MAT²
MATerials MATemàtics
Volum 2021, treball no. 1, 14 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/web/matmat

L'art de repartir recursos escassos

José Manuel Giménez-Gómez i Cori Vilella-Bach

Quan diferents agents tenen una certa demanda sobre un bé comú i la suma del que demanen els agents supera la quantitat del bé disponible, com s'ha de repartir aquest bé? En aquest article es veuen possibles solucions (regles) per a aquest tipus de problemes, anomenats problemes de demanda. S'analitzen algunes de les regles que s'han estudiat a la literatura i es formulen algunes propietats (axiomes) que voldrem que les regles satisfacin. A continuació s'investiga si hi ha regles que satisfan una llista de propietats. Sovint es pot veure que hi ha una única regla que satisfà una certa llista de propietats. Finalment, es presenta un exemple de problema de demanda real on s'ha aplicat aquesta metodologia.

1 Introducció

L'inici de la teoria de jocs es remunta al 1953 amb John Von-Newmann i Oskar Morgenstern i el llibre *Theory of games and economic behavior* [13]. Des de llavors ha evolucionat substancialment i s'ha aplicat a altres camps com poden ser la ciència política, la informàtica i la biologia, entre d'altres. Ha interessat en diferents àmbits ja que és una base per construir models de conducta humana. Hi ha moltes situacions conflictives en les quals intervenen diversos agents i, per tant, hi ha molts tipus de jocs[1]. En aquest context podríem trobar els problemes de demanda, quan un grup d'agents reclamen un cert dret sobre un bé comú i la quantitat del bé que s'ha de repartir no és suficient per satisfer la demanda de tots els agents. Aquest tipus de problemes han preocupat a la societat des de fa segles. A l'època

[1] Per a mes informació sobre jocs cooperatius, no cooperatius i aplicacions es pot consultar [6], [16], i [19]

d'Aristòtil ja hi ha documents que parlen d'aquest tema i els exemples procedents del Talmud, antiga llei dels jueus de Maimonides, que descriurem més endavant també en són un exemple de l'època medieval. No obstant, el primer treball formal sobre aquesta problemàtica és a l'article de Barry O'Neill (1982) [15]. Com s'hauran de repartir els recursos que tenim? Utilitzarem regles de repartiment que associen a cada problema de demanda un repartiment dels recursos que tenim entre els agents. L'objectiu és trobar una regla de repartiment que s'adapti el millor possible a cada situació. Per aquest motiu analitzarem algunes de les regles més importants que s'han estudiat a la literatura i formularem algunes propietats, aquestes propietats s'anomenen axiomes que voldrem que les regles satisfacin. Volem comparar les regles amb les propietats que satisfan i buscar les regles que satisfan les propietats desitjades en cada situació. El cas més conegut d'aquest tipus de problema és el d'una empresa que fa fallida, conegut a la literatura com un *bankruptcy problem*, i el seu valor de liquidació no és suficient per assumir les demandes dels seus creditors. No obstant, aquest model es pot aplicar a molts altres casos com podrien ser el repartiment de pressupostos per part del banc mundial als diferents països o el repartiment d'ajut humanitari per part de la Creu Roja en situacions de guerra o de desastres naturals. També, en el marc universitari quan els diferents grups de recerca demanem diners a la generalitat AGAUR (Agència de Gestió d'Ajuts Universitaris i de Recerca) per als nostres projectes de recerca, com s'ha de repartir? També s'ha aplicat aquesta metodologia a diferents temes ambientals com son la reducció de les quotes de pesca [10], el repartiment de les possibles emissions de CO_2 que poden fer els països [7] i [5] i per a la distribució del pressupost de sanitat de la Generalitat de Catalunya [18].

La regla més coneguda, i potser fins i tot la més utilitzada, és la regla proporcional, on els recursos es reparteixen proporcionalment a la demanda de cada agent. Aquesta regla ja va ser utilitzada per Aristòtil i sempre ha estat molt utilitzada de manera natural. Però hi ha motius per pensar que aquesta és la millor? De fet, com ja hem comentat abans, hi ha literatura molt antiga a part d'Aristòtil, en particular al Talmud, on es poden trobar exemples numèrics en els que posteriorment s'han inspirat diverses regles de repartiment i que difereixen de la proporcional.

