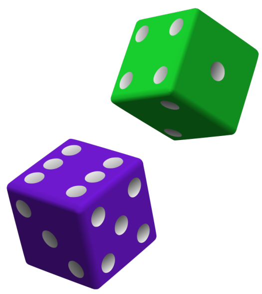
MATerials MATemàtics
Volum 2010, treball no. 6, 18 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

Històries de la Probabilitat[*]

Jaume Suñer

Hem dividit aquest treball en tres parts: a la primera, parlarem una mica de com va néixer aquesta teoria; la segona part és un cas real ben curiós, on l'aplicació del càlcul de probabilitats va ser decisiu en un judici; finalment, a la tercera part parlarem dels passejos aleatoris, la qual cosa ens permetrà contestar a la pregunta del títol de la lliçó que dóna lloc a aquest treball: és cert que tots els camins duen a Roma?



1 Breu recorregut per la Història de la Probabilitat

El desenvolupament de les probabilitats va molt lligat als jocs d'atzar, concretament als jocs de daus, un dels entreteniments més antics de la humanitat. La pròpia paraula atzar ve de l'àrab az-zahr, que vol dir el dau. I és que els daus han estat utilitzats des de fa molts de segles, encara que en un principi es jugava amb uns ossos petits, com l'astràgal, un os del taló d'animals com el cérvol o la cabra. L'astràgal és com un dau allargat, amb les dues cares dels extrems bombades, el que fa que, realment, sigui un dau de quatre cares que són completament diferents entre sí. El dau cúbic més antic que s'ha trobat data de devers l'any 2750 AC, i es va trobar en un jaciment del nord de l'actual Iraq, a l'antiga Mesopotàmia.

Els daus varen continuar essent el principal instrument per als jocs d'atzar fins a mitjan segle XV, quan varen aparèixer a Europa els primers jocs de cartes, que no superaren en preferència als daus fins a principis del segle XVIII.

[*]Aquest treball va constituir la lliçó inaugural *És cert que tots els camins duen a Roma? Històries de la Probabilitat* de la llicenciatura de Matemàtiques de la Universitat de les Illes Balears per al curs 2009-10.

Un dels jocs més típics consistia en llançar tres daus i sumar els seus resultats. Per això, els primers càlculs de possibilitats de guanyar solen fer referència a aquest tipus de joc.

Com a curiositat, citarem que la referència més antiga de què es disposa relacionada amb càlculs associats amb els jocs de daus apareix a un poema èpic, anomenat De Vetula (la dona vella), l'autor del qual sembla ser el poeta francès Richard de Fournival, que l'hauria escrit devers l'any 1250. Aquest poema està dividit en tres parts, tres llibres com ell diu, i en el primer llibre es descriu el joc de llançar tres daus, i inclou el càlcul sense error dels 216 resultats possibles.

Veurem a continuació tres problemes clàssics que varen conduir al naixement de la teoria de les probabilitats. El primer, el problema del 9 i el 10, el va plantejar l'any 1620 un noble italià, el Gran Duc de Toscana, a en Galileu (1564-1642):

> *En llançar tres daus i sumar els seus resultats, podem obtenir una suma 9 de sis maneres diferents, i una suma 10 també de sis maneres diferents. Per què, doncs, s'obté més sovint el resultat 10 que el 9?*

La resposta d'en Galileu és clara ara per nosaltres. Reflexionem-hi una mica.

En llançar tres daus i sumar els seus resultats, tenim les possibles combinacions següents per tal d'obtenir un 9 i un 10:

$$\mathbf{9}: \quad 1\text{-}2\text{-}6, 1\text{-}3\text{-}5, 1\text{-}4\text{-}4, 2\text{-}2\text{-}5, 2\text{-}3\text{-}4, 3\text{-}3\text{-}3$$

$$\mathbf{10}: \quad 1\text{-}3\text{-}6, 1\text{-}4\text{-}5, 2\text{-}2\text{-}6, 2\text{-}3\text{-}5, 2\text{-}4\text{-}4, 3\text{-}3\text{-}4$$

Per entendre millor el que passa, pensem primer en un problema més senzill: el llançament de dues monedes. Si llançam dues monedes iguals, a la vegada, només poden obtenir-se tres resultats: dues cares, una cara i una creu, i dues creus. Si, en canvi, llançam les dues monedes una darrera l'altra, o les dues són diferents, tenim quatre resultats possibles: cara i cara, cara i creu, creu i cara, i creu i creu. Vol dir això que en aquest cas la probabilitat d'obtenir una cara (i una creu) és $2/4 = 1/2$ i en l'altra situació és $1/3$? òbviament no pot ésser així, ja que la probabilitat no pot dependre del tipus de monedes: encara que les dues siguin iguals i les llancem a la vegada, la probabilitat d'obtenir una cara i una creu serà el doble que la d'obtenir dues cares (la cara i la creu poden aparèixer de dues maneres, encara que no ho puguem observar), és a dir, valdrà $1/2$.

