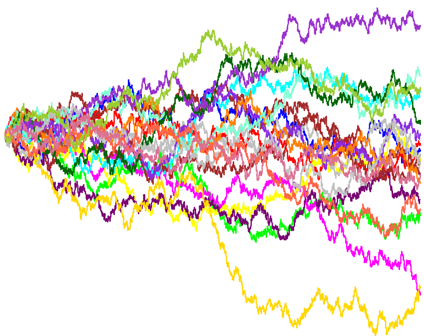
MAT 2
MATerials MATemàtics
Volum 2014, treball no. 3, 23 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

El moviment Brownià i la integració estocàstica

Maria Jolis

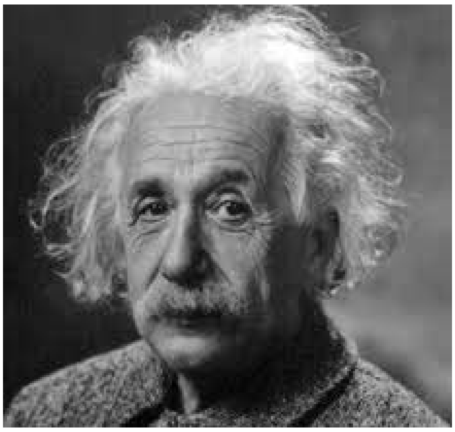


En aquest treball s'estudiaran algunes propietats d'un procés estocàstic anomenat moviment Brownià, que és el model matemàtic introduït per Einstein pel fenomen físic conegut amb el mateix nom. Aquest procés estocàstic té unes propietats molt interessants des del punt de vista matemàtic i són aquestes propietats en les que ens centrarem. També donarem algunes idees sobre l'anomenada integral estocàstica, que és una integral respecte el moviment Brownià.

Es coneix com a moviment Brownià el moviment erràtic que tenen les partícules de pol·len o altres materials suspeses en un líquid. Va ser observat (tot i que no per primera vegada[1]) pel botànic anglès Robert Brown (1773–1858) que va arribar a la conclusió que el moviment era produït pels moviments interns de les partícules suspeses. Vegeu [Br]. En aquella època es creia que les partícules de pol·len tenien vida, Brown va observar que el moviment es produïa també amb partícules de ferro i altres materials inerts, desmentint que fos la vida del pol·len la causant del moviment.

[1] És sorprenent que al segle I abans de Crist, el poeta i científic romà Lucreci ja observà un fenomen semblant en el moviment de la pols suspesa en l'aire. Lucreci atribueix aquest moviment als xocs del que avui en dia anomenem molècules d'aire amb les partícules de pols. Vegeu [L] i la referència a aquest poema que es fa a [J].

Robert Brown



Albert Einstein

Simplificant la història[2], la següent aportació important és deguda a Albert Einstein, qui el 1905 (any de la teoria de la relativitat i del descobriment del fotó) atribueix el moviment al bombardeig constant de les molècules del fluid (molt més petites que les partícules). De fet, s'estima que la partícula suporta de l'ordre de 10^{21} col·lisions per segon. Per a l'article original en alemany, vegeu [E]; podeu trobar una traducció a l'anglès junt amb una recopilació dels seus treballs sobre el tema a [E2].

El model matemàtic que proposà Einstein per al moviment Brownià està basat en les suposicions següents.

> *Si $x_t = (x_t^1, x_t^2, x_t^3)$ és la posició de la partícula a l'instant t, x_t és una variable aleatòria i, a més, es compleix:*
>
> *(a)* $x_t - x_s$ *és independent de* x_s.
>
> *(b) La densitat de probabilitat de* $x_t - x_s$ *només depèn de* $t - s$.
>
> *(c) Si diem* $p_t(x)$ *a la densitat de probabilitat de* x_t*, es compleix que*
> $$p_t(x) = p_t(-x).$$
>
> *(d)* $x_0 = 0$.
>
> *També fa la suposició, expressada de manera intuïtiva, de que en la funció de densitat* $p_t(x)$*, quan* t *és petit, només tenen influència els valors petits de* x.

[2] A la referència [D] podeu trobar un recorregut molt interessant per les diferents aportacions al coneixement del moviment Brownià

Usant aquestes condicions, va arribar a que $p_t(x)$ havia de ser solució de l'equació de la calor següent:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(x) = D\,\Delta p_t(x),$$

on Δ és l'operador de Laplace, és a dir,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

i D és una constant positiva, anomenada constant de difusió. A l'Apèndix 1 veurem una deducció d'aquesta equació basada en les idees d'Einstein.

Si la partícula es troba a l'origen de coordenades en $t = 0$ (és a dir p_t ha de tendir a la δ de Dirac en 0, quan $t \to 0$), aleshores la solució de l'equació anterior és

$$p_t(x) = \frac{1}{(4\,\pi\,D\,t)^{3/2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{4\,D\,t}}.$$

Observem que es tracta d'una densitat Gaussiana a $\mathbb{R}^3$ amb vector de mitjanes $(0, 0, 0)$ i matriu de covariàncies $2\,D\,t\,\mathrm{Id}$, on Id és la matriu identitat de $\mathbb{R}^3$. És a dir, (x_t^1, x_t^2, x_t^3) és un vector aleatori Gaussià amb components independents amb distribució normal de mitjana 0 i variància igual a $2\,D\,t$.

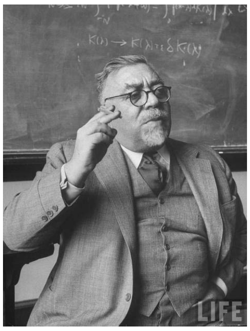
El més interessant de l'article d'Einstein és que, per una banda, demostra definitivament l'existència dels àtoms i les molècules i, per l'altra, que els seus resultats van ser usats, via la relació de la constant D amb altres constants físiques per determinar la constant d'Avogadro[3]. A partir del seu model, Einstein dedueix el desplaçament mitjà de les partícules suspeses en el fluid. Afirma que aquests desplaçaments podrien ser observats al microscopi i, usant la fórmula que relaciona la mitjana del desplaçament amb la constant D, es podria deduir la constant d'Avogadro. De fet, fou Jean Baptiste Perrin qui en 1909 va comprovar que la teoria d'Einstein era correcta i va poder determinar el valor de la constant d'Avogadro.

Cal remarcar, però, que des del punt de vista matemàtic, el fet que la densitat de x_t sigui Gaussiana no ens ha de sorprendre gens, ja que x_t és la suma de molts petits moviments que les els xocs amb les molècules li provoquen a la partícula i, per tant, el Teorema Central del Límit, ens diu que el model Gaussià és raonable.

