

## Triángulos de lados enteros, particiones y el Teorema de Pick

Eugenio Guerrero R., Miguel A. Marmolejo L., Héber Mesa P.

En este artículo se reconsidera el problema de dar una fórmula para el número  $T(n)$  de triángulos incongruentes de lados enteros de perímetro  $n \in \{3, 4, 5, \dots\}$ . Una aplicación del Teorema de Pick permite determinar el número  $P(n)$  de particiones ordenadas enteras de  $n$  en tres partes:  $i + j + k = n$ ;  $i \geq j \geq k \geq 1$ , lo que conduce a una fórmula para  $T(n)$ .

### 1. Introducción

En este trabajo se usa el Teorema de Pick con el fin de dar una fórmula para el número  $T(n)$  de triángulos incongruentes de lados enteros de perímetro  $n \in \{3, 4, 5, \dots\}$ . En 2002, Tanton [8] determinó  $T(n)$  como sigue; observa primero que  $T(2n) = P(n) = T(2n - 3)$ , donde  $P(n)$  es el número de particiones ordenadas enteras de  $n$  en tres partes:  $i + j + k = n$ ;  $i \geq j \geq k \geq 1$ , y luego demuestra que  $P(n)$  satisface la ecuación  $P(n + 6) = P(n) + n + 3$ . Finalmente, muestra que  $P(n) = \left\{ \frac{n^2}{12} \right\}$ , siendo  $\{x\}$  el entero más próximo a  $x$ , para concluir que:

$$T(n) = \begin{cases} \left\{ \frac{n^2}{48} \right\}, & \text{si } n \text{ es par} \\ \left\{ \frac{(n+3)^2}{48} \right\}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Escribiendo  $n$  como  $n = 6m + k$  no es difícil ver que  $\frac{n^2}{12}$  nunca tiene como parte decimal 0,5 y por lo tanto la función  $\left\{ \frac{n^2}{12} \right\}$  está bien definida (ver tabla 2). Lo mismo sucede para las expresiones de  $T(n)$ .

Si por ejemplo  $n = 6$ , entonces  $T(n) = \left\{ \frac{36}{48} \right\} = 1$ , que es precisamente un triángulo equilátero de lado de longitud 2. Si  $n = 9$ , entonces  $T(n) = \left\{ \frac{12^2}{48} \right\} = 3$ ; que corresponde a un triángulo de lados 4, 4, 1, a un triángulo de

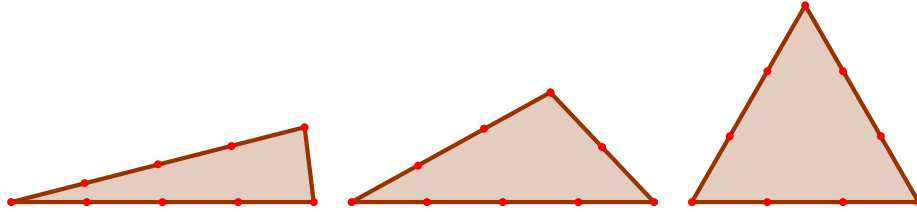


Figura 1: Los triángulos de lados enteros y de perímetro  $n = 9$ .

lados 4, 3, 2 y a un triángulo equilátero de lado 3. En la figura 1 se muestran dichos triángulos.

Ya, en 1979, Jordan et al. [4] habían caracterizado  $T(n)$ , observando primero que  $T(4) = 0$ ,  $T(6) = T(8) = 1$ ,  $T(10) = 2$ ,  $T(12) = 3$ ,  $T(14) = 4$  y luego demostrando que: (a) Si  $n \geq 4$  es par y  $r$  está definido por  $n = 12k + r$ , con  $4 \leq r \leq 14$ , entonces  $T(n) = (n^2 - r^2)/48 + T(r)$ ; (b) Si  $n \geq 6$  es par, entonces  $T(n) = T(n - 3)$ . Ese mismo año, Andrews [1] demostró, relacionando el problema con particiones, que  $T(n) = \{n^2/12\} - [n/4][(n + 2)/4]$ , donde  $[x]$  es la parte entera de  $x$ .

Como se deja entrever al comienzo de esta introducción, el conocimiento de  $P(n)$  y la relación  $T(2n) = P(n) = T(2n - 3)$ , que no es difícil de deducir (ver sección 4), lleva inmediatamente a la fórmula para  $T(n)$  dada por Tanton [8]. Así las cosas, es suficiente calcular  $P(n)$ . Ahora bien; si  $i, j, k, n \in \mathbb{N}$  satisfacen  $i \geq j \geq k \geq 1$  y  $i + j + k = n$ , entonces  $i \geq j$ ;  $i + j < n$  ( $i + j = n - k \leq n - 1 < n$ ) y  $i + 2j \geq n$  ( $n = i + j + k \leq i + j + j = i + 2j$ ). Recíprocamente, las relaciones  $i \geq j$ ;  $i + j < n$  y  $i + 2j \geq n$  implican  $i \geq j \geq n - (i + j) = k$  y  $i + j + k = n$ . Esto quiere decir que  $P(n)$  es el número de puntos del conjunto