Una cosa semblant passa amb el joc del 9 i el 10. El resultat 1-2-6 es pot obtenir de 6 maneres diferents: 1-2-6, 1-6-2, 2-1-6, 2-6-1, 6-1-2, 6-2-1, mentre que el resultat 1-4-4 només pot aparèixer de 3 maneres diferents: 1-4-4, 4-1-4, 4-4-1, i el resultat 3-3-3, només d'una manera. Això fa que, tenint en compte que hi ha $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ resultats possibles en el llançament de 3 daus, la probabilitat d'obtenir una suma 9 valgui

$$\frac{6+6+3+3+6+1}{216} = \frac{25}{216}$$

mentre que la probabilitat d'una suma 10 és

$$\frac{6+6+3+6+3+3}{216} = \frac{27}{216}$$

i l'aparent contradicció queda eliminada. El que hem d'aprendre d'aquest problema és que la definició de la probabilitat d'un succés A com el quocient entre el nombre de casos favorables a A i el nombre de casos possibles només és vàlid quan tots els casos possibles tenen la mateixa probabilitat (són equiprobables) i això, òbviament, no passava en el raonament del Gran Duc de Toscana.

Un problema anterior al del 9 i el 10 és el conegut com el de l'aposta interrompuda, i es pot formular de manera senzilla com segueix:

> *Suposem que dues persones, A i B, juguen una sèrie de partides consistents en llançar un dau; cada vegada que surt cara, A guanya la corresponent partida i, si surt creu, la guanya B. Abans de començar els llançaments, aposten una certa quantitat acordada prèviament. El que guanyi sis partides, se'n duu tot el pot. Suposem que un moment donat, A duu cinc partides guanyades i B en duu tres i, en aquest moment, han de deixar de jugar. Com s'haurien de repartir el pot?*

Diferents persones varen donar possibles respostes. Vegem-ne tres, que tenen en comú el fet que les tres estan equivocades.

- Fra Luca Pacioli (1445-1514), l'any 1487, diu: com que A n'ha guanyat 5 i B, 3, A s'ha de quedar els 5/8 del pot i B els 3/8.

- En Girolamo Cardano, l'any 1539, proposa repartir el pot amb la proporció

  $$1+2+\cdots+(n-b) = 1+2+3 = 6 \quad \text{a} \quad 1+2+\cdots+(n-a) = 1$$

  on n és el nombre de partides necessàries per guanyar (6) i a i b són les partides que duen guanyades, respectivament, A i B (5 i 3).

- Finalment, en Nicolo Fontana (Tartaglia, 1500-1557) fa l'any 1557 un raonament més complicat: com que A duu un avantatge de dues partides, que és una tercera part de les que ha de guanyar per endur-se tot el pot, ell s'ha de quedar un terç del pot, i els dos terços restants s'han de repartir amb la proporció 2 a 1 a favor de A. De totes formes, en Tartaglia no va quedar molt satisfet amb la seva repartició, perquè després dels càlculs va escriure:

  > *La resolució de tal pregunta ha de ser judicial més que matemàtica, de manera que, sigui quina sigui la manera en què es dugui a terme, hi haurà causa per litigar.*

Luca Pacioli

Cardano

Tartaglia

D'aquí a una estona veurem la solució correcta.

El tercer problema que veurem es coneix com el problema de l'aposta avantatjosa, o el problema del cavaller de Méré, perquè el va plantejar un jugador professional anomenat Antoine Gombaud (1607-1685), qui es va auto proclamar cavaller de Méré, encara que no tenia cap títol. D'ell es deia que tenia una habilitat poc usual "fins i tot per a les matemàtiques". El problema es pot plantejar com segueix:

> *Si apostam a treure com a mínim un sis en quatre llançaments d'un dau, l'aposta és avantatjosa, és a dir, hi ha més opcions de guanyar que de perdre. Aleshores, l'aposta a treure com a mínim un doble sis en vint-i-quatre llançaments també hauria d'ésser avantatjosa, ja que en el primer cas apostam a un resultat específic entre sis possibles en quatre llançaments, i en el segon cas apostam també a un resultat específic ara entre trenta-sis possibles en vint-i-quatre llançaments, i és ben conegut que sis és a quatre com trenta-sis és a vint-i-quatre. En canvi, l'experiència mostra que el segon cas no és avantatjós. Per què?*

