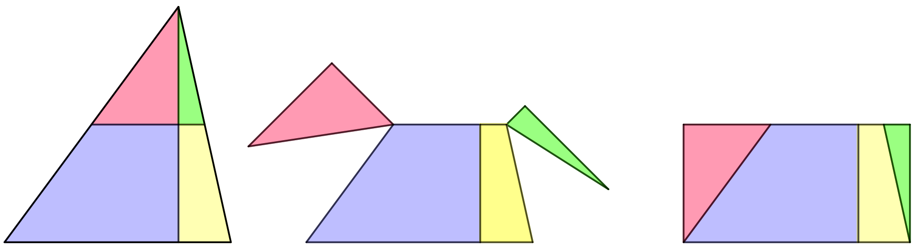
MAT^2

MATerials MATemàtics
Volum 2017, treball no. 4, 14 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

Una historia de corta y pega

Wolfgang Pitsch

El autor propone un pequeño recorrido de la historia del área y del volumen desde los griegos hasta hoy en día. La presentación es más o menos cronológica y anacrónica, nos permitiremos el pecado de modernizar las nociones y definiciones para facilitar su entendimiento.



1. Érase una vez…

… en el siglo VI AC, una pequeña isla en el mediterráneo, cerca de lo que hoy es Turquía. En esta isla, llamada Chios, reinaba Polícrates como tirano de la ciudad de Samos. Un día, un hombre considerado por todos un sabio con conocimientos místicos, un matemático, entró en el palacio de Polícrates. Dice la leyenda que sumido en sus pensamientos nuestro matemático recorrió con sus ojos el suelo pavimentado del palacio. Al salir fue directamente al templo de Hera y allí propició una hecatombe: sacrificó 1000 bueyes a los dioses en agradecimiento por lo que le habían permitido descubrir. Nuestro hombre es conocido como Pitágoras y acababa de demostrar su famoso teorema:

Teorema 1 *El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a los dos cuadrados construidos sobre los catetos.*

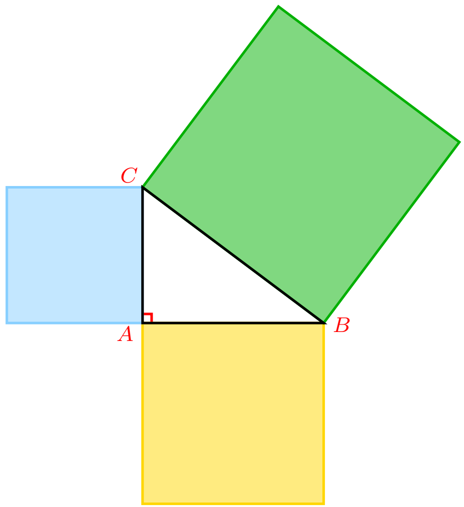


Figura 1: El teorema de Pitágoras.

No sabemos exactamente lo que vio Pitágoras en el suelo, pues del palacio de Polícrates queda hoy en día apenas un muro, pero basándonos en las decoraciones típicas de los suelos griegos podemos suponer que lo que le inspiró fué un motivo similar al de la Figura 2.

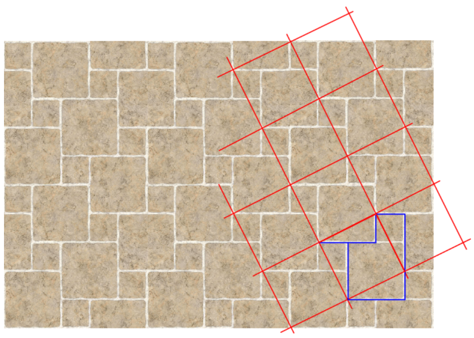


Figura 2: Un suelo mediterráneo típico.

En la Figura 2 se ve que cualquier cuadrado rojo, que tiene como lado la hipotenusa de un triángulo rectángulo azul, se puede *cortar* según las línea azules, y desplazando los dos triángulos rectángulos obtenidos a la derecha de la figura y abajo se obtienen dos copias de los dos cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo rectángulo. Es en este sentido que los cuadrados son iguales: cortando uno se reconstruyen los dos otros.