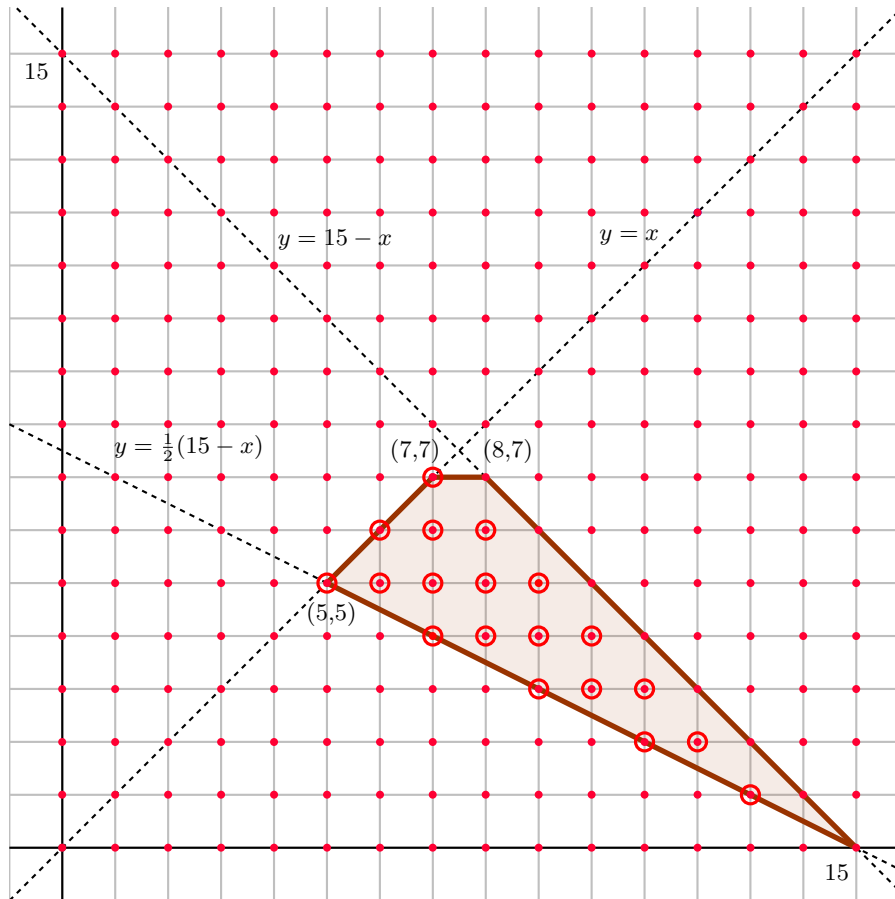
$$\mathcal{P}(n) := \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : i \geq j; i + j < n; i + 2j \geq n\}.$$

En la figura 2 se ilustra el conjunto  $\mathcal{P}(n)$  para  $n = 15$ ; en cuyo caso  $P(n) = 19$ . Este conjunto está contenido en el polígono de vértices  $(5, 5)$ ;  $(7, 7)$ ;  $(8, 7)$ ; y  $(15, 0)$ .

Al observar esta gráfica, es inevitable hacer referencia al Teorema de Pick. Este teorema relaciona el área de un polígono de vértices en una cuadrícula con el número de puntos de la cuadrícula que están en su frontera y el número de puntos de la cuadrícula que están en su interior (ver sección 3).

Por otra parte, recientemente Ramírez [6] presentó dos demostraciones del Teorema de Pick y algunas de sus aplicaciones. Ni en éste, ni en otros trabajos que versan sobre el Teorema de Pick y sus aplicaciones, como Sally y Sally Jr. [7] o Jara y Ruíz [3], se considera este problema. Así, un objetivo de este trabajo es el de presentar una nueva recreación del Teorema de Pick.

El artículo está organizado como sigue. En la sección 2 se introduce el planteamiento geométrico del problema. En la sección 3 se presenta el

Figura 2: El conjunto  $\mathcal{P}(15)$ .

Teorema de Pick. En la sección 4 se relaciona el problema con particiones y se determina la fórmula dada por Tanton [8]. Finalmente, en la sección 5 se dan sendas fórmulas para el número de triángulos isósceles y el número de triángulos escalenos de lados enteros y de perímetro  $n$ .

## 2. Planteamiento geométrico del problema

Como se sabe, tres números reales positivos  $a, b$  y  $c$  son las longitudes de los lados de un triángulo si y sólo si  $a < b + c$ ,  $b < a + c$  y  $c < a + b$ , esto es, si y sólo si se satisface la desigualdad triangular. Ahora bien, si se fija el perímetro:  $a + b + c = \eta \in \mathbb{R}^+$ , y se supone que  $a \geq b \geq c > 0$  (el interés está en triángulos incongruentes), la tripla ordenada  $(a, b, c)$  corresponde a las longitudes de los lados de un triángulo si y sólo si  $(a, b)$  está en la región

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 < c = \eta - (a + b) \leq b \leq a < \eta/2\},$$

cuya gráfica aparece en la figura 3.

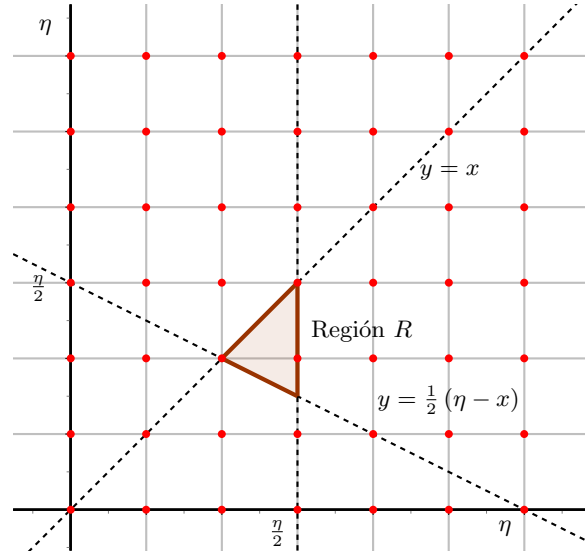


Figura 3: La Región  $R$ .

Si se escoge al azar un punto  $(a, b)$  del cuadrado

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \eta, 0 \leq y \leq \eta\},$$

la probabilidad de que  $(a, b) \in R$  está dada por el número:

$$\text{área}(R)/\text{área}(C) = (\eta^2/48)/\eta^2 = 1/48.$$

El área de la región (triángulo)  $R$  se calculó usando el siguiente hecho. Si un triángulo tiene coordenadas cartesianas  $(a, b)$ ;  $(c, d)$  y  $(e, f)$ , entonces su área viene dada por el valor absoluto del número  $\frac{1}{2}[(c-a)(f-b) - (e-a)(d-b)]$ ; en este caso,  $(a, b) = (\eta/2, \eta/4)$ ,  $(c, d) = (\eta/2, \eta/2)$  y  $(e, f) = (\eta/3, \eta/3)$ .