Sobre el model d'Einstein cal, finalment, observar que no és del tot rigorós matemàticament. En particular, Einstein no es preocupa de veure que realment existeix un objecte matemàtic que compleix totes les propietats que imposa.

[3]Aquesta constant és el nombre d'àtoms per mol d'hidrogen i val aproximadament $6.022 \times 10^{23}\mathrm{mol}^{-1}$

El primer model matemàtic totalment correcte per al que es coneix com a moviment Brownià (que compleix les condicions imposades per Einstein) va ser proposat pel gran matemàtic Norbert Wiener (1894–1964) que, en un treball de 1923 (vegi's [W]), va construir un espai de probabilitat on es pot definir una família de variables aleatòries $\{x_t,\, t \geq 0\}$ que compleixen totes aquestes condicions. En honor d'ell el moviment Brownià s'anomena també procés de Wiener (la paraula procés és deguda a que una família de variables aleatòries indexada per un cert conjunt és anomenada *procés estocàstic*). Les notacions més usades actualment per al moviment Brownià són $\{B_t,\, t \geq 0\}$ (en honor de Brown) i $\{W_t,\, t \geq 0\}$ (en honor de Wiener). Podeu trobar la construcció basada en el teorema de Kolmogorov i dues construccions més (diferents de la de Wiener) al segon capítol de [KS].



Norbert Wiener

En aquest treball veurem algunes de les propietats més interessants del moviment Brownià que estan relacionades amb les dificultats que presenta la modelització matemàtica de sistemes dinàmics sotmesos a certes pertorbacions aleatòries. Aquesta modelització porta de manera natural a la necessitat de construir una integral respecte del procés de Wiener. Aquí ens limitarem a donar algunes idees de totes aquestes dificultats i de com es poden resoldre.

1 El moviment Brownià i algunes de les seves propietats

Comencem donant de manera més formal la definició de procés estocàstic. Un procés estocàstic (o simplement, procés) $X = \{X_t,\, t \in T\}$ no és més que una família de variables aleatòries, indexada pel conjunt de *paràmetres* T, totes elles definides en un mateix espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i que prenen valors a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^d$.

Habitualment, T és un subconjunt de $\mathbb{R}$, molt sovint $T = [0, \infty)$ i s'interpreta com a temps. Així X_t és l'estat (no previsible, aleatori) d'un cert sistema a l'instant t.

Donat un procés estocàstic $X = \{X_t,\, t \in T\}$ s'anomena trajectòria del procés corresponent a l'element $\omega \in \Omega$ a la funció X^ω definida com

$$\begin{aligned} X^\omega : T &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ t &\longrightarrow X_t(\omega) \end{aligned}$$

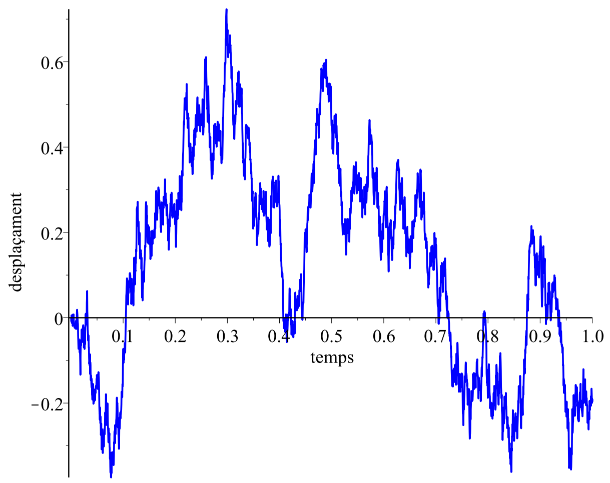


Figura 1: Simulació d'una trajectòria Browniana 1-dimensional

El moviment Brownià està definit com a procés estocàstic de la manera següent. Començarem pel cas 1-dimensional.

Definició 1.1. *Un procés estocàstic* $B = \{B_t,\, t \geq 0\}$ *és un moviment Brownià 1-dimensional sortint de 0 si:*

(1) $B_0 = 0$.

(2) Si $0 \leq t_1 < t_2 < t_3, \ldots < t_k$*, aleshores les variables aleatòries*

$$B_{t_1},\, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$$

són independents. Aquesta propietat es resumeix dient que el moviment Brownià té increments independents.

(3) Per a tot $0 \leq s < t$ *es compleix que*

$$B_t - B_s \sim N\big(0, \sigma^2(t-s)\big),$$

on σ^2 *és una constant positiva i estem usant la notació habitual* $X \sim N(\mu, a^2)$ *per expressar que la variable aleatòria* X *té distribució normal amb mitjana* μ *i variància* a^2.

(4) B *té trajectòries contínues.*

Quan la constant σ^2 *és igual a 1 parlem de moviment Brownià estàndard. A partir d'ara suposarem que el nostre moviment Brownià és estàndard.*

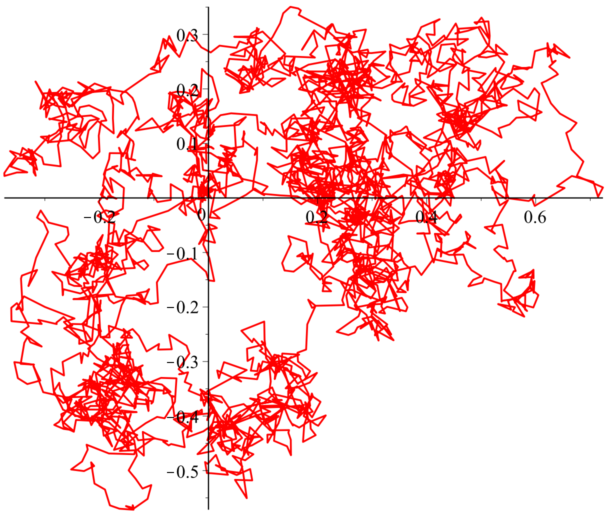


Figura 2: Simulació d'una trajectòria Browniana 2-dimensional

La propietat (3) ens diu que la llei de l'increment de B en un interval $(s,t]$, $B_t - B_s$ només depèn de la longitud $t-s$ de l'interval. Els processos estocàstics que compleixen aquesta propietat es diu que tenen *increments estacionaris*.

La definició de moviment Brownià $d-$dimensional és la següent.

