

## Iteració, capicues i matemàtiques

Armengol Gasull

L'objectiu principal d'aquest treball és il·lustrar la presència dels capicues en diferents problemes matemàtics. Potser la relació més impactant apareix quan comprovem que un cert *procediment iteratiu* fa que començant amb quasi qualsevol número natural, acabem anant a parar a un número capicua.

Per tal d'explicar a què ens referim, dividirem aquesta nota en dues parts. En la primera explicarem, via diversos exemples, què volem dir quan parlem d'iterar, mentre que la segona part conté els principals objectius del nostre escrit. Aquests són parlar del procediment iteratiu il·lustrat en aquesta plana i també explorar altres connexions entre les matemàtiques i els capicues. Aquestes involucraràn per exemple els nombres primers, els quadrats màgics o els nombres de Fibonacci.

Acabarem el treball amb un recull de frases palindròmiques (o capicua) en català i castellà, extretes de diverses fonts. El criteri principal de la tria ha estat que les frases siguin el més naturals possible. Algunes d'elles s'han il·lustrat gràficament.

Com que aquest treball s'ocupa tant de palíndroms com de matemàtiques hem cercat també frases palindròmiques que parlin de matemàtiques i només n'hem trobat una en català: *a cita metamatemàtica, cita metamatemàtica*, que és una mica artificial, una en castellà: *rápido, di par*, i tres en anglès: *never odd or even, trapeze part* o potser la millor, *I prefer pi*. Parlant del tema amb el meu amic Toni Guillamon, matemàtic i palindromista, me n'ha fet arribar una de seva en castellà: *la nota, ya ve una cita metamatemàtica nueva y atonal*. El meu col·lega italià Marco Sabatini n'ha construït una en la seva llengua, una mica més tècnica, però que no puc deixar d'esmentar: *EDO non ODE*. Aquesta

**87**

**+ 78**

---

**165**

**+ 561**

---

**726**

**+ 627**

---

**1353**

**+ 3531**

---

**4884**

frase és una defensa de fer la ciència en la llengua pròpia ja que EDO i ODE són els acrònims en italià (o català) i anglès, respectivament, d'*equacions diferencials ordinàries*, que és el nostre principal tema de recerca.

I prefer pi

$\pi$

never odd or even

Aquest treball ha sorgit a partir de la preparació de la nota curta *Quasi tots els camins porten a un capicua* que acaba d'aparèixer al volum 130 de la revista del Club Palindromista Internacional, *Semagames*.

## Què és iterar?

*Iterar* és una manera sistemàtica de procedir que permet resoldre tant qüestions matemàtiques, com fer models de la realitat per intentar predir el futur. Vegem-ne uns quants exemples.

Potser molts dels lectors recorden que a l'escola ens explicaven com calcular arrels quadrades. Si no ho recordeu, no patiu. Aquí ho farem d'una altra manera. Veurem com calcular  $\sqrt{10}$ , usant iteracions. És a dir, buscarem un valor, anomenem-lo  $y$ , de manera que  $y^2 = 10$ . Per a calcular  $y$ , el que fem és el següent procediment:

- Definim una funció associada al 10. En aquest cas,  $f(x) = \frac{x^2+10}{2x}$ .
- Prenem una llavor inicial propera a  $\sqrt{10}$ . Per exemple 3, ja que  $3^2 = 9$ .
- Iterem  $f$ , començant pel valor 3, és a dir, calculem:  $3 \rightarrow f(3) \rightarrow f(f(3)) = f^2(3) \rightarrow f(f(f(3))) = f^3(3) \rightarrow \dots \rightarrow f^k(3) \rightarrow \dots$

Aleshores, resulta que els valors que anem obtenint s'acosten cada vegada més a  $\sqrt{10}$ . Vegem-ho: tenim que  $f(3) = \frac{9+10}{6} = \frac{19}{6}$ ,  $f^2(3) = f\left(\frac{19}{6}\right) = \frac{\frac{361}{36}+10}{\frac{38}{6}} = \frac{\frac{721}{36}}{\frac{19}{3}} = \frac{721}{228}$ .

Si continuem, obtenim les fraccions

$$3 \rightarrow \frac{19}{6} \rightarrow \frac{721}{228} \rightarrow \frac{1039681}{328776} \rightarrow \frac{2161873163521}{683644320912} \rightarrow \dots$$

que aproximadament valen

$$3 \rightarrow 3.166\dots \rightarrow 3.16228\dots \rightarrow 3.1622776601698\dots \\ \rightarrow 3.16227766016837933199\dots \rightarrow \dots$$

El darrer valor ja té més de 20 xifres decimals de  $\sqrt{10}$  correctes!

El secret del funcionament d'aquest procediment està en la tria de la funció  $f$ . D'una manera semblant, per a calcular  $\sqrt{a}$  hauríem d'agafar  $f(x) = \frac{x^2+a}{2x}$ . A continuació expliquem d'on surt aquesta  $f$  màgica.