2 El model

El model dels problemes de demanda consta d'una quantitat $E \in R_+$ d'un recurs infinitament divisible (*endowment*)[2], aquest és el recurs del qual es disposa i es vol repartir entre un grup $N = \{1, \ldots, n\}$ d'agents que tenen unes demandes sobre aquest recurs (*claims*) $c_i \in R_+$, on c_i és la demanda de l'agent $i \in N$. Cal tenir present que els agents no poden demanar la quantitat que vulguin, les demandes han de ser justificades o uns drets adquirits per cada agent, generalment han d'estar avalats per documents legals. Per completar el model cal dir que la quantitat del recurs de què es disposa no és suficient per satisfer totes les demandes dels agents, ja que en cas contrari, si es disposés de recursos suficients per satisfer a tothom, el repartiment es resoldria trivialment. Per tant, podem definir un problema de demanda com un parell $(c, E) \in R_+^N \times R_+$ tal que [3] $\sum_{i=1}^{n} c_i \geq E$.

En el cas de dos agents el problema es pot representar de manera molt senzilla i es pot identificar en cada cas, segons les demandes de cada un, quins serien els possibles pagaments que podríem fer. A la Figura 1 en tenim un exemple.

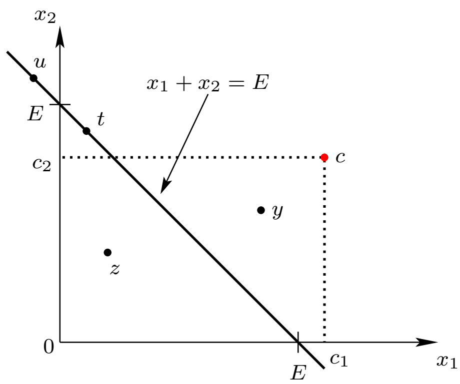


Figura 1: **El cas de dos agents**, $N = \{1, 2\}$. El vector de demandes és $c = (c_1, c_2)$, a cada un dels eixos hi ha els possibles pagaments dels agents, l'objectiu és escollir un pagament positiu, inferior a la demanda de cada agent i sobre la línia $x_1 + x_2 = E$. Observem que els punts y, z, t, u no poden ser possibles pagaments.

[2] En aquest treball es considera que el recurs a dividir és perfectament divisible i homogeni. No obstant, hi ha moltes situacions reals en les que tant el recurs a repartir com les demandes són unitats idèntiques i indivisibles. Per tant, en aquests cassos les regles han d'assignar un nombre d'unitats enteres d'aquest recurs a cada agent. Podem pensar, per exemple, en la distribució de les llistes d'espera per a cirurgies als hospitals, distribució de visats per als immigrants o, com ens trobem recentment, podem pensar en la distribució de vaccins entre la població en un moment de pandèmia. En aquests cassos s'apliquen models de prioritat, per a mes informació podeu consultar els treballs de [2], [9] i [14].

[3] Observem que permetem la igualtat $\sum_{i=1}^{n} c_i = E$ tot i que en aquest cas totes les demandes podrien ser satisfetes.

Alguns dels treballs referents de problemes de demanda són [20] i [21].

3 Les regles

Una vegada tenim identificades totes les parts del problema de repartiment (recurs disponible i demandes dels agents), s'ha de decidir com fer la distribució d'aquest recurs entre totes les demandes. En aquest sentit, hi ha literatura molt antiga, en particular al Talmud, on ja es poden trobar exemples numèrics en els que posteriorment s'han inspirat diverses regles de repartiment.

Formalment, tal i com es mostra a la Figura 2, una **regla** assigna a cada problema de demanda (c, E) un vector de repartiment $\varphi(c, E) \in R^n$ tal, que ha de verificar dues condicions:

- Cada component ha de ser acotada per la demanda de cada agent i.e. $0 \leq \varphi_j(c, E) \leq c_j$, $\forall j = 1, ..., n$.
- Ha de ser eficient i.e. $\sum_j \varphi_j(c, E) = E$.

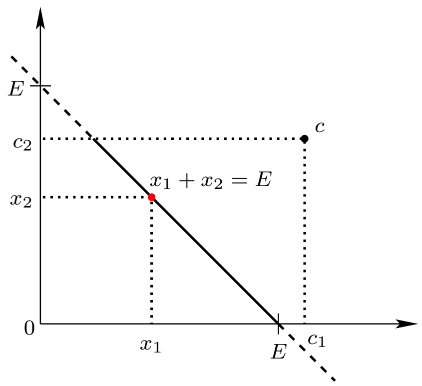


Figura 2: **Representació del conjunt de repartiments que compleixen les condicions d'una regla.** Notem que la part marcada en negre delimita tots els repartiments de E que són positius i inferiors a les demandes de cada agent. A la figura, x_1 i x_2 ens mostren un possible repartiment.