Definició 1.2. *Un moviment Brownià d-dimensional és una família de la forma* $B = \{(B_t^1, \dots, B_t^d),\ t \geq 0\}$ *on cada* B^i, $i = 1, \dots, d$ *és un moviment Brownnià 1-dimensional i els* B^i *són independents.*

Observem que amb aquestes definicions s'obtenen les propietats que va imposar Einstein. La primera demostració de que aquests objectes que acabem de definir realment existeixen, com hem comentat abans, és deguda a Wiener. Com ja hem dit, n'hi ha d'altres construccions del moviment Brownià (per exemple usant el teorema de Kolmogorov d'existència de processos estocàstics amb unes certes distribucions en dimensió finita complint condicions de compatibilitat), i cap d'elles és trivial.

Per definició, les trajectòries del moviment Brownià són contínues[4].

[4] Hi ha autors que defineixen el moviment Brownià sense imposar la continuïtat de les seves trajectòries. Es pot veure, però, que a partir d'un procés complint les condicions *(1), (2) i (3)* de la Definició 1.1 se'n pot construir un altre que també les compleix, que en cada instant és igual amb probabilitat 1 al nostre Brownià i que té trajectòries contínues (usant l'anomenat *Teorema de Continuïtat de Kolmogorov*, vegeu la referència [KS], Capítol 2).

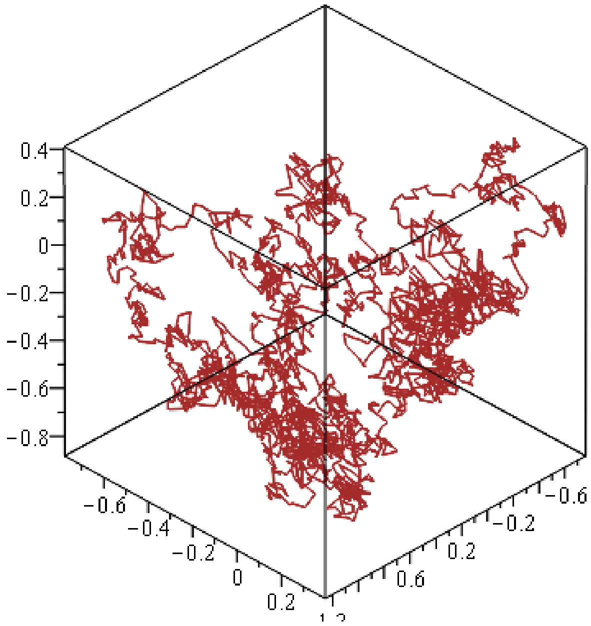


Figura 3: Simulació d'una trajectòria Browniana 3-dimensional

1.1 Propietats de les trajectòries del procés de Wiener

Considerem $B = \{B_t,\, t \geq 0\}$ un moviment Brownià estàndard. Veurem primer que B és autosimilar en el sentit següent: Si fem un canvi d'escala en el temps

$$\{B_{ct},\, t \geq 0\},$$

amb c constant positiva, el que obtenim és gairebé un altre moviment Brownià estàndard, de fet:

$$\bar{B} = \{\bar{B}_t := c^{-1/2} B_{ct},\, t \geq 0\}$$

ho és.

En efecte, les propietats

- $\bar{B}_0 = 0$,
- $\bar{B}$ té increments independents,
- $\bar{B}$ té trajectòries contínues,

són clares. També és molt fàcil veure que, per a $0 \leq s < t$ es compleix que $\bar{B}_t - \bar{B}_s \sim N\big(0, (t-s)\big)$. Tot això ens diu que el moviment Brownià és fractal en llei: la llei de $\{B_t\}$ és la mateixa que la de $\{c^{-1/2} B_{ct}\}$.

Dels processos $X = \{X_t,\, t \geq 0\}$ que compleixen que, per a un cert $H > 0$ el procés $\bar{X}^c = \{\bar{X}^c_t := c^{-H} X_{ct},\, t \geq 0\}$ té la mateixa llei que X, per a tota $c > 0$, es diuen *processos autosimilars amb paràmetre d'autosimilitud H*. Així, el moviment Brownià és autosimilar amb paràmetre d'autosimilitud $H = 1/2$

Hi ha altres propietats de fractalitat del moviment Brownià. En citarem només dues, restringint-nos al cas 1-dimensional. la primera és que, amb probabilitat 1, el conjunt de zeros del Brownià per $t \in [0, 1]$ té dimensió de Hausdorf $1/2$. L'altra és el teorema següent:

Teorema 1.3 (Taylor (1953))**.** *Si B és un moviment Brownià 1-dimensional, aleshores, amb probabilitat 1, el gràfic de les seves trajectòries té dimensió de Hausdorf $3/2$.*

Podeu trobar la definició de dimensió de Hausdorf i les propietats fractals del moviment Brownià al Capítol 4 de la referència [MP].

Usant essencialment l'autosimilitud del moviment Brownià demostrarem aquest altre teorema.

Teorema 1.4. *Per a tot $t \geq 0$ es compleix que, amb probabilitat 1,*

$$\limsup_{h \to 0} \left| \frac{B_{t+h} - B_t}{h} \right| = +\infty.$$

Aquest teorema ens diu que per a qualsevol $t \geq 0$ fixat, amb probabilitat 1, les trajectòries són no diferenciables en aquest punt.

Demostració. Veurem que el conjunt

$$A = \left\{ \omega \in \Omega : \limsup_{h \to 0^+} \left| \frac{B_{t+h}(\omega) - B_t(\omega)}{h} \right| = +\infty \right\}$$

conté un esdeveniment de probabilitat 1. Sigui

$$B = \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{B_{t+1/n}(\omega) - B_t(\omega)}{1/n} \right| = +\infty \right\}.$$

És fàcil veure que $B \subset A$ i si veiem que $P(B) = 1$ ja haurem acabat la prova. Tenim que

$$B = \bigcap_{M \in \mathbb{N}} \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{B_{t+1/n}(\omega) - B_t(\omega)}{1/n} \right| \geq M \right\},$$

i com la intersecció numerable d'esdeveniments amb probabilitat 1 té també probabilitat 1, demostrant que els esdeveniments que conformen la intersecció anterior tenen probabilitat 1, ja haurem acabat. Tenim que

$$\begin{aligned}1 &\geq P\Big\{\omega \in \Omega : \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big|\frac{B_{t+1/n}(\omega) - B_t(\omega)}{1/n}\Big| \geq M\Big\} \\ &\geq P\Big\{\omega \in \Omega : \Big|\frac{B_{t+1/n}(\omega) - B_t(\omega)}{1/n}\Big| \geq M\Big\}\end{aligned}$$

i, com que $B_{t+1/n} - B_t$ té la mateixa distribució que $B_{1/n}$, la darrera probabilitat és igual a

$$\begin{aligned}P\Big\{\omega : \Big|\frac{B_{1/n}(\omega)}{1/n}\Big| \geq M\Big\} &= P\Big\{\omega : \big|B_{1/n}(\omega)\big| \geq \frac{M}{n}\Big\} \\ &= P\Big\{\omega : \Big|\frac{B_{1/n}(\omega)}{1/\sqrt{n}}\Big| \geq M\sqrt{n}\Big\}.\end{aligned}$$