En este teorema esta contenida lo que se enunciaría hoy en día como una definición combinatoria del área de una *figura poligonal*, es decir una figura delimitada por un número finito de segmentos rectos. Esto incluye las figuras habituales: cuadrado, triángulos, heptágonos etc. pero excluye por ejemplo los círculos. He aquí pues una definición posible del área:

Definición 1 *Dos figuras poligonales son* equidescomponibles *si y solo si se puede cortar una en trozos poligonales y con estos trozos recomponer la segunda. Se dice entonces que las dos figuras tiene la misma área.*

La relación "ser equidescomponible" tiene propiedades que la hacen práctica de manejar:

1. Si por este proceso podemos pasar de la figura A a la figura B, también se puede pasar de la figura B a al figura A.

2. Si A y B son equidescomponibles y B y C son equidescomponibles: entonces A y C son equidescomponibles.

Además, es fácil de usar: solo requiere tijera e imaginación, y nada de las complicaciones técnicas que encierran las definiciones mas modernas: integrales, formas diferenciales, etc., pero sobre todo permite plantear buenos problemas; lo que para un matemático es de los más atractivo.

En una de las obras maestras que los antiguos griegos nos legaron, los Elementos de Euclides [1], esta manera de comparar figuras y calcular áreas se utiliza constantemente. Por ejemplo utilizando este método, Euclides muestra en su Proposición 37 del libro I de los Elementos que dos triángulos de misma base y de igual altura tienen la misma área.

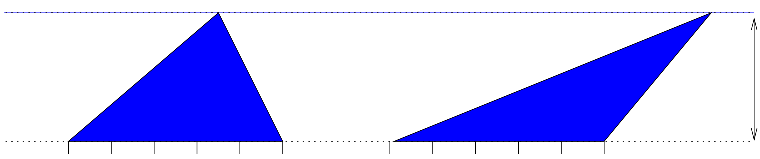


Figura 3: Proposición 37 del libro I de los Elementos

A continuación se muestra una típica demostración euclidiana de que un triángulo es equidescomponible a un rectángulo que tiene la misma base y la mitad de la altura del triángulo ilustrada en la figura de la portada:

Elegimos un triángulo, lo cortamos por la mitad y por la altura, obteniendo así dos pequeños triángulos, de color rojo y verde, y dos cuadriláteros, de color amarillo y azul. Desplazamos los dos triángulos verde y rojo girándolos al rededor de un vértice para recomponer un rectángulo. La figura inicial y final tienen la misma área: están formados exactamente por las mismas figuras coloreadas. El lector reconocerá una versión geométrica de la famosa relación numérica:

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\text{base} \ \times \ \text{altura}}{2}.$$

A pesar del éxito de este método, que permitió a los griegos calcular áreas de los polígonos regulares, aproximar π y muchos más, se les resistieron varios problemas importantes, que resultaron ser piedras angulares para el desarrollo de las matemáticas.

Entre estos problemas, figura de manera prominente el poder utilizar esta definición para "cuadrar" áreas delimitadas por curvas y no segmentos. En particular cómo construir un cuadrado que tenga la misma área que un disco dado:

Problema 1 (Cuadratura del círculo) *Dado un círculo de diámetro de longitud uno, construir (con regla y compas) un cuadrado que tenga la misma área.*

Una de las dificultades del enunciado reside en el requisito de poder efectuar la construcción "con regla y compás". En términos modernizados, el problema de la cuadratura del círculo es equivalente al siguiente: partiendo de un segmento de longitud unidad, construir con regla y compás un segmento de longitud $\sqrt{\pi}$, dónde $\pi = 3{,}141592\ldots$