Como el interés está en el caso en que los lados del triángulo son enteros,  $\eta = n$  debe ser un elemento del conjunto  $\{3, 4, 5, \dots\}$ . Así, la tripla ordenada de enteros  $t(i, j, k)$ ;  $i \geq j \geq k \geq 1$ , corresponde a las longitudes de los lados de un triángulo de perímetro  $n$  si y sólo si la pareja ordenada  $(i, j)$  está en el conjunto

$$R^* = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq k := n - (i + j) \leq j \leq i < n/2\}.$$

En este caso, si escogemos aleatoriamente un punto  $(i, j)$  de la cuadrícula

$$\tilde{C} = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n\},$$

la probabilidad de que  $(i, j) \in R^*$  está dada por la expresión

$$\frac{\text{número de puntos de } R^*}{\text{número de puntos de } \tilde{C}} = \frac{T(n)}{n^2}.$$

De la discusión previa se puede decir que, para  $n$  grande,  $T(n)/n^2$  es aproximadamente  $1/48$ . Es decir,  $T(n)$  es de orden  $n^2/48$ .

### 3. El Teorema de Pick

En 1899, George Alexander Pick publica en la revista “Geometrisches zur Zahlenlehre” (“Resultados Geométricos sobre la Teoría de Números”) de la ciudad de Praga, el teorema que hoy en día lleva su apellido, el Teorema de Pick. Como dice Varberg [9], este teorema es una de las piedras preciosas de las matemáticas elementales; su enunciado es simple y su conclusión sorprendente.

**Teorema 3.1 (T. de Pick)** Sean  $P$  un polígono con vértices en los puntos de una cuadrícula tal que su frontera es una curva cerrada única,  $I(P)$  el número de puntos de la cuadrícula que son interiores a  $P$  y  $F(P)$  el número de puntos de la cuadrícula que están en la frontera de  $P$ . Entonces el área  $A(P)$  de  $P$  está dada por la expresión

$$A(P) = \frac{F(P)}{2} + I(P) - 1.$$

Una ilustración del Teorema de Pick aparece en la figura 4.

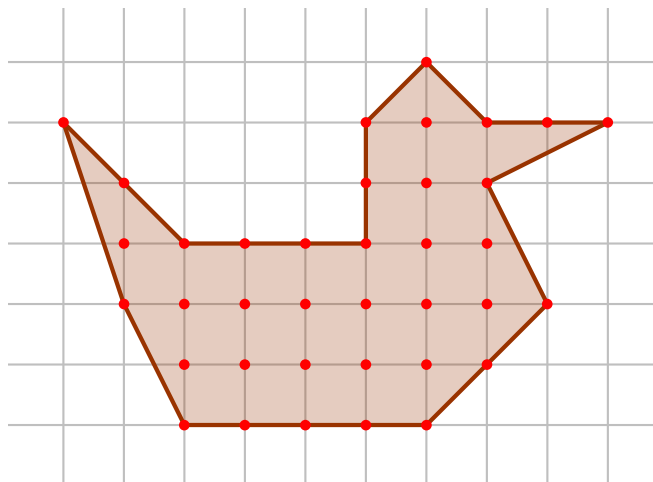


Figura 4: Aquí:  $F(P) = 21$ ,  $I(P) = 16$  y  $A(P) = 16 + \frac{21}{2} - 1 = \frac{51}{2}$ .

En [5], Matthias presenta una demostración realmente corta del Teorema de Pick. Otras demostraciones en inglés aparecen en Sally y Sally Jr. [7] y en Varberg [9]. En castellano, en Jara y Ruíz [3] y en Ramírez [6] se presentan demostraciones detalladas; todas ellas se apoyan en el hecho de que un polígono se pueden descomponer en triángulos y en el carácter aditivo de las áreas.

Cuando, por algún otro método, se puedan calcular los números  $A(P)$  y  $F(P)$ , la fórmula del Teorema de Pick da el número  $I(P)$ :

$$I(P) = A(P) - \frac{F(P)}{2} + 1.$$

Este es el uso del Teorema de Pick en la próxima sección.

#### 4. Relación con particiones y cálculo de $T(n)$

En lo que sigue,  $\mathbb{T}(n)$  representa el conjunto de triplas ordenadas de enteros  $t(i, j, k)$  tales que  $i + j + k = n$ ,  $i \geq j \geq k \geq 1$  y además  $i, j, k$  corresponden a las longitudes de los lados de un triángulo (esto es,  $i < n/2$ ) y  $\mathbb{P}(n)$  denota el conjunto de particiones ordenadas  $p(i, j, k)$  de  $n \in \{3, 4, 5, \dots\}$  en tres partes:  $i + j + k = n$  con  $i \geq j \geq k \geq 1$ . Como se dijo desde el comienzo,  $T(n)$  es el número de elementos de  $\mathbb{T}(n)$  y  $P(n)$  es el número de elementos de  $\mathbb{P}(n)$ . Para relacionar triángulos con particiones se consideran los siguientes hechos:

- En primer lugar, note que ningún triángulo con perímetro par puede tener un lado de longitud 1. Efectivamente; si  $t(i, j, 1) \in \mathbb{T}(n)$  y  $n = i + j + 1 = 2m$  es par, entonces las desigualdades  $1 \leq i < m$  y  $1 \leq j < m$  conducen a la contradicción  $2m = i + j + 1 \leq (m - 1) + (m - 1) + 1 = 2m - 1$ .
- En segundo lugar, como se establece en Tanton [8],  $T(2n) = T(2n - 3) = P(n)$ ; lo cual se debe a que las aplicaciones  $t(i, j, k) \rightarrow t(i - 1, j - 1, k - 1)$  de  $\mathbb{T}(2n)$  a  $\mathbb{T}(2n - 3)$  y  $p(i, j, k) \rightarrow t(n - k, n - j, n - i)$  de  $\mathbb{P}(n)$  a  $\mathbb{T}(2n)$  son biyecciones, como se explica ahora.

Es evidente que al restar una unidad a cada lado de un triángulo de perímetro  $2n$  (par), se obtiene un único triángulo de perímetro  $2n - 3$ . A su vez, al adicionar una unidad a cada lado de un triángulo de perímetro  $2n - 3$  se obtiene un único triángulo de perímetro  $2n$ . Esto da cuenta de que la primera aplicación mencionada arriba es una biyección de  $\mathbb{T}(2n)$  a  $\mathbb{T}(2n - 3)$ . Un ejemplo concreto se visualiza en la gráfica de la figura 5.

