

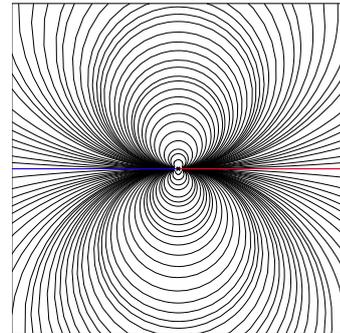
Algunos aspectos de la teoría de campos vectoriales planos reales y complejos*

Claudia R. Alcántara y Manuel Cruz-López

1. Introducción

El estudio de las ecuaciones diferenciales en el plano tomó una dirección importante a principios del siglo XX motivado por el Problema 16 de Hilbert que pregunta por el número de ciclos límite que tiene una ecuación diferencial polinomial en el plano. En el intento de resolver este problema, la teoría ha tenido un desarrollo notable en distintos aspectos, tanto en el caso real como en el caso complejo.

En este escrito hacemos una introducción a algunos aspectos de la teoría de campos vectoriales polinomiales planos, reales y complejos. Ilustraremos algunos métodos generales que se han implementado para entender el comportamiento de dichos campos en vecindades de *puntos singulares*, es decir, puntos donde el campo se anula. El comportamiento alrededor de los *puntos regulares*, donde el campo es distinto de cero, se entiende muy bien a partir del Teorema de Existencia y Unicidad de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (TEU) y el llamado Teorema de la Caja de Flujo. Dichos teoremas no se aplican en el



*Los autores agradecen el apoyo financiero de la Universidad de Guanajuato a través del Proyecto DAIP-UG: 191/2013.

caso singular, por lo que ha habido necesidad de implementar otros métodos, que a su vez, han permitido un desarrollo considerable de la teoría.

En la primera parte nos concentramos en el estudio de un campo vectorial polinomial real X en una vecindad de uno de sus puntos singulares. En particular, nos enfocaremos al cálculo del índice de Poincaré–Hopf del campo vectorial X en un punto singular; recordemos que el índice nos ayuda a comprender el comportamiento geométrico local de las curvas integrales del campo vectorial en una vecindad del punto singular.

A todo campo vectorial polinomial real X , se le asocia su variedad de ceros reales $Z_{\mathbb{R}}(X)$, que consiste de todos los puntos singulares reales de X . Al complexificar el campo X y encontrar todos sus puntos singulares complejos, se obtiene la variedad de ceros complejos $Z_{\mathbb{C}}(X)$. De acuerdo a cómo sean estas variedades, el cálculo del índice se hace utilizando técnicas muy distintas. El caso más estudiado es el correspondiente a las llamadas singularidades algebraicamente aisladas. En este caso, $Z_{\mathbb{R}}(X)$ y $Z_{\mathbb{C}}(X)$ son finitos. El índice se calcula a partir de la fórmula bien conocida de Eisenbud–Levine y Khimshiashvili (ver [EL] y [Khi]), que describe al índice como la signatura de una forma bilineal definida sobre un álgebra local asociada al campo vectorial, la cual, como \mathbb{R} -espacio vectorial es de dimensión finita.

En el caso que la singularidad no es algebraicamente aislada, la dimensión del álgebra local asociada al campo es infinita y no es posible hacer el cálculo del índice con la misma fórmula. Es necesario implementar otros métodos para poder realizar dicho cálculo. El estudio de este tipo de singularidades lo inició Castellanos en [Cas]. En el artículo [CCC], se hace el estudio del cálculo del índice imponiendo ciertas hipótesis específicas sobre el campo vectorial y su variedad de ceros complejos. Analizaremos el caso plano de estos resultados.

En la segunda parte del escrito nos enfocamos al estudio de campos vectoriales polinomiales complejos. Al igual que en el caso real, muchas de las propiedades interesantes de estos campos se encuentran alrededor de los puntos singulares. En diversos aspectos, la teoría tiene mucho en común con la respectiva teoría real, pero evidentemente existen diferencias esenciales.

De acuerdo con la versión compleja del TEU, por un punto regular del plano \mathbb{C}^2 pasa una única curva solución. En el caso de puntos singulares, el teorema de Camacho y Sad (ver [CS]) nos garantiza que en el plano al menos hay una curva analítica tangente al campo vectorial.

Una manera canónica de estudiar los espacios de dimensión uno que pasan por la singularidad es estudiar la parte lineal del campo holomorfo, así que el hecho que el polinomio característico tenga todas sus raíces en \mathbb{C} nos da una herramienta para estudiarlos, distinta al caso real. Otra herramienta conveniente en este estudio son los cambios de coordenadas holomorfos, los

cuales nos permiten llevar un campo vectorial holomorfo dado, a otro campo canónico que entendemos mejor.

Un tipo importante de singularidades lo conforman las llamadas *singularidades reducidas*: aquellas tales que el cociente de los valores propios de la parte lineal del campo alrededor de la singularidad no es un número racional positivo. De estas singularidades se conoce toda la dinámica, en el sentido que se sabe cuántas curvas analíticas tangentes al campo vectorial pasan por ellas.

A pesar de conocer la dinámica de las singularidades reducidas, la clasificación de campos vectoriales holomorfos en espacios de dimensión dos no está completa y las técnicas de estudio para diferentes tipos de campos pueden ser muy variadas. La cuestión puede reducirse al estudio alrededor de los puntos singulares, por lo que es entonces primordial encontrar invariantes bajo cambios de coordenadas que dependan sólo de la singularidad. Estos invariantes pueden definirse en el contexto de muchas áreas de las matemáticas como la topología, el análisis y la geometría algebraica.

En la primera parte, que consiste de las secciones §2, §3 y §4, hacemos la descripción del caso real y en las secciones §5, §6 y §7 analizamos el caso complejo. Finalmente, en la sección §8 hacemos algunos comentarios y preguntas que sugieren ideas para el posible desarrollo de la teoría de estos temas fascinantes.

2. Campos vectoriales polinomiales en \mathbb{R}^2

En esta sección damos algunas definiciones y resultados básicos sobre campos vectoriales planos reales y nos concentramos en el caso de campos vectoriales polinomiales, es decir, cuando las funciones componentes del campo X son polinomios. La bibliografía sobre el tema es muy amplia y cualesquiera de las referencias [HS] o [DLA] contiene un desarrollo detallado de la teoría.

2.1. Campos vectoriales en \mathbb{R}^2

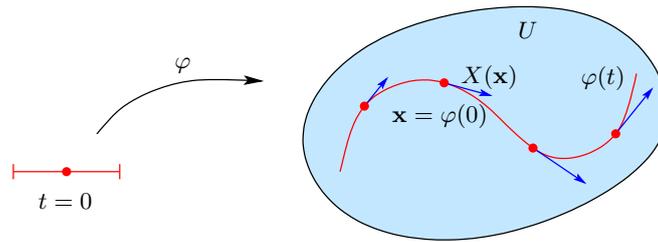
Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 y supongamos que $1 \leq r \leq \infty$ o $r = \omega$. Un *campo vectorial* de clase C^r en U es una aplicación $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^r . Un campo vectorial asocia, a cada punto $\mathbf{x} \in U$, un vector $X(\mathbf{x})$. Una *curva integral* del campo X es una solución de la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x}), \quad (\mathbf{x} \in U). \quad (1)$$

Si $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ es una solución de la ecuación diferencial (1), entonces

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t)), \quad (t \in I).$$

Esquemáticamente



Curva integral del campo X

Un punto $\mathbf{x}_0 \in U$ tal que $X(\mathbf{x}_0) \neq 0$ se llama un **punto regular** de X . En caso contrario diremos que \mathbf{x}_0 es un *punto singular* de X .