A continuació presentem les regles més analitzades a la literatura: la proporcional, la igualitària en guanys restringida, la igualitària en pèrdues restringida i la Talmud [8].

3.1 La regla proporcional

La regla més coneguda, ja proposada per Aristòtil i sempre molt utilitzada de manera natural, és la proporcional. Aquesta regla recomana un repartiment dels recursos proporcional a la demanda de cada agent.

Formalment, la regla proporcional, P, (representada per la Figura 3), assigna a cada problema de demanda (c, E) el vector $P(c, E)$ tal que, per a cada agent $i \in N$, $P_i(c, E) \equiv \frac{E}{\sum c_j} c_i$.

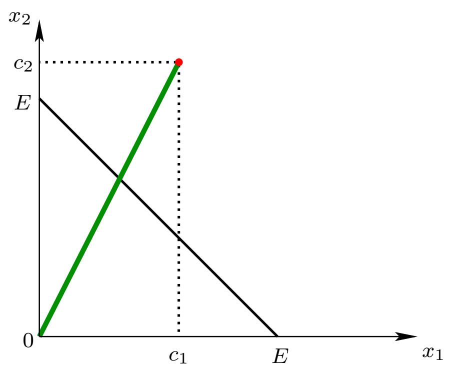


Figura 3: **La regla Proporcional per al cas de dos demandants $N = \{1, 2\}$ i $0 < c_1 < c_2$.** La línia verda mostra tots els repartiments (proporcionals) possibles des de l'origen fins al vector de demandes. El punt on creua amb la línia del recurs disponible E, mostra el repartiment per aquest cas.

3.2 La regla igualitària en guanys restringida

Una altra regla bastant natural seria repartir de manera igualitària a tots els agents, però en aquest cas la regla ignoraria les demandes dels agents i els tractaria a tots per igual (anomenada regla de divisió igualitària). Podem pensar que aquesta regla és oposada a la proporcional. Tanmateix, considerem que a cada unitat demanada pels agents li assignem el nom del seu agent i fem un repartiment igualitari per a totes les unitats demanades (enlloc de fer-ho entre els demandants). Llavors, quan sumem les quantitats que té cada agent per les unitats que porten el seu nom també estem assignant a cada agent la distribució proporcional a les seves demandes.

No obstant, el problema amb aquesta regla sorgeix quan els agents no tenen la mateixa demanda. Notem que, entre d'altres motius, aplicant aquest principi podríem assignar a algun agent una quantitat superior al que demana i això no està contemplat en una regla.

Aleshores, es defineix la regla igualitària en guanys restringida [11], que proposa un repartiment igualitari dels guanys de cada agent sense que ningú pugui rebre més del que demana.

Formalment, la regla igualitària en guanys restringida, CEA (de l'anglès, *constrained equal awards*), assigna a cada problema de demanda (c, E) un vector $CEA(c, E)$ tal que, per a cada agent $i \in N$, $CEA_i(c, E) \equiv \min\{c_i, b\}$, on b s'ha escollit per tal que $\sum \min\{c_i, b\} = E$.

De la pròpia definició, i tal com s'observa a la Figura 4, podem intuir que aquesta regla afavoreix als agents que tenen una demanda mes petita.

A la Figura 4 podem veure la regla igualitària en guanys restringida per al cas de dos agents.

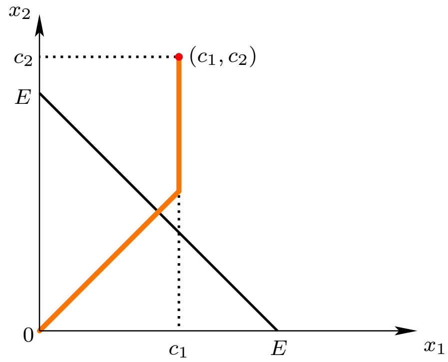


Figura 4: **La regla igualitària en guanys restringida per al cas de dos demandants.** Notem que la línia taronja mostra tots els repartiments possibles des de l'origen fins al vector de demandes. El punt on creua amb la línia del recurs disponible E, mostra el repartiment per a aquest cas.

Hi ha diverses maneres de calcular la regla igualitària en guanys restringida d'un problema. La primera opció seria basar-nos en un repartiment igualitari i anar ajustant si algun dels agents excedeix la seva demanda. Una segona opció que ens ajuda a entendre com funciona aquesta regla és repartir en parts iguals la quantitat que tenim, si ningú excedeix la seva demanda, hem acabat. Altrament, si alguns agents reben més del que demanen, llavors calculem la diferència per cada un d'ells entre el que demanen i el repartiment igualitari i repartim la suma d'aquestes diferències en parts iguals entre els agents que han rebut menys del que demanen. Amb aquest segon repartiment podem tornar a tenir agents que reben més del que demanen, per tant repetim l'operació anterior amb aquests agents. Repetim aquest procés fins que ningú rebi més del que demana.