La iteració donada per  $f(x) = \frac{x^2+a}{2x}$  s'obté de la següent idea geomètrica i intuïtiva: el valor  $\sqrt{a}$  correspon al costat d'un quadrat que té àrea  $a$ . Si construïm a ull aquest quadrat, imposant que tingui aquesta àrea, el més probable és que obtinguem un rectangle. Si un dels costats d'aquest rectangle és  $x$ , l'altre haurà de ser  $\frac{a}{x}$ , ja que el seu producte és  $a$ . Si el resultat no és realment un quadrat, el que podem fer per aconseguir que s'acosti més a ser-ho, és prendre un nou costat que sigui la mitjana dels dos costats del rectangle, és a dir amb un costat de mida

$$\frac{x + \frac{a}{x}}{2} = \frac{x^2 + a}{2x} = f(x),$$

tal i com volíem veure. De manera semblant, per a calcular l'arrel cúbica d' $a$ ,  $\sqrt[3]{a}$ , haurien d'iterar la funció  $f(x) = \frac{2x^3+a}{3x^2}$ , que correspon a fer la mitjana dels tres costats de mida  $x, x$  i  $\frac{a}{x^2}$  d'un paral·lelepípede, que té volum  $a$ , i es pot interpretar com l'intent de construir un cub de volum  $a$ , amb costat de mida  $\sqrt[3]{a}$ .

Més tècnicament, aquest procediment d'iteració, en un context molt més general, es coneix com a *mètode de Newton*, i és degut al cèlebre físic, matemàtic i filòsof, Isaac Newton (1642-1727). Però de fet, el babilonis ja fa més de 4000 anys calculaven arrels quadrades usant aquesta idea.

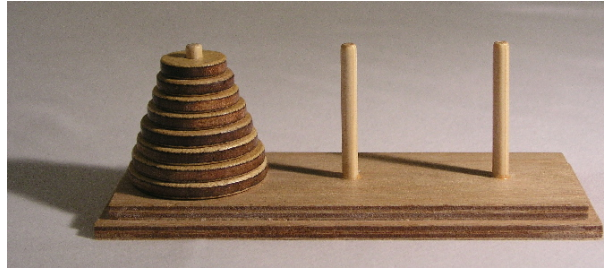
El segon exemple està basat en un puzzle força divertit, anomenat *puzzle de les torres de Hanoi*, introduït pel matemàtic francès Édouard Lucas l'any 1883, i que també és usat sistemàticament a molts cursos de programació per motivar als alumnes. Aquest puzzle consisteix en 3 pals i  $n$  discs de diferents mides, que es poden moure d'un pal a un altre. El puzzle comença amb els discs fent una torre com a la figura (en la qual  $n = 8$ ) i l'objectiu és traslladar aquesta torre al pal de la dreta, movent cada vegada només un disc i seguint les regles següents:

- Cada moviment consisteix en agafar un disc dels de sobre i posar-lo en un pal diferent.
- Cada disc ha de estar a sobre de discs més grans o sobre la base, en un dels pals.

Si anomenem  $M_n$  al mínim nombre de moviments necessaris per a resoldre el puzzle, veurem que  $M_n = f^n(1)$ , on  $f(x) = 2x + 1$ , és a dir que els successius valors de  $M_n$  són

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 15 \rightarrow 31 \rightarrow 63 \rightarrow 127 \rightarrow 255,$$

i per tant es necessitaran com a mínim 255 moviments per a resoldre el puzzle de la figura. Si no ho heu intentat mai, us aconsello que ho proveu. És un



puzle molt relaxant. De fet, calculant una mica es pot veure que, en general,  $M_n = 2^n - 1$ .

És clar que si  $n = 1$ , aleshores  $M_1 = 1$ , ja que només cal fer un moviment, que consisteix en agafar l'únic disc que hi ha al pal de l'esquerra i posar-lo al pal de la dreta. Si  $n = 2$ , veiem que 3 moviments són suficients:

- Moviment 1: Passem el disc de sobre del pal de l'esquerra al pal del mig.
- Moviment 2: Passem el disc que queda del pal de l'esquerra al pal de la dreta.
- Moviment 3: Finalment, passem el disc del pal del mig a sobre del disc que hi ha al pal de la dreta.

Per resoldre el cas general es procedeix d'una manera que se sol anomenar *inductiva*. Aquesta consisteix en trobar  $M_n$  suposant que ja coneixem  $M_{n-1}$ . Així, per saber quan val  $M_n$ , és clar que el primer que hem de fer és moure els  $n - 1$  discs de sobre del pal de l'esquerra al pal del mig (necessitem  $M_{n-1}$  moviments). En segon lloc, hem d'agafar el disc més gran que ha quedat al pal de l'esquerra, i posar-lo al pal de la dreta. Finalment, hem d'agafar la torