*MAT*²
MATerials MATemàtics
Volum 2014, treball no. 7, 20 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

Variaciones sobre el tema de las máquinas que calculan

Josefina Álvarez, Isabel Marrero

Tal y como las conocemos hoy en día, las máquinas que calculan, sean calculadoras o computadoras, no pueden desarrollar cualquier tarea, pero pueden darnos admirablemente mucha información, siempre que dispongamos de los conocimientos necesarios y las instruyamos adecuadamente.

Comenzaremos el artículo discutiendo algunas situaciones en las que nuestro cerebro parece ser la mejor "máquina de calcular", continuando con varios ejemplos muy sencillos que muestran cómo las máquinas que calculan nos desafían a formular preguntas muy bien pensadas. A lo largo de la exposición tomaremos algunos desvíos y ofreceremos otras conexiones y ampliaciones, incluyendo abundantes referencias bibliográficas.

1. El caso de los calcetines mezclados

El maestro presenta este problema a la clase: *"En un cajón hay una mezcla de calcetines blancos y grises. ¿Cuántos calcetines necesitamos coger como mínimo, sin mirar, para estar seguros de que tenemos un par del mismo color?"* La mayoría de los niños comienzan a buscar en sus mochilas. El maestro, perplejo, pregunta *"¿Qué están buscando?"*, a lo que uno de ellos responde *"La calculadora"*.

Esta anécdota, aparecida en la sección *Humor* de uno de los números de la revista digital *Matematicalia* [11], podría inspirar un agitado debate sobre el papel que las calculadoras deben jugar en los planes de estudio, algunos

considerándolas una buena herramienta didáctica y otros restringiendo su uso por temor a que la calculadora no sea más que una muleta.

A los efectos de este artículo, dejaremos de lado cualquier consideración sobre la dependencia de las calculadoras que la anécdota sugiere y, simplemente, nos preguntaremos si una calculadora podría haber ayudado a estos niños. La respuesta es probablemente negativa, porque a esa temprana edad no es común que se piense en "preparar" a la calculadora. Para responder al problema de los calcetines usando una calculadora tendríamos que implementar una simulación, cosa que sería improbable que estos niños hicieran espontáneamente. En este contexto, la calculadora se usa en general para "hacer cuentas".

El cerebro de un niño, sin embargo, está perfectamente dotado para manejar la situación, porque puede descubrir cómo generar y analizar los posibles casos: un calcetín no es suficiente, un par podría incluir uno de cada color, pero una terna debe contener necesariamente dos calcetines blancos o dos grises.

En este ejemplo, podemos decir que la utilidad de la calculadora está limitada por los conocimientos de quien la maneja. Es decir, el que una calculadora nos pueda dar la respuesta, depende no sólo de cómo hacemos la pregunta, sino de nuestro contexto.

Éste no va a ser el caso en las dos situaciones que mostraremos a continuación, en las que vamos a plantear problemas matemáticos de formulación sencilla, cuya resolución está fuera del alcance de las máquinas que calculan.

La primera de las situaciones tiene que ver con ...

2. Los primos lejanos

Dado un número natural N cualquiera, es posible encontrar N números consecutivos, que no son primos. En otras palabras, el espacio entre números primos consecutivos puede tornarse arbitrariamente grande. Una manera de verlo es el considerar la sucesión de números dada por la fórmula

$$(N+1)!+j, \text{ para } j=2,3,\ldots,N+1\,. \tag{1}$$

Es claro que estos números son consecutivos. Además, el j-ésimo número es claramente divisible por j.

Por ejemplo, si $N=7$, la fórmula (1) nos da los números

$$40322, 40323, \ldots, 40327, 40328,$$

que por cierto no son los únicos, ni los más pequeños. Si buscamos un poco "a mano", encontraremos la sucesión

$$90, 91, 92, 93, 94, 95, 96,$$

que también cumple las condiciones del enunciado.

Precisamente, usando una computadora para N pequeño hallaríamos sucesiones adecuadas pero sin ninguna regla aparente y eso dificultaría el deducir la solución tan elegante que tiene el problema. Por otra parte, recordemos que ya el matemático alejandrino Euclides (ca. 300 A. C.) probó que hay una infinidad de números primos [18]; de más está el decir que la computadora no sabría cómo "buscar" esas sucesiones, para todo N, en los infinitos "agujeros" dejados por los números primos.

Por cierto, uno de los problemas más difíciles en la teoría de números es el establecer cómo se distribuyen los números primos entre los números reales positivos. Concretamente, el problema es el estudiar la función $\pi(x)$ ó "función contadora de primos", definida como el número de primos menores o iguales que x.

Aunque en la historia de la función $\pi(x)$ hay muchos personajes [25], podemos decir brevemente que el matemático alemán Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fue uno de los que conjeturó que debe de existir el

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1\,. \tag{2}$$

Es decir, que la función $\pi(x)$ es asintótica a la función $\frac{x}{\ln x}$ para $x \to \infty$. La confirmación de esta conjetura es una consecuencia del llamado teorema de Hadamard y de la Vallée-Poussin, probado independientemente, en 1896, por el matemático francés Jacques Salomon Hadamard (1865-1963) y por el matemático belga Charles-Jean Étienne Gustave Nicolas Levieux, Barón de la Vallée-Poussin (1866-1962).