De otra parte; si  $i + j + k = n$  y  $i \geq j \geq k \geq 1$ , entonces  $(n - k) + (n - j) + (n - i) = 2n$ ;  $(n - k) \geq (n - j) \geq (n - 1) \geq 2$  y  $(n - k) < n = 2n/2$ . Es decir, a cada partición ordenada  $p(i, j, k) \in \mathbb{P}(n)$  le corresponde un único triángulo  $t(n - k, n - j, n - i) \in \mathbb{T}(2n)$ . Recíprocamente, a cada triángulo  $t(i, j, k) \in \mathbb{T}(2n)$  le corresponde una única partición ordenada  $p(n - k, n - j, n - i) \in \mathbb{P}(n)$ ; pues las relaciones  $i + j + k = 2n$ ;  $i \geq j \geq k \geq 2$  y  $i < n$  implican  $(n - k) + (n - j) + (n - i) = n$  y  $(n - k) \geq (n - j) \geq (n - i) \geq 1$ . Un caso concreto de esta asociación aparece en la figura 6.

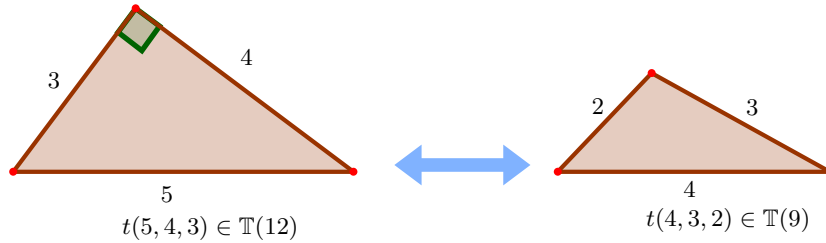


Figura 5: Relación  $T(2n) = T(2n - 3)$ , con  $n = 6$ .

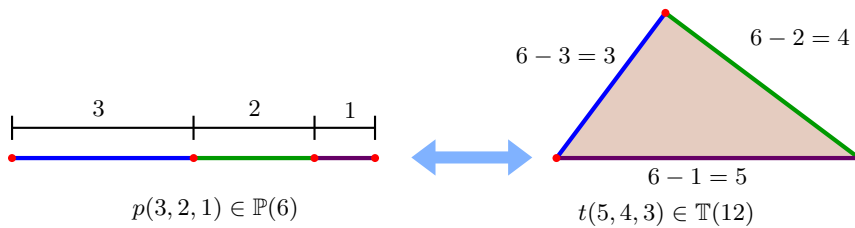


Figura 6: Relación  $P(n) = T(2n)$ , con  $n = 6$ .

Así, el problema de calcular  $T(n)$  se reduce a calcular  $P(n)$ , que es igual al número de puntos  $(i, j)$  de la cuadrícula  $\tilde{C} = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$  que verifican  $i \geq j \geq k := n - (i + j) \geq 1$ ; esto es,  $P(n)$  es el número de puntos del conjunto

$$\mathcal{P}(n) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : i \geq j; i + j < n; i + 2j \geq n\},$$

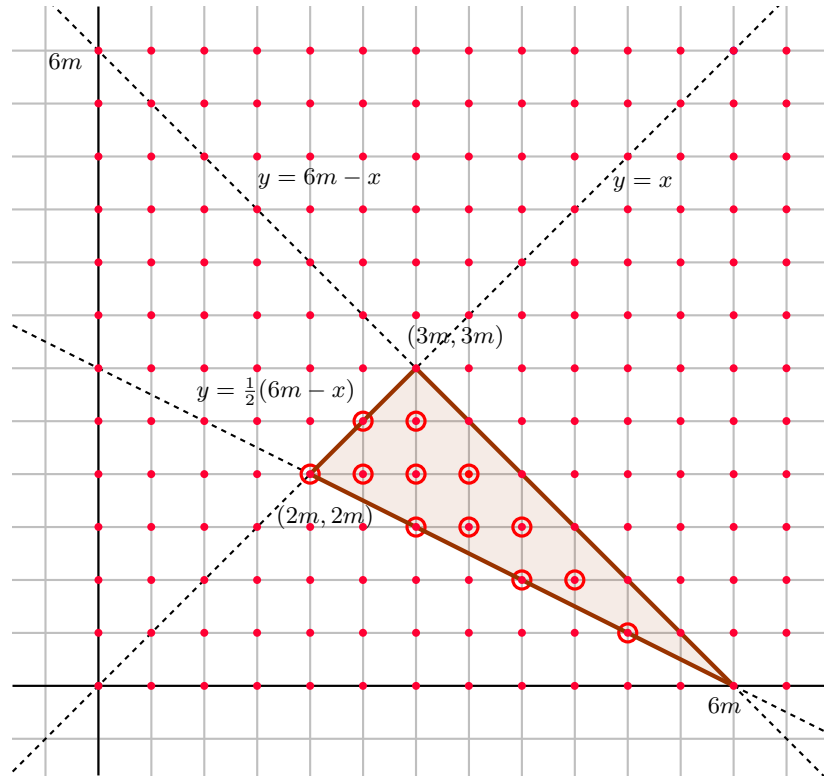
que está contenido en un polígono de vértices en la cuadrícula  $\mathbb{N}^2$  (ver figuras siguientes). Al aplicar el Teorema de Pick para calcular el área de dicho polígono, es necesario calcular el número de puntos de la cuadrícula  $\mathbb{N}^2$  que están en su frontera. La “frontera” de  $\mathcal{P}(n)$  tiene que ver con las rectas de ecuaciones  $y = x$ ;  $y = n - x$  y  $y = (n - x)/2$ , cuyas intersecciones determinan los puntos  $(n/2, n/2)$ ;  $(n/3, n/3)$  y  $(n, 0)$ . Estos puntos están sobre la cuadrícula  $\mathbb{N}^2$  sólo si  $n$  es múltiplo de seis, lo que sugiere analizar los casos  $n = 6m + r$ ;  $r = 0, 1, \dots, 5$ .

