MAT^2
MATerials MATemàtics
Volum 2010, treball no. 3, 12 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

Sobre les fraccions $2/p$ del papir de Rhind

Gonzalo Rodríguez

1 Una mica d'història

Un dels trets més destacats de les matemàtiques de l'antic Egipte és, sens dubte, la taula de descomposició de fraccions que l'escriba Ahmes va compilar en el dret del papir de Rhind. Hom creu que aquest text va ser redactat durant el Segon Període Intermedi, possiblement sota el regnat del faraó Apofis I (1585-1542 aC), a partir d'una còpia o original de l'època d'Amenemes III (1844-1542 aC). El nom de Rhind li ve pel paper que va jugar l'escossés Alexander H. Rhind en el seu devenir particular al comprar-lo el 1858 en una tenda d'antiguitats de Luxor, preservant-lo així d'un futur incert. A la seva mort el 1865 el papir va ser venut pel seu marmessor al British Museum on roman avui en dia.

La taula de descomposició d'Ahmes que transcric tot seguit ens dóna la descomposició de les 49 fraccions del tipus $2/p$, amb p imparell comprès entre 3 i 101, com a suma de dos, tres o quatre fraccions unitàries:

$2/5 = 1/3 + 1/15$
$2/7 = 1/4 + 1/28$
$2/9 = 1/6 + 1/18$
$2/11 = 1/6 + 1/66$
$2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104$
$2/15 = 1/10 + 1/30$
$2/17 = 1/12 + 1/51 + 1/68$
$2/19 = 1/12 + 1/76 + 1/114$
$2/21 = 1/14 + 1/42$
$2/23 = 1/12 + 1/276$
$2/25 = 1/15 + 1/75$
$2/27 = 1/18 + 1/54$
$2/29 = 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232$
$2/31 = 1/20 + 1/124 + 1/155$
$2/33 = 1/22 + 1/66$
$2/35 = 1/30 + 1/42$
$2/37 = 1/24 + 1/111 + 1/296$
$2/39 = 1/26 + 1/78$
$2/41 = 1/24 + 1/246 + 1/328$
$2/43 = 1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301$
$2/45 = 1/30 + 1/90$
$2/47 = 1/30 + 1/141 + 1/470$
$2/49 = 1/28 + 1/196$
$2/51 = 1/34 + 1/102$
$2/53 = 1/30 + 1/318 + 1/795$
$2/55 = 1/30 + 1/330$
$2/57 = 1/38 + 1/114$
$2/59 = 1/36 + 1/236 + 1/531$
$2/61 = 1/40 + 1/244 + 1/488 + 1/610$
$2/63 = 1/42 + 1/126$
$2/65 = 1/39 + 1/195$
$2/67 = 1/40 + 1/335 + 1/536$
$2/69 = 1/46 + 1/138$
$2/71 = 1/40 + 1/568 + 1/710$
$2/73 = 1/60 + 1/219 + 1/292 + 1/365$
$2/75 = 1/50 + 1/150$
$2/77 = 1/44 + 1/308$
$2/79 = 1/60 + 1/237 + 1/316 + 1/790$
$2/81 = 1/54 + 1/162$
$2/83 = 1/60 + 1/332 + 1/415 + 1/498$
$2/85 = 1/51 + 1/255$
$2/87 = 1/58 + 1/174$
$2/89 = 1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890$
$2/91 = 1/70 + 1/130$
$2/93 = 1/62 + 1/186$
$2/95 = 1/60 + 1/380 + 1/570$
$2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/776$
$2/99 = 1/66 + 1/198$
$2/101 = 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606$

La manera certament peculiar que tenien els egipcis de multiplicar i dividir a base de duplicacions (a fi de reduir la mecànica d'aquestes operacions a sumes "convenients") i la restricció de caire conceptual d'acceptar només com a fraccions les parts alíquotes de la unitat, la fracció $2/3$ i més rarament la $3/4$ (degut al fet de considerar tota divisió com un repartiment material) feia necessari un llistat com l'anterior. A més, per a un egipci, era del tot impensable descomposar una fracció com a suma de fraccions unitàries amb el mateix denominador (exepció feta d'algunes taules de càlcul), la qual cosa sobta bastant ja que la repartició "material" associada es pot complicar i força. Encara que no hi ha una raó convicent que expliqui aquesta prohibició, Gillings (Gillings, 1982) ha suggerit que el motiu d'aquesta pràctica està relacionada amb la idea que tenien els egipcis de justícia (*Maat*): en efecte, un repartiment igualitari no havia de ser tant sols equitatiu sino també just i cada home hauria de rebre el mateix número de peces i de la mateixa mida. Si a l'anterior afegim el quart precepte que enuncia el mateix Gillings ("*és preferible que la primera fracció unitària d'una descomposició sigui la més gran possible...*") podríem estar en front d'una explicació certament suggerent[1]. Per exemple, posats a repartir 2 pans entre 5 homes, nosaltres agafaríem cada pa, el dividiríem en cinc parts alíquotes i en donaríem dos parts a cadascun. Formalment:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}.$$

