya. Facultat de Matemàtiques i Estadística, Barcelona, 2003–2010.

[BVP07] Lluís Bibiloni, Pelegrí Viader i Jaume Paradís. "Sobre una sèrie de Goldbach i Euler". *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* 14(2), pàgines 117–134, 2007.

[Des37] René Descartes. *Géométrie*. Leyden, 1637.

[Des00] René Descombres. *Les Carrés Magiques*. Vuibert, París, 2000.

[Dun07] William Dunham. *The Genius of Euler. Reflections on His Life and Work*. The Mathematical Association of America, Washington, 2007.

[Euc] Euclides. *Elements*. Aguilar, 300 aC. En anglès a [Hea25], en castellà (parcial) a [Ver70, I, pàgines 686–980], en francés a [Vit90].

[Eul35] Leonhard Euler. "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis". *Commentationes Academiæ scientiarum Petropolitanæ* 8, pàgines 128–140, 1735. A Opera Omnia, sèrie 1, vol. VII, pàgines 1–10. Fou llegit a l'Acadèmia de Sant Petersburg el 26 d'agost de 1735, i publicat a l'any 1741. **E053**.

[Eul38] Leonhard Euler. "De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt". *Commentationes Academiæ scientiarum Petropolitanæ* 5, pàgines 36–57, 1738. A Opera Omnia, sèrie 1, vol. XIV, pàgines 1–24. Fou llegit a l'Acadèmia de Sant Petersburg el 28 de novembre de 1729, i publicat l'any 1738. Una gran part del seu contingut el comunicà a Goldbac, a la carta de 8 de gener de 1730. Traducció anglesa de Stacy Lagnton a http://www.math.dartmouth.edu/~euler/. **E019**.

[Eul44] Leonhard Euler. "Variæ Observationes circa Series Infinita". *Commentationes Academiæ scientiarum Petropolitanæ* 9, pàgines 160–188, 1744. *Opera Omnia*, sèrie 1, XIV, pàgines 217–244. Fou llegit a l'Acadèmia de San Petersburg el 25 d'abril de 1727. **E072**.

[Eul48] Leonhard Euler. *Introduction in Analysin Infinitorum.* chez Barrois, París, 1748. A *Opera Omnia*, VIII, ser. 1. Traducció castellana de José Luís Arantegui Tamayo, amb anotacions de José Durán Guardeño, *Introducción al análisis de los infinitos.* Sevilla, 2000. **E101**.

[Eul50a] Leonhard Euler. "De partitione numerorum". *Novi Commentarii Academiæ scientiarum Petropolitanæ* 3, pàgines 125–169, 1750. A *Opera Omnia*, ser. 1, II, pàgines 254-294. Fou publicat l'any 1753, i llegit a l'Acadèmia de San Petersburg el 26 de gener de 1750, i publicat l'any 1753. **E191**.

[Eul50b] Leonhard Euler. "Theoremata circa divisores nvmerorvm". *Novi Commentarii Academiæ scientiarum Petropolitanæ* 1, pàgines 20–48, 1750. *Opera Omnia*, sèrie 1, II, pàgines 62–85. Reeditat a *Commentationes Arithmeticæ*, 1, 1849, pàgines 50–61 [E134b]. Fou llegit a l'Acadèmia de Berlín el 23 de març de 1747, i a la de St. Petersburg, el 2 de setembre de 1748. **E134**.

[Eul60] Leonhard Euler. "De seriebvs divergentibvs". *Novi Commentarii Academiæ scientiarum Petropolitanæ* 5, pàgines 205–237, 1760. A *Opera Omnia*, sèrie 1, vol. XIV, pàgines 585–617. Fou llegit a l'Acadèmia de Berlín el 27 d'octubre de 1746, i a la de Sant Petersburg, el 12 de març de 1753. **E247**.

[Eul68] Leonhard Euler. "Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques". *Mémoire de l'Acadèmie des Sciences de Berlin* 17, pàgines 222–228, 1768. A *Opera Omnia*, sèrie 1, vol. XV, pàgines 70–90. **E352**.

[Eul76] Leonhard Euler. "De quadratis magicis". *Commentationes arithmeticæ* 2, pàgines 593–602, 1776. A *Opera Omnia*, ser. 1, VII, pàgines 441–457. Fou llegit a l'Acadèmia de San Petersburg el 17 d'octubre de 1776, i publicat l'any 1849. **E795**.

[Eul82] Leonhard Euler. "Recherches sur une nouvelle espece de quarres magiques". *Verhandelingen uitgegeven door het zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen te Vlissingen* 9, pàgines 85–239, 1782.

A *Opera Omnia*, ser. 1, VII, pàgines 291–392. Fou llegit a l'Acadèmia de San Petersburg el 8 de març de 1779, i publicat l'any 1782. **E530**.

[Hea25] Thomas L. Heath. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. General Publishing Company, Ltd., Toronto, Canadà, 1925. Reeditat, en tres volums, per Dover Publications, Inc. Nova York, 1956. Edició de la traducció, sense notes, en un sol volum, *Euclid's Elements*. Ann Arbor, Michigan: Green Lion Press, 2002, reeditat en 2003, i 2007.

[HSLS02] E. Holst, C. Størmer i L. Sylow (editors). *Niels Henrik Abel: Mémorial publié a l'occasion du centenaire de sa naissance*. Kristiania, Jacob Dybwad, París, 1902.

[HW07] Brian Hopkins i Robin J. Wilson. "The Truth about Könisberg". Dins *The Genius of Euler*, pàgines 263–272. Editor William Dunham. The Mathematical Association of America, Washington, DC, 2007.

[Jos91] George Gheverghese Joseph. *The Crest of the Peacock. Non-European Roots in Mathematics*. I.B. Tauris & Co. Ltd., Londres, 1991. Traducció castellana, *La cresta del pavo real*. Pirámide. Madrid, 1996.

[KS07] Dominic Klive i Lee Stemkoski. "Greco-Latin Square and a Mistaken Conjecture of Euler". Dins *The Genius of Euler*, pàgines 273–288. Editor William Dunham. The Mathematical Association of America, Washington, DC, 2007.

[New56] James R. Newman. *The World of Mathematicians*. Simon and Schuster, Inc., Nova York, 1956. Traducció castellana, *Sigma. El Mundo de las Matemáticas*, set volums. Ediciones Grijalbo. Barcelona, 1968.

[Pla07] Josep Pla. "Dels problemes de Hilbert als problemes del mil·leni". Dins *El set problemes del mil·leni*, pàgines 127–168. Editor Jordi Quer. Caixa de Sabadell, Sabadell, 2007.

[Pól56] George Pólya. *Mathematics and Plausible Reasoning.* Princeton University Press, Princeton, 1956. Traducció castellana, *Matemáticas y razonamiento plausible.* Editorial Tecnos. Barcelona, 1966.

[San07a] C. Edward Sandifer. *How Euler Did It.* The Mathematical Association of America, Washington, 2007.

[San07b] C. Edward Sandifer. *The Early Mathematics of Leohnard Euler.* The Mathematical Association of America, Washington, 2007.

[Ver70] Francisco Vera. *Científicos griegos.* Aguilar, Madrid, 1970. Dos volums.

[Vit90] Jean Vitrac. *Euclide. Les Éléments.* PUF, París, 1990. Consta de quatre volums 1990, 1992, 1996, 2000.

Dept. de Probabilitat, Lògica i Estadística
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
jpla@ub.edu

Publicat el 16 de març de 2010