La fórmula (2) muestra que, en cierto modo, los números primos abundan, aunque sabemos que pueden mantenerse a distancias muy respetables.

3. Las ecuaciones diofánticas

Este nombre se refiere a ecuaciones polinómicas en dos o más incógnitas con coeficientes enteros para las que se buscan soluciones también enteras [21]. Toman su nombre del matemático alejandrino Diofanto (ca. 200 D. C.) [30], quien inició su estudio.

Por ejemplo, las ternas $(m^2 - n^2, 2\,m\,n, m^2 + n^2)$, para números naturales m, n cualesquiera, muestran que la ecuación diofántica

$$x^2 + y^2 = z^2$$

tiene un número infinito de soluciones enteras. Cuando $m > n$, esas ternas se llaman pitagóricas [26], porque dan los lados de un triángulo rectángulo.

El matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665) afirmó que para cada número natural $n \geq 3$ la ecuación

$$x^n + y^n = z^n$$

no tiene soluciones enteras. Es bien sabida la fascinante historia de esta conjetura, conocida como "el último teorema de Fermat" y finalmente probada en 1995 por el matemático inglés Andrew John Wiles (n. 1953).

Afortunadamente, no todas las ecuaciones diofánticas son tan difíciles de atacar. Por ejemplo, el hecho de que la ecuación

$$x^2 + y^2 = 3z^2$$

no tiene soluciones enteras puede probarse usando resultados clásicos de la teoría de números. La demostración está muy bien explicada en la página 35 del reciente libro [3] escrito por el matemático español Antonio Córdoba (n. 1949). Es una demostración sencilla que, para no alargar demasiado las cosas, vamos a omitir.

¿Sería posible que una computadora llegue a la misma conclusión? Después de todo, las computadoras actuales tienen una capacidad de cálculo inmensa.

La dificultad estriba en que después de un millón de pruebas, o de un trillón, o del número que queramos imaginar, quedará aún un número infinito de casos por comprobar; éste es un problema muy serio, porque las máquinas que calculan no saben lidiar bien con conjuntos infinitos. Esto fue también lo que ocurrió en el caso de los primos lejanos. Como veremos más tarde, se trata de una dificultad con amplias ramificaciones.

Aunque hemos comenzado con una nota pesimista en relación a la capacidad de nuestras máquinas de calcular, las siguientes secciones mostrarán cómo estas máquinas pueden darnos muy buenas respuestas, siempre que seamos conscientes de sus limitaciones y pongamos cuidado en cómo formular las preguntas.

4. ¿Es ésta la respuesta correcta?

Si pedimos en una clase que los estudiantes calculen la derivada de

$$\frac{1-x^2}{1+x^2},$$

podemos esperar que la respuesta será dada en muchas formas. Por ejemplo:

$$\frac{-2\,x\,(1+x^2)-(1-x^2)\,2\,x}{(1+x^2)^2},$$
$$\frac{-2\,x-2\,x^3-2\,x+2\,x^3}{(1+x^2)^2},$$
$$-\frac{4\,x}{1+2\,x^2+x^4},$$
$$-\frac{4\,x}{x^4+2\,x^2+1}.$$

Incluso puede ser que algún chistoso responda

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right).$$

Un calificador humano descartaría de inmediato la última opción y podría verificar fácilmente que todas las otras respuestas deberían ser marcadas como correctas. Un programa de calificación automática por computadora también rechazaría la última opción, pero no podría anticipar todas las posibles formas correctas de la respuesta. ¿Cómo decidiría entonces? El primer paso consistiría en seleccionar una de las respuestas como “la respuesta correcta”. Hecho esto, uno de los métodos sería el incorporar un sistema de álgebra computacional, capaz de efectuar las manipulaciones simbólicas necesarias para deducir cualquier otra respuesta. Un segundo método, mucho menos costoso y que se utiliza muy a menudo, es el que exponemos a continuación.

"La respuesta correcta" es evaluada, con una precisión predeterminada, para varios valores fijos de x. El programa corrector almacena entonces los resultados de estas evaluaciones. Cuando tiene que decidir si una respuesta es correcta, lo que hace es evaluarla, con igual precisión, en los mismos valores de x, comparando los resultados con los que tiene almacenados. Si coinciden dentro de un cierto umbral de error preestablecido, el programa califica la respuesta como acertada.

Para dar un ejemplo concreto, uno de los programas de corrección automática usa los siguientes valores de x:

x
0,123 456 789 012
0,345 678 901 234
0,890 123 456 789

Es decir, para este programa la respuesta correcta es, en realidad, un conjunto de tres números. La igualdad de dos expresiones simbólicas se reduce así a la igualdad aproximada, dentro de un margen de error preestablecido, de ciertos números.