Finalment, degut a que la variable aleatòria $B_{1/n}/(1/\sqrt{n})$ té la mateixa distribució que B_1, tenim que per a tot $n \in \mathbb{N}$,

$$1 \geq P\Big\{\omega : \sup_{n} \Big|\frac{B_{t+1/n}(\omega) - B_t(\omega)}{1/n}\Big| \geq M\Big\} = P\{|B_1| \geq \frac{M}{\sqrt{n}}\},$$

i com la darrera probabilitat tendeix, quan $n \to \infty$, a $P\{|B_1| > 0\} = 1$, ja hem acabat la prova. $\square$

En aquest teorema no hem usat més que les propietats d'increments estacionaris, d'autosimilitud i el fet que B_1 compleix que $P\{B_1 = 0\} = 0$. Usant la propietat d'increments independents i el fet que la llei dels increments és Gaussiana es pot demostrar també el següent resultat més fort.

Teorema 1.5 (Teorema de Paley-Wiener-Zygmund (1933)). *Les trajectòries del moviment Brownià no són diferenciables en cap punt, quasi segurament. Més precisament, el conjunt*

$$\Big\{\omega : \limsup_{h\to 0^+} \frac{B_{t+h}(\omega) - B_t(\omega)}{h} = +\infty \\ \text{o bé } \liminf_{h\to 0^+} \frac{B_{t+h}(\omega) - B_t(\omega)}{h} = -\infty,\ \forall t \geq 0\Big\}$$

conté un esdeveniment de probabilitat 1. I el mateix ocorre posant els límits inferior i superior quan $h \to 0^-$.

Podeu trobar la prova d'aquest teorema també al Capítol 2 de [KS]. En comparació amb el Teorema 1.4, el conjunt involucrat en el Teorema de Paley-Wiener Zygmund és una intersecció no numerable (el $\forall t \geq 0$) de conjunts semblants al del Teorema 1.4.

Si recordem com és de difícil trobar exemples funcions contínues que no siguin derivables en cap punt, no deixa de ser sorprenent que qualsevol trajectòria (tret potser d'un conjunt negligible) del moviment Brownià sigui una funció contínua no derivable enlloc.

1.2 La variació quadràtica

Una de les propietats bàsiques del procés de Wiener és que té variació quadràtica no nul·la. Un primer resultat és el següent.

Proposició 1.6. *Sigui $[a,b] \subset [0,\infty)$ i $\mathcal{P}^n = \{a = t_{0,n} < \cdots < t_{k_n,n} = b\}$ una successió de particions de l'interval $[a,b]$ i suposem que la seva norma $|\mathcal{P}^n| := \max_{i=1,\ldots,k_n} (t_{i,n} - t_{i-1,n})$ tendeix a 0 quan $n \to \infty$. Aleshores*

$$\sum_{i=1}^{k_n} \left(B_{t_{i,n}} - B_{t_{i-1,n}}\right)^2 \to b - a,$$

quan $n \to \infty$ i el límit és en $L^2(\Omega)$.

Demostració. Per comoditat, eliminarem els subíndexs n dels punts de les particions. Diguem

$$Y_n = \sum_{i=1}^{k_n} \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2.$$

Tenim que

$$E(Y_n) = \sum_{i=1}^{k_n} E\Big[\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2\Big] = \sum_{i=1}^{k_n} \mathrm{Var}\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) = \sum_{i=1}^{k_n} (t_i - t_{i_{i-1}}) = b - a,$$

on hem usat que l'esperança dels increments $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ és 0 i la variància $t_i - t_{i-1}$. Així, provar que

$$E\Big[Y_n - (b-a)\Big]^2 \to 0, \text{ quan } n \to \infty$$

és veure que la variància de Y_n tendeix a 0, quan $n \to \infty$. Per veure això, usarem que les variables aleatòries $(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})^2$ són independents. En efecte,

$$\begin{aligned}
0 \leq \operatorname{Var}(Y_n) &= \sum_{i=1}^{k_n} \operatorname{Var}\big[(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})^2\big] \\
&= \sum_{i=1}^{k_n} E\big[(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})^4\big] - \sum_{i=1}^{k_n}\Big(E\big[(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})^2\big]\Big)^2 \\
&= 3\sum_{i=1}^{k_n}(t_i-t_{i-1})^2 - \sum_{i=1}^{k_n}(t_i-t_{i-1})^2 \\
&= 2\sum_{i=1}^{k_n}(t_i-t_{i-1})^2 \leq 2\,|\mathcal{P}_n| \sum_{i=1}^{k_n}(t_i-t_{i-1}) = 2(b-a)|\mathcal{P}_n|,
\end{aligned}$$

i aquest darrer terme tendeix a 0, quan n tendeix a infinit. En aquest desenvolupament, hem utilitzat que per a qualsevol variable aleatòria X amb variància finita, es compleix que $\operatorname{Var}(X) = E[X^2] - \big(E(X)\big)^2$, que per a una variable aleatòria $X \sim N(0,\sigma^2)$, tenim que $E(X^4) = 3\,\sigma^4$ i finalment l'acotació

$$(t_i-t_{i-1})^2 \leq \Big(\max_{j=1,\ldots,k_n}(t_j-t_{j-1})\Big)(t_i-t_{i-1}) \leq C\,|\mathcal{P}_n|\,(t_i-t_{i-1}).$$

□

Comentaris

1. Donat un procés estocàstic X s'anomena *variació quadràtica de X en un interval* $[a,b] \subset [0,\infty)$ al límit en $L^2(\Omega)$, cas que existeixi i sigui independent de la successió de particions de $[a,b]$ amb norma tendint a 0, de
$$\sum_{i=1}^{k_n}\left(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}\right)^2$$

2. Es pot provar que sota certes condicions en la successió de particions, per al moviment Brownià el límit que defineix la variació quadràtica també ho és en el sentit de la convergència quasi segura. Un cas en què passa això és quan la successió de particions és refinant, és a dir $\mathcal{P}^n \subset \mathcal{P}^{n+1}$ per a tot n.