Figura 4: F. von Lindemann 1852-1939

Los matemáticos tardaron unos 2300 años en resolver este problema. Estudiando las propiedades de los números reales consiguieron finalmente determinar que sólo una parte corresponde a longitudes de segmentos que se pueden construir con regla y compás a partir del segmento de longitud 1. De hecho, lo primero que se demostró (G. Cantor 1874) es que los números *no* construibles con regla y compás son además mucho mas abundantes que los construibles. Mas difícil es determinar si un numero particular, como π, es o no es construible. En 1882, Ferdinand von Lindemann (ver Figura 4) consiguió finalmente demostrar:

Teorema 2 *El número π no es construible con regla y compás, en consecuencia la cuadratura del círculo es imposible.*

Este resultado fue tan impactante que durante mucho tiempo en Alemania se conoció π como el número de Lindemann [2].

Al contrario de lo que se puede creer, los griegos si consiguieron "cuadrar" algunas figuras no poligonales, como las lúnulas de Hipócrates de Chios: el área de las dos lúnulas azules de la Figura 5 es igual al área del triángulo rectángulo verde:

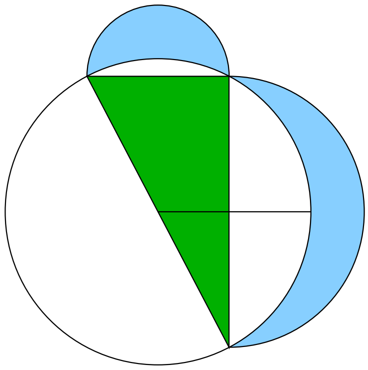


Figura 5: Teorema de las lúnulas

Observemos que la relación entre equidescomponibilidad y misma área va a priori en un sólo sentido:

Si dos figuras A y B son equidescomponibles *entonces* tienen la misma área.

Ocurre que el área se puede definir por otros métodos, por ejemplo analíticos, que permiten definir sin problema áreas de superficies delimitadas por curvas. A principios del siglo XIX se demostró que el área definida de manera analítica y la que se define como en el caso de los griegos mediante "corte y pega" coinciden:

Teorema 3 (Bolyai, 1832, Gerwien, 1833) *Dos figuras poligonales tienen la misma área si y sólo si son equidescomponibles.*

Este resultado nos describe las inmensas posibilidades de los juegos de tipo "tangram", tomamos dos figuras de la misma área y preguntamos como cortar una para obtener otra. Algunos casos célebres son los siguientes (daremos la soluciones al final de este artículo para dejar al lector curioso la posibilidad de encontrar su propia solución) [3]

1. Dado un cuadrado ¿cómo cortarlo para reconstruir dos cuadrados de área mitad?

2. Dado un triángulo equilátero ¿cómo cortarlo para obtener un cuadrado?

3. Mucho mas difícil, dado un cuadrado, ¿cómo cortarlo para reconstruir tres cuadrados de área una tercera parte?

2. Volúmenes y descomposiciones

Como el método de equidescomponibilidad dio brillantes resultados para áreas, es tentador generalizar al caso de volúmenes. En esta obra maestra de la ciencia, los Elementos de Euclides, el estudio de volúmenes sigue al principio las mismas pautas que para áreas: cortando y recomponiendo poliedros se demuestra por ejemplo que el volumen de un prisma viene dado por:

$$\text{volumen prisma} = \text{área de la base} \times \ \text{altura}$$

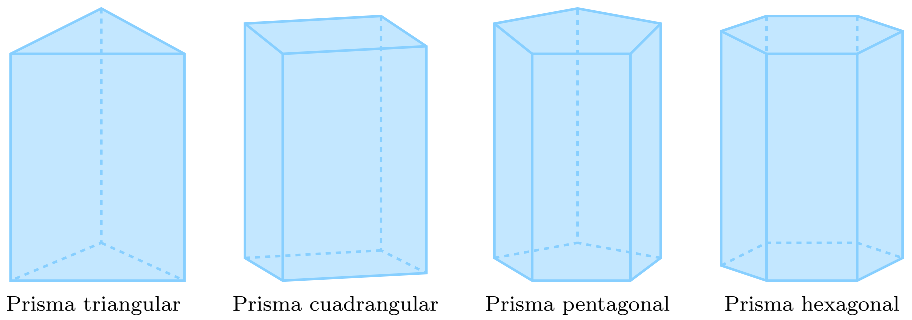


Figura 6: Ejemplos de prismas rectos

El "tabique" de base en el que se descomponen las figuras pasa de ser un triángulo a ser una pirámide de base triangular, como en la Figura 7:

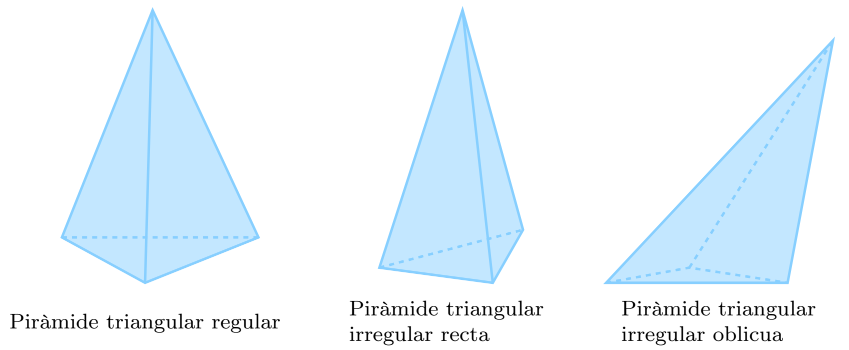


Figura 7: Ejemplos de piramides

El siguiente resultado, aunque del todo paralelo al la Proposición 28 Libro I sobre áreas de triángulos, es mucho más delicado de demostrar:

Teorema 4 (Euclides, Prop. 6 Libro XII) *Dos pirámides de la misma base y misma altura tienen mismo volumen.*

Aquí la demostración de Euclides no utiliza el método de equidescomponibilidad, sino que se basa en el llamado "método de exhausción", atribuida a Eudoxio de Cnido (390-337 AC), y que fué brillantemente utilizada por otro matemático famoso: Arquímedes (287 - 212 AC) [4]. En este método se aproxima una figura complicada, como por ejemplo una bola, por figuras poligonales cuyo volumen (o área) es conocido, por ejemplo aproximando un círculo por polígonos regulares como en la Figura 8

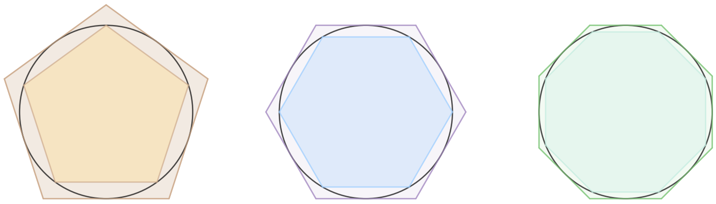


Figura 8: Exhausción del círculo

Utilizando una aproximación del círculo mediante poligonos de 96 lados Arquímedes obtuvo la famosa aproximación[1]

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

Otro resultado famoso obtenido mediante el método de exhausción es:

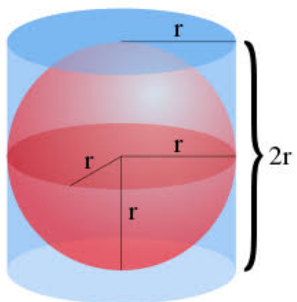


Figura 9: Esfera de radio r inscrita en un cilindro

Teorema 5 (Arquímedes) *Dada una esfera inscrita en un cilindro (cf. Figura 9), el área de la esfera y el volumen que encierra son respectivamente iguales a dos tercios del área del cilindro y del volumen que éste encierra.*

Arquímedes estaba tan orgulloso de este resultado, que la historia dice que mandó grabar la figura de un círculo inscrito en un cuadrado sobre su lápida.

A pesar de todo, los métodos detrás de las demostraciones de los dos resultados anteriores requerían esencialmente la posibilidad de cortar un volumen en una infinidad de piezas, o para ser preciso, en un número arbitrariamente grande de piezas.