En la figura 7 se muestra la gráfica del polígono que contiene a  $\mathcal{P}(n)$  cuando  $n = 6m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

Si se considera el polígono  $\mathbf{P}$  (triángulo) de vértices  $(2m, 2m)$ ,  $(3m, 3m)$  y  $(6m, 0)$ , entonces  $P(n)$  es el número de puntos de la cuadrícula  $\tilde{C}$  que están en el interior de  $\mathbf{P}$ , más el número de puntos de  $\tilde{C}$  que están en la frontera de  $\mathbf{P}$ , excepto los que están sobre la recta  $y = 6m - x$ .

El área de  $\mathbf{P}$  es  $\mathbf{A}(\mathbf{P}) = 3m^2$ . Para el cálculo del número de puntos de  $\mathbb{N}^2$  que están sobre la frontera de  $\mathbf{P}$  se tiene en cuenta que:

- Sobre la recta  $y = x$  hay  $m + 1$  puntos:  $(2m, 2m), (2m + 1, 2m + 1), \dots, (3m, 3m)$ .

Figura 7:  $\mathcal{P}(n)$  para  $n = 6m$ .

- Sobre la recta  $y = 6m - x$  hay  $3m + 1$  puntos:  $(3m, 3m), (3m + 1, 3m - 1), \dots, (6m, 0)$ .
- Sobre la recta  $y = \frac{6m-x}{2}$  hay  $2m + 1$  puntos:  $(6m, 0), (6m - 2, 1), \dots, (2m, 2m)$ .

De esto se sigue que hay  $\mathbf{F}(\mathbf{P}) = 6m$  puntos de  $\mathbb{N}^2$  que están sobre la frontera de  $P$ . Por el Teorema de Pick, el número de puntos de  $\mathbb{N}^2$  que están en el interior de  $\mathbf{P}$  es

$$\mathbf{I}(\mathbf{P}) = \mathbf{A}(\mathbf{P}) - \frac{\mathbf{F}(\mathbf{P})}{2} + 1 = 3m^2 - 3m + 1.$$

En resumen,  $P(n) = [3m^2 - 3m + 1] + [6m - (3m + 1)] = 3m^2$ .

Para el caso  $n = 6m + 1, m \in \mathbb{N}$ , el polígono que contiene a  $\mathcal{P}(n)$  aparece en la figura 8.

Un razonamiento análogo con el polígono  $\mathbf{P}$  de vértices  $(2m + 1, 2m), (2m + 1, 2m + 1), (3m, 3m), (3m + 1, 3m)$  y  $(6m + 1, 0)$  lleva a los siguientes resultados:  $\mathbf{A}(\mathbf{P}) = 3m^2 + m - 1/2$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{P}) = 6m + 1$ ,  $\mathbf{I}(\mathbf{P}) = 3m^2 - 2m$  y  $P(n) = 3m^2 + m$ .

Las gráficas de los polígonos que contienen a  $\mathcal{P}(n)$  para los casos  $n = 6m + r; r = 2, 3, 4, 5$  se pueden ver después de la figura 8.