Ésta es una forma ingeniosa de marcar rápidamente como correctas o incorrectas las respuestas a problemas que evalúan el conocimiento de reglas. Sin embargo, hay que tener presente que un programa de calificación por computadora no puede decidir la seriedad de un error y, hasta el momento, ninguno de los programas disponibles comercialmente parece ser capaz de evaluar un problema con varios pasos que combine texto y cálculos.

5. Números casi enteros

La prueba de la irracionalidad del número

$$\mathrm{e}^{\pi\sqrt{163}}$$

usa matemáticas de altos vuelos. Para no perder el hilo de nuestra discusión, vamos a aceptar por ahora que $\mathrm{e}^{\pi\sqrt{163}}$ es irracional, dejando para más adelante la explicación del porqué.

Una vez conocida esta irracionalidad, cabría pensar que cualquiera de nuestras potentes calculadoras podría darnos muy buena información sobre su valor numérico, explicando al mismo tiempo por qué lo llamamos casi entero. Pues bien, no es éste el caso.

Una calculadora gráfica puede mostrar evaluaciones numéricas con hasta doce dígitos, antes de recurrir a la notación científica. Hablamos de calculadoras gráficas con el fin de establecer claramente el tipo de calculadora de bolsillo al que nos referimos. Por supuesto, la capacidad de graficar no jugará ningún papel en nuestra exposición.

O sea que usando la aritmética de doce dígitos, el número $e^{\pi\sqrt{163}}$ se convierte en

$$2{,}625\,374\,126\,42 \times 10^{17},$$

o bien

$$262\,537\,412\,642\,000\,000\,.$$

La calculadora no nos diría nada más, y una computadora, por sí misma, no lo haría mucho mejor. Sin embargo, equipada con un sistema de álgebra computacional podría mostrar evaluaciones numéricas con muchos más dígitos. Por ejemplo, usando una aritmética de veinte dígitos, $e^{\pi\sqrt{163}}$ es

$$262\,537\,412\,640\,768\,744{,}28\,.$$

Usando una aritmética de cuarenta dígitos obtenemos

$$262\,537\,412\,640\,768\,743{,}999\,999\,999\,999\,250\,072\,595\,7\,.$$

Así pues, usando esta gran precisión, podemos ver que nuestro número irracional difiere del entero 262 537 412 640 768 744 en menos de 10^{-12}, lo cual explica el nombre de casi entero y su lugar en la sección *Bestiario Númerico* del libro [4].

Como veremos más adelante, estos curiosos números casi enteros aparecen en relación a varias ramas de la matemática. Otro ejemplo es el número $e^{\pi\sqrt{58}}$, que fue propuesto por el genio matemático indio Srinivasa Ramanujan (1887-1920).

Usando veinte dígitos, el número es

$$24\,591\,257\,751{,}999\,999\,838$$

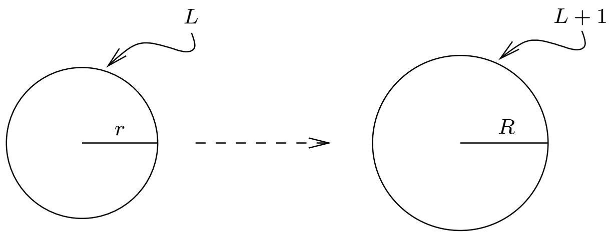
y por lo tanto difiere de un entero en menos de 10^{-6}.

Es decir, necesitamos herramientas de computación bastante refinadas para extraer la verdadera naturaleza de estos números.

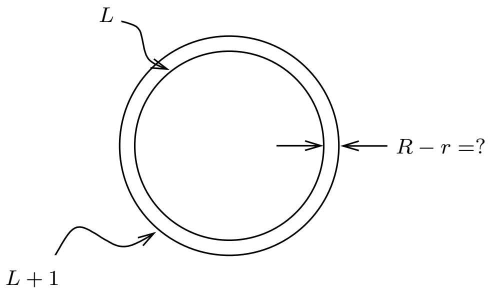
Aquí paramos, por ahora, con los casi enteros, pero prometemos regresar, no sólo con la irracionalidad de $e^{\pi\sqrt{163}}$, sino con más cosas relativas a estos números tan curiosos.

6. Imaginemos ...

...un círculo de radio r y circunferencia L, e imaginemos también que incrementamos su circunferencia en una unidad:



Por último, imaginemos que colocamos ambos círculos concéntricamente, preguntándonos cuál es la separación entre ellos, es decir, cuánto vale $R - r$:



Una simple manipulación algebraica nos dará la respuesta. Como

$$L = 2\,\pi\,r$$

y

$$L + 1 = 2\,\pi\,R\,,$$

la diferencia $R - r$ debe de ser

$$R - r = \frac{L+1}{2\,\pi} - \frac{L}{2\,\pi} = \frac{1}{2\,\pi}\,,$$

en la unidad que estemos usando para medir L, independientemente del círculo inicial. Esta respuesta, que quizá sorprenda, fue justificada en la sección *¿Qué pasaría si ...?* de *Matematicalia* [10].