[1] Esta aproximación da π con 2 cifras exactas, el error cometido varía del 0.024 % al 0.04 %. Se tardaron 1700 años para obtener un cálculo mejor y obtener 11 cifras exactas (Madhava, matemático indio (1350-1425))

He aquí pues una diferencia fundamental entre el caso de los volúmenes y de las áreas: la demostración de Euclides muestra que dos pirámides del mismo volumen son equidescomponibles, por lo que si dos figuras tienen el mismo volumen *a veces* es posible pasar de una a otra cortando y pegando, mientras que el Teorema 3 de Bolyai-Gerwin nos dice que si dos figuras planas tienen la misma área *siempre* es posible de pasar de una a otra cortando y pegando.

Esta diferencia en el comportamiento de los volúmenes y de las figuras planas extrañó tanto a los matemáticos que aparece en tercer lugar en la famosa lista de problemas que el célebre matemático alemán D. Hilbert ofreció como guía para la investigación matemática del siglo XX en su ponencia durante el segundo congreso mundial de las matemáticas, que tuvo lugar en Paris en 1900:

Figura 10: M. Dehn 1878-1952

Problema 2 (Problema III de Hilbert) *¿Es cierto que en dimensión* 3 *"tener el mismo volumen" es lo mismo que ser "equidescomponible"?*

La respuesta a este problema particular no tardó, y vino en los trabajos de M. Dehn, alumno de Hilbert, ese mismo año (una demostración se puede encontrar en el libro de Hartshorne [3]):

Teorema 6 (1900) *Un cubo y un tetraedro regular nunca son equidescomponibles.*

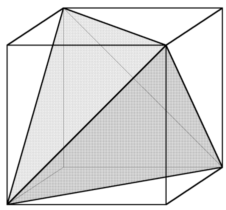
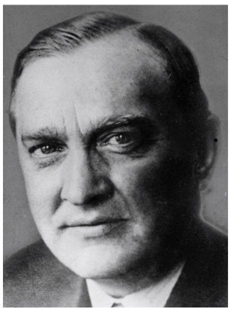


Figura 11: Un tetraedro regular en un cubo

3. Descomposiciones paradójicas

A medida que se esclarecían los fundamentos lógicos de las matemáticas a principios del siglo XX, surgieron descomposiciones de volúmenes más extrañas aún: las descomposiciones paradójicas.

Teorema 7 (Banach-Tarski, 1924) *Dados dos trozos del espacio acotados A y B, existe una manea de cortar A en un número finito de trozos, desplazarlos y reconstruir B.*



(a) S. Banach 1892-1945

(b) A. Tarski 1901-198

Recordemos que un trozo del espacio es acotado si se puede encerrar dentro de una esfera suficientemente grande, y que los desplazamientos autorizados son: translaciones, rotaciones y reflexiones. Todos estos desplazamientos preservan el volumen. Pero el teorema dice que por ejemplo un guisante se puede trocear y con las piezas se puede reconstruir... la luna, o se puede elegir una manzana, trocearla y obtener dos manzanas. Además el número de piezas necesarias no es muy elevada: para descomponer una bola de radio R en dos bolas de radio R sólo se necesitan 5 piezas; pero esto claramente viola lo que acabamos de decir: que los desplazamientos preservan el volumen!

La razón escondida en las descomposiciones paradójicas es pues aún mas extraña: *no se pueden medir el volumen de todas las partes acotadas del espacio*.

Aquí no se debe entender que uno no es capaz de efectuar la medición del volumen, sino que existen piezas para las cuales la propiedad "tener un volumen" carece de sentido. Así pues estas 5 piezas en las que descomponer una manzana son tan retorcidas, que carecen de volumen, así que no hay nada que preservar al desplazarlas. En particular nunca se obtendrán cortando la manzana con un cuchillo.