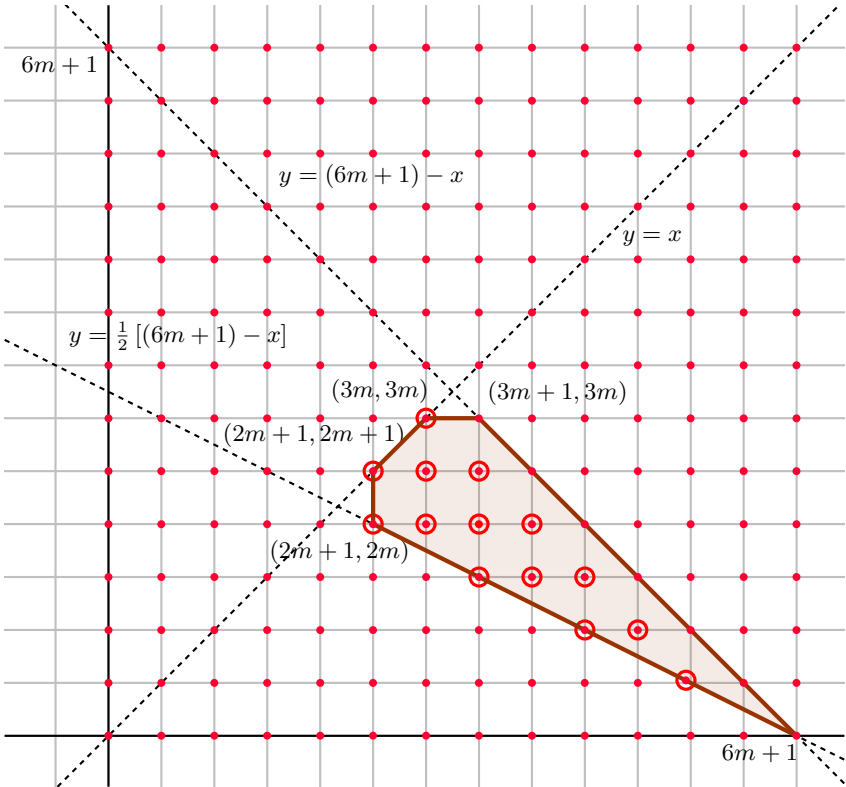
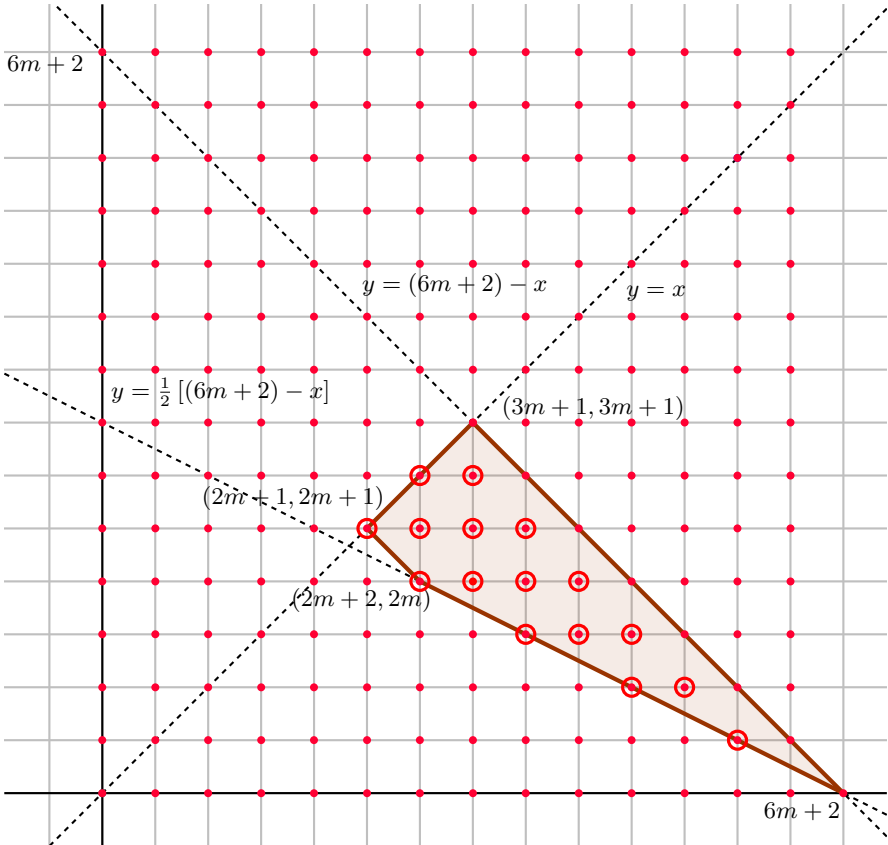
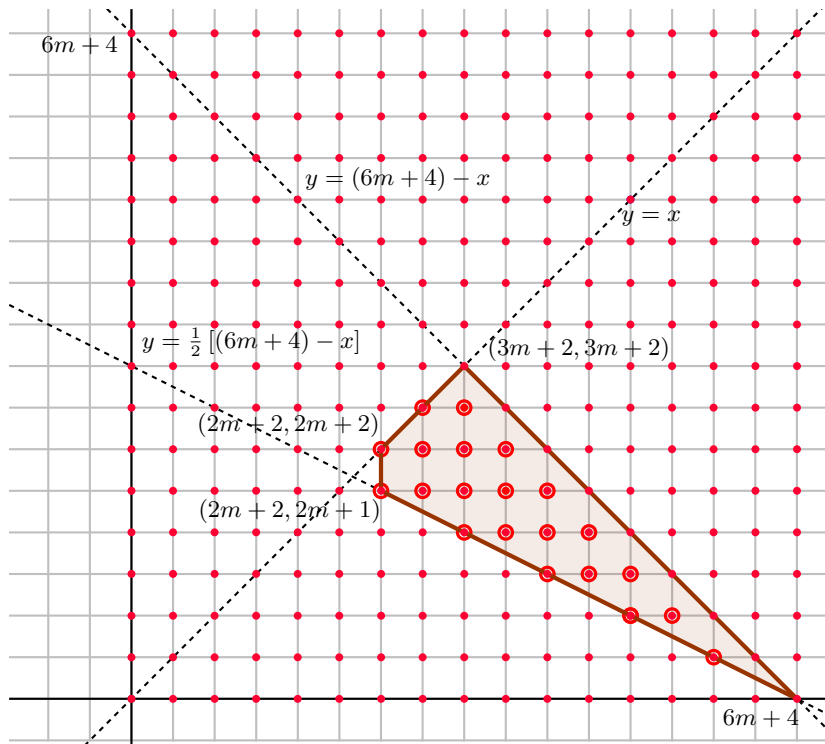
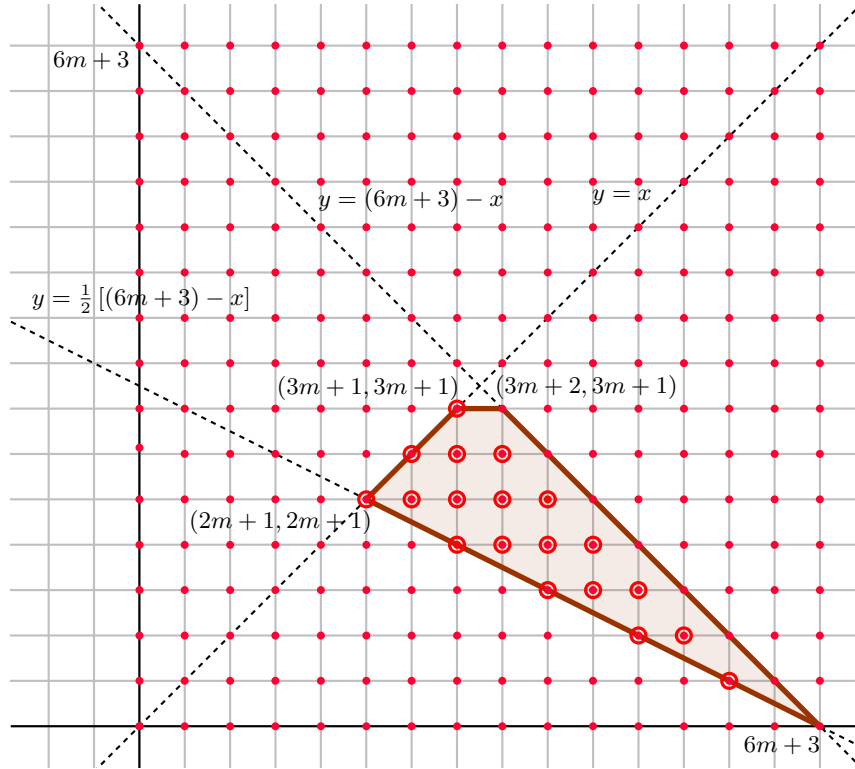
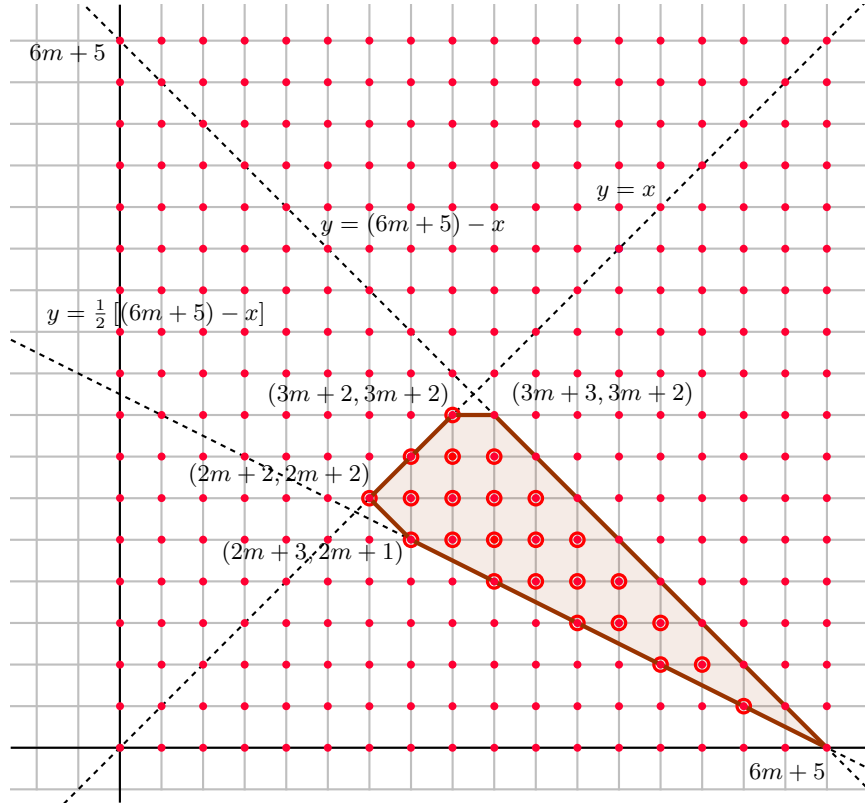