Supongamos que X es un campo vectorial que nunca se anula en U . El TEU (ver e.g., [DLA], Cap. 1, Teorema 1.1) establece que en la vecindad de cualquier punto $\mathbf{x}_0 \in U$, existe una curva integral φ de X definida en un intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ tal que $\varphi(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$.

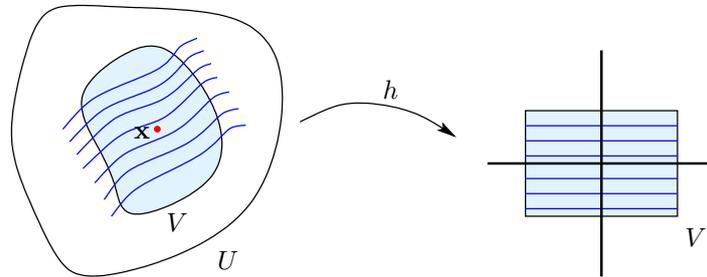
Las curvas integrales del campo X definen un flujo local φ en cada punto $\mathbf{x} \in U$; i.e., existe una vecindad $U_{\mathbf{x}}$ de \mathbf{x} y un intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ tal que, para cualquier $\mathbf{y} \in U_{\mathbf{x}}$, la curva integral que pasa por \mathbf{y} , $\gamma_{\mathbf{y}}(t)$ está definida para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$:

$$\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U_{\mathbf{x}} \rightarrow U, \quad \varphi(t, \mathbf{y}) := \gamma_{\mathbf{y}}(t).$$

φ es de clase C^r y las condiciones de flujo local son:

- $\varphi(0, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$ para toda $\mathbf{y} \in U$, \mathbf{y} ,
- $\varphi(s, \varphi(t, \mathbf{y})) = \varphi(s + t, \mathbf{y})$, siempre que los términos estén definidos.

Por otro lado, el Teorema de la Caja de Flujo (ver, e.g. [DLA], Cap. 1, Teorema 1.12), establece que en la vecindad de un punto regular es posible ‘alinear’ el campo vectorial. Más precisamente, si $\mathbf{x} \in U$ es un punto regular del campo X , entonces podemos encontrar una carta coordenada V alrededor de \mathbf{x} y un difeomorfismo $h : V \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^2$ tales que $X|_V$ es C^r -conjugado al campo horizontal $Y := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a través de h . Intuitivamente, una conjugación entre dos campos vectoriales manda curvas integrales en curvas integrales.



El Teorema de la Caja de Flujo

Observemos que podemos elegir V de manera que $V' \subset \mathbb{R}^2$ sea rectangular. De esta manera obtenemos una descomposición de V' en intervalos de la forma $V'_h \times \{y\}$, para cada $y \in V'_v$. Aquí, V'_h son los intervalos horizontales y V'_v son los intervalos verticales. Las curvas definidas por $h^{-1}(V'_h \times \{y\})$ son líneas de flujo local del campo X .

2.2. Campos vectoriales polinomiales

En lo sucesivo estudiaremos campos vectoriales polinomiales X definidos en subconjuntos abiertos del plano. Este campo vectorial lo representaremos usando el sistema diferencial asociado:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= P(x, y) \\ \dot{\mathbf{y}} &= Q(x, y),\end{aligned}$$

donde P y Q son polinomios en las variables reales x, y . Decimos que el sistema es de *grado* $n = \max\{\text{grad}(P), \text{grad}(Q)\}$.

Observación 2.1. Un sistema como el anterior, tiene un número infinito de puntos singulares (una curva) o, tiene a lo más n^2 puntos singulares en \mathbb{R}^2 .

De manera regular usaremos la siguiente notación para un campo vectorial polinomial evaluado en un punto cualquiera $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$X = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.1 (Campos lineales). Consideremos el sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, donde A es una matriz de 2×2 con $\det(A) \neq 0$. Observemos que $\mathbf{x} = 0$ es un punto singular del campo.

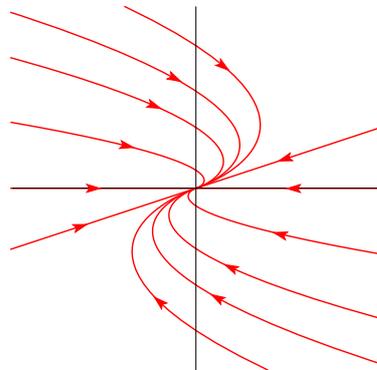
Si escribimos $\tau = \text{traza}(A)$ y $\delta = \det(A)$, entonces sabemos que los valores propios de A están dados por

$$\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}.$$

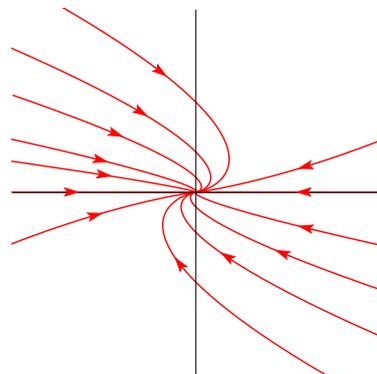
Tenemos entonces las siguientes posibilidades:

a) $\delta > 0$.

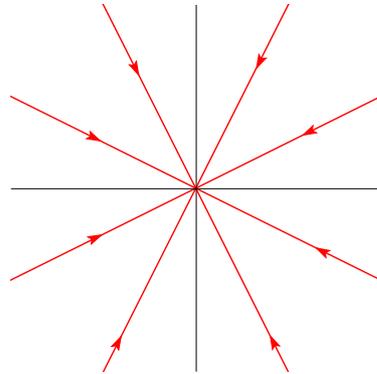
- $\tau^2 - 4\delta \geq 0$. En este caso decimos que 0 es un *nodo* (y se pueden distinguir tres tipos esencialmente diferentes):



(A tiene dos valores propios diferentes)

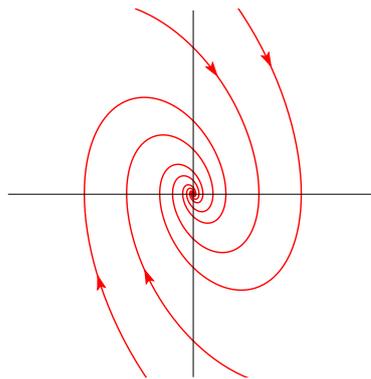


(A sólo tiene un valor propio y no diagonaliza)

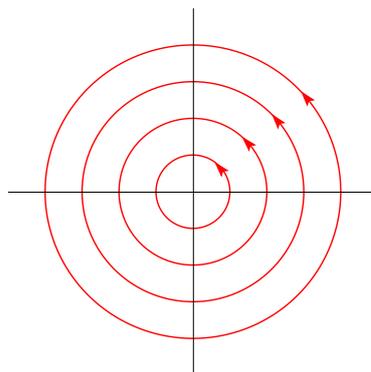


(A sólo tiene un valor propio y diagonaliza)

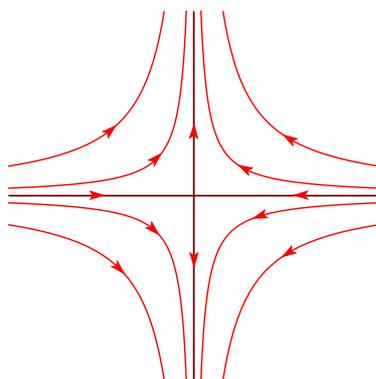
- $\tau^2 - 4\delta < 0$. En este caso decimos que 0 es un *foco*:



- $\tau = 0$. En este caso decimos que 0 es un *centro*:



b) $\delta < 0$. En este caso decimos que 0 es un *punto silla*:



Punto silla

3. Singularidades de campos vectoriales

En esta sección iniciamos el estudio del comportamiento local de un campo vectorial polinomial X en una vecindad de un punto singular \mathbf{x}_0 . De acuerdo con la observación (2.1), consideraremos el caso en el que el campo tiene solamente singularidades aisladas; esto es, un punto \mathbf{x}_0 es una *singularidad aislada* de X si existe una vecindad U de \mathbf{x}_0 suficientemente pequeña para que X no tenga otro punto singular en U .

Para realizar este estudio utilizaremos invariantes ‘locales’ del campo y, como el índice que vamos a definir es invariante bajo cambios de coordenadas, haremos el estudio en una vecindad del punto singular $0 := (0, 0)$, donde supondremos que 0 es una singularidad aislada de X .

Todos los conceptos y resultados importantes en esta sección y la siguiente son válidos, de forma muy general, para *gérmenes* de campos vectoriales polinomiales y sus invariantes locales. Sin embargo, para mantener la notación lo más sencilla posible, enunciaremos todo esto para campos vectoriales polinomiales, en el entendido de que un representante de un germen de campo vectorial polinomial es un polinomio definido en una vecindad del punto singular.

3.1. Gérmenes, invariantes locales y variedades de ceros

Sean $P, Q : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ dos polinomios definidos respectivamente en vecindades abiertas que contienen a 0, D_1 y D_2 , tales que $P(0) = Q(0) = 0$. Decimos que P es equivalente a Q , si existe una vecindad abierta $D \subset D_1 \cap D_2$

de 0 tal que $P|_D = Q|_D$. Una clase de equivalencia de aplicación polinomial en 0 se llama un *germen en 0 de un polinomio* en \mathbb{R}^2 .

El conjunto $\mathfrak{A} := \mathbb{R}[[x, y]]$ que consiste de todos los gérmenes en 0 de aplicaciones polinomiales en \mathbb{R}^2 es un anillo con la suma y multiplicación usual de series de potencias. Esto es, si $\overline{P}, \overline{Q} \in \mathfrak{A}$, entonces, la suma y multiplicación de \overline{P} y \overline{Q} están bien definidas como la suma y multiplicación usual de series de potencias. La serie de potencias idénticamente 0 es el elemento neutro aditivo y la serie de potencias 1 es el elemento neutro multiplicativo; además, estas dos operaciones satisfacen las propiedades distributivas usuales.

Observación 3.1. Utilizaremos en lo sucesivo campos vectoriales definidos en una vecindad de 0. Los conceptos, resultados e invariantes locales asociados están definidos de forma más general para gérmenes de campos vectoriales $X : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, los cuales podemos pensarlos como gérmenes en 0 de aplicaciones reales analíticas en \mathbb{R}^2 .

Sea

$$X = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$$

un campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^2 con singularidad aislada en 0. Denotemos por $\mathfrak{I}_X = (P, Q)$ al ideal generado por P y Q en \mathfrak{A} ; esto es, \mathfrak{I}_X consiste de elementos de la forma $fP + gQ$, donde $f, g \in \mathfrak{A}$.

Un invariante local de X en 0 es:

$$\mathfrak{A}_X := \mathfrak{A}/\mathfrak{I}_X.$$

\mathfrak{A}_X es un anillo local, i.e., \mathfrak{A}_X tiene un único ideal máximo. Más aún, \mathfrak{A}_X es también un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , por lo que admite una estructura de álgebra sobre \mathbb{R} .

Definimos la *variedad de ceros reales* de X como

$$Z_{\mathbb{R}}(X) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : X(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Como $\mathbf{x}_0 = 0$ es una singularidad aislada, se tiene que $Z_{\mathbb{R}}(X) = \{0\}$. Una observación importante que determina el tipo de ‘aproximación’ que se debe utilizar en este estudio es si la correspondiente variedad de ceros complejos tiene dimensión compleja positiva o cero. Para describir esta variedad, necesitamos complexificar el campo X .

El campo vectorial complexificado de X , que denotamos nuevamente por X , consiste básicamente en escribir los polinomios como funciones de variable compleja; esto es, el campo

$$X = \begin{pmatrix} P(z, w) \\ Q(z, w) \end{pmatrix}$$

es un campo vectorial complejo en \mathbb{C}^2 y P, Q son polinomios en las variables complejas z, w . Este campo determina un campo de líneas complejas en \mathbb{C}^2 en el complemento del *conjunto singular* o *variedad de ceros complejos* de X :

$$Z_{\mathbb{C}}(X) = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : X(z, w) = 0\}.$$

Dependiendo de la naturaleza geométrica de $Z_{\mathbb{C}}(X)$, se hace el estudio de las singularidades del campo X , las cuales dividiremos en: singularidades algebraicamente aisladas y singularidades que no son algebraicamente aisladas.

3.2. Singularidades algebraicamente aisladas (SAA)

Sea $X = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ un campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^2 con una singularidad aislada en 0.

Definición 3.1. Decimos que X tiene una *singularidad algebraicamente aislada* en 0 si el álgebra local \mathfrak{A}_X asociada a X , es de dimensión finita como espacio vectorial real. Esto es,

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{A}_X < \infty.$$

En este caso,

$$Z_{\mathbb{R}}(X) = \{0\} \quad \text{y} \quad Z_{\mathbb{C}}(X) = \{0\}.$$

Ejemplo 3.1. Sea

$$X = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

el campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^2 con singularidad aislada en 0. Observemos que

$$\mathfrak{A}_X = \mathbb{R}[[x, y]] / (x^2 - y^2, 2xy),$$

y una \mathbb{R} -base para \mathfrak{A}_X está determinada por las clases residuales de

$$1, x, y, x^2 + y^2.$$

Luego,

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{A}_X = 4,$$

y por lo tanto, X tiene una singularidad algebraicamente aislada en $0 \in \mathbb{R}^2$. Además,

$$Z_{\mathbb{R}}(X) = \{0\} \quad \text{y} \quad Z_{\mathbb{C}}(X) = \{0\}.$$

Ejemplo 3.2. Sea

$$X = \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ 3x^2y - y^3 \end{pmatrix}$$

el campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^2 con singularidad aislada en 0. Observemos que

$$\mathfrak{A}_X = \mathbb{R}[[x, y]] / (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3),$$

y una \mathbb{R} -base para \mathfrak{A}_X está determinada por las clases residuales de

$$1, x, x^2, y, xy, y^2, xy^2, y^3, y^4.$$

Luego,

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{A}_X = 9.$$

Por lo tanto, X tiene una singularidad algebraicamente aislada en $0 \in \mathbb{R}^2$. Además,

$$Z_{\mathbb{R}}(X) = \{0\} \quad \text{y} \quad Z_{\mathbb{C}}(X) = \{0\}.$$

3.3. Singularidades no-algebraicamente aisladas (SNAA)

Sea de nuevo $X = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ un campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^2 con una singularidad aislada en 0.

Definición 3.2. Decimos que X tiene una *singularidad no-algebraicamente aislada* en 0 si

$$\dim(Z_{\mathbb{C}}(X)) > 0.$$

En este caso,

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{A}_X = \infty.$$

El siguiente ejemplo ilustra esta situación (ver [CCC], ejemplo 3.3).