3. El fet que la variació quadràtica del moviment Brownià sobre qualsevol interval sigui no nul·la impedeix que el Brownià tingui trajectòries regulars (diferenciables). L'argument és els següent. Si f és una funció

de classe C^1 en l'interval $[a,b]$, aleshores aplicant el Teorema del Valor Mitjà

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k_n}\left(f(t_i^n)-f(t_{i-1}^n)\right)^2 &\le C\sum_{i=1}^{k_n}\left(t_i^n-t_{i-1}^n\right)^2\\ &\le C\,|\mathcal{P}^n|\sum_{i=1}^{k_n}\left(t_i^n-t_{i-1}^n\right)=C\,|\mathcal{P}^n|\,(b-a),\end{aligned}$$

on C és una cota superior de la derivada de f in $[a,b]$. I és clar que la darrera expressió tendeix a 0 quan $|\mathcal{P}^n|$ tendeix a 0.

2 Equacions diferencials estocàstiques

Una de les aplicacions del moviment Brownià més importants és que apareix de manera natural en l'estudi de sistemes dinàmics amb pertorbacions aleatòries.

Diguem x_t l'estat d'un cert sistema a l'instant t ($x_t\in\mathbb{R}^d$). Per simplificar, suposem $d=1$. Aquest estat moltes vegades ve modelat per una equació diferencial

$$\frac{dx_t}{dt}=a(t,x_t),\quad t>0$$

amb una certa condició inicial, que podem pensar com a límit quan $\Delta t\to 0$ de l'equació discretitzada

$$x_{t+\Delta t}-x_t=a(t,x_t)\,\Delta t.$$

Suposem que a cada interval de temps $[t,t+\Delta t]$ tenim una pertorbació aleatòria que és deguda a molts factors incontrolables. En moltes situacions aquesta pertorbació és del tipus

$$Q_{t,\Delta t,x_t}=\sigma(t,x_t)\,\xi_{t,\Delta t},$$

essent $\xi_{t,\Delta t}$ una variable aleatòria Gaussiana centrada amb variància igual a Δt. A més, també es considera que aquestes $\xi_{t,\Delta t}$ en intervals de temps disjunts són independents. Per tant, podem pensar que $\xi_{t,\Delta t}=B_{t+\Delta t}-B_t$ amb B un moviment Brownià.

Així, tenim el model discret més realista

$$x_{t+\Delta t}-x_t=a(t,x_t)\,\Delta t+\sigma(t,x_t)\,(B_{t+\Delta t}-B_t).$$

Si intentem passar al límit quan $\Delta t \to 0$, ara tindrem

$$\frac{dx_t}{dt} = a(t, X_t) + \sigma(t, x_t)\,\frac{dB_t}{dt}$$

o, escrit en forma diferencial

$$dx_t = a(t, X_t)\,dt + \sigma(t, x_t)\,dB_t.$$

Una equació d'aquest tipus s'anomena *equació diferencial estocàstica.*

Ara bé, tot això que hem fet no té gaire sentit ja que hem vist que les trajectòries Brownianes no són diferenciables en cap punt (amb probabilitat 1). En aquesta situació es pot procedir com es fa a la teoria de les equacions diferencials ordinàries per demostrar el teorema d'existència i unicitat de solucions (sota condicions sobre la funció a). Si $x_0 = a_0$ és la condició inicial, s'escriu

$$x_t - x_0 = \int_0^t a(s, x_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s, x_s)\,dB_s, \quad t > 0.$$

Així, si podem donar un sentit a la integral

$$\int_0^t \sigma(s, x_s)\,dB_s$$

podrem donar també una interpretació rigorosa a l'equació diferencial estocàstica.

Comentari: La solució d'una equació diferencial estocàstica serà, si existeix, un procés estocàstic.

Llavors, el nostre problema ens ha portat al de donar un sentit a la integral, anomenada *integral estocàstica*:

$$\int_a^b f_s\,dB_s, \quad \text{amb } [a,b] \subset \mathbb{R}_+,$$

on f_s és un procés estocàstic.

2.1 La integral estocàstica

La primera idea és pensar que per a cada $\omega \in \Omega$ tenim que $f_s(\omega)$ i $B_2(\omega)$ són funcions de s i podem fer la integral

$$\int_a^b f_s(\omega)\,dB_s(\omega).$$

Però, què ens diu l'Anàlisi?

Si volem donar un sentit a la integral d'una funció f respecte d'una altra funció g, una possibilitat és imitar la integral de Riemann. Això dóna lloc a la *integral de Riemann-Stieltjes*.

Definició 2.1. *Donades $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ direm que f és integrable Riemann-Stieltjes respecte de g si, per a tota successió de particions $\{\mathcal{P}_n\}$ tal que $\mathcal{P}_n = \{a = x_{0,n} < x_{1,n} < \cdots < x_{k_n,n}\}$ amb $|\mathcal{P}_n| \to 0$ i tota selecció de punts $t_{i,n} \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]$, existeix el límit*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(t_{i,n}) \big(g(x_{i-1,n}) - g(x_{i,n})\big)$$

i el valor d'aquest límit no depèn ni de la successió de particions que hem pres ni dels punts que triem en els intervals. En aquest cas el límit s'anomena integral de Riemann-Stieltjes de f respecte de g i es denota com

$$\int_a^b f(x)\, dg(x).$$

Per al que nosaltres volem fer, aquesta integral té un problema important que ve del teorema següent:

Teorema 2.2. *Sigui $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, aleshores la integral de Riemann-Stieltjes*

$$\int_a^b f(x)\, dg(x).$$

existeix per a tota $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua si i només si g és de variació acotada.

Veurem una prova d'aquest teorema a l'Apèndix 2.

Per completesa, recordarem ara què és una funció de variació acotada i també els resultats més importats sobre aquesta classe de funcions.

Definició 2.3. *Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si $\mathcal{P} = \{x_0, \ldots, s_n\}$ és una partició de l'interval $[a, b]$, construïm la variació de f en $[a, b]$ associada a $\mathcal{P}$ com*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Llavors definim la variació total de f en $[a, b]$ com

$$V(f; a, b) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i: x_i, x_{i-1} \in \mathcal{P}} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Si aquesta variació total és finita, direm que f és de variació acotada en l'interval $[a, b]$.

Algunes propietats.