Figura 8:  $\mathcal{P}(n)$  para  $n = 6m + 1$ .







En la tabla 1 se recogen los valores de  $\mathbf{A}(\mathbf{P})$ ;  $\mathbf{F}(\mathbf{P})$ ;  $\mathbf{I}(\mathbf{P})$  y  $P(n)$  para los casos  $n = 6m + r$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots, 5$ .

$n$	$\mathbf{A}(\mathbf{P})$	$\mathbf{F}(\mathbf{P})$	$\mathbf{I}(\mathbf{P})$	$P(n)$
$6m$	$3m^2$	$6m$	$3m^2 - 3m + 1$	$3m^2$
$6m + 1$	$3m^2 + m - 1/2$	$6m + 1$	$3m^2 - 2m$	$3m^2 + m$
$6m + 2$	$3m^2 + 2m$	$6m + 2$	$3m^2 - m$	$3m^2 + 2m$
$6m + 3$	$3m^2 + 3m + 1/2$	$6m + 3$	$3m^2$	$3m^2 + 3m + 1$
$6m + 4$	$3m^2 + 4m + 1$	$6m + 4$	$3m^2 + m$	$3m^2 + 4m + 1$
$6m + 5$	$3m^2 + 5m + 3/2$	$6m + 5$	$3m^2 + 2m$	$3m^2 + 5m + 2$

Tabla 1

Al del final de la sección 2 se observó que  $T(n)$  es de orden  $n^2/48$ ; de la relación  $P(n) = T(2n)$  se concluye que  $P(n)$  es de orden  $n^2/12$ . En la tabla 2 se comparan estos valores.

De esta tabla se deduce que  $P(n) = \{n^2/12\}$ . Teniendo en cuenta la relación  $T(2n) = P(n) = T(2n - 3)$  se llega a que  $T(n) = \{n^2/48\}$  para  $n$  par y que  $T(n) = \{(n + 3)^2/48\}$  para  $n$  impar, que es la fórmula dada por Tanton [8].

<b>n</b>	$P(n)$	$n^2/12$
$6m$	$3m^2$	$3m^2$
$6m + 1$	$3m^2 + m$	$3m^2 + m + 1/12$
$6m + 2$	$3m^2 + 2m$	$3m^2 + 2m + 4/12$
$6m + 3$	$3m^2 + 3m + 1$	$3m^2 + 3m + 9/12$
$6m + 4$	$3m^2 + 4m + 1$	$3m^2 + 4m + 16/12$
$6m + 5$	$3m^2 + 5m + 2$	$3m^2 + 5m + 25/12$

Tabla 2

## 5. Triángulos escalenos y particiones desiguales

En esta sección  $\mathbb{T}_e(n)$  denota el conjunto de triplas ordenadas enteras  $t_e(i, j, k)$  tales que  $i + j + k = n$ ;  $i > j > k \geq 1$  y además  $i, j, k$  corresponden a las longitudes de los lados de un triángulo escaleno. También,  $\mathbb{P}_e(n)$  denota el conjunto de particiones ordenadas enteras  $p_e(i, j, k)$  de  $n \in \{6, 7, 8, \dots\}$  en tres partes desiguales:  $i + j + k = n$ ;  $i > j > k \geq 1$ . Se escribe  $T_e(n)$  y  $P_e(n)$  para denotar el número de elementos de los conjuntos  $\mathbb{P}_e(n)$  y  $\mathbb{T}_e(n)$ , respectivamente.

Los números  $T_e(n)$  y  $P_e(n)$  se determinan fácilmente de los resultados obtenidos en la sección anterior. En efecto; de una parte,  $T_e(2n) = P_e(n) = T_e(2n - 3)$ , debido a que las aplicaciones  $t_e(i, j, k) \rightarrow t_e(i - 1, j - 1, k - 1)$  de  $\mathbb{T}_e(2n)$  a  $\mathbb{T}_e(2n - 3)$  y  $p_e(i, j, k) \rightarrow t_e(n - k, n - j, n - i)$  de  $\mathbb{P}_e(n)$  a  $\mathbb{T}_e(n)$  son biyecciones. Estas son las mismas aplicaciones que se consideraron en la sección anterior para mostrar que  $T(2n) = P(n) = T(2n - 3)$ .