Ejemplo 3.3. Sea

$$X = \begin{pmatrix} x^4 - y^4 \\ 2x^3y + 2xy^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) \\ 2xy(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

el campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^2 . Claramente, X tiene una singularidad aislada en $0 \in \mathbb{R}^2$, pero la variedad de ceros complejos tiene codimensión 1. Esto es,

$$Z_{\mathbb{R}}(X) = \{0\} \quad \text{y} \quad \text{codim } Z_{\mathbb{C}}(X) = 1.$$

En este caso, el conjunto singular complejo de X son las dos rectas en \mathbb{C}^2 :

$$Z_{\mathbb{C}}(X) = \{x - iy = 0\} \cup \{x + iy = 0\}.$$

4. El índice de campos vectoriales

Como mencionamos en la introducción, para calcular el índice de un campo vectorial X en el punto singular $\mathbf{x}_0 = 0$, separamos el análisis en dos casos: cuando X tiene una singularidad algebraicamente aislada en 0 y cuando la singularidad no es algebraicamente aislada. En el primer caso, el estudio se hace calculando la signatura de una forma bilineal no degenerada asociada al campo. La fórmula correspondiente la determinaron Eisenbud-Levine y Khimshiasvili (ver [EL] y [Khi]). El estudio de singularidades no-algebraicamente aisladas de campos vectoriales reales analíticos fue iniciado por Castellanos en [Cas].

Sea $X = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ un campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^2 con una singularidad aislada en 0.

Sea \mathbb{S}^1 el círculo unitario en el plano y denotemos por \mathbb{S}_ε^1 a una circunferencia con centro en 0 de radio $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que la única singularidad de X en el disco determinado por \mathbb{S}_ε^1 sea el origen.

Definición 4.1. El *índice de Poincaré–Hopf* de X en 0 es el grado de la aplicación de Gauss:

$$\frac{X}{\|X\|} : \mathbb{S}_\varepsilon^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1.$$

Denotaremos por $\text{Ind}_0(X)$ al índice de X en 0.

En el caso de sistemas lineales (ver ejemplo 2.1), el índice está determinado por el signo del determinante δ de la matriz A . En esta situación, los índices son +1, para todos casos posibles en a), y -1 en el caso b).

4.1. Índice de campos vectoriales con SAA

Sea $X = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ un campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^2 con singularidad algebraicamente aislada en 0.

Entonces, el álgebra local asociada a X , \mathfrak{A}_X , es de dimensión finita como espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Eligiendo coordenadas en el dominio, podemos describir a X a partir de sus componentes $P, Q : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$. En las coordenadas x, y se define el determinante Jacobiano del campo vectorial X por

$$\text{Jac}(X) := \begin{vmatrix} \partial P/\partial x & \partial P/\partial y \\ \partial Q/\partial x & \partial Q/\partial y \end{vmatrix},$$

el cual podemos pensar como una función $\text{Jac}(X) : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$.

La clase residual J del germen $\text{Jac}(X)$ del determinante Jacobiano de X en el álgebra \mathfrak{A}_X

$$J = \text{Jac}(X) \quad \text{mód } \mathfrak{I}_X$$

es diferente de cero. Supongamos ahora que $\varphi : \mathfrak{A}_X \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal tal que $\varphi(J) > 0$. Entonces, dado este funcional lineal φ , se define una forma bilineal

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi : \mathfrak{A}_X \times \mathfrak{A}_X &\longrightarrow \mathfrak{A}_X \longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\longmapsto ab \longmapsto \varphi(ab) \end{aligned}$$

Antes de enunciar el resultado importante que nos permite calcular el índice de un campo vectorial en una singularidad algebraicamente aislada, recordemos que si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una forma bilineal definida en \mathfrak{A}_X (en general, en un espacio vectorial de dimensión finita), entonces su *signatura* es un invariante fundamental que se define como la suma algebraica de $+1$'s y -1 's que aparecen de acuerdo con los signos de los elementos diagonales de la matriz diagonal asociada a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

El teorema de Eisenbud–Levine y Khimshiashvili establece lo siguiente.

Teorema 4.1. *La forma bilineal*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi \tag{2}$$

es simétrica y no-degenerada. Su signatura es independiente de φ y el índice de Poincaré–Hopf de X en 0 está dado por

$$\text{Ind}_0(X) = \text{Signatura } \langle \cdot, \cdot \rangle. \tag{3}$$

Los siguientes ejemplos ilustran este importante resultado.

Ejemplo 4.1. Sea

$$X = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

el campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^2 con singularidad aislada en 0 . Entonces,

$$\text{Ind}_0(X) = 2.$$

Demostración. De acuerdo con el ejemplo 3.1, X tiene una singularidad algebraicamente aislada en $0 \in \mathbb{R}^2$. Una \mathbb{R} -base para \mathfrak{A}_X está determinada por las clases residuales de $1, x, y, x^2 + y^2$ y la clase residual del determinante Jacobiano es $4(x^2 + y^2)$. Si φ es el funcional lineal que envía J a 1 y los demás elementos de la base a 0 , entonces, $\varphi(J) > 0$ y la matriz asociada a esta forma bilineal tiene signatura 2 (ver, e.g. [EL]). Por lo tanto, el índice de Poincaré–Hopf de X en 0 es 2 . \square

Ejemplo 4.2. Sea

$$X = \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ 3x^2y - y^3 \end{pmatrix}$$

el campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^2 con singularidad aislada en 0. Entonces,

$$\text{Ind}_0(X) = 3.$$

Demostración. De acuerdo con el ejemplo 3.2, X tiene una singularidad algebraicamente aislada en $0 \in \mathbb{R}^2$. Una \mathbb{R} -base para \mathfrak{A}_X está dada por las clases residuales de $1, x, x^2, y, xy, y^2, xy^2, y^3, y^4$ y $J = 24y^4$. Si φ es el funcional lineal que envía y^4 a $1 \in \mathbb{R}$ y a los otros elementos de la base a 0, entonces $\varphi(J) > 0$. La signatura de la matriz asociada a φ es 3, y por lo tanto, el índice de Poincaré–Hopf de X en 0 es 3 (ver [CCC]). \square

4.2. Índice de campos vectoriales con SNAA

Sea $X = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ un campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^2 con singularidad aislada en 0, tal que la singularidad no es algebraicamente aislada.

En este caso, el álgebra local asociada a X , \mathfrak{A}_X , es de dimensión infinita como un espacio vectorial sobre \mathbb{R} y no es posible, hasta donde los autores saben, asociar una signatura a una forma bilineal definida sobre un espacio vectorial de dimensión infinita. En [CCC], los autores hacen el estudio de este tipo de singularidades de campos vectoriales reales analíticos.

En particular, en el caso en que $Z_{\mathbb{C}}(X)$ es de codimensión 1, los autores prueban que el campo vectorial X se puede escribir en la forma $X = fY$, donde f es un germen en 0 de una función real analítica que no cambia de signo fuera de 0 y Y es un germen en 0 de un campo vectorial real analítico con singularidad aislada en 0. Cuando Y tiene singularidad algebraicamente aislada en 0, entonces es posible encontrar una subálgebra de dimensión finita de \mathfrak{A}_X , en la cual se puede definir una forma bilineal simétrica y no-degenerada, cuya signatura es el índice del campo vectorial X en 0 (ver los teoremas en la sección 3 de [CCC], para todos los detalles).

El siguiente ejemplo ilustra un caso como el mencionado, donde la variedad de ceros complejos tiene codimensión 1 y el campo Y resultante tiene una singularidad algebraicamente aislada en 0.