1. Si f és monòtona aleshores és de variació acotada.
2. Si f és de variació acotada, aleshores, existeixen f_1 i f_2 monòtones creixents de manera que
$$f = f_1 - f_2.$$
Aquestes f_1 i f_2 són úniques, llevat de constants additives.
3. Si f és de variació acotada, aleshores és diferenciable quasi per tot (és a dir en tots els punts, excepte potser en un conjunt de mesura nul.la)

Aquesta darrera propietat, té una conseqüència molt important: Les trajectòries del moviment Brownià, amb probabilitat 1, no tenen variació acotada, ja que el teorema de Paley-Wiener-Zygmund ens diu que aquestes són no diferenciables en cap punt (amb probabilitat 1). Per tant, degut al Teorema 2.2 no podem definir la integral de Riemann Stieltjes respecte les funcions $t \to B_t(\omega)$, per a $t \in [a, b]$.

Kiyosi Itô

Ara bé, hi ha diverses maneres d'esquivar aquest problema. En general, consisteixen a considerar també sumes de Riemann, però no fer límits per a cada $\omega \in \Omega$ fixat (o quasi segurs) sinó usar tipus de convergències més febles com la convergència en probabilitat. La integral més important és l'anomenada *integral d'Itô*, introduïda per Kiyosi Itô (vegi's [I]), un dels grans probabilistes del segle passat, l'any 1944. Aquesta integral, per als processos $f = \{f_t, \, t \in [a, b]\}$ amb trajectòries contínues i tals que, a més, per a cada $a \le t \le u \le v \le b$ la variable aleatòria f_t sigui independent de $B_v - B_u$ consisteix en

$$\lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum_{t_i, t_{i-1} \in \mathcal{P}} f_{t_{i-1}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}),$$

i on el límit anterior és en probabilitat. Aquest límit es denota com

$$\int_a^b f_t \, dB_t,$$

i s'anomena *integral d'Itô del procés f respecte el moviment Brownià en l'interval* $[a, b]$.

Cal remarcar que en el límit de la definició de la integral de Itô, el procés f s'avalua sempre en els extrems esquerres dels intervals de la partició i es multiplica per l'increment del Brownià en l'interval. Això fa que les variables aleatòries $f_{t_{i-1}}$ i $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ siguin independents i sigui fàcil calcular moments d'aquestes sumes de Riemann. Ara bé, també hi ha altres integrals en què s'avalua f en el punt extrem superior de cada interval (integral *backward*) o bé es fa la mitjana de $f_{t_{i-1}}$ i f_{t_i} (integral de *Stratonovich*). Totes aquestes integrals donen en general resultats diferents, a no ser que f sigui una funció determinista, i s'usen en funció de quin tipus de fenòmens es vulguin modelar[5]. Un comentari important és que la integral de Stratonovich, que en principi és més complicada, satisfà les regles del càlcul diferencial ordinari, cosa que com veurem de seguida no fa la integral d'Itô.

Vegem ara un exemple que mostra que la integral tipus Itô no compleix les regles del càlcul ordinari. Si tenim una funció g diferenciable es compleix que

$$\int_a^b g(x)\, dg(x) = \int_a^b g(x)\, g'(x)\, dx = \left.\frac{g(x)^2}{2}\right|_{x=a}^{x=b} = \frac{g(b)^2 - g(a)^2}{2}.$$

Vegem què passa quan considerem la integral d'Itô de B respecte B:

$$\int_a^b B_t\, dB_t = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i, t_{i-1}\in\mathcal{P}} B_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

i aquest límit (si existeixen tots els límits implicats) és igual a

$$\lim_{\mathcal{P}\to 0} \frac{1}{2} \sum_{t_i, t_{i-1}\in\mathcal{P}} (B_{t_{i-1}} + B_{t_i})\,(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ - \lim_{\mathcal{P}\to 0} \frac{1}{2} \sum_{t_i, t_{i-1}\in\mathcal{P}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\,(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}), \quad (1)$$

ja que

$$B_{t_{i-1}} = \frac{1}{2}(B_{t_{i-1}} + B_{t_i}) - \frac{1}{2}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

El primer sumand de l'expressió (1) ens dóna

$$\lim_{\mathcal{P}\to 0} \frac{1}{2} \sum_{t_i, t_{i-1}\in\mathcal{P}} (B_{t_i}^2 - B_{t_{i-1}}^2)$$

que és una suma telescòpica que sempre dóna

$$\frac{B_b^2 - B_a^2}{2}.$$

[5] Al Capítol 6 de [KP] podem trobar una discussió sobre en quins casos és preferible usar els diferents tipus d'integral.

L'altre sumand de (1) no tendeix a 0, és precisament la variació quadràtica del Brownià en l'interval $[a, b]$ dividida entre 2 (el límit és en mitjana quadràtica i per tant també en probabilitat). Així,

$$\int_a^b B_t \, dB_t = \frac{B_b^2 - B_a^2}{2} - \frac{b-a}{2}. \tag{2}$$

Aquesta fórmula (2), és un cas particular de l'anomenada *Fórmula d'Itô* que és l'anàleg a la fórmula del canvi de variable del càlcul ordinari. La versió més simple d'aquesta fórmula és la següent.

Teorema 2.4 (Fórmula d'Itô per al moviment Brownià)**.** *Sigui f una funció de classe C^1 i anomenem F a una primitiva de f, aleshores, per a qualssevol $0 \le a < b$*

$$\int_a^b f(B_s) \, dB_s = F(B_b) - F(B_a) - \frac{1}{2} \int_a^b f'(B_s) \, ds.$$

Observem que (2) correspon a prendre com a f la funció identitat a la fórmula d'Itô. Observem també que si en lloc del Brownià tinguéssim una funció regular, no ens apareixeria el terme corresponent al segon sumand de la darrera fórmula.

Com a comentari final, el terme addicional de la fórmula d'Itô és degut al fet que el moviment Brownià té variació quadràtica no nul·la, mentre que per a funcions regulars aquesta variació quadràtica és zero. Això es veu a la prova de la fórmula d'Itô, que està basada en prendre una successió de particions amb norma tendint a 0 i escriure $F(B_b) - F(B_a)$ com la suma dels increments de $F(B_\bullet)$ sobre els punts de la partició i després aplicar la fórmula de Taylor fins ordre 2. Si en lloc del Brownià tinguéssim una funció regular, els termes d'ordre 2 tendirien a 0, però com la variació quadràtica del Brownià no és nul·la, no podem ignorar aquests termes que convergeixen al terme addicional de la fórmula.