De otra parte,  $P_e(n)$  es el número de puntos  $(i, j)$  de la cuadrícula  $\tilde{C} = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$  que verifican  $i > j > k := n - (i + j) \geq 1$ ; esto es,  $P_e(n)$  es el número de puntos del conjunto

$$\mathcal{P}_e(n) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : i > j; i + j < n; i + 2j > n\}.$$

Para los casos  $n = 6m + r$ ;  $r = 0, 1, 2, \dots, 5$ , los números  $P_e(n)$  corresponden precisamente a los que aparecen en la columna  $\mathbf{I}(\mathbf{P})$  (número de puntos de  $\tilde{C}$  que son interiores a  $P$ ) de la Tabla 1. Es decir,  $P_e(n) \equiv \mathbf{I}(\mathbf{P})$ .

Una observación de las columnas  $\mathbf{I}(\mathbf{P}) \equiv P_e(n)$  y  $P(n)$  de la Tabla 1 revela que, para  $n = 6, 7, 8, \dots$ ,  $P_e(n) = P(n - 3)$ . Por lo tanto, valen las siguientes relaciones:

$$T_e(2n) = T_e(2n - 3) = P_e(n) = P(n - 3); \quad n = 6, 7, 8, \dots,$$

que implican la fórmula

$$T_e(n) = \begin{cases} \left\{ \left\{ \frac{(n-6)^2}{48} \right\} \right\}, & \text{si } n \text{ es par} \\ \left\{ \left\{ \frac{(n-3)^2}{48} \right\} \right\}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Note que  $T_e(n) = T(n - 6)$  y que, en consecuencia,  $T_{is}(n) := T(n) - T_e(n) \equiv T(n) - T(n - 6)$  es el número de triángulos isósceles de lados enteros y de perímetro  $n$  (aquí se incluye el único triángulo equilátero de lado  $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ , en el caso  $n = 3k$ ). Cuando  $n = 2k$ , usando la tabla 2 se puede escribir:

$$\begin{aligned} T_{is}(n) = P(k) - P(k - 3) &= \left\{ \frac{k^2}{12} \right\} - \left\{ \frac{(k - 3)^2}{12} \right\} \\ &= \left\{ \frac{2k - 3}{4} \right\} = \left\{ \frac{n - 3}{4} \right\}. \end{aligned}$$

Así mismo, cuando  $n = 2k + 1$ ,

$$\begin{aligned} T_{is}(n) = P(k + 2) - P(k - 1) &= \left\{ \frac{(k + 2)^2}{12} \right\} - \left\{ \frac{(k - 1)^2}{12} \right\} \\ &= \left\{ \frac{2k + 1}{4} \right\} = \left\{ \frac{n}{4} \right\}. \end{aligned}$$

En resumen, se llega a la expresión

$$T_{is}(n) = \begin{cases} \left\{ \frac{n-3}{4} \right\}, & \text{si } n \text{ es par} \\ \left\{ \frac{n}{4} \right\}, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

que también aparece en Hirschhorn [2]. Curiosamente, en este trabajo se demuestra la fórmula dada por Tanton, empezando precisamente por establecer la relación  $T_e(n) = T(n - 6)$ .

Por ejemplo; si  $n = 15$ , hay  $T(15) = 7$  triángulos incongruentes de lados enteros, de los cuales  $T_e(15) = 3$  son escalenos y  $T_{is}(15) = 4$  son isósceles (incluido el equilátero de lado 5).

## 6. Conclusiones

Si bien es cierto que en la literatura hay diversos trabajos donde se establecen las fórmulas para  $P(n)$ ,  $T(n)$ ,  $T_e(n)$  y  $T_{is}(n)$ ; en este trabajo se ha explotado la sencillez del Teorema de Pick para deducirlas. La idea es que con este enfoque se pueda interesar en el tema a un grupo amplio de lectores.

## Referencias

- [1] Andrews G. (1979) *A note on partitions and triangles with integers sides*. The American Mathematical Monthly, Vol. 86, No. 6, p. 477-478.

- [2] Hirschhorn M. (2003) *Triangles with integers Sides* Mathematics Magazine, Vol. 76, No.4, p. 306-308.
- [3] Jara, P.; Ruiz, C. (2008) *El Teorema de Pick*. Aparece en: ESTALMAT-Andalucía; <http://www.ugr.es/~anillos/textos/pdf/2008/pick.pdf>
- [4] Jordan J., Walch R. and Wisner R. (1979) *Triangles with integers sides*. The American Mathematical Monthly, Vol. 86, No. 8, p. 686-689.
- [5] Matthias B. *A real short proof of Pick's theorem*.  
<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.35.8363&rep=rep1&type=pdf>
- [6] Ramírez J. L. (2010) *El Teorema de Pick y Redes de Puntos*. MAT<sup>2</sup> Materials Matemàtics, Volum 2010, no. 5.
- [7] Sally J. D. and Sally P.J., Jr. (2007) *Roots to Research: A Vertical Development of Mathematical Problems*. American Mathematical Society. ISBN: 978-0-8218-4403-8.
- [8] Tanton J. (2002) *Young students approach integer triangles*. Focus, the newsletter of the Mathematical Association of America, Vol.22, No.5, p. 4-6.
- [9] Varberg D. (1985) *Pick's theorem revisited*. The American Mathematical Monthly, Vol.92, No.8 , p. 584-587.



Eugenio Guerrero R.  
[eugueruz02@gmail.com](mailto:eugueruz02@gmail.com)



Miguel A. Marmolejo L.  
[mimarmol@univalle.edu.co](mailto:mimarmol@univalle.edu.co)



Héber Mesa P.

[heber.mesa@correounivalle.edu.co](mailto:heber.mesa@correounivalle.edu.co)

Departamento de Matemáticas  
Universidad del Valle  
Calle 13 100-00  
Cali-Colombia

*Publicat el 20 d'octubre de 2011*