Ejemplo 4.3 ([CCC]). Sea

$$X = \begin{pmatrix} x^4 - y^4 \\ 2x^3y + 2xy^3 \end{pmatrix}$$

el campo vectorial polinomial en \mathbb{R}^2 con singularidad aislada en 0. Entonces,

$$\text{Ind}_0(X) = 2.$$

Demostración. Claramente, X tiene una singularidad aislada en $0 \in \mathbb{R}^2$ y la variedad de ceros complejos tiene codimensión 1. Esto es,

$$Z_{\mathbb{R}}(X) = \{0\} \quad \text{y} \quad \text{codim } Z_{\mathbb{C}}(X) = 1.$$

En este caso, el conjunto singular complejo de X son las dos líneas en \mathbb{C}^2 :

$$Z_{\mathbb{C}}(X) = \{x - iy = 0\} \cup \{x + iy = 0\}.$$

Observemos ahora que $X = fY$, donde $f = x^2 + y^2$ es positiva fuera de 0 y Y es el campo vectorial polinomial

$$Y = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix},$$

el cual tiene una singularidad algebraicamente aislada en 0. Entonces, $\mathfrak{I}_X = (f)\mathfrak{I}_Y$, donde $\mathfrak{I}_Y = (x^2 - y^2, 2xy)$ es el ideal generado por las componentes del campo Y . Recordemos ahora que el radical del ideal \mathfrak{I}_X , el cual se denota por $\sqrt{\mathfrak{I}_X}$, consiste en todos los elementos $g \in \mathfrak{A}$ para los cuales existe un entero positivo n tal que $g^n \in \mathfrak{I}_X$. En este caso, y por la forma de \mathfrak{I}_X , se puede probar que:

$$\sqrt{\mathfrak{I}_X} = \sqrt{(f)\mathfrak{I}_Y} = \sqrt{(f) \cap \mathfrak{I}_Y} = \sqrt{(f)} \cap \sqrt{\mathfrak{I}_Y}.$$

Como $\sqrt{(f)} = (f)$ y $\sqrt{\mathfrak{I}_Y} = (x, y)$, se sigue que

$$\sqrt{\mathfrak{I}_X} = (f).$$

Finalmente, recordemos que el ideal cociente $(\mathfrak{I}_X : \sqrt{\mathfrak{I}_X})$ se define como el ideal que consta de todos los elementos $g \in \mathfrak{A}$ tales que $g\sqrt{\mathfrak{I}_X} \subset \mathfrak{I}_X$. En este caso,

$$(\mathfrak{I}_X : \sqrt{\mathfrak{I}_X}) = (f\mathfrak{I}_Y : f) = \mathfrak{I}_Y.$$

Usando el álgebra de dimensión finita \mathfrak{A}_Y se puede calcular el índice de Poincaré–Hopf de X . Como el índice de Poincaré–Hopf de Y en 0 es 2 (ver ejemplo 3.1), concluimos que el índice de Poincaré–Hopf de X en 0 es

$$\text{Ind}_0(X) = (+1)^2 \times (+2) = +2.$$

□

5. Campos vectoriales polinomiales en \mathbb{C}^2

En esta parte del escrito haremos el estudio de campos vectoriales polinomiales definidos en el plano complejo \mathbb{C}^2 . Empezaremos con las definiciones generales y algunos ejemplos que ilustran distintos comportamientos de flujos de campos complejos en el plano.

5.1. Campos vectoriales en \mathbb{C}^2

Sea $U \subset \mathbb{C}^2$ un subconjunto abierto en \mathbb{C}^2 y $P, Q : U \rightarrow \mathbb{C}$ polinomios complejos (holomorfos). Consideremos el sistema diferencial polinomial de grado n :

$$\begin{aligned}\dot{z} &= P(z, w) \\ \dot{w} &= Q(z, w).\end{aligned}$$

Recordemos que el *conjunto singular* del sistema es:

$$Z_{\mathbb{C}}(X) = \{(z, w) \in U : P(z, w) = Q(z, w) = 0\}.$$

Similarmente a como lo hicimos en el caso real, asociado a este sistema diferencial tenemos el campo vectorial polinomial (holomorfo)

$$X = \begin{pmatrix} P(z, w) \\ Q(z, w) \end{pmatrix}.$$

Definición 5.1. Diremos que φ es una solución del sistema diferencial anterior en el abierto V de \mathbb{C} , si

$$\begin{aligned}\varphi &= (\varphi_1, \varphi_2) : V \rightarrow U \\ t &\mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t))\end{aligned}$$

es una función holomorfa en V tal que para todo $t \in V$

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1(t) &= P(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \\ \dot{\varphi}_2(t) &= Q(\varphi_1(t), \varphi_2(t)).\end{aligned}$$

El TEU en el plano complejo (ver [Hil]), garantiza que por cada punto $p \in U$, existe una solución φ que satisface la condición $\varphi(0) = p$. Si p no es un punto singular, entonces la solución es única. En un punto singular, la ecuación diferencial tiene al menos la solución constante $\varphi(t) = p$.

Ejemplo 5.1. Consideremos el sistema diferencial

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= 1 \\ \dot{w}(t) &= 2,\end{aligned}$$

definido en \mathbb{C}^2 . El conjunto singular es el conjunto vacío. La solución de la ecuación asociada a X que pasa por $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$ es:

$$\begin{aligned}\varphi &= (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ t &\longmapsto (t + a_1, 2t + a_2),\end{aligned}$$

pues $\dot{\varphi}_1(t) = 1$, $\dot{\varphi}_2(t) = 2$ y $\varphi(0) = (a_1, a_2)$. Notemos que la imagen de esta solución es

$$\{(t + a_1, 2t + a_2) \in \mathbb{C}^2 : t \in \mathbb{C}\} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w = 2z - 2a_1 + a_2\},$$

la cual es una línea en el plano \mathbb{C}^2 que pasa por (a_1, a_2) . Todas estas rectas son paralelas, así que tienen intersección vacía entre si y llenan el espacio \mathbb{C}^2 al variar (a_1, a_2) .

Ejemplo 5.2. Consideremos el sistema diferencial

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= z \\ \dot{w}(t) &= w,\end{aligned}$$

definido en \mathbb{C}^2 . El conjunto singular es $\{(0, 0)\}$. La solución de la ecuación diferencial asociada a X que pasa por $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$ es:

$$\begin{aligned}\varphi &= (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2, \\ t &\longmapsto (a_1 e^t, a_2 e^t),\end{aligned}$$

pues $\frac{\partial(a_1 e^t)}{\partial t} = a_1 e^t$, $\frac{\partial(a_2 e^t)}{\partial t} = a_2 e^t$ y $\varphi(0) = (a_1, a_2)$. Notemos que si $(0, 0) \neq (a_1, a_2)$ entonces:

$$\{(a_1 e^t, a_2 e^t) \in \mathbb{C}^2 : t \in \mathbb{C}\} \cup \{(0, 0)\} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : a_2 z - a_1 w = 0\},$$

la cual es la recta que pasa por $(0, 0)$ y por (a_1, a_2) . Todas estas rectas llenan el espacio \mathbb{C}^2 al variar (a_1, a_2) y pasan por el punto singular.

El teorema de existencia y unicidad nos dice que la estructura topológica de las soluciones de la ecuación diferencial en una vecindad de un punto que no es singular es trivial. Los comportamientos topológicos más interesantes aparecen alrededor de los puntos singulares. Así que en lo que sigue, estudiaremos el comportamiento general de un campo vectorial polinomial (holomorfo) alrededor de un punto singular en un abierto de \mathbb{C}^2 .