La demostración del teorema de Banach-Tarski utiliza un axioma (es decir un resultado cuya validez se postula pero no se demuestra) particularmente sutil conocido como Axioma de la Elección. Es un axioma extremadamente útil, pero al conducir a paradojas como la de arriba, es interesante tratar de acorralar su uso o no autorizarlo para ver si así desaparecen las paradojas. El siguiente resultado de Dougherty y Foreman, que no utiliza el Axioma de la Elección, nos dice que aún así el volumen es cosa sutil:

Teorema 8 (Dougherty, Foreman 1992 [5]) *Sean A y B dos bolas de radios distintos, entonces éstas son "casi equidescomponibles": existe una descomposición de A en un número finito de piezas con las cuales se pueden reconstruir B salvo un trozo T tan pequeño que T no contiene ninguna bola sea cual sea su radio.*

Por ejemplo podemos partir de una naranja, cortarla en trozos y con ellos reconstruir la luna, dejando de lado un pequeño trozo lunar tan residual que no contiene ni una mota de polvo.

Estos resultados, a lo que apuntan es a la inmensa complejidad de los subconjuntos acotados del espacio. En contraste, los subconjuntos acotados del plano parecen ser mucho más sencillos, en particular cuando los cortamos y los desplazamos el área inicial sí se conserva siempre, las partes "sin área definida" no existen según afirma el siguiente teorema de Banach, que también utiliza el Axioma de la Elección:

Teorema 9 (Banach, 1923) *Existe una manera de definir una función área sobre el conjunto de* todas *las partes acotadas del plano y que cumple las siguientes propiedades: es aditiva, homogénea y asigna al cuadrado de lado 1 el área unidad.*

Aquí, aditiva significa que el área de dos figuras que no se solapan es la suma de las áreas, de la cual se puede deducir que si se solapan a lo largo de por ejemplo segmentos el área total también es la suma de la áreas. Y homogénea quiere decir que si dilatamos una figura de un factor k entonces el área de la figura resultante es k^2 por el área inicial, como por ejemplo si triplicamos las dimensiones de un cuadrado el área del cuadrado grande es $9 = 3^2$ el área del pequeño.

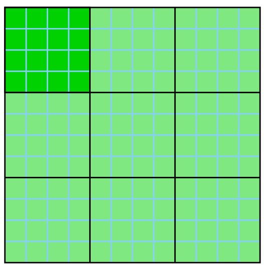


Figura 13: Triplicar un cuadrado

Acabaré este artículo citando un resultado, muy difícil y reciente, que muestra lo testarudos que pueden ser los matemáticos: una imposibilidad demostrada, como por ejemplo la imposibilidad de la cuadratura del circulo, no siempre los frena!

Teorema 10 (Laczkovich, 1990 [6]) *Dado un disco D, es posible cortarlo en un número finito de trozos, desplazarlos y reconstruir con ellos un cuadrado.*

Como el área no cambia al utilizar desplazamientos, y todas las piezas utilizadas tienen área por el teorema de Banach, esto resuelve la cuadratura del círculo! No obstante no se pueden construir estas piezas con "regla y compás", de hecho la demostración no construye explícitamente las piezas! Además el número de piezas necesarias es extremadamente grande: del orden de 10^{40}, en comparación recordemos que se estima que hay del orden de 10^{50} átomos en la Tierra.

4. Soluciones a los dos problemas de equidescomponibilidad

¿Cómo recortar un cuadrado para obtener dos cuadrados de área mitad?

Una respuesta viene dado por la descomposición de la siguiente Figura 14. Es suficiente cortar el cuadrado inicial a lo largo de sus diagonales para recomponer dos copias del cuadrado azul.

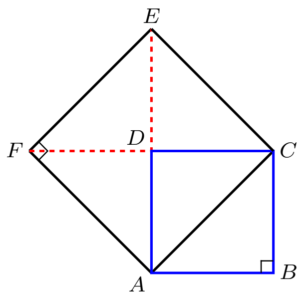


Figura 14: Duplicación de cuadrados

¿Cómo recortar un triángulo equilátero para obtener un cuadrado?