Abans de veure la resolució dels dos darrers problemes que hem enunciat, hem de fer una mica d'història. Sembla ser que, devers l'any 1652, el cavaller de Méré feia un viatge acompanyat d'en Blaise Pascal (1623-1662), durant el qual li va plantejar aquests dos problemes, endemés d'alguns altres. En Pascal va pensar un temps en els dos problemes i l'any 1654 va escriure una carta al seu amic Pierre de Fermat (1601-1665) on li explicava com havia resolt el problema de l'aposta interrompuda i li demanava que s'ho miràs i li digués si li pareixia bé la resolució. En Fermat li va contestar que trobava brillant el raonament d'en Pascal i que ell mateix havia arribat a la mateixa solució per un altre camí. La qüestió és que varen establir una correspondència regular on anaren comentant aquests i d'altres problemes, i aquesta sèrie de cartes es pren com el punt de partida de la teoria de les probabilitats. Com a curiositat, en una de les cartes, de dia 20 de juliol de 1654, en Pascal va comentar a en Fermat:

> *El cavaller de Méré té molt de talent, però no és geòmetra i això és, com sabeu, un gran defecte.*

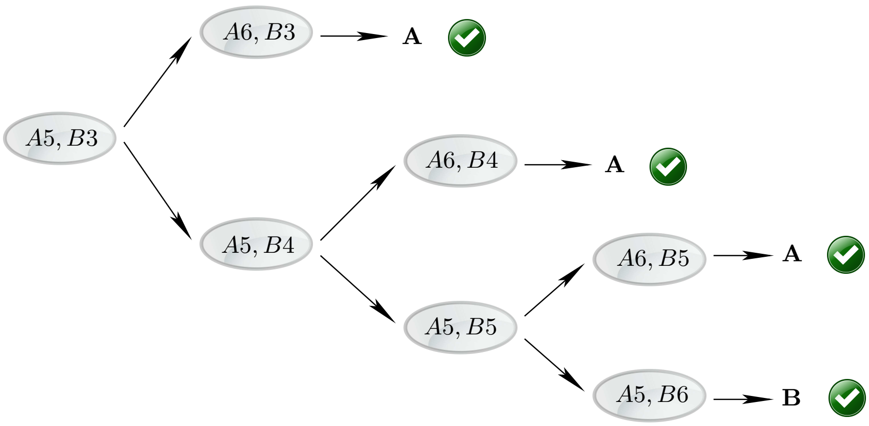
Pascal

Fermat

Vegem ara la resolució dels dos problemes anteriors. Comencem pel de l'aposta avantatjosa. En el llançament quatre vegades d'un dau hi ha $6^4 = 1296$ resultats possibles, dels quals $5^4 = 625$ són desfavorables a obtenir com a mínim un sis. Aleshores, el nombre de casos favorables a aquest succés és: $1296 - 625 = 671$, superior als 625. De fet, la probabilitat d'obtenir almenys un sis en quatre llançaments d'un dau és $\dfrac{671}{1296} \approx 0.52 > \dfrac{1}{2}$.

En el cas del llançament vint-i-quatre vegades de dos daus, el nombre de resultats possibles és 36^{24}, dels quals n'hi ha 35^{24} de desfavorables a obtenir com a mínim un doble sis. Aleshores la probabilitat d'obtenir almenys un doble sis en vint-i-quatre llançaments de dos daus és igual a $\dfrac{36^{24} - 35^{24}}{36^{24}} \approx 0.491$, inferior a 0.5 i, per tant, desavantatjós.

Quant al problema de l'aposta interrompuda, l'error que cometen tant en Pacioli com en Cardano i en Tartaglia és que només tenen en compte els punts que ja tenen els jugadors, no les opcions que tenen de guanyar al final i, per tant, quedar-se amb tot el pot. La solució obtinguda per Pascal i Fermat es basa, com ha de ser, en analitzar les maneres en què podria acabar el joc. El diagrama següent permet obtenir la solució fàcilment:



Si consideram que cada jugador té probabilitat 1/2 de guanyar cada punt, aleshores la probabilitat de guanyar A serà:

$$p(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

mentres que la de guanyar B serà:

$$p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Aleshores A se n'hauria de dur els 7/8 de l'aposta inicial i B, el 1/8.


Huygens


J. Bernoulli


Laplace


Kolmogorov

Acabarem aquesta primera part citant quatre persones que varen ser claus en el desenvolupament de la teoria de les probabilitats. La primera d'elles és el belga Christiaan Huygens (1629-1695), més conegut pels seus treball en física i astronomia. Huygens va visitar França l'any 1655 atret per les investigacions de Pascal i Fermat. Els resultats de les seves reflexions donaren lloc al tractat *De Ratiociniis de Ludo Aleae*, publicat l'any 1657, la primera obra impresa en la matèria, on introdueix el concepte d'esperança matemàtica.

Entre d'altres figures importants en el desenvolupament de la teoria de probabilitats hem de citar Jacques Bernoulli (1656-1705); a la seva obra pòstuma *Ars Conjectandi*, publicada l'any 1713, justifica la identificació de probabilitat i freqüència mitjançant la seva Llei dels grans nombres. Una altra contribució important és la de Pierre de Laplace (1749-1827), qui a la seva obra *Théorie Analytique des Probabilités* introdueix una gran quantitat de noves idees i tècniques.