Notem que aquesta repartició és equitativa i justa des del punt de vista egipci. Tanmateix, l'escriba hauria tallat cada pa en tres parts iguals, hauría donat una a cada home i la part restant l'hauria repartit alíquotament entre els cinc. Formalment:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}.$$

Aquesta repartició és també equitativa i justa però, a diferència de l'anterior, el primer tall a repartir és ara més gran. A tall d'exemple vegem com Ahmes reparteix 100 pans entre 10 homes (un barquer, un capatàs, un guardià i set mariners) sabent que els tres primers han de rebre el doble que els altres.[2] Per començar, Ahmes divideix els 100 pans entre 13 parts tot duplicant i multiplicant el divisor 13 per fraccions adequades fins a obtenir el dividend 100. Esquemàticament:

$$\begin{array}{rl}
1 & 13 \\
2 & 26 \\
4 & 52 \\
2/3 & 26/3 = 8 + 2/3 \\
+\ 1/39 & +\ 1/3 \\
\hline
7+2/3+1/39 & 100
\end{array}$$

Per tant, cada mariner rep:

$$7 + \frac{2}{3} + \frac{1}{39} \text{ pans.}$$

Per la seva part el barquer, el capatàs i el guardià es queden amb el doble que són:

$$2\left(7 + \frac{2}{3} + \frac{1}{39}\right) = 15 + \frac{1}{3} + \frac{2}{39} \text{ pans.}$$

[1] És evident que no podem descartar altres tipus d'explicacions com, per exemple, les de caire religiós.

[2] Problema 65 del papir de Rhind

Ja que la fracció 2/39 no és "acceptable", Ahmes dóna un cop d'ull a la taula i anota com a resultat:

$$15 + \frac{1}{3} + \frac{1}{26} + \frac{1}{78} \text{ pans.}$$

En un altre lloc del papir,[3] ha de dividir 8 pans entre 10 homes. El procés que du a terme és el següent:

$$\frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} = \frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} \text{ pans.}$$

Aquest és precisament un dels llocs del papir on s'evidencia que ens trobem davant d'un text pedagògic ja que Ahmes comprova, al final d'un càlcul certament feixuc, que el resultat que acaba d'obtenir directament de la seva taula de descomposició és el correcte.

S'ha vingut especulant des de fa temps amb la possibilitat que Ahmes, i fins i tot escribes anteriors, conegueren alguna fórmula que els hagués ajudat a trobar moltes d'aquestes descomposicions fraccionàries, i en especial les que podem anomenar *descomposicions binomials* (Bruins, 1981) que són les de la forma:

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, \text{ amb } p \text{ imparell i } n < m.$$

De fet en el problema 61B apareix registrada l'única regla de descomposició que hom troba en el papir (Maza, 2003):

> *"Què és 2/3 de 1/5? Prens el recíproc de 2 cops 5 i de 6 cops 5. Tu fas el mateix per a trobar els 2/3 del recíproc de qualsevol nombre imparell."*

Formalment:

$$\frac{2}{3n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n}, \text{ amb } n \text{ imparell.}$$

Alguns autors (Deif, 2007) van més enllà i apunten la possibilitat que els escribes empraren regles un xic més sofisticades com la que diu que si $r, s > 1$ són imparells llavors:

$$\frac{2}{rs} = \frac{1}{\frac{(1+r)s}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+r)rs}{2}}. \tag{1}$$

[3] En concret el problema 5.

Des de la perspectiva de la repartició material aquesta fórmula és eloquent. En efecte, si tornem a l'exemple de repartició de pans, (1) ens ve a dir que si volem repartir 2 pans entre rs homes caldria, en primer lloc, dividir els pans en $(1+r)s/2$ parts, donar una a cada home i el que queda, és a dir:

$$2\left(\frac{(1+r)\,s}{2}\right) - rs = s \text{ parts}$$

dividir cadascuna d'elles en r parts i repartir-les. De fet, la importància de (1) rau en el fet que amb ella es poden generar totes les descomposicions binomials de la taula d'Ahmes excepte els casos $2/35$ i $2/91$ ja que les descomposicions que trobem:

$$\frac{2}{35} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42} \quad \text{i} \quad \frac{2}{91} = \frac{1}{70} + \frac{1}{130}$$

no s'hi ajusten. Menció apart mereix la descomposició de la fracció $2/95$ que s'hi troba:

$$\frac{2}{95} = \frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570}$$

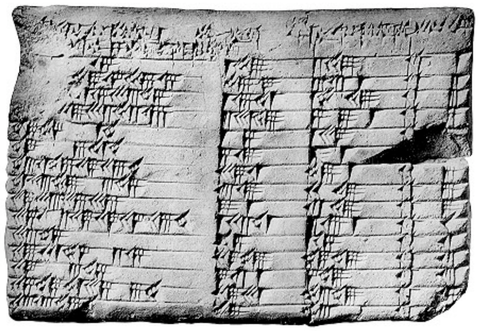
que resulta ser la única no binomial amb denominador p no primer. Sobre aquest darrer cas tornaré més endevant.

L'objectiu d'aquest treball és donar una expressió general per a les descomposicions binomials utilitzant, i això crec que és interessant, un dels resultats més famosos de Diofant (el problema 8 del segon llibre de l'*Artihmetica*) on es dóna a entendre que tota terna pitagòrica (a, b, c) és múltiple d'una de primitiva de la forma:

$$\left(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2\right), \text{ sent } u > v \text{ coprimers}^{4} \text{ i de diferent paritat.}$$

Tanmateix, sembla que aquest fet ja va ser copsat pels escribes babilonis de l'època d'Hammurabi (1793-1750 aC) com es pot veure si donem un cop d'ull a la tauleta d'argila anomenada Plimpton 322 en la que apareixen llistats, i en ordre decreixent, un dels catets a i la hipotenusa c de quinze triangles rectangles que formen angles α aproximats entre $45°$ i $58°$ en aquests dos costats.

[4] Primers entre si.



Les quatre columnes de la tauleta en notació decimal serien, d'esquerra a dreta (Neugebauer, 1969):

$(c/b)^2$	a	c	
1.9834028	119	169	1
1.9491586	3367	4825	2
1.9188021	4601	6649	3
1.8862479	12709	18541	4
1.8150077	65	97	5
1.7851929	319	481	6
1.7199837	2291	3541	7
1.6927094	799	1249	8
1.6426694	481	769	9
1.5861226	4961	8161	10
1.5625000	45	75	11
1.4894168	1679	2929	12
1.4500174	161	289	13
1.4302388	1771	3229	14
1.3871605	56	106	15

Notem que no apareix l'altre catet b (la tauleta està trencada per la part esquerra i això ha portat a pensar que allà hi podria ser) encara que sí ho fa de forma implícita en la primera columna on es calcula el quadrat de la cosecant[5] d'α, $(c/b)^2$. Al marge d'interpretacions i pel contingut d'altres tauletes com, per exemple, la YBC 7289 (al voltant de 1600 aC) on apareix el valor de l'arrel de 2 fins la cinquena xifra decimal i la BM 85196 del període hitita es pot assegurar que deu segles abans de Pitàgores ja es tenia a Babilònia un coneixement profund del teorema que porta el seu nom.

[5]De fet podríem estar davant de la primera taula trigonomètrica coneguda.

2 Les descomposicions binomials i la seva relació amb les ternes pitagòriques

L'estreta relació entre descomposicions binomials i ternes pitagòriques passa per reconèixer que hi ha tantes descomposicions binomials de $2/p$ com a ternes pitagòriques (a, b, c) amb $a = p$, la qual cosa és una conseqüència del fet que si $2/p = 1/n + 1/m$ és una descomposició binomial llavors:[6]

$$(p, m-n, m+n-p) \text{ és una terna pitagòrica,}$$

ja que $2/p = (m+n)/(n\,m)$ és equivalent a $p^2 + (m-n)^2 = (m+n-p)^2$, i, recíprocament, que si la terna (a, b, c) amb $a \geq 3$ imparell és pitagòrica aleshores:

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{\frac{a-b+c}{2}} + \frac{1}{\frac{a+b+c}{2}} \text{ és una descomposició binomial.}$$

No es pot negar que al relacionar formalment dos dels aspectes més destacats de les matemàtiques anteriors al grecs aquest resultat té un cert interès. Tanmateix, aquest interès defuig l'àmbit de la mera curiositat ja que permet obtenir la llei de formació de totes les descomposicions binomials (veure Bruckheimer and alt., 1977, per a una demostració alternativa). Concretament tenim que tota descomposició binomial de $2/p$ és de la forma:

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{\frac{(d_1+d_2)p}{2d_2}} + \frac{1}{\frac{(d_1+d_2)p}{2d_1}} \text{ (amb } d_1 < d_2 \text{ divisors de } p \text{ coprimers)} \qquad (2)$$

ja que si, com hem vist, $2/p = 1/n + 1/m$ és una descomposició binomial llavors la terna $(p, m-n, m+n-p)$ és pitagòrica de la qual cosa es dedueix, amb Diofant, que han d'existir dos nombres naturals $u > v$ coprimers i de diferent paritat, així com un número natural $k > 0$, de manera que:

$$p = k\left(u^2 - v^2\right), \; m - n = k\,(2uv) \text{ i } m + n - p = k\left(u^2 + v^2\right).$$

D'aquestes igualtats hom té que $d_1 = u - v$ i $d_2 = u + v$ són divisors de p coprimers i imparells amb:

$$n = \frac{(d_1 + d_2)\,p}{2d_2} \quad \text{i} \quad m = \frac{(d_1 + d_2)\,p}{2d_1}.$$

[6] Veure http://www.research.att.com/~njas/sequences/A046079

Notem, en primer lloc, que la fórmula (1) és un cas particular d'aquesta si fem $(d_1, d_2) = (1, r)$. A més, cada parella $d_1 < d_2$ de divisors coprimers de p dóna lloc a una única descomposició binomial de $2/p$ segons l'expressió (2) i aquesta igualtat continua sent vàlida encara que aquests divisors no siguin coprimers però, en aquest cas, no s'obtenen noves descomposicions binomials. D'aquí que el nombre de descomposicions binomials de $2/p$ (o, alternativament, el nombre de triangles rectangles amb catet p) coincideixi amb el de les parelles (d_1, d_2) de divisors coprimers de p; per tant, si $p = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$, amb $p_1, \ldots, p_n$ primers, aquest nombre és:[7]

$$N_n = \frac{(1 + 2\alpha_1)(1 + 2\alpha_2) \cdots (1 + 2\alpha_n) - 1}{2}.$$

En efecte, veiem-ho per inducció sobre el nombre n de divisors coprimers de p. Si $n = 1$, $p = p_1^{\alpha_1}$ i, clarament, $N_1 = \alpha_1$. Quan $p = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n} = q p_n^{\alpha_n}$, les úniques parelles de divisors de p coprimers són les de la forma:

$$(d_1, d_2), \left(1, p_n^i\right), \left(d_1, d_2 p_n^i\right) \text{ i } \left(p_n^i d_1, d_2\right)$$

amb d_1 i d_2 divisors coprimers de q i $i = 1, \ldots, \alpha_n$. Ja que, per hipòtesi d'inducció, hi han N_{n-1} parelles (d_1, d_2) hom dedueix així l'equació en diferències finites:

$$N_n = N_{n-1} + \alpha_n + 2\,\alpha_n\, N_{n-1} = (1 + 2\,\alpha_n)\, N_{n-1} + \alpha_n$$

amb solució l'apuntada més amunt. Com a cas il·lustratiu, considerem les descomposicions binomials de $2/45$. Ja que $45 = 3^2 \times 5^1$, s'ens generen doncs:

$$N_2 = \frac{(1 + 2 \times 2)(1 + 2 \times 1) - 1}{2} = 7$$

descomposicions binomials corresponents a les parelles de divisors de 45 coprimers $(1, 3), (1, 5), (1, 9), (1, 15), (1, 45), (3, 5)$ i $(5, 9)$. Aquestes descomposicions són:

$$\begin{aligned}
2/45 &= 1/30 + 1/90 \\
2/45 &= 1/27 + 1/135 \\
2/45 &= 1/25 + 1/225 \\
2/45 &= 1/24 + 1/360 \\
2/45 &= 1/23 + 1/1035 \\
2/45 &= 1/36 + 1/60 \\
2/45 &= 1/35 + 1/63
\end{aligned}$$

[7] Veure http://www.research.att.com/~njas/sequences/A046079

3 Les descomposicions binomials primitives

Aprofundint en el lligam existent entre descomposicions binomials i ternes pitagòriques ens prodríem preguntar, per exemple, còm són les descomposicions binomials que porten aparellades ternes pitagòriques primitives. Doncs bé, aquestes descomposicions són totes de la forma:

$$\frac{2}{d_1 d_2} = \frac{1}{\frac{(d_1+d_2)d_1}{2}} + \frac{1}{\frac{(d_1+d_2)d_2}{2}}, \text{ amb } d_1 < d_2 \text{ coprimers} \tag{3}$$

ja que si pensem en la descomposició binomial donada per (2) és evident que per ser $d_1 < d_2$ divisors coprimers de p haurà d'existir un natural $d > 0$ tal que $p = dd_1d_2$ i, en conseqüència, la terna pitagòrica associada serà:

$$(p, m-n, m+n-p) = \left(dd_1d_2, \frac{d\,(d_2^2 - d_1^2)}{2}, \frac{d\,(d_2^2 + d_1^2)}{2} \right).$$

Si aquesta terna ha de ser primitiva, necessàriament s'ha de satisfer $d = 1$ i d'aquí que $p = d_1d_2$.

Així doncs podem anomenar *descomposició binomial primitiva* a tota descomposició del tipus (3) ja que qualsevol descomposició binomial s'obté d'una d'elles multiplicant els denominadors per un número natural convenient. En particular, i a partir de l'anterior, tenim que la descomposició binomial $2/p = 1/n + 1/m$ és primitiva si i només si $\sqrt{2n-p}$ i $\sqrt{2m-p}$ són nombres naturals coprimers; d'aquí que totes les descomposicions binomials de $2/p$ amb denominador p primer que dóna Ahmes siguin primitives i que la resta, a excepció de $2/35$ i $2/91$, no (de fet, si ens fixem amb atenció, la igualtat (1) no s'adequa formalment a (3)). Cal recordar que les descomposicions binomials d'aquestes dues darreres fraccions eren les úniques de la taula d'Ahmes que no es podien obtenir a partir de (1). De totes maneres sempre podem trobar una descomposició binomial primitiva per a qualsevol fracció $2/p$ si fem $(d_1, d_2) = (1, p)$ en (3).

4 Darreres consideracions

Una pregunta que gairebé sorgeix sempre en aquest context és si Ahmes es va adonar de l'existència de regles de descomposició de fraccions $2/p$ del tipus considerat aquí i, sobretot, si en va fer ús. És difícil dir-ho però jo crec que no per les raons que passo a comentar. Considerem el cas trivial en què Ahmes volgués repartir de forma alíquota un nombre parell de pans N entre la meitat $N/2$ d'homes: és evident que els hi hauria d'assignar 2 pans a cadascun. Ara bé, ja que una de les alternatives del repartiment consisteix en distribuir d_1 pans primer i després $d_2 = N - d_1$ pans, Ahmes hauria pogut deduir la igualtat:

$$2 = \frac{d_1}{N/2} + \frac{d_2}{N/2} = \frac{d_1}{\frac{(d_1+d_2)}{2}} + \frac{d_2}{\frac{(d_1+d_2)}{2}}$$

i d'aquí dividint per $d_1 d_2$ arribar a:

$$\frac{2}{d_1 d_2} = \frac{1}{\frac{(d_1+d_2)d_2}{2}} + \frac{1}{\frac{(d_1+d_2)d_1}{2}}$$

que coincideix amb (3) si es té cura d'escollir d_1 i d_2 imparells i coprimers. Fins aquí no hi ha problema sempre i quan, és clar, hom consideri aquest procés ajustat a una mentalitat utilitària com la egípcia. Notem ara que si fem $(d_1, d_2) = (5, 7)$ i $(d_1, d_2) = (7, 13)$ en (3) obtenim les dues descomposicions binomials per a $2/35$ i $2/91$ que faltaven (aquest fet es troba ressenyat a Abdulaziz, 2008); el cas de la descomposició de la fracció $2/35$ és interessant ja que és l'únic cas en què Ahmes detalla el procés de gestació on apareixen explícitament els divisors 5 i 7 i la seva semisuma, cosa que no passa amb la fracció $2/91$. En efecte, en aquest cas Ahmes anota en vermell sota el número 35 la semisuma dels dos divisors, 6, i a continuació, i damunt de 5 i 7, les fraccions:

$$\frac{1}{6 \times 5} = \frac{1}{30} \quad \text{i} \quad \frac{1}{6 \times 7} = \frac{1}{42}.$$

Finalment, i sota el 6, comprova que la descomposició que ha obtingut és correcta fent:

$$\frac{35}{30} + \frac{35}{42} = \left(1 + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) = 2.$$

Així doncs si pensem que la igualtat (1), tot i no ser un cas particular de (3), es pot deduir d'ella resulta que, al final, totes les descomposicions binomials de la taula d'Ahmes es dedueixen directa o indirectament de (3)! Podria semblar, per l'anterior, que Ahmes hauria pogut sospitar d'aquesta fórmula. Però si fem ara $(d_1, d_2) = (5, 19)$ ens topem amb una descomposició binomial primitiva per a l'única fracció $2/p$ amb denominador no primer que no es descomponia com a suma de dues fraccions unitàries:

$$\frac{2}{95} = \frac{1}{60} + \frac{1}{228}.$$

És fàcil constatar ara, atenent als criteris o preceptes d'adequació de Gillings (Gillings, 1982), que aquesta descomposició és la més "adequada" per a $2/95$ i sorprèn certament que Ahmes no la tingués en compte si manipulava regles de descomposició al nivell de (3) (una possible explicació per aquest fet seria que Ahmes, i per raons que se'ns escapen, s'hauria decantat per considerar $2/95$ pertanyent a la família de les fraccions del tipus $2/(19\,s)$ i hauria utilitzat la descomposició no binomial de $2/19$ calculada prèviament (Gillings, 1982)). Però encara hi ha més ja que si posem l'èmfasi en el punt de vista operacional i considerem, per exemple, la descomposició de la fracció $2/15$ que dóna Ahmes:

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$$

podem notar que no es presta fàcilment a ser duplicada més d'un cop.[8] Tanmateix, si fem $(d_1, d_2) = (3, 5)$ en (3) obtenim una descomposició binomial que millora l'anterior:[9]

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20}.$$

Val a dir que quelcom de semblant passa, per exemple, amb les fraccions $2/45$, $2/55$, $2/63$, $2/75$ i $2/99$; cal fer esment que en tots aquests casos es tindria sempre que $d_1 > 1$. En resum, tot i tenint present la manca de documents matemàtics de l'època (papirs, inscripcions, ostraques, etc.) no hi ha raons de pes per a negar la utilització per part dels escribes de regles de descomposició com la (1) amb un grau de complexitat superior a la regla 61B apuntada més amunt, però jo no crec, malgrat els casos $2/35$ i $2/91$, que això sigui el cas de la fórmula (3) ja que si Ahmes hagués estat conscient d'ella no hauria dubtat en treure'n més profit; el cas de la fracció $2/95$ que acabo de comentar em sembla, en aquest sentit, força eloqüent.

[8] Cal recordar de nou que la duplicació és la clau de la multiplicació i divisió egípcies.

[9] Encara que, des del punt de vista del repartiment material, aquesta descomposició no és tant adequada com l'altra.

Bibliografia

[1] Abdulaziz, A. A. (2008). On the Egyptian method of decomposing $2/n$ into unit fractions. *Historia Mathematica* **35**, 1-18.

[2] Bruckheimer, M & Salomon, Y. (1977). Some comments on R. J. Gillings' Analysis of the $2/n$ table in the Rhind Papyrus. *Historia Mathematica* **4,** 445-452.

[3] Bruins, E. M. (1981). Reducible and trivial decompositions concerning Egyptian arithmetics. *Janus* **68** (4), 281-297.

[4] Deif, A. (2007). The Ahmes code. *Al-Ahram Weekly On-line*. Issue No. 844.

[5] Gillings, R. J. (1982). *Mathematics in the time of the Pharaohs*. Dover Publications, Inc. New York.

[6] Maza, C. (2003). *Las matemáticas en el Antiguo Egipto*. Secretariado de publicaciones. Universidad de Sevilla.

[7] Neugebauer, O. (1969). *The exact sciences in antiquity*. Dover Publications, Inc. New York.

[8] La imatge del papir de Rhind es troba a:

http://www.kalipedia.com

[9] La imtage de la tauleta Plimpton 322 es troba a:

http://www.historyofscience.com

Departament de Matemàtica Econòmica,
Financera i Actuarial
Universitat de Barcelona
grodriguez@ub.edu

Publicat el 12 de maig de 2010