Una respuesta viene dada por la "descomposición de Dudney", cf. Figura 15

¿Cómo recortar un cuadrado para obtener tres cuadrados de área una tercera parte?

Una respuesta fue encontrada por el gran matemático persa Abu'l-Wafa (940-998). Su propuesta está ilustrada en la Figura 16.

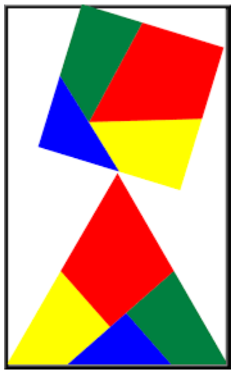


Figura 15: Del triángulo equilátero al cuadrado

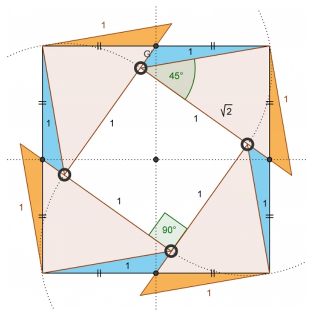


Figura 16: Trisección del cuadrado

Referencias

[1] Existen múltiples traducciones de los elementos de Euclides, una de las más autorizadas (en ingles!), con múltiples referencias y comentarios es:

Heath, Thomas L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (2nd ed. [Facsimile. Original publication: Cambridge University Press, 1925]) New York: Dover Publications.

También se pueden encontrar traducciones libres en la red en varios idiomas:

http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm

[2] La demostración histórica de éste resultado se encuentra en:

Lindemann, F. (1882), *Über die Zahl* π., Mathematische Annalen, 20: 213-225.

Une buena demostración moderna en línea, pero no del todo elemental de encuentra en:

https://www.gaussianos.com/como-demostrar-que-π-pi-es-trascendente/

[3] Existen numerosos libros de geometría "clásica" asequibles, de nivel intermedio y avanzado respectivamente y entre los preferidos del autor destacan:

Ostermann, A y Wanner, G. *Geometry by its history.* Undergraduate Texts in Mathematics. Readings in Mathematics. Springer, Heidelberg, 2012. xii+437 pp.

Hartshorne, R. *Geometry: Euclid and beyond.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2000. xii+526 pp.

[4] Pocas obras originales de Arquímedes nos quedan, recientemente se descubrió un palimpsesto que contenía un tratado en el que Arquímedes aplica su utilización del método exhaustivo. La fascinante historia de éste descubrimiento se puede leer de manera amena en:

Noel, W. y Netz, R. *el código de Arquímedes*, Temas de hoy, 400 pp.

La demostración de éste resultado apareció, en francés, en:

Banach, S.; Tarski, A. «Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes». Fundamenta Mathematicae (en francés) 6 (1924) 244-277.

La existencia de conjuntos sin área se demuestra en cursos sobre teoría de la medida, un texto de introducción (en francés!) a esta teoría y a las descomposiciones paradójicas se puede encontrar en:

Gustave Choquet, G., De Pauw, Th., de la Harpe, P., Kahane, J.-P., Pajot, H., y Sévennec, B., "Au-tour du centenaire Lebesgue", Société mathématique de France , Panoramas et Synthèses 18 (2004)

En inglés también se puede consultar el libro del matemático de UCLA, Terence Tao "An introduction to Measure theory", disponble en acceso libre en su página web: https://terrytao.wordpress.com/books/an-introduction-to-measure-theory/

[5] Dougherty R. y Foreman M., The Banach-Tarski paradox using pieces with the property of Baire, Proc. Nat. Acad. Sci. 89 (1992), p. 10726-28.

[6] Laczkovich, *Equidecomposability and discrepancy: a solution to Tarski's circle squaring proble*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, vol. 404, 1990, p. 77-117.

Universitat Autònoma de Barcelona
Departament de Matemàtiques
pitsch@mat.uab.es

Publicat el 16 de gener de 2018