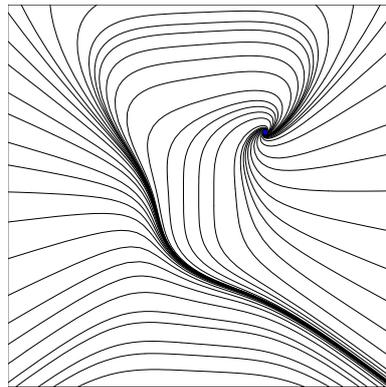
Ejemplo 5.3. Sea d un entero positivo y consideremos el campo vectorial polinomial

$$\nu_J = \begin{pmatrix} w^d - z^{d+1} \\ 1 - z^d w \end{pmatrix}.$$

El conjunto singular de este campo es

$$\{(r^{d+1}, r) : r \text{ es una raíz } d^2 + d + 1\text{-ésima de la unidad}\}.$$

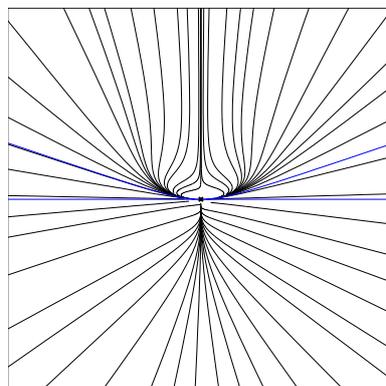
Este campo ha sido muy estudiado ya que, para d mayor o igual que 2, es un ejemplo de un campo vectorial polinomial sin soluciones definidas por polinomios. Fue descubierto por el matemático francés Jean Pierre Jouanolou en 1979 (ver [Jou]). Su retrato de fase en el plano real corresponde a la figura:



Ejemplo 5.4. Consideremos el campo vectorial:

$$\nu_3 = \begin{pmatrix} w z - z(z^2 + w^2) \\ -w(z^2 + w^2) \end{pmatrix}.$$

Este campo tiene una única singularidad en $(0, 0)$ y tiene soluciones definidas por polinomios. Su retrato de fase en el plano real corresponde a:



6. Separatrices

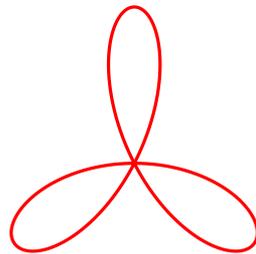
6.1. Teorema de Camacho y Sad

Como hemos mencionado anteriormente, los campos vectoriales polinomiales en el plano complejo tienen, por un punto singular, al menos la solución trivial constante, en esta sección veremos un teorema fundamental que nos dice que por todo punto singular del campo pasa una curva definida por los ceros de una función analítica (la cual puede ser singular) cuya tangente en cada punto es la marcada por el campo en cuestión. Éste resultado fue demostrado en 1982 por César Camacho y Paulo Sad. A continuación daremos algunos conceptos preliminares para terminar la sección enunciando este Teorema y dando algunos ejemplos.

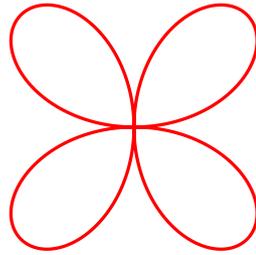
Definición 6.1. Sea U un abierto de \mathbb{C}^2 . Decimos que el conjunto $C \subset U$ es una *curva analítica* si existe una función holomorfa no constante $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $C = \{p \in U : F(p) = 0\}$. Si éste es el caso, diremos que F define a la curva C . Una curva analítica C es *irreducible* si la función que la define no se puede factorizar como el producto de dos funciones holomorfas no constantes.

Un ejemplo particular e importante de curva analítica es el siguiente: Si $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio, es decir, $F(z, w) = \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}^2 \cup \{(0,0)\}} a_{kl} z^k w^l$, entonces la curva analítica definida por F se llama *curva algebraica*. Por ejemplo:

- a) El trébol de tres hojas es la curva algebraica definida por los ceros de $(z^2 + w^2)^2 + 3z^2w - w^3$. Dibujo en el plano real:



- b) El trébol de cuatro hojas es la curva algebraica definida por los ceros de $(z^2 + w^2)^3 - 4z^2w^2$. Dibujo en el plano real:



Un ejemplo final: ¿Cuándo es analítica la curva $z^\lambda - w = 0$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ en una vecindad U de $(0,0)$? Si λ es un entero no negativo entonces la curva es analítica. Recordar que en general $z^\lambda = \exp(\lambda \log z)$ y la derivada del logaritmo no está definida para $z = 0$.

Estamos ahora en condiciones de establecer la siguiente definición.

Definición 6.2. Sea p una singularidad aislada de un campo vectorial X (esto significa que los polinomios que definen a X no tienen factores comunes distintos de las constantes). Una *separatriz de X por p* es una curva analítica C que pasa por p y tal que X es tangente a ella.

Ahora explicaremos cómo identificar una separatriz. Supongamos que el campo vectorial polinomial está definido en una vecindad de 0 en \mathbb{C}^2 por $X(z, w) = \begin{pmatrix} P(z, w) \\ Q(z, w) \end{pmatrix}$, donde P y Q no tienen factores polinomiales comunes distintos de las constantes. Para saber si la curva analítica C definida por $F(z, w) = 0$ es tangente al campo X debemos comprobar que el polinomio

$$X(F) = P(z, w) \frac{\partial F(z, w)}{\partial z} + Q(z, w) \frac{\partial F(z, w)}{\partial w}$$

es cero en todo punto (z_0, w_0) tal que $F(z_0, w_0) = 0$. Esto es así ya que el vector $\left(\frac{\partial F(z, w)}{\partial z}, \frac{\partial F(z, w)}{\partial w}\right)$ es normal a la curva C y si $(z, w) \in C$, entonces $F(z, w) = 0$ y por lo tanto $(P(z, w), Q(z, w)) \cdot \left(\frac{\partial F(z, w)}{\partial z}, \frac{\partial F(z, w)}{\partial w}\right)$ es cero.

El resultado que queremos destacar de esta sección es el siguiente.

Teorema 6.1. (Camacho–Sad [CS]) *Todo punto singular aislado de un campo vectorial holomorfo definido en una vecindad de \mathbb{C}^2 tiene al menos una separatriz.*

Este resultado nos dice que existen separatrices por los puntos singulares pero no nos dice nada de la naturaleza de dichas curvas analíticas. Podríamos ahora preguntarnos cuestiones como: ¿cuántas hay? en caso de existir ¿están definidas en todo \mathbb{C}^2 ? ¿son algebraicas? y en el caso de que lo sean ¿podemos encontrar el grado del polinomio que las define como función del grado de los polinomios que definen al campo? etcétera.

Por supuesto estas preguntas no tienen respuestas generales, y desafortunadamente no se sabe mucho al respecto. Por ahora desarrollamos dos ejemplos que responden parcialmente a la primera pregunta. Dichos ejemplos muestran que pueden existir tanto un número finito como una infinidad de separatrices por un punto singular.

Ejemplo 6.1. Considerar el campo $\begin{pmatrix} z \\ iw \end{pmatrix}$. Las funciones z, iw son polinomiales en \mathbb{C}^2 y el campo tiene un único punto singular en $(0, 0)$. En este caso las únicas separatrices por $(0, 0)$ son las curvas definidas por z y w .

Definición 6.3. Una singularidad es *dicrítica* si pasan por ella una infinidad de separatrices.

Ejemplo 6.2. Considerar el campo $\begin{pmatrix} z \\ nw \end{pmatrix}$, con n un entero positivo. Este campo tiene un único punto singular en $(0, 0)$. Es fácil observar que para todo $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ la curva algebraica definida por $k_1 z^n - k_2 w$ es separatriz por $(0, 0)$. Así que tenemos una singularidad dicrítica.

7. Singularidades reducidas

Ya vimos que un punto singular de un campo vectorial polinomial tiene al menos una separatriz y dimos un ejemplo de una singularidad y un campo con una infinidad de separatrices. En esta sección discutiremos sobre un tipo de singularidades, llamadas reducidas, por las que pasan a lo más dos separatrices. Si nuestro campo tiene solo singularidades reducidas entonces, en cierto sentido, su dinámica será fácil de estudiar.

El objetivo de esta sección es dar la definición precisa de singularidad reducida, ver que este tipo de singularidades es invariante ante cambio de coordenadas y terminar mencionando un importante resultado que nos dice que en muchos casos un campo puede ser llevado, en un cierto sentido, a otro cuyas singularidades son todas reducidas.

7.1. Cambio de coordenadas

El cambio de coordenadas en un campo vectorial polinomial holomorfo, al igual que en álgebra lineal, es útil para llevar nuestro campo a una forma más sencilla de estudiar. Por supuesto este cambio preserva las propiedades dinámicas del campo vectorial. A continuación damos la definición precisa de cambio de coordenadas.

Un cambio de coordenadas en U para un campo vectorial X se define a través de una función biholomorfa:

$$\begin{aligned} B : U &\longrightarrow U \\ (z, w) &\longmapsto (B_1(z, w), B_2(z, w)) = (x, y). \end{aligned}$$

A partir de B obtenemos un nuevo campo al que denotaremos por $B_*X(x, y)$ y que se define como $(DB \cdot X) \circ (B^{-1}(x, y))$. Es decir,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial z} & \frac{\partial B_1}{\partial w} \\ \frac{\partial B_2}{\partial z} & \frac{\partial B_2}{\partial w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(z, w) \\ Q(z, w) \end{pmatrix}_{(B^{-1}(x, y))} \\ = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial B_1}{\partial z}(z, w)P(z, w) + \frac{\partial B_1}{\partial w}(z, w)Q(z, w) \right)_{(B^{-1}(x, y))} \\ \left(\frac{\partial B_2}{\partial z}(z, w)P(z, w) + \frac{\partial B_2}{\partial w}(z, w)Q(z, w) \right)_{(B^{-1}(x, y))} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Diremos que $B_*X(x, y)$ es el campo X con el cambio de coordenadas dado por B .

Veamos cuidadosamente el ejemplo de un cambio lineal de coordenadas: Sea

$$\begin{aligned} L : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (z, w) &\longmapsto (az + bw, cz + dw) = (x, y), \end{aligned}$$

tal que $ad - bc = 1$, así que

$$\begin{aligned} L^{-1} : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (dx - by, -cx + ay) = (z, w), \end{aligned}$$

entonces,

$$L_*X(x, y) = \begin{pmatrix} aP(dx - by, -cx + ay) + bQ(dx - by, -cx + ay) \\ cP(dx - by, -cx + ay) + dQ(dx - by, -cx + ay) \end{pmatrix}.$$

Teorema 7.1. *Sea X un campo vectorial polinomial holomorfo definido en un abierto U de \mathbb{C}^2 y $B : U \rightarrow U$ un cambio de coordenadas para X . Entonces,*

1. $p \in U$ es un punto singular para X si y sólo si $B(p) \in U$ es un punto singular para $B_*X(x, y)$, y
2. F define una separatiz para X por p si y sólo si $F \circ B^{-1}$ define una separatiz para $B_*X(x, y)$ por $B(p) \in U$.

Demostración. La primera parte es consecuencia de:

$$P(a, b) = Q(a, b) = 0 \iff P(B^{-1}(B(a, b))) = Q(B^{-1}(B(a, b))) = 0.$$

Para la segunda parte, usando la regla de la cadena y el hecho de que la derivada de $(B(B^{-1}(x, y)))$ en cualquier punto es la matriz identidad, nos da el resultado. \square

Ejemplo 7.1. Consideremos el campo vectorial lineal:

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 z + \alpha_2 w \\ \beta_1 z + \beta_2 w \end{pmatrix}$$

y consideremos el cambio de coordenadas dado por el biholomorfismo

$$\begin{aligned} L : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (z, w) &\longmapsto (az + bw, cz + dw) = (x, y), \end{aligned}$$

entonces:

$$L_*X(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Esto nos dice que, salvo cambio de coordenadas, un campo vectorial lineal está dado por alguna de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Observación 7.1. A diferencia con lo que sucede en el ejemplo 2.1, en el caso complejo siempre es posible obtener los valores propios de la matriz.

7.2. Singularidades reducidas

En esta sección vamos a estudiar las singularidades llamadas reducidas, estas singularidades tienen la propiedad de que por ellas pasan a los más dos separatrices, así que en cierto sentido su dinámica es fácil de estudiar.

Sea U un abierto de \mathbb{C}^2 y consideremos el campo vectorial polinomial $X(z, w) = \begin{pmatrix} P(z, w) \\ Q(z, w) \end{pmatrix}$ definido en U .

Definición 7.1. La singularidad p se llama *reducida* si al menos uno de los valores propios λ_1 o λ_2 de la parte lineal

$$DX(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial z}(p) & \frac{\partial Q}{\partial z}(p) \\ \frac{\partial P}{\partial w}(p) & \frac{\partial Q}{\partial w}(p) \end{pmatrix}$$

de X alrededor de p , es distinto de cero y el cociente $\lambda = \lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}^+$. Este cociente λ recibe el nombre de *número característico de la singularidad p* .

Una singularidad reducida se llama *no-degenerada* si λ_1 y λ_2 son distintos de cero; en caso contrario se llama *nodo-silla*.

Hacemos ahora una breve descripción de las singularidades reducidas de acuerdo a su número característico λ (ver [Bru]):

1. $\lambda \notin \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ (dominio de Poincaré):

En este caso X es linealizable alrededor de p (teorema de linealización de Poincaré), es decir, en coordenadas adecuadas (z, w) centradas en p ,

$$X = \begin{pmatrix} z \\ \lambda w \end{pmatrix}.$$

Esta ecuación es integrable, es decir, se pueden dar las ecuaciones de todas las curvas solución, las cuales son

$$k_1 z^\lambda - k_2 w = 0,$$

donde $k_i \in \mathbb{C}$. Sin embargo, las únicas soluciones holomorfas son las definidas por z y w , ya que λ es un complejo puro o un real no racional. Entonces la singularidad p tiene dos separatrices.

2. $\lambda \in \mathbb{R}^-$ (dominio de Siegel):

En este caso la linealización no siempre es posible; sin embargo, como en el caso anterior, existen sólo dos separatrices z y w .

Ejemplo 7.2. Consideremos

$$X = \begin{pmatrix} -z \\ w \end{pmatrix}.$$

Si $a \in \mathbb{C}$, entonces las curvas analíticas definidas por $zw - a$ son solución del sistema correspondiente. Sin embargo, estas curvas no pasan por el único punto singular $(0, 0)$ a menos que a sea cero. Así que la única curva que pasa por el origen es $zw = 0$ que define las separatrices z y w .

3. $\lambda = 0$ (nodo-silla):

En este caso existe un cambio de coordenadas holomorfo tal que X se puede escribir como

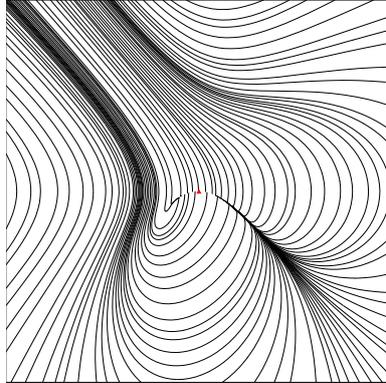
$$\begin{pmatrix} z(1 + aw^k) + wF(z, w) \\ w^{k+1} \end{pmatrix},$$

donde k es un natural, $a \in \mathbb{C}$ y F es una función holomorfa que se anula en $(0, 0)$ hasta orden k . La curva w es una separatriz llamada “separatriz fuerte”. Algunas veces, por ejemplo si $F(z, w) = 0$, existe una segunda separatriz z , llamada “separatriz débil”.