Por supuesto, $\frac{1}{2\pi}$ puede ser aproximado con un grado de precisión arbitrario. Por ejemplo, usando la aritmética de doce dígitos en una calculadora gráfica,

$$\frac{1}{2\,\pi} = 0{,}159\,154\,943\,092\,,$$

mientras que usando la aritmética de veinte dígitos en un sistema de álgebra computacional,

$$\frac{1}{2\,\pi} = 0{,}159\,154\,943\,091\,895\,335\,77\,.$$

Observemos que, en ambos casos, el cero que hemos escrito a la izquierda de la coma decimal no aparece en la pantalla.

No hay duda de que la respuesta $\frac{1}{2\,\pi}$, obtenida manipulando letras sin ninguna complicación numérica, es la exacta. ¿Qué pasaría si empezáramos con un círculo "numérico"? Por ejemplo ...

7. ¿Qué ocurre con $L = 10^{12}$ metros?

Necesitamos imitar nuestra manipulación algebraica anterior, sólo que en este caso usaremos números:

$$2\,\pi\, r = 10^{12}\,,$$

o bien

$$r = \frac{10^{12}}{2\,\pi}\,.$$

Usando la aritmética de doce dígitos en una calculadora,

$$r = 159\,154\,943\,092\,.$$

De igual modo,

$$\begin{aligned} 2\,\pi\, R &= 10^{12} + 1 \\ R &= \frac{10^{12}+1}{2\,\pi}\,. \end{aligned}$$

Utilizando la misma aritmética de doce dígitos en una calculadora encontramos que

$$R = 159\,154\,943\,092\,,$$

y, por lo tanto,

$$R - r = 0\,,$$

respuesta que, como sabemos, no es correcta. ¿Qué ha sucedido?

Los valores exactos de los números 10^{12} y $10^{12}+1$ tienen trece dígitos, así que la calculadora presenta ambos como 1×10^{12} o, en su propia notación, `1.E-12`. O sea que la calculadora no puede mostrar el efecto de añadir uno al dígito décimotercero.

Ésta es simplemente una de las muchas complicaciones que surgen del hecho de que ninguna de las máquinas que calculan puede trabajar a un tiempo con la infinidad de números que componen nuestro sistema. Por el contrario, ellas usan colecciones finitas de números, llamadas sistemas de punto flotante, que dependen de cuántos dígitos se usan en las manipulaciones internas de la máquina y de cuántos dígitos se muestran. Desafortunadamente, en estos sistemas abreviados, las respuestas dependen del orden en el que efectuamos las operaciones y de cuándo le pedimos a la máquina que haga evaluaciones numéricas. Por ejemplo, al buscar $R - r$ en una calculadora, podemos proceder como sigue:

$$\frac{10^{12}+1}{2\,\pi} - \frac{10^{12}}{2\,\pi} = \frac{10^{12}}{2\,\pi} + \frac{1}{2\,\pi} - \frac{10^{12}}{2\,\pi} = \left(\frac{10^{12}}{2\,\pi} - \frac{10^{12}}{2\,\pi}\right) + \frac{1}{2\,\pi}\,,$$

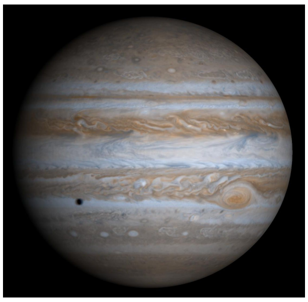
de donde obtenemos la respuesta

$$R - r = 0{,}159\,154\,943\,092\,,$$

la cual es correcta dentro de la precisión que puede alcanzar la máquina. Observemos que en este segundo enfoque hemos efectuado manipulaciones simbólicas hasta que el causante de los problemas númericos, 10^{12}, es eliminado; sólo entonces evaluamos numéricamente la expresión simbólica $\frac{1}{2\,\pi}$.

Estos efectos del redondeo pueden manifestarse tanto en calculadoras como en computadoras. Ellos juegan un papel muy sutil e importante en el diseño de algoritmos numéricos para operaciones tan básicas como, por ejemplo, la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y el cálculo de la inversa de una matriz. Varios ejemplos espectaculares y muy sencillos se pueden ver en la sección 1.5 del libro [12].

Incidentalmente, 10^{12} m es el orden de magnitud de diez mil veces la circunferencia ecuatorial del planeta Júpiter, a la que la NASA [14] da el valor 439 264 km.



Por simplicidad, estamos suponiendo que dos números son del mismo orden de magnitud cuando, escritos en notación científica, tienen el mismo exponente. Una definición un poco distinta aparece en [31].

Por supuesto, hemos elegido este número enorme precisamente porque pone de manifiesto las limitaciones que acabamos de observar.

8. De regreso a la Tierra

La NASA [13] asigna a la circunferencia ecuatorial de la Tierra el valor 40 030 km.