Apèndix 1. Deducció de l'equació en derivades parcials que satisfà $p_t(x)$

En aquest apèndix farem una prova de que la densitat $p_t(x)$ considerada a la introducció satisfà l'equació de la calor

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(x) = D \, \Delta p_t(x).$$

Per comoditat considerarem el cas de dimensió 1.

Suposarem que es compleixen les condicions (a), (b), (c) i (d) imposades per Einstein i a més suposarem que per a cada $t > 0$ es compleix:

(i) La funció p_t és acotada a $\mathbb{R}$.

(ii) p_t és una funció de $C^2(\mathbb{R})$.

I, finalment, que per a tot $\delta > 0$ tenim:

(iii)
$$\int_{\{|z|>\delta\}} p_h(z)\,dz = o(h)$$

i

(iv)
$$\int_{\{|z|>\delta\}} |z|^2 p_h(z)\,dz = o(h).$$

Les dues primeres condicions són purament tècniques, mentre que les dues darreres representen una manera natural de matematitzar la hipòtesi d'Einstein sobre que en la densitat $p_t(x)$, per a t petit, només són rellevants els valors de x petits.

De les condicions (a), (b) i (d) d'Einstein tenim que existeix una constant $D > 0$ de manera que
$$\mathrm{Var}(x_t) = 2\,D\,t. \tag{3}$$

(Cal remarcar que aquesta constant D, que Einstein anomena constant de difusió, té un significat físic molt important ja que, com hem comentat abans, en particular conté la informació necessària per determinar la constant d'Avogadro).

Provem (3) amb arguments purament matemàtics. Definim $f(t) = \mathrm{Var}(x_t)$. Tenim que per a tot $0 \le s \le t$ es compleix

$$\begin{aligned} f(s+t) &= \mathrm{Var}(x_{s+t}) = \mathrm{Var}(x_s + x_{t+s} - x_s) \\ &= \mathrm{Var}(x_s) + \mathrm{Var}(x_{t+s} - x_s) = \mathrm{Var}(x_s) + \mathrm{Var}(x_t) \\ &= f(t) + f(s). \end{aligned}$$

A més, la igualtat anterior i el fet que la variància sempre sigui no negativa implica que la funció f és no decreixent. Aquestes dues propietats impliquen que forçosament f ha de ser una funció lineal del tipus $f(t) = 2DT$, per a una certa constant $D > 0$. (Estem suposant que x_t té densitat, cosa que implica que la funció de variàncies no és idènticament nul·la).

Tenint en compte tot això, fixem $t > 0$ i $x \in \mathbb{R}$ qualssevol. Si $h > 0$ tenim, degut a (a):

$$p_{t+h}(x) = \int_{\mathbb{R}} p_t(y)p_h(x-y)\,dy,$$

ja que $x_{t+h} = x_{t+h} - x_t + x_t$, amb $x_{t+h} - x_t$ i x_t variables aleatòries independents, i $x_{t+h} - x_t$ té la mateixa llei que x_h.

Aleshores, usant que p_h és una densitat, tenim

$$\begin{aligned} p_{t+h}(x) - p_t(x) &= \int_{\mathbb{R}} (p_t(y) - p_t(x))p_h(x-y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} (p_t(x+z) - p_t(x))p_h(z)\,dz, \end{aligned}$$

on a l'última igualtat hem fet un canvi de variable i usat que la funció p_h és parell.

Fixem ara $\varepsilon > 0$. Donat aquest ε existeix un $\delta > 0$ tal que si $|u - x| \le \delta$ aleshores

$$|p_t''(u) - p_t''(x)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Tenim que

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\big(p_{t+h}(x) - p_t(x)\big) &= \frac{1}{h}\int_{\{|z|\le\delta\}} \big(p_t(x+z) - p_t(x)\big)\, p_h(z)\,dz \\ &\qquad + \frac{1}{h}\int_{\{|z|>\delta\}} \big(p_t(x+z) - p_t(x)\big)\, p_h(z)\,dz \\ &= \frac{1}{h}\int_{\{|z|\le\delta\}} \big(p_t(x+z) - p_t(x)\big)\, p_h(z)\,dz + I_1. \end{aligned}$$

El terme I_1 es pot fer menor, en valor absolut, que $C\varepsilon$ (amb C una certa constant positiva) si h és prou petit, usant (i) i (iii).

Usant ara el desenvolupament de Taylor de $p_t(\cdot)$ en un entorn de x tenim que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h}\int_{\{|z|\le\delta\}} \big(p_t(x+z) - p_t(x)\big)\, p_h(z)\,dz \\ &\qquad = \frac{1}{h}\int_{\{|z|\le\delta\}} p_t'(x)\, z\, p_h(z)\,dz + \frac{1}{2\,h}\int_{\{|z|\le\delta\}} p_t''(x)\, z^2\, p_h(z)\,dz \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{2\,h}\int_{\{|z|\le\delta\}} \big(p_t''(\xi_{x,z}) - p_t''(x)\big)\, z^2\, p_h(z)\,dz \end{aligned}$$

on $\xi_{x,z}$ denota un punt intermedi entre x i z.

Anomenem J_1, J_2 i J_3 a les tres integrals que apareixen al membre dret de la igualtat anterior, és a dir

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{h}\int_{\{|z|\le\delta\}} p_t'(x)\, z\, p_h(z)\, dz, \\ J_2 &= \frac{1}{2h}\int_{\{|z|\le\delta\}} p_t''(x)\, z^2\, p_h(z)\, dz \end{aligned}$$

i

$$J_3 = \frac{1}{2h}\int_{\{|z|\le\delta\}} \big(p_t''(\xi_{x,z}) - p_t''(x)\big)\, z^2\, p_h(z)\, dz.$$

Usant que p_h és una funció parell, el terme J_1 és igual a 0. En quant al terme J_3,

$$\begin{aligned} |J_3| &\le \sup_{u:\,|u-x|\le\delta} \{|p_t''(u) - p_t''(x)|\}\, \frac{1}{2\,h}\int_{\{|z|\le\delta\}} z^2\, p_h(z)\, dz \\ &\le \sup_{u:\,|u-x|\le\delta} \{|p_t''(u) - p_t''(u)|\}\, \frac{1}{2\,h}\int_{\mathbb{R}} z^2\, p_h(z)\, dz \\ &\le \varepsilon\, \frac{1}{2\,h}\operatorname{Var}(x_h) = \varepsilon\, \frac{1}{2\,h}\, 2\,D\,h = D\,\varepsilon, \end{aligned} \tag{5}$$

on hem utilitzat (3) i (4). Finalment, analitzem el terme J_2.