Ejemplo 7.3. Consideremos

$$X = \begin{pmatrix} -w^2 - z^2 w \\ w + z^2 - zw^2 \end{pmatrix},$$

este campo vectorial holomorfo satisface las siguientes propiedades: tiene una única singularidad en $(0, 0)$, se sabe que ninguna de sus separatrices es algebraica, sin embargo no se sabe cómo son las separatrices. La singularidad es un nodo-silla, así que la teoría nos dice que, haciendo un cambio holomorfo de coordenadas, podemos obtener a lo más dos separatrices algebraicas por la singularidad, evidentemente dicho cambio no puede ser algebraico, es decir, no puede estar definido por ecuaciones polinomiales. Su retrato de fase en el plano real se exhibe en la siguiente figura:



Para terminar esta sección comentamos que la importancia de estudiar las singularidades reducidas radica en el hecho que existe una construcción muy general en matemáticas, la cual no veremos en estas notas, que consiste en hacer explosiones en los puntos singulares del campo vectorial para llevarlo a uno en el que todas las singularidades tienen en cada caso alguno de los valores propios de su parte lineal diferente de 0 (y son en muchos casos reducidas). La demostración de este importante resultado puede consultarse en [Sei]. También recomendamos revisar [AFJ], donde se expone de manera clara y con muchos ejemplos cómo se lleva a cabo el proceso de explosión de campos vectoriales polinomiales planos en sus puntos singulares.

Una vez que tenemos sólo singularidades reducidas podemos estudiar los campos alrededor de estas singularidades haciendo un cambio de coordenadas y llegando a las singularidades descritas en esta subsección. De este modo obtendremos un comportamiento conocido de nuestro campo vectorial alrededor de sus puntos singulares.

8. Comentarios finales

Los distintos aspectos del estudio de campos vectoriales mencionados en el presente artículo son motivo de intenso trabajo en diferentes lugares y desde perspectivas diversas. En este último apartado mencionamos algunas ideas generales y preguntas que nos parecen interesantes.

Supongamos primero que $X = (X_1, \dots, X_n)$ es un germen en 0 de un campo vectorial analítico real en \mathbb{R}^n con una singularidad aislada en $0 = (0, \dots, 0)$.

- I. Si el campo Y que resulta de escribir a X como $X = fY$ (ver 4.2) no tiene una singularidad algebraicamente aislada en 0, ¿es posible repetir el proceso desarrollado para calcular el índice?

- II. ¿Es posible probar un teorema análogo al teorema 3.2 en [CCC] si suprimimos la hipótesis de reducibilidad de la variedad de ceros complejos?
- III. ¿La posible existencia de curvas algebraicas invariantes proporciona información relevante para el cálculo del índice?

Como se ha mencionado en las últimas secciones de estas notas, la clasificación de los campos vectoriales polinomiales complejos no está ni de lejos terminada, existen muchos problemas abiertos en este sentido. Vamos a describir algunos de ellos y algunos métodos que se han usado para resolverlos.

- I. Encontrar métodos generales para saber si un campo vectorial tiene separatrices algebraicas o encontrar ejemplos de campos sin ellas representarían resultados muy atractivos en esta área. Por ejemplo en [Zol] el autor encontró campos con esta propiedad.
- II. Usando métodos de la Teoría Geométrica de Invariantes, es posible probar resultados sobre clasificación de campos con cierto tipo de singularidades degeneradas y con separatrices algebraicas (ver [Alc1], [Alc2], [Alc3]). ¿Es posible seguir utilizando esta técnica para parametrizar mediante variedades algebraicas campos con cierto tipo de singularidades degeneradas y con cierto tipo de separatrices algebraicas?
- III. Supongamos que un campo vectorial polinomial X tiene todas sus separatrices algebraicas (ver ejemplo 6.2). ¿Es posible obtener el grado de los polinomios que definen las separatrices como una función del grado de los polinomios que definen al campo? Este problema fue enunciado y descubierto por Henri Poincaré y es, al igual que los anteriores, altamente no trivial. No es posible resolverlo en general pero se han encontrado resultados bajo ciertas condiciones (ver por ejemplo [Car]).

Agradecimientos: Los autores desean agradecer a Víctor Castellanos por la lectura cuidadosa y comentarios críticos que hizo del manuscrito, así como por la elaboración de las figuras que se usan en la segunda parte del texto. También, los autores agradecen a Fermín Reveles la realización de las figuras que aparecen en la primera parte del artículo. Finalmente, los autores agradecen especialmente al árbitro anónimo por los múltiples comentarios que realizó sobre el trabajo, que estamos seguros harán la lectura del texto mucho más agradable.

Referencias

- [Alc1] Alcántara, C. R. *The good quotient of the semi-stable foliations of CP^2 of degree 1*. Results in Mathematics, **53** (2009), 1–7.
- [Alc2] Alcántara, C. R. *Geometric Invariant Theory for Holomorphic Foliations on CP^2 of degree 2*. Glasgow Math. Journal, **53** (2011), 153–168.
- [Alc3] Alcántara, C. R. *Foliations on CP^2 of degree 2 with degenerate singularities*. Bulletin of the Brazilian Math. Society, **44(3)** (2013), 421–454.
- [AFJ] Álvarez, M. J.; Ferragut, A. and Jarque, X. *A survey on the blow up technique*. Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Engrg, **21** (2011), no. 11, 3103–3118.
- [Bru] Brunella, M. *Birrational Geometry of Foliations*. Mathematical Monographs, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, (2000) 138 pp.
- [Car] Carnicer, M. *The Poincaré Problem in the Nondicritical Case*. The Annals of Mathematics, Second Series, **140, 2** (1994), 289–294.
- [Cas] Castellanos, V. *The index of non algebraically isolated singularities*. Bol. Soc. Mat. Mex. **8** (2002), 141–148.
- [CCC] Castellanos, V.; Castorena, A. and Cruz-López, M. *Algebraic and Computational Formulas for the Index of Real Analytic Vector Fields*. Results. Math. **59** (2011), 125–139.
- [CS] Camacho, C. and Sad, P. *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*. Annals of Mathematics, **115** (1982), 579–595.
- [DLA] Dumortier, F.; Llibre, J. and Artés, J.C. *Qualitative theory of planar differential systems*. Universitext, Springer-Verlag (2006).
- [EL] Eisenbud, D. and Levine, H. *An algebraic formula for the degree of a C^∞ map germ*. Annals of Math. **106** (1977), 19–44.
- [Hil] Hille, E. *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain*. Courier Dover Publications, 1997.

- [HS] Hirsch, M.W.; Smale, S. and Devaney, R. *Differential Equations, Dynamical Systems and An Introduction to Chaos*. Academic Press, 2004.
- [Jou] Jouanolou, J.P. *Equations de Pfaff Algébriques*. Lecture Notes in Mathematics, **708** (1979), v+255 pp. Springer-Verlag.
- [Khi] Khimshiashvili, G. *On the local degree of a smooth mapping*. Camm. Acad. Sci. Georgian SSR. **85** (1977), no. 2, 309–311.
- [Sei] Seidenberg, A. *Reduction of singularities of the differential equation $A dy = B dx$* . Amer. J. Math. **89** (1968) 248–269.
- [Zol] Zoladek, H. *New examples of holomorphic foliations without algebraic leaves*. Stud. Math., **131** (1998), 137–142.



Claudia R. Alcántara
Departamento de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
Guanajuato, México.
claudiagto@gmail.com



Manuel Cruz-López
Departamento de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
Guanajuato, México.
manuelcl@ugto.mx

Publicat el 22 de setembre de 2014