Per exemple, si estem en el cas de tres agents $N = \{1, 2, 3\}$ i considerem el problema de demanda $((13, 30, 60), 75)$, el repartiment de partida seria $(25, 25, 25)$. L'agent 1 rep més del que demana, per tant a aquest li hem de donar 13 i repartir la diferència $25 - 13 = 12$ entre els altres dos a parts iguals, això dóna un repartiment de $(13, 31, 31)$, en aquest cas ara és l'agent 2 el que rep més del que demana que és 30. Per tant li donarem 30 al segon i assignarem a l'agent 3 la diferència que queda $31 - 30 = 1$, d'aquesta manera el repartiment final és $(13, 30, 32)$.

3.3 La regla igualitària en pèrdues restringida

La definició d'aquesta regla està relacionada amb l'anterior, la CEA, i també té l'objectiu de ser una regla igualitària però en aquest cas enlloc de basar-nos en el repartiment igualitari dels guanys ens centrarem en el repartiment igualitari de les pèrdues, és a dir, la quantitat que cada demandant deixa de rebre del que reclama. Si volem pèrdues igualitàries per a tots, es pot donar el cas que alguns agents rebin quantitats negatives i això seria incompatible amb la noció de regla que requereix que els repartiments siguin no negatius. Per tant, la regla proposarà pèrdues el màxim d'igualitàries sense que ningú pugui tenir un pagament negatiu.

La regla igualitària en pèrdues restringida, CEL (de l'anglès, *constrained equal losses*), assigna a cada problema de demanda (c, E) un vector $CEL(c, E)$ tal que, per a cada agent $i \in N$, $CEL_i(c, E) \equiv \max\{c_i - b, 0\}$, on b s'ha escollit per tal que $\sum \max\{c_i - b, 0\} = E$.

Observem que, mentre la regla anterior, la CEA, afavoreix als agents que tenen una demanda mes petita, aquesta regla, la CEL, afavoreix als agents amb demandes més grans. A la figura següent es pot veure la regla igualitària en pèrdues restringida per al cas de dos demandants.

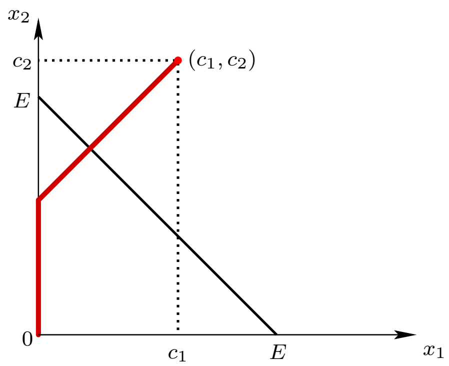


Figura 5: **La regla igualitària en pèrdues restringida per al cas de dos demandants.** Notem que la línia vermella mostra tots els repartiments possibles des de l'origen fins al vector de demandes. El punt on creua amb la línia del recurs disponible E, és el repartiment per a aquest cas.

Per entendre el funcionament general d'aquesta regla començarem assignant a cada agent la seva demanda, tot i que això no es podrà satisfer. Calculem les pèrdues $\sum c_i - E$ i les distribuïm (les restem) a parts iguals. Si tothom rep una quantitat no negativa, ja hem acabat. Altrament, si alguns agents reben una quantitat negativa, a aquests els assignem zero, calculem la suma d'aquestes quantitats negatives i la distribuïm en parts iguals entre els agents que rebien una quantitat positiva. D'aquesta manera pot ser que ara hi hagi agents que rebin una quantitat negativa, en aquest cas repetim l'operació anterior amb aquests agents. És a dir, els assignem zero enlloc de la quantitat negativa, calculem la suma de les quantitats negatives i la redistribuïm en parts iguals entre els agents que segueixen rebent una quantitat positiva. Seguim repetint aquest procés fins que tothom rebi una quantitat no negativa.

Per exemple, en el cas de tres agents $N = \{1, 2, 3\}$ i considerant el problema de demanda $((12, 30, 60), 60)$, inicialment assignem les pèrdues, es a dir la suma de les demandes menys la quantitat a repartir, $\sum c_i - E = 102 - 60 = 42$ repartides en parts iguals $(-2, 16, 46)$. L'agent 1 rep una quantitat negativa, per tant a aquest li hem de donar 0 i repartir les seves pèrdues entre els altres dos a parts iguals, això dóna un repartiment de $(0, 15, 45)$, en aquest cas tots tenen un pagament no negatiu i per tant aquest és el repartiment final.