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2h}\int_{\mathbb{R}} p_t''(x)\, z^2\, p_h(z)\, dz - \frac{1}{2h}\int_{\{|z|>\delta\}} p_t''(x)\, z^2\, p_h(z)\, dz \\ &= D\,p_t''(x) - \frac{1}{2\,h}\int_{\{|z|>\delta\}} p_t''(x)\, z^2\, p_h(z)\, dz \\ &= D\,p_t''(x) + \frac{1}{2\,h}\, o(h), \end{aligned}$$

on hem usat primer (3) i després (iv).

Ajuntant-ho tot, tenim que si h és prou petit

$$\left| \frac{1}{h}\big(p_{t+h}(x) - p_t(x)\big) - D\,p_t''(x) \right| \le C\,\varepsilon$$

i això prova que existeix la derivada (per la dreta) respecte t de la densitat i que se satisfà l'equació desitjada.

Apèndix 2. Prova del Teorema 2.2

La demostració està basada en el teorema de Banach-Steinhaus o *Principi de l'acotació uniforme*, que recordem a continuació.

Teorema de Banach-Steinhaus *Sigui $\{T_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ una família arbitrària d'operadors lineals continus definits en un espai de Banach B i a valors en un espai normat F. Suposem que per a cada $x \in B$ es compleix que*

$$\sup_{\theta\in\Theta} |T_\theta(x)|_F < \infty.$$

aleshores

$$\sup_{\theta\in\Theta} \|T_\theta\| < \infty,$$

on hem denotat per per $\|T\|$ la norma de l'operador T, és a dir

$$\|T\| = \sup_{x\in B, |x|_B \le 1} |T(x)|_F.$$

Prova del Teorema 2.2: Associem a cada g i a cada partició $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k_n} = b\}$ un operador lineal

$$\begin{aligned} T_g^{\mathcal{P}} : \mathcal{C}([a,b]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f \quad &\longrightarrow \sum_i f(x_{i-1})\big(g(x_i) - g(x_{i-1})\big), \end{aligned}$$

on $\mathcal{C}([a,b])$ designa l'espai de les funcions contínues sobre l'interval $[a,b]$ i el sumatori s'estén a tots els índexs i tals que $x_{i-1}, x_i \in \mathcal{P}$. A l'espai $\mathcal{C}([a,b])$ prenem la norma del suprem, que denotem per $\|\cdot\|_\infty$ i, amb la topologia donada per aquesta norma, $\mathcal{C}([a,b])$ és un espai de Banach. Com es compleix que

$$\left|T_g^{\mathcal{P}}(f)\right| \le 2 \max_{x_i\in\mathcal{P}} |g(x_i)| \, \|f\|_\infty,$$

tenim que $\|T_g^{\mathcal{P}}\| \le 2\max_{x_i\in\mathcal{P}} |g(x_i)| \le 2 \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|$, essent doncs $T_g^{\mathcal{P}}$ un operador lineal i continu. Així, per a cada g acotada fixada, tenim la família d'operadors $\{T_g^{\mathcal{P}}, \mathcal{P}$ partició de l'interval $[a,b]\}$ lineals i continus que satisfan que per a cada $f \in \rfloor([a,b])$

$$\sup_{\mathcal{P}} \left|T_g^{\mathcal{P}}(f)\right| < \infty.$$

Aplicant el teorema de Banach-Steinhaus, tindrem que

$$\sup_{\mathcal{P}} \left\|T_g^{\mathcal{P}}\right\| < \infty,$$

és a dir

$$\sup_{\mathcal{P},\, f:\|f\|_\infty \le 1} \left|T_g^{\mathcal{P}}\right| < \infty.$$

Considerem ara les funcions $f^{\mathcal{P}}$ definides en els nodes de cada partició $\mathcal{P}$ com

$$f^{\mathcal{P}}(x_{i-1}) = \operatorname{sign}\big(g(x_i) - g(x_{i-1})\big), \quad I = 1, \dots, k_n - 1,$$

i esteses per interpolació lineal en els intervals que determina la partició. És clar que $\|f^{\mathcal{P}}\|_\infty = 1$. Tenim que s'ha de complir que

$$\begin{aligned}\infty > \sup_{\mathcal{P}} \left\|T_g^{\mathcal{P}}\right\| &= \sum_{i=1}^{k_n} \operatorname{sign}\big((g(x_i) - g(x_{i-1})\big)\big((g(x_i) - g(x_{i-1})\big) \\ &= \sum_{i=1}^{k_n} |g(x_i) - g(x_{i-1})|,\end{aligned}$$

i això ens diu que g ha de ser de variació acotada. □

Referències

[AD] A. Alabert, R. Delgado. *Una presentació de les equacions diferencials estocàstiques*. Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques. No. 10 (1995), 37–73.

[Br] R. Brown. *A brief account of microscopical observations made on the particles contained in the pollen of plants*. Philosophical Magazine 4 (1828). 161–173.

[D] B. Duplantier. *Brownian motion, "diverse and undulating"*. Translated from the French by Emily Parks. Prog. Math. Phys., 47, Einstein, 1905–2005, pàgs. 201–293, Birkhäuser, Basel, 2006.

[E] A. Einstein. *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*. Annalen der Physik 17 (1905).

[E2] A. Einstein. *Investigations on the theory of the Brownian movement*. Dover Publications, Inc., 1956.

[I] K. Itô. *Stochastic integral*. Proc. Imp. Acad. Tokyo 20, (1944). 519–524.

[J] M. Jolis. *Probabilitat i Anàlisi, uns grans amics* Materials Matemàtics. No. 2 (2013). http://mat.uab.cat/matmat/PDFv2013/v2013n02.pdf

[KS] I. Kartzas, S. E. Shreve. *Brownian motion and Stochastic Calculus*. Graduate Text in Mathematics 113.Springer-Verlag, New York, 1991.

[KP] P. E. Kloeden, E. Platen. *Numerical solution of stochastic differential equations*. Applications of Mathematics (New York), 23. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[L] Lucreci. *De la Natura* (Traducció de Miquel Dolç de "De rerum natura") dintre de la col·lecció Textos filosòfics d' Editorial Laia (1986).

[M] P. A. Méyer. *Géométrie différentielle stochastique*. Colloquium in honor of Laurent Schwartz, Vol. 1 (Palaiseau, 1983). Astérisque No. 131 (1985), 107–113.

[MP] P. Mörters, Y. Peres. *Brownian motion*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[W] N. Wiener. *Differential space*. Journal of Mathematical Physics 2(1923). 131-174.

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
mjolis@mat.uab.cat

Publicat el 2 de desembre de 2016