Si imaginamos esta vez que alargamos la circunferencia en 1 cm y realizamos los mismos cálculos que en la sección anterior, la calculadora nos dará para R y r los valores

$$R = \frac{4\,003\,000\,001}{2\,\pi} = 637\,097\,237{,}356\,,$$
$$r = \frac{4\,003\,000\,000}{2\pi} = 637\,097\,237{,}197\,,$$

de donde

$$R - r = 0{,}159\,.$$

Esta vez la calculadora nos proporciona sólo tres dígitos significativos correctos. La causa de esta falta de precisión es distinta a la que observamos en el caso de Super Júpiter. Aunque aquí la calculadora nota el uno agregado al último dígito de r, el problema es que operamos con números, cuatro mil tres millones y pico, y $2\,\pi$, ó $\frac{1}{2\,\pi}$, que son enormemente diferentes. Si queremos obtener una respuesta más precisa, la naturaleza de las reglas aritméticas hace necesario que usemos para $2\,\pi$, ó $\frac{1}{2\,\pi}$, dependiendo de cómo hagamos la operación, más dígitos de los que puede manejar la calculadora.

Este fenómeno se nota en las tasas de cambio, en los intereses bancarios y en las tarjetas de crédito. Por ejemplo, a una cierta hora del 26 de octubre de 2014, la cotización del dólar estadounidense en euros fue dada [32] como 0,789 26 euros por cada dólar. Por supuesto, para muchas transacciones, decir que la cotización es 0,78 ó 0,79 dólares, resulta suficiente. Pero en caso de estarse manejando dinero a nivel de bancos o de países, todos esos decimales se tornan necesarios para asegurar un resultado más preciso.

Y ahora sí, terminamos nuestra exposición con lo prometido:

9. La irracionalidad del número $\mathrm{e}^{\pi\sqrt{163}}$ y otras cosas

¿Por qué es $\mathrm{e}^{\pi\sqrt{163}}$ un número irracional? Pues porque no es algebraico, es decir, no es raíz de ningún polinomio distinto de cero con coeficientes enteros. En otras palabras, el número es irracional porque es trascendente [29]. Esta respuesta, aunque probablemente defraudará al lector, es la única posible, pues no parece conocerse una demostración directa de la irracionalidad. O sea, que si queremos justificar la irracionalidad de este número, tenemos que cambiar la pregunta: ¿por qué es $e^{\pi\sqrt{163}}$ un número trascendente? La respuesta tiene una historia interesante que ahora contaremos brevemente. Otros muchos detalles y resultados pueden verse en el libro [9].

D. Hilbert

Entre los veintitrés problemas que David Hilbert (1862-1943) enunció en las Actas del Segundo Congreso Internacional de Matemáticos reunido en París en 1900, el número siete pide probar o refutar lo siguiente:

Dado cualquier número algebraico $a \neq 0, 1$ y dado cualquier número irracional algebraico b, la expresión a^b es un número trascendente.

Como ejemplos específicos, Hilbert menciona a los números $2^{\sqrt{2}}$ y e^{π}. Es importante observar que Hilbert propuso el séptimo problema pensando en los números complejos como su universo. En este contexto, e^{π} es un valor de la potencia compleja i^{-2i}. En general, a^b es una expresión multivaluada, así que es más correcto decir que cualquier valor de a^b será trascendente.

Hilbert predijo incorrectamente que su conjetura tardaría más tiempo en resolverse que "el último teorema de Fermat".


A. O. Gelfond

En 1929, el matemático ruso Aleksandr Osipovich Gelfond (1906-1968) probó que e^{π} es trascendente [5] y además indicó cómo usar su método para probar la trascendentalidad de los números pertenecientes a los llamados cuerpos cuadráticos imaginarios [27]. El matemático alemán Carl Ludwig Siegel (1896-1981) extendió el resultado a los cuerpos cuadráticos reales [27], pero no publicó esta extensión, que fue también obtenida por el matemático ruso Rodion Osievich Kuz'min (1891-1949), quien sí la publicó en 1930. Todos estos resultados parciales tienen el estilo de las demostraciones de la trascendencia de los números π y e [17, introducción]. La trascendencia de e fue probada por el matemático francés Charles Hermite (1922-1901) en 1879, mientras que la trascendencia de π fue probada en 1882 por el matemático alemán Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939).

Gelfond retomó el séptimo problema de Hilbert y en 1934 publicó una demostración de la conjetura completa [6]. En 1935, el matemático alemán Theodor Schneider (1911-1988), discípulo de Siegel, publicó la suya [16], obtenida independientemente como parte de su tesis doctoral. Al parecer, Schneider supo de la demostración de Gelfond precisamente el día en que envió su propia demostración a los *Comptes Rendus*.


T. Schneider

Más tarde, Schneider contaría que Siegel había presentado la conjetura en un curso sin decir que era el séptimo problema de Hilbert, y que sólo identificó el problema cuando Schneider le mostró su prueba.

En la actualidad la verificación del séptimo problema de Hilbert es conocida como el teorema de Gelfond y Schneider. Las pruebas de ambos autores reconocen a los números complejos como universo y emplean el método de reducción al absurdo. También puede decirse que ambas demostraciones tienen el sabor de los resultados obtenidos en el siglo XIX sobre la trascendencia de los números π y e [17, capítulo 2].

Aunque la prueba de Gelfond parece usar herramientas más avanzadas que la de Schneider, los expertos no sólo reconocen que su base es relativamente simple, sino, además, que constituye un ejemplo bellísimo de la colaboración entre ideas algebraicas e ideas analíticas. Por esta razón, vamos a dedicar unas líneas a hablar sobre ella.

Para comenzar, mencionemos que Gelfond enuncia la conjetura de Hilbert en la siguiente forma:

Dados dos números algebraicos $\alpha, \beta \neq 0, 1$, si el número $\eta = \frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$ es irracional, entonces tiene que ser trascendente.

Este enunciado es efectivamente equivalente al de Hilbert.

Para probarlo, empezamos por suponer que la conjetura de Hilbert es cierta y declaramos que η es un irracional algebraico. Observemos que la expresión $\eta = \frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$ puede escribirse en la forma $\alpha = \beta^\eta$. Pero entonces la potencia β^η debe de ser trascendente, lo cual contradice el hecho de que α es algebraico.

Recíprocamente, supongamos que el enunciado de Gelfond es cierto, que a es algebraico y que b es irracional. Podemos escribir la potencia a^b en la forma $b = \frac{\ln a^b}{\ln a}$. Si afirmamos que a^b es algebraico entonces podemos concluir que b tiene que ser trascendente, lo cual establece el contrarrecíproco del enunciado de Hilbert o, equivalentemente, el enunciado directo.

La demostración de Gelfond, al igual que la de Schneider, está muy por encima del tipo de matemáticas que quisiéramos desarrollar aquí en detalle.

Lo que podemos decir es que, entre las ideas algebraicas que Gelfond usa, se destaca una cierta desigualdad, involucrando números algebraicos, que es una herramienta esencial en todo estudio de trascendencia. Las ideas analíticas provienen en su mayoría de la teoría de funciones de variable compleja. Por ejemplo, aparece la fórmula de Jensen [23], debida al matemático holandés Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859-1925) y también la fórmula de Cauchy para las derivadas de una función holomorfa [20], probada por el matematico francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Otro ingrediente analítico es un resultado de Leopold Kronecker (1823-1891) sobre la aproximación diofántica, es decir, la aproximación de números reales usando números racionales [7].

En el artículo [8] se puede encontrar una versión extendida de estos comentarios, incluyendo la desigualdad para números algebraicos, los resultados de Kronecker y Jensen que hemos mencionado y también una explicación detallada de la demostración de Gelfond. Tubbs [17] analiza las dos pruebas de la conjetura, así como varias extensiones. Además, presenta minuciosamente los resultados sobre la irracionalidad y la trascendencia de π y e que forman la base del estudio moderno de los números trascendentes.

Por ejemplo, en su demostración de la irracionalidad de e, el matemático francés Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) comienza suponiendo que e es racional. Por un razonamiento simple que usa el desarrollo en serie de e, Fourier llega a concluir que un cierto entero positivo es menor que uno. Tubbs observa que, más allá de sus muchas dificultades técnicas, ambas pruebas de la conjetura de Hilbert conservan una estructura similar al resultado de Fourier, siendo la parte más difícil el probar que un cierto entero no es nulo.

Algunas referencias [22] enuncian el séptimo problema de Hilbert con b irracional, sin suponer que es algebraico. El caso en que b es trascendente aún está abierto; en particular, no se sabe si los números π^{e}, π^{π} y e^{e} son trascendentes. Tampoco se conoce una caracterización de los números a y b para los cuales la potencia a^b es trascendente.

Si no se supone que a y b son ambos algebraicos, el resultado no es cierto en general. Por ejemplo, sabemos que el número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es trascendente, mientras que

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = 2\,.$$

Después de esta digresión sobre el séptimo problema de Hilbert, volvamos a la trascendencia del número $\mathrm{e}^{\pi\sqrt{163}}$. Si usamos el teorema de Gelfond y Schneider, lo que nos queda por hacer es escribir $\mathrm{e}^{\pi\sqrt{163}}$ en la forma a^b, donde a es algebraico y b es algebraico e irracional. Más generalmente, escribiremos en esa forma al número $\mathrm{e}^{\pi\, c}$, donde c es un número real distinto de cero. Esto lo haremos usando números complejos, viendo que $\mathrm{e}^{\pi\, c}$ es el valor principal de la expresión $i^{-i\,2\,c}$. En efecto,

$$i^{-i\,2\,c} = \mathrm{e}^{-i\,2\,c\,(\ln i)} = \mathrm{e}^{-2\,c\,i\,(\ln|i|+i\,\frac{\pi}{2}+i\,2\,k\,\pi)}$$

para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, expresión que se reduce a $\mathrm{e}^{\pi\, c}$ para $k = 0$.

Observemos que i es algebraico porque es raíz del polinomio X^2+1, y que el número $-i\,2\,c$ también es algebraico, por ser raíz del polinomio $X^2+4\,c^2$. En cuanto a la irracionalidad del número $-i\,2\,c$, recordemos que un número es irracional cuando no es racional. Los números racionales son, por definición, un subconjunto de los números reales, así que si tomamos a los números complejos como nuestro universo, que es lo que Hilbert y la teoría de Gelfond y Schneider hacen, todo número complejo con parte imaginaria distinta de cero es irracional.

Como consecuencia de esta discusión, también el número $\mathrm{e}^{\pi\sqrt{58}}$ es trascendente.

Por cierto, aunque $\mathrm{e}^{\pi\sqrt{163}}$ es llamado la constante de Ramanujan, el número tiene poco que ver con el matemático indio. El nombre fue pergeñado por el matemático canadiense Simon Plouffe (n. 1956), quien se inspiró en una broma que Martín Gardner (1914-2010), el gran popularizador de las matemáticas, jugó a los lectores de su columna en *Scientific American*. En el número de abril de 1975, Gardner afirmó que $\mathrm{e}^{\pi\sqrt{163}}$ era exactamente un entero y que esto ya lo había conjeturado Ramanujan en 1914. Aunque Gardner aclaró la broma unos pocos meses más tarde, el nombre persistió. En realidad fue Hermite quien, en 1859, observó la naturaleza peculiar de $\mathrm{e}^{\pi\sqrt{163}}$.

Las páginas [19] y [28] incluyen más información y otros ejemplos de números casi enteros, con los que se pueden repetir los experimentos numéricos que hemos hecho. Por ejemplo:

$$\operatorname{sen} 11 = -0{,}999\,990\,206\ldots \tag{3}$$

$$\mathrm{e}^{\pi} - \pi = 19{,}999\,099\,979\ldots \tag{4}$$

La igualdad (3) tiene su origen [19] en la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 11 = \frac{1}{2}(1-\cos 22)\,,$$

donde el número 22 es el numerador de la fracción $\frac{22}{7}$ que aproxima a π [24]. Así,

$$\cos 22 \approx \cos(7\,\pi) = \cos\pi = -1\,.$$

Usando otro convergente de la aproximación de π en fracciones continuas,

$$3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \ldots$$

se obtiene de forma similar

$$\operatorname{sen}\frac{355}{2} = 0{,}999\,999\,999\,886\ldots$$

No se sabe si hay una explicación plausible de la igualdad (4), más allá de su incuestionable validez numérica.

En su página web personal, http://www.plouffe.fr/, Plouffe menciona, entre otros, los ejemplos

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{\mathrm{e}^{2\,\pi\,n/7}-1} = 10{,}000\,000\,000\,000\,000\,190\,161\,767\,888\,663\ldots$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{\mathrm{e}^{2\,\pi\,n/13}-1} = 119{,}\underbrace{000\ldots000\,0}_{\text{31 veces}}959\,374\,585\ldots$$

La referencia [15] presenta una manera de generar números casi enteros, usando una cierta clase de números reales algebraicos llamados números de Pisot. El famoso número áureo $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es un número de Pisot; otro ejemplo es el número $1+\sqrt{2}$. El artículo da la definición y los resultados básicos sobre estos números. Para no extendernos demasiado, aquí sólo diremos que si a es un número de Pisot, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|a^n\| = 0\,,$$

donde $\|a\|$, para cualquier número real a, es la distancia entre a y el entero más próximo. Es en esta propiedad en la que se basa la generación de casi enteros. Por ejemplo, la siguiente tabla muestra los valores de algunas potencias de $a = 1+\sqrt{2}$.

n	a^n
10	6 725,999 851 323 220 026
20	45 239 073,999 999 977 895
30	304 278 004 997,999 999 999 996
40	2 046 573 816 377 473,999 999 999 999 999 511

El artículo [1] da una manera de generarlos usando las llamadas formas modulares, de gran interés en la teoría contemporánea de números. Los autores de este artículo también presentan una excelente introducción al concepto, nada simple, de forma modular.

En definitiva, estos números casi enteros, que en un primer vistazo parecen mágicos, tienen una razón de ser, vinculada a conceptos muy interesantes.

A lo largo de esta sección han aparecido frecuentemente los números algebraicos. En [2, capítulo 7] hay una presentación muy amena y sencilla sobre ellos.

En los trabajos que hemos mencionado y en sus referencias, se puede encontrar muchísima información adicional. Por nuestra parte, aquí ponemos el punto final a la sección y al artículo.

Referencias

[1] Chamizo, F. y Raboso, D., Formas modulares y números casi enteros, *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 13, No. 3 (2010) 539-555, http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/fchamizo/kiosco/files/rama_const.pdf.

[2] Conway, J. H. y Guy, R. K., *The Book Of Numbers*, Springer-Verlag 1996.

[3] Córdoba, A., *La Vida Entre Teoremas*, Jot Down Books 2014.

[4] Dehaene, S., *The Number Sense: How The Mind Creates Mathematics*, Oxford University Press 1997.

[5] Gelfond, A. O., Sur Les Nombres Transcendants, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol. 189 (1929) 1224-1226.

[6] Gelfond, A. O., Sur Le Septième Probléme De D. Hilbert, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 2 (1934) 1-3 [en ruso], 4-6 [en francés].

[7] Hazewinkel, M. (ed.), Diophantine approximations, *Encyclopedia of Mathematics*, Springer 2001, http://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Diophantine_approximations.

[8] Hille, E. C., Gelfond's Solution Of Hilbert's Seventh Problem, *Amer. Math. Monthly*, Vol. 49, No. 10 (Dic. 1942) 654-661.

[9] Maor, E., e*: The Story Of A Number*, Princeton Science Library series, Princeton University Press 2009.

[10] *Matematicalia* (http://www.matematicalia.net), Vol. 2, No. 1, feb. 2006, http://www.matematicalia.net/index.php?option=com_content&task=view&id=174&Itemid=129.

[11] *Matematicalia* (http://www.matematicalia.net), Vol. 7, No. 1, mar. 2011, http://www.matematicalia.net/articulos/v7n1mar2011/humor.pdf.

[12] Meyer, C. D., *Matrix Analysis And Applied Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) 2000.

[13] NASA Solar System Exploration, *Earth: Facts & Figures*, http://solarsystem.nasa.gov/planets/profile.cfm?Object=Earth&Display=Facts.

[14] NASA Solar System Exploration, *Jupiter: Facts & Figures*, http://solarsystem.nasa.gov/planets/profile.cfm?Object=Jupiter&Display=Facts.

[15] Panju, M., A Systematic Construction Of Almost Integers, *The Waterloo Mathematics Review*, Vol. 1, No. 2 (2011) 35-43, http://mathreview.uwaterloo.ca/archive/voli/2/panju.pdf.

[16] Schneider, Th., Transzendenzuntersuchungen Periodischer Funktionen I, *J. Reine Angew. Math.,* Vol. 172 (1935) 65-69.

[17] Tubbs, R., *Hilbert's Seventh Problem: Solutions And Extensions*, http://euclid.colorado.edu/~tubbs/courses/courses.html.

[18] Vega Reñón, L., Euclides de Alejandría, *DivulgaMAT*, http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=3339:euclides-de-alejandr300-ane&catid=37:biograf-de-matemcos-ilustres&Itemid=33.

[19] Weisstein, E. W., *Almost Integer*, MathWorld, A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/AlmostInteger.html.

[20] ———, *Cauchy Integral Formula*, MathWorld, A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/CauchyIntegralFormula.html.

[21] ———, *Diophantine Equation*, MathWorld, A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation.html.

[22] ———, *Hilbert's Problems,* MathWorld, A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/HilbertsProblems.html.

[23] ———, *Jensen's Formula*, MathWorld, A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/JensensFormula.html.

[24] ———, *Pi Approximations*, MathWorld, A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/PiApproximations.html.

[25] ———, *Prime Number Theorem*, MathWorld, A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/PrimeNumberTheorem.html.

[26] ———, *Pythagorean Triple*, MathWorld, A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/PythagoreanTriple.html.

[27] ———, *Quadratic Field*, MathWorld, A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/QuadraticField.html.

[28] ———, *Ramanujan Constant*, MathWorld, A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/RamanujanConstant.html.

[29] ———, *Transcendental Number*, MathWorld, A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/TranscendentalNumber.html.

[30] *Wikipedia*, http://en.wikipedia.org/wiki/Diophantus.

[31] *Wikipedia*, http://en.wikipedia.org/wiki/Order_of_magnitude.

[32] *XE-Currency and foreign exchange site,* http://www.xe.com.

RECONOCIMIENTOS: Las imágenes de matemáticos y los datos biográficos pertenecen a la colección de *The MacTutor History of Mathematics archive* (http://www.gap-system.org/~history/). Las fotografías de Júpiter y la Tierra fueron tomadas de *Wikipedia* (http://en.wikipedia.org).

Este artículo es una ampliación de la charla dada por una de las autoras el 27 de marzo de 2012 en el Instituto Tecnológico Autónomo de México, celebrando los primeros diez años de la revista *Laberintos E Infinitos* (http://laberintos.itam.mx/).

Mucho agradecemos al referee y al cuerpo editorial de la revista sus comentarios y sugerencias, que han servido para completar y mejorar nuestra presentación.

Josefina Álvarez
Departamento de Matemáticas
New Mexico State University
Las Cruces, New Mexico, USA
jalvarez@nmsu.edu

Isabel Marrero
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
La Laguna, Tenerife, España
imarrero@ull.es

Publicat el 16 de desembre de 2014