Ja per acabar aquest petit recorregut gens exhaustiu per la història de la probabilitat, hem de parlar del rus Andrei Kolmogorov (1903-1987) ja que l'any 1933 va publicar *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, on dóna la definició axiomàtica de probabilitat, basada en els treballs de principis del segle XX de gent com Borel i Lebesgue sobre la teoria de la mesura. Aquesta definició va permetre el desenvolupament rigorós de la teoria de la probabilitat.

2 Les probabilitats en els jutjats: el cas del poble contra Collins

Dia 18 de juny de 1964, una dona gran anava passejant per un carrer de l'àrea de San Pedro, a Los Angeles. Portava un carro amb la compra, caminava amb l'ajut d'un bastó i, de cop, la varen envestir i va caure en terra. Quan va aconseguir aixecar-se, va comprovar que li havien pres la cartera, i va veure una dona jove que fugia corrents. La dona jove va ser descrita amb cabells rossos formant una coa i duent quelcom negre. Un altre testimoni va veure que una dona amb aquesta descripció pujava a un cotxe groc conduït per un afroamericà amb barba i mostatxo. En resum, es varen establir sis característiques referents als criminals:

A: fugen en un automòbil parcialment groc

B: home amb mostatxo

C: dona amb coa de cavall

D: dona amb cabells rossos

E: afroamericà amb barba

F: parella interracial en cotxe

El matrimoni Collins satisfeia aquestes característiques, i el testimoni abans esmentat el va triar a ell en una roda de reconeixement, encara que amb certs dubtes perquè no duia barba. Així, després de diversos interrogatoris, els Collins varen ser acusats de l'atracament i, finalment, es va celebrar el judici.

En un moment del judici, per reforçar la identificació dels culpables, el fiscal va cridar com a testimoni un expert en probabilitats, qui explicà al jurat la propietat del producte:

> *Si una col·lecció de successos són independents, aleshores la probabilitat de l'ocurrència simultània de tots els successos és el producte de les probabilitats individuals de cada succés.*

D'altra banda, el fiscal proposà agafar com a probabilitats de les sis característiques les següents:

$$p(A) = 1/10,\ p(B) = 1/4,\ p(C) = 1/10,\ p(D) = 1/3,$$
$$p(E) = 1/10,\ p(F) = 1/1000$$

La defensa va protestar, i el fiscal va convidar al propi jurat a que decidís quines haurien de ser les sis probabilitats. En tot cas, va dir que estava clar que no diferirien massa de les que ell proposava. Finalment, raonà que, si consideram independència de les sis característiques $A - F$, la probabilitat que una parella triada a l'atzar satisfaci totes les sis característiques val

$$p = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C) \cdot p(D) \cdot p(E) \cdot p(F) = \frac{1}{12 \cdot 10^6} \approx 8.3 \times 10^{-8}$$

Com que els Collins les satisfeien totes, l'argumentació del fiscal que només una de cada $12 \cdot 10^6$ parelles satisfeien les sis característiques va convèncer el jurat i la sentència va ser de condemna. Però la defensa no hi va estar d'acord i presentà un recurs. Durant la celebració del recurs, l'any 1968, va aportar els arguments següents:

1) No hi ha independència de les sis característiques; per exemple, un home amb barba sol dur mostatxo. Més evident encara, si tenim un home de color amb barba i una dona rossa, tenim una parella interracial al 100%.

2) Les probabilitats de les sis característiques $A - F$ no tenen cap fonamentació, estan triades completament a l'atzar.

3) Relacionat amb això darrer, hi ha un antecedent, el cas de l'Estat contra Sneed (1966), on es va revocar la sentència condemnatòria, ja que:

   > *Creim que les probabilitats matemàtiques no són admissibles com evidència per identificar un acusat en un procediment criminal sempre que les probabilitats es basin en estimacions, la validesa de les quals no s'ha demostrat.*

Es va argumentar també que, de totes formes, fins i tot amb les sis probabilitats presentades per l'acusació, la probabilitat que hi hagi alguna altra parella que satisfaci les sis característiques, sabent que els Collins les satisfan, és superior a 0.4. Vegem el raonament probabilístic. Diguem p a la probabilitat de satisfer les sis característiques, i N_S al nombre de parelles que les satisfan totes d'un grup de N parelles. La probabilitat que una parella donada no tengui les sis característiques és $1-p$. Per independència, la probabilitat que cap parella satisfaci les sis característiques serà

$$p(N_S = 0) = (1-p)^N$$

Per tant, la probabilitat que com a mínim una parella les satisfaci és

$$p(N_S \geq 1) = 1 - (1-p)^N$$

Ara, la probabilitat que una parella concreta seleccionada a l'atzar satisfaci les sis característiques $A-F$ i cap altra no les satisfaci és

$$p \cdot (1-p)^{N-1}$$

Per tant, la probabilitat que passi l'anterior en una parella qualsevol de les N és

$$p(N_S = 1) = N \cdot p \cdot (1-p)^{N-1}$$

Ara, la probabilitat que estrictament més d'una parella satisfaci les sis característiques $A-F$ és

$$p(N_S > 1) = p(N_S \geq 1) - p(N_S = 1)$$

és a dir,

$$p(N_S > 1) = 1 - (1-p)^N - N \cdot p \cdot (1-p)^{N-1}$$

Finalment, sabent que com a mínim una parella satisfà les sis característiques $A-F$, la probabilitat que més d'una ho satisfaci s'obté aplicant la definició de probabilitat condicionada:

$$p(N_S > 1 \mid N_S \geq 1) = \frac{p(N_S > 1, N_S \geq 1)}{p(N_S \geq 1)} = \frac{p(N_S > 1)}{p(N_S \geq 1)}$$

i, afegint les probabilitats calculades anteriorment, obtenim

$$p(N_S > 1 \mid N_S \geq 1) = \frac{1 - (1-p)^N - N \cdot p \cdot (1-p)^{N-1}}{1 - (1-p)^N}$$

Si ara consideram les dades aportades per l'acusació, és a dir, $p = \dfrac{1}{12 \cdot 10^6}$, obtenim una probabilitat

$$p(N_S > 1 \mid N_S \geq 1) = \frac{1 - (1 - \frac{1}{12 \cdot 10^6})^N - N \cdot \frac{1}{12 \cdot 10^6} \cdot (1 - \frac{1}{12 \cdot 10^6})^{N-1}}{1 - (1 - \frac{1}{12 \cdot 10^6})^N}$$

El problema aquí rau en com determinar N, el nombre total de parelles que poden haver estat vistes al lloc del robatori de San Pedro. Per cert que l'advocat va aprofitar aquest fet per deixar palès que constituïa una altra dificultat en l'ús de la teoria de les probabilitats per establir la identitat dels autors del crim. De totes formes, podem suposar que N és molt gran, que fàcilment superarà varis milions. De fet, si agafam N prou gran i $p = \frac{1}{N}$ resulta una probabilitat superior a 0.41. En general tenim

$$p(N_S > 1 \mid N_S \geq 1) = \frac{1 - (1 - 1/N)^N - (1 - 1/N)^{N-1}}{1 - (1 - 1/N)^N}$$

i, si feim tendir N cap a infinit, resulta un límit

$$\lim_{N \to \infty} p(N_S > 1 \mid N_S \geq 1) = \frac{1 - e^{-1} - e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{e - 2}{e - 1} \approx 0.418$$

Aquest fet va conduir al tribunal a acceptar el recurs presentat, de manera que els Collins varen ser posats en llibertat.

3 És cert que tots els camins duen a Roma? Passejos aleatoris

3.1 El problema de la ruïna del jugador

Considerem el problema d'un home que vol comprar un cotxe molt car. El cotxe val N euros, però ell només té k euros, on $0 < k < N$. Després de passar uns dies intentant trobar un mètode per comprar el cotxe, a la fi se li ocorre una solució: proposa al director del seu banc un joc, consistent en llançar una moneda a l'aire; si surt cara, el director li pagarà un euro però, si surt creu, ell li pagarà un euro al director del banc. El joc continuarà fins que passi una de les dues coses següents: o bé ell perd tots els seus doblers (bancarrota), o bé aconsegueix suficients doblers per comprar el cotxe. Agafem per un moment el paper del director del banc. Hauríem de jugar a aquest joc? Bé, per contestar aquesta pregunta, hem de fer uns quants càlculs probabilístics elementals.

Sigui A_k el succés que el jugador perd tots els seus doblers partint d'un capital inicial de k euros, i sigui C el succés que el primer llançament de la moneda ha donat cara, i X el d'haver donat creu. Volem calcular la probabilitat $p(A_k)$ de bancarrota. Aplicant la fórmula de les probabilitats totals a la partició $\{C, X\}$, resulta:

$$p(A_k) = p(C) \cdot p(A_k \mid C) + p(X) \cdot p(A_k \mid X)$$

Però ara, si el primer llançament ha donat cara, aleshores el capital del jugador augmentarà fins a $k+1$ euros i el que cercam és la probabilitat de perdre tots els doblers amb un capital inicial de $k+1$ euros, és a dir,

$$p(A_k \mid C) = p(A_{k+1})$$

Anàlogament,

$$p(A_k \mid X) = p(A_{k-1})$$

D'altra banda, si el capital inicial és de 0 euros, evidentment el jugador està en bancarrota, és a dir, $p(A_0) = 1$. També, si el capital inicial és de N euros, aleshores ja no juga el joc i, per tant, $p(A_N) = 0$.

Posarem a partir d'ara p_k per indicar $p(A_k), 0 \leq k \leq N$. Aleshores volem resoldre l'equació en diferències lineal

$$p_k = \tfrac{1}{2}(p_{k+1} + p_{k-1})$$

on $0 < k < N$, amb condicions inicials $p_0 = 1$ i $p_N = 0$. La solució general de l'equació

$$p_{k+1} - 2p_k + p_{k-1} = 0$$

ve donada per

$$p_k = c_1 + c_2 \cdot k$$

i, si imposam les condicions de frontera,

$$1 = p_0 = c_1 + c_2 \cdot 0 \implies c_1 = 1$$

$$0 = p_N = c_1 + c_2 \cdot N \implies c_2 = -1/N$$

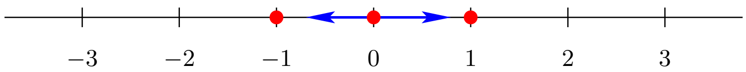
obtenim la solució

$$p_k = 1 - \tfrac{k}{N}$$

Així, a mesura que el preu del cotxe augmenta, és a dir, si $N \longrightarrow \infty$, la bancarrota final és cada vegada més probable. Així, com a directors del banc, hauríem de jugar el joc només si el capital inicial del jugador és molt petit comparat amb el preu del cotxe.

3.2 Els passejos aleatoris

El problema de la ruïna del jugador és molt útil per introduir el concepte de **passeig aleatori**. Suposem que, en cada instant del temps, una partícula habita un dels punts enters de la recta real. A l'instant 0 parteix d'un cert punt especificat, i en cada instant subsegüent $1, 2, \ldots$ es mou de la seva posició actual a una nova posició segons la llei següent: es mou un pas cap a la dreta amb probabilitat $p \in (0, 1)$, i un pas cap a l'esquerra amb probabilitat $q = 1 - p$; els moviments són independents els uns del altres:



Ara, per raons de simplicitat, indicarem amb $\mathcal{X}_i = 1$ el fet de moure'ns cap a la dreta en el pas i-èsim i amb $\mathcal{X}_i = -1$ el fet de moure'ns cap a l'esquerra. Així, per a cada $i = 1, 2, \ldots$, $p(\mathcal{X}_i = 1) = p$ i $p(\mathcal{X}_i = -1) = q$. Sigui ara S_n la posició de la partícula després de n moviments, i suposem que la seva posició inicial és $S_0 = a \in \mathbb{Z}$. Aleshores

$$S_n = a + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i$$

El passeig aleatori s'anomena simètric si $p = q = \frac{1}{2}$; per exemple, si els moviments els decideix el llançament d'una moneda regular.

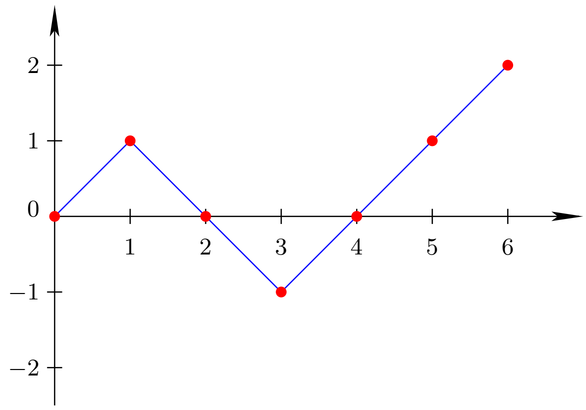
Com a exemple, suposem que la posició inicial de la partícula és $a = 0$ i que els primers sis llançaments d'una moneda han estat: C, X, X, C, C, C. Aleshores

$$\mathcal{X}_1 = 1, \mathcal{X}_2 = -1, \mathcal{X}_3 = -1, \mathcal{X}_4 = 1, \mathcal{X}_5 = 1, \mathcal{X}_6 = 1$$

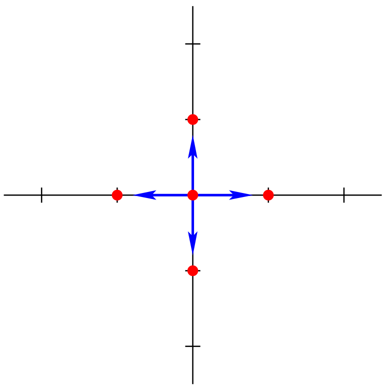
i les posicions de la partícula en els sis primers instants són:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \mathcal{X}_1 = 1 \\
S_2 &= \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 = 1 - 1 = 0 \\
S_3 &= \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_3 = 1 - 1 - 1 = -1 \\
S_4 &= \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_3 + \mathcal{X}_4 = 1 - 1 - 1 + 1 = 0 \\
S_5 &= \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_3 + \mathcal{X}_4 + \mathcal{X}_5 = 1 - 1 - 1 + 1 + 1 = 1 \\
S_6 &= \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_3 + \mathcal{X}_4 + \mathcal{X}_5 + \mathcal{X}_6 = 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 = 2
\end{aligned}$$

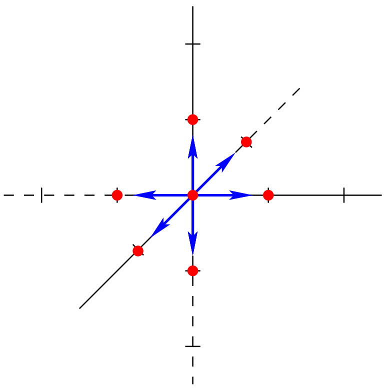
El moviment de la partícula es pot representar mitjançant la successió de punts del pla $\{(n, S_n) : n \geq 0\}$. Aquesta col·lecció de punts, units per línies entre veïnats, s'anomena la trajectòria de la partícula. En el nostre exemple, tenim la representació gràfica següent:



El cas de passejos aleatoris en dues o més dimensions funciona de manera semblant, però en cada cas hi ha més de dues possibles noves posicions de la partícula. Per exemple, en dues dimensions la partícula es mou cap a una de les quatre possibles direccions paral·leles als eixos x i y: així, en cada instant de temps, la partícula té quatre noves posicions possibles, cada una amb una probabilitat donada.



De manera semblant, en tres dimensions cada posició té sis veïnats, amb les sis corresponents probabilitats.



3.3 Tots els camins duen a Roma

En tot el que segueix, considerarem només passejos aleatoris simètrics, és a dir, amb totes les probabilitats de moviment iguals.

Anem a calcular la probabilitat que la partícula torni en qualque instant a la posició inicial, que suposarem $a = 0$, és a dir, la probabilitat que existeixi un $n \geq 1$ tal que $S_n = 0$. Per establir notacions, considerem dos successos A_n i B_n. El primer succés, A_n, indicarà el fet que la partícula torni a l'origen per primera vegada a l'instant n. Evidentment, $A_0 = A_1 = \emptyset$ ja que a l'instant inicial la partícula no pot haver tornat a l'origen perquè encara no n'ha sortit, ni tampoc no hi pot haver tornat amb un sol pas. D'altra banda, per a $n > 1$,

$$A_n = \{S_n = 0, S_1 \neq 0, \ldots, S_{n-1} \neq 0\}$$

L'altre succés B_n indicarà que la partícula està a l'origen a l'instant n, independentment de si és la primera vegada que hi torna o no. Així,

$$B_n = \{S_n = 0\}$$

Observem que B_0 és el total ja que la partícula surt inicialment de l'origen, i $B_1 = \emptyset$ ja que, com hem dit, la partícula no pot tornar a l'origen en un sol pas.

Definim ara les probabilitats $a_n = p(A_n)$, $b_n = p(B_n)$. Aleshores volem calcular

$$p\{\exists\, n \geq 1 \,\text{tal que}\, S_n = 0\} = p\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Per tal d'obtenir aquesta probabilitat, és molt útil el resultat següent, la demostració del qual es pot trobar a [6]:

Propietat 3.1 *Amb les definicions anteriors, resulta*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n}$$

Amb aquest resultat, podem determinar la probabilitat que la partícula torni en qualque instant a la posició inicial simplement calculant la suma de la sèrie de terme general b_n. Vegem els càlculs per a les dimensions 1, 2 i 3.

- Dimensió 1:

  Per començar, la partícula només pot tornar a l'origen en un nombre parell de passos i, per tant, $b_n = 0$ per a qualsevol n imparell. Ara, si

$n = 2k$ ($k \geq 1$), la partícula tornarà a l'origen a l'instant n només si ha fet exactament k passos cap a l'esquerra i k passos cap a la dreta. Per tant,

$$b_{2k} = p(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Utilitzant la fórmula de Stirling, que diu que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\sqrt{2\pi k}\, k^k}{k!\, e^k} = 1,$$

i sovint s'escriu com

$$k! \sim \sqrt{2\pi k} \cdot k^k \cdot e^{-k},$$

resulta:

$$b_{2k} = \frac{(2k)!}{(k!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \sim \frac{\sqrt{2\pi 2k} \cdot (2k)^{2k} \cdot e^{-2k}}{2\pi k \cdot k^{2k} \cdot e^{-2k} \cdot 2^{2k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k}}$$

Per tant,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k}$$

i aquesta sèrie té el mateix comportament que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k}} = +\infty$$

d'on obtenim finalment

$$p\{\exists\, n \geq 1 \,\text{tal que}\, S_n = 0\} = 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n} = 1$$

Una vegada la partícula ha tornat a l'origen, podem repetir el raonament anterior i, així, podem afirmar que hi tornarà una segona vegada amb probabilitat 1. Evidentment, tot es pot repetir indefinidament i, per tant, resulta que la partícula retornarà a l'origen amb probabilitat 1, infinites vegades.

- Dimensió 2:

  El raonament és semblant al cas anterior, però ara, perquè la partícula torni a l'origen amb $2k$ passos, ha de fer el mateix nombre de passos a la dreta que a l'esquerra i el mateix nombre de passos cap endavant que cap enrere. Així,

$$b_{2k} = p(S_{2k} = 0) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(2k)!}{i! \cdot i! \cdot (k-i)! \cdot (k-i)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2k}$$

on hem indicat amb $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ els passos que fa cap a l'esquerra i cap a la dreta (els mateixos en les dues direccions) i, així, els passos que farà cap endavant i cap enrere seran $k - i$. Observem que el factor $1/4$ indica la probabilitat que la partícula es mogui, en cada pas, cap a un dels quatre costats possibles. Un càlcul detallat a [6] permet obtenir

$$b_{2k} = \binom{2k}{k} \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{2k} = \binom{2k}{k}^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2k}$$

que és el quadrat del que havíem obtingut en el cas de dimensió 1. Si ara aplicam la Fórmula de Stirling, resulta

$$b_{2k} \sim \frac{1}{\pi k}$$

que torna a ésser una sèrie divergent. Aleshores, també hi haurà retorn a l'origen en dimensió 2: la partícula retornarà a l'origen amb probabilitat 1, infinites vegades.

- <u>Dimensió 3</u>:

  Ara la partícula tornarà a l'origen en $2k$ passos si fa, posem, i passos cap a l'esquerra i cap a la dreta, j passos cap endavant i cap enrere, i $k - i - j$ passos cap a dalt i cap a baix, això, variant $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ i $j \in \{0, 1, \ldots, k - i\}$. Ara cada pas té probabilitat $1/6$, és a dir,

$$b_{2k} = p(S_{2k} = 0) = \sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} \frac{(2k)!}{i! \cdot i! \cdot j! \cdot j! \cdot (k-i-j)! \cdot (k-i-j)!} \left(\frac{1}{6}\right)^{2k}$$

  Un càlcul senzill dóna

$$b_{2k} = \frac{1}{2^{2k}} \cdot \binom{2k}{k} \cdot \sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} \left(\frac{k!}{i! \cdot j! \cdot (k-i-j)!} \cdot \frac{1}{3^k}\right)^2$$

  Però el que hi ha dins del parèntesi suma 1 (són les probabilitats de la distribució trinomial). Aleshores la suma dels seus quadrats serà menor o igual que el màxim dels sumands i podrem escriure

$$b_{2k} \leq \frac{1}{2^{2k}} \cdot \binom{2k}{k} \cdot \max_{0 \leq i,j \leq k} \left(\frac{k!}{i! \cdot j! \cdot (k-i-j)!} \cdot \frac{1}{3^k}\right)$$

Aquest màxim es pot fitar i, aplicant de nou la fórmula de Stirling, obtindrem

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k} \leq C \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} < +\infty$$

essent C la fita del màxim. En tot cas, la sèrie de terme general b_n és ara convergent i, per tant, la probabilitat del retorn a l'origen és, en dimensió 3, un valor estrictament inferior a 1. La suma de la sèrie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ es pot calcular mitjançant una integral triple (vegeu novament [6]), obtenint $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \approx 1.516386$, d'on resulta una probabilitat de retorn a l'origen

$$p\{\exists\, n \geq 1 \,\text{tal que}\, S_n = 0\} = 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n} \approx 0.340537$$

Finalment, un raonament inductiu prova que la probabilitat d'arribar a qualsevol punt és la mateixa que la de tornar a l'origen. Si un d'aquests punts el consideram Roma, aleshores podem enunciar que En dimensió 1 i 2, tots els camins duen a Roma, amb probabilitat 1. En dimensió 3, aquesta probabilitat és de 0.34. Acabarem aquesta xerrada amb una cita de Pierre Simon de Laplace, de la seva obra *Théorie Analytique des Probabilités*:

> *és un fet destacable que una ciència que va començar analitzant jocs d'atzar s'hagi acabat convertint en l'objecte més important del coneixement humà.*

Bibliografia

[1] Santiago Fernández Fernández: Los inicios de la teoría de la probabilidad. Suma, vol. 55, 2007.

[2] http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/pascal.pdf (darrera consulta: 22 de juliol de 2010)

[3] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BiogIndex.html (darrera consulta: 22 de juliol de 2010)

[4] David A. Sklansky: Evidence: Cases, Commentary, and Problems. Wolters Kluwer, Aspen Publishers, 2008.

[5] W. Feller: Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus aplicaciones, Vol.1, Limusa, 1989

[6] Xavier Bardina: Caminant a l'atzar tots els camins porten a Roma. MATerials MATemàtics (Mat^2, http://mat.uab.cat/matmat), Volum 2008, treball no. 3.

Dpt. de Ciències Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears
jaume.sunyer@uib.cat

Publicat el 20 de desembre de 2010