3.4 La regla del Talmud

Abans d'introduir formalment la regla del Talmud, veiem a continuació dos exemples dels problemes que podem trobar en aquest text.

El primer exemple que presentarem del Talmud és el de la disputa entre dos homes per una peça de roba, cada un d'ells reclama una part de la peça, un diu que la peça és tota seva i l'altre que la meitat és seva, per tant resulta incompatible donar a cada un d'ells el que reclama. Per tal de facilitar les idees assignem un valor de 200 unitats a la peça de roba de forma que un dels homes reclama 100 i l'altre 200. El Talmud recomana repartir-ho $(50, 150)$. Podem veure que aquest repartiment no és proporcional a les demandes[4]. A la Figura 6 es representa gràficament aquest exemple.

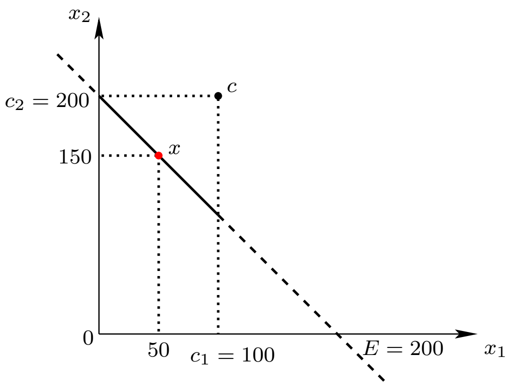


Figura 6: **La regla del Talmud per al cas de dos demandants al problema del repartiment de la peça de roba.** El punt vermell mostra el repartiment per aquest cas.

El segon exemple de demanda extret del Talmud que presentarem és el de l'herència de tres vídues segons el contracte de matrimoni. En aquest cas el problema involucra tres vídues d'un home que va signar un contracte en casar-se amb cada una d'elles especificant, tal com diu la tradició, quina quantitat hauria de rebre cada una en cas que es dissolgués el matrimoni

[4] Observem que la proposta de repartiment que dona el Talmud no coincideix amb la proporcional ni amb la CEA, però coincideix amb la CEL, com veurem mes endavant, això és degut a que la regla del Talmud és una combinació entre la CEA i la CEL, per això en alguns casos poden coincidir.

(per un divorci o la seva mort). L'home mor i el seu patrimoni resulta insuficient per satisfer els tres contractes que té amb les tres dones. Com s'ha de repartir el patrimoni entre les tres vídues? D'acord amb els seus contractes, les tres vídues reclamen 100, 200 i 300. Si la quantitat a repartir és de 100, el Talmud recomana repartir $(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3})$. Si la quantitat a repartir és de 200, el Talmud recomana repartir $(50, 75, 75)$ i si és de 300, recomana $(50, 100, 150)$.

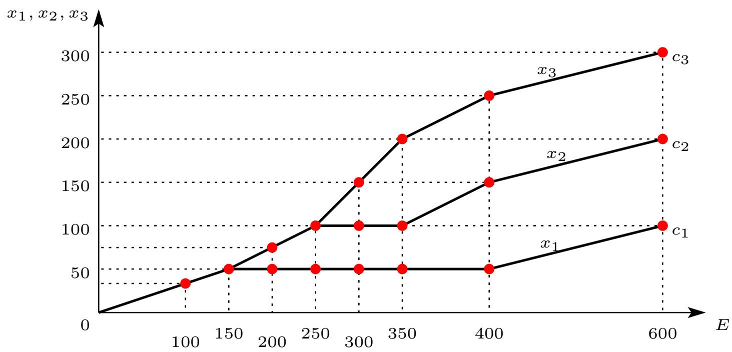


Figura 7: **La regla del Talmud per al cas de tres demandants en el problema de les vídues.** Els punts vermells mostren el repartiment per a cada quantitat disponible 100, 200, 300 a més d'altres quantitats fins a 600.

La regla del Talmud, T, [1] recomana per a cada problema de demanda (c, E) un vector $T(c, E)$ tal que, per cada agent $i \in N$, $T_i(c, E) \equiv CEA_i(c/2, E)$ si $E \leq C/2$; o $T_i(c, E) \equiv c_i/2 + CEL_i(c/2, E - C/2)$, si $E \geq C/2$, on $C = \sum c_i$ és la demanda total dels agents.

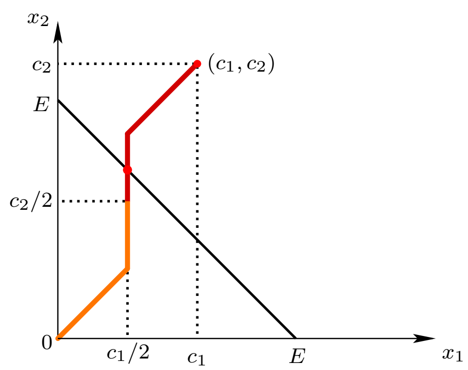


Figura 8: **La regla del Talmud per al cas de dos demandants.** La línia taronja mostra tots els repartiments possibles fins $C/2$ i la vermella mostra tots els repartiments possibles des de $C/2$ fins al vector de demandes. El punt on creua amb la línia del recurs disponible E, mostra el repartiment per a aquest cas.

Quin sentit tenen els repartiments que proposa el Talmud? Segons Aumann [1], "és socialment injust pels diferents creditors trobar-se a costats oposats del punt mig $C/2$". Com que T és una combinació de la CEA i la CEL, pren la meitat de les demandes agregades com a punt de referència. Si la meitat del total de les necessitats és inferior a la quantitat disponible per a repartir, s'aplica la CEA a les demandes mitjanes; mentre que, en cas contrari, cada agent rep la meitat de les seves demandes i la quantitat recomanada per la CEL.

4 Propietats bàsiques: principis socialment admissibles

A la literatura es poden trobar una gran quantitat d'axiomes o propietats per a l'anàlisi axiomàtica de les regles esmentades anteriorment. L'anàlisi axiomàtica té com a objectiu identificar cada regla amb un conjunt de propietats ben definides, de manera que triar una regla significa resoldre el problema aplicant aquests principis d'equitat i operatius, que tradueixen un cert valor de judici sobre els resultats distributius (vegeu [8]).

A continuació introduïm les més considerades i fàcilment admissibles. Per obtenir més detalls i un conjunt complet de definicions matemàtiques dels principis d'equitat i les seves implicacions vegeu [17].

Igual tractament d'iguals. Implica que els agents amb demandes iguals han de rebre les mateixes quantitats; per a cada problema de demanda (c, E), i cada parell d'agents $\{i, j\} \subseteq N$, si $c_i = c_j$, llavors $\varphi_i(c, E) = \varphi_j(c, E)$.

Anonimat. Indica que la quantitat rebuda per un agent ha de dependre només de la seva demanda i no de la seva identitat; per cada (c, E), cada $\pi \in \Pi^N$, i cada agent $i \in N$, $\varphi_{\pi(i)}((c_{\pi(i)})_{i \in N}, E) = \varphi_i(c, E)$, on Π^N és el conjunt de totes les permutacions de N.

Preservació de l'ordre [1]. Aquesta propietat, requereix respectar l'ordre de les demandes, és a dir, si la demanda de l'agent i és almenys tan gran com la de l'agent j, aquest agent hauria de rebre i perdre almenys tant com l'agent j ho fa: per a cada (c, E) i cada parell d'agents $i, j \in N$ tals que $c_i \geq c_j$, llavors $\varphi_i(c, E) \geq \varphi_j(c, E)$, i $c_i - \varphi_i(c, E) \geq c_j - \varphi_j(c, E)$.

Monotonia dels recursos [3], [22]. Exigeix que, si augmenta la quantitat disponible per a repartir, cada agent no hauria d'estar pitjor: per a cada problema de demanda (c, E), cada $E' \in \mathbb{R}_+$ i cada agent $i \in N$, tal que $C > E' > E$, llavors $\varphi_i(c, E') \geq \varphi_i(c, E)$.

Súper-modularitat [4]. Estableix que els agents amb demandes més grans experimenten una reducció més gran de la quantitat a repartir: per a cada problema de demanda (c, E), cada $E' \in \mathbb{R}_+$ i cada parell d'agents $i, j \in N$ tals que $C > E' > E$ i $c_i \geq c_j$, llavors $\varphi_i(c, E') - \varphi_i(c, E) \geq \varphi_j(c, E') - \varphi_j(c, E)$.

Auto-dualitat [1]. Implica que el problema de dividir "el què hi ha disponible" o "el que falta" hauria de donar els mateixos repartiments: per a cada problema de demanda (c, E) i cada agent $i \in N$, $\varphi_i(c, E) = c_i - \varphi_i(c, \sum_{i \in N} c_i - E)$.

La Taula 1 ens mostra quins dels principis esmentats prèviament es compleixen per a les regles proposades.

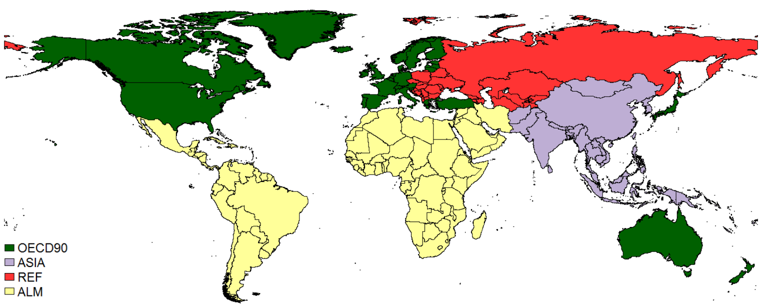
Principis / Regles	P	CEA	CEL	T
Igual tractament d'iguals	Sí	Sí	Sí	Sí
Anonimat	Sí	Sí	Sí	Sí
Preservació de l'ordre	Sí	Sí	Sí	Sí
Monotonia dels recursos	Sí	Sí	Sí	Sí
Súper-modularitat	Sí	Sí	Sí	Sí
Auto-dualitat	Sí	No	No	Sí

Taula 1: **Propietats i regles.** La taula mostra els principis que compleixen les regles considerades. Cada columna correspon a una regla, mentre que cada fila correspon a un principi proposat. Els resultats d' aquesta taula es poden trobar a [21].

A continuació presentem un problema de demanda real on es pot aplicar aquesta metodologia.

5 Aplicació a la distribució de les emissions de CO_2

Si superem el límit de 1440 Gt (gigatones) de CO_2 acumulat durant el període 2000–2050 tenim un 50% de probabilitats d'excedir els 2°C de temperatura mitjana [12]. S'estima que les emissions acumulades de CO_2 en aquest període estaran entre 1758 i 2736 Gt (IPCC 2000). Considerem quatre grups de països, típicament considerats als models de canvi climàtic que són: els països de la OECD 1990 (OECD90), Asia (ASIA), països desenvolupats del nord est (REF) i el darrer grup Àfrica i Amèrica Llatina (ALM).



En aquest cas el recurs a dividir entre aquests quatre grups de països és la quantitat de carbó disponible en cada escenari de risc, és a dir la disponibilitat de Gt de CO_2 en cada un dels tres escenaris que considerem depenent de les probabilitats d'excedir els dos graus de temperatura mitjana. Els escenaris són:

Escenari 1: E=1440 Gt i 50% de probabilitat d'excedir els dos graus.

Escenari 2: E=1000 Gt i 25% de probabilitat d'excedir els dos graus.

Escenari 3: E=745 Gt i 0% de probabilitat d'excedir els dos graus.

Per calcular la demanda de cada grup de països fem una projecció de les emissions fetes fins ara i sumem les emissions màximes estimades fins al 2050. D'aquesta manera obtenim que les demandes de Gt de CO_2 per a cada grup són: REF, $c_1 = 300.36$; ALM, $c_2 = 618.78$; OECD90, $c_3 = 768.47$ i ASIA, $c_4 = 1048.57$.

Observem que en els tres escenaris considerats $\sum c_j = 2,736 > E$, per tant sempre tenim un problema de demanda. Apliquem les quatre regles que hem vist anteriorment en cada un dels escenaris i obtenim els repartiments que podem veure a la Taula 2.

Demandes: REF=300.36; ALM=618.78; OECD90=768.47; ASIA=1048.57					
		P	CEA	CEL	T
E=$1,440Gt$ CO_2 (50%)	REF	158.07	300.36	0	150.18
	ALM	325.65	379.88	286.84	309.39
	OECD90	404.43	379.88	436.53	384.24
	ASIA	551.84	379.88	716.63	596.2
E=$1,000Gt$ CO_2 (25%)	REF	109.77	250	0	150.18
	ALM	226.15	250	140.17	283.27
	OECD90	280.86	250	289.86	283.27
	ASIA	383.22	250	569.96	283.27
E=$745Gt$ CO_2 (0%)	REF	81.78	186.25	0	150.18
	ALM	168.48	186.25	55.17	198.27
	OECD90	209.24	186.25	204.86	198.27
	ASIA	285.5	186.25	484.96	198.27

Taula 2: **Distribució de les emissions de CO_2 acumulades.** Entre parèntesi tenim la probabilitat d'excedir els 2°C [12]. A les files tenim les distribucions per a cada un dels quatre grups de països i les columnes mostren les distribucions recomanades per les regles a cada grup.

A continuació, mirem quins son els principis generalment considerats rellevants que es comporten de manera natural en cada context i mirem si es satisfan per a les quatre regles que hem definit. En el nostre cas, si considerem els principis que hem definit anteriorment, mirant la Taula 1 veiem que la Talmud és l'única regla que compleix totes les propietats desitjades i per tant és la que s'adapta millor a aquest problema. En alguns casos podem trobar un conjunt de propietats que ens permeti assegurar que no tant sols son satisfetes per la regla sinó que la regla escollida és l'única que les satisfà aquest conjunt de propietats[5].

Referències

[1] Aumann, R. J i Maschler, M., 1985. Game Theoretic Analysis of a bankruptcy from the Talmud. Journal of Economic Theory 36, 195–213.

[2] Chen, S., 2015. Systematic favorability in claims problems with indivisibilities. Social Choice and Welfare 44 (2), 283–300.

[3] Curiel, J., Maschler, M. i Tijs, S., 1987. Bankruptcy games. Zeitschrift für Operations Research 31, A143–A159.

[4] Dagan, N., Serrano, R. i Volij, O., 1997. A non-cooperative view of consistent bankruptcy rules. Games and Economic Behavior 18, 55–72.

[5] Duro, J. A., Giménez-Gómez, J.-M., Vilella, C., 2020. The allocation of co2 emissions as a claims problem. Energy Economics, 104652.

[6] Gibbons, R., 1993. Un primer curso de teoría de juegos. Antoni Bosch Editor.

[7] Giménez-Gómez, J.-M., Teixidó-Figueras, J., Vilella, C., 2016. The global carbon budget: a conflicting claims problem. Climatic Change, 1–11.

[8] Herrero, C. i Villar, A., 2001. The three musketeers: four classical solutions to bankruptcy problems. Mathematical Social Sciences 42 (3), 307–328.

[9] Herrero, C. i Martínez, R., 2004. Egalitarian rules in claims problems with indivisible goods. A Discusión. w.p.

[10] Iñarra, E., Skonhoft, A., 2008. Restoring a fish stock: a dynamic bankruptcy problem. Land Economics 84 (2), 327–339.

[11] Maimoindes, M., 12th Century. Book of Judgements, (translated by Rabbi Elihahu Touger, 2000). Moznaim Publishing Corporation, New York; Jerusalem.

[12] Meinshausen, M., Meinshausen, N., Hare, W., Raper, S. C., Frieler, K., Knutti, R., Frame, D. J., Allen, M. R., 2009. Greenhouse-gas emission targets for limiting global warming to 2 c. Nature 458 (7242), 1158–1162.

[13] Morgenstern, O. i Von Neumann, J., 1953. Theory of games and economic behavior. Princeton University Press.

[5] Per a més informació sobre caracteritzacions de les regles es pot consultar [21].

[14] Moulin, H., 2000. Priority Rules and Other Asymmetric Rationing Methods. Econometrica 68 (3), 643–684.

[15] O'Neill, B., 1982. A problem of rights arbitration from the Talmud. Mathematical Social Sciences 2 (4), 345–371.

[16] Rafels, C., Izquierdo, J. M., Marín, J., Martínez de Albéniz, F., Nuñez, M., Ybern, N., 1999. Jocs cooperatius i aplicacions econòmiques. Vol. 31. Edicions Universitat Barcelona.

[17] Rose, A., Stevens, B., Edmonds, J. i Wise, M., 1998. International equity and differentiation in global warming policy. Environmental and Resource Economics 12 (1), 25–51.

[18] Solís-Baltodano, M. J., Vilella, C., Giménez-Gómez, J. M., 2019. The catalan health budget: a conflicting claims approach. Hacienda Pública Española (228), 35–53.

[19] Sánchez, M. E., Vidal-Puga, J. J., 2014. Juegos coalicionales. Servizo de Publicacións da Universidade de Vigo.

[20] Thomson, W., 2015. Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: an update. Mathematical Social Sciences.

[21] Thomson, W., 2019. How to Divide When There Isn't Enough. Vol. 62. Cambridge University Press.

[22] Young, P., 1987. On dividing an amount according to individual claims or liabilities. Mathematics of Operations Research 12, 198–414.

José Manuel Giménez-Gómez
Dept. d'Economia
Univ. Rovira i Virgili
josemanuel.gimenez@urv.cat

Cori Vilella-Bach
Dpt. de Gestió d'Empreses
Univ. Rovira i Virgili
cori.vilella@urv.cat

Publicat el 7 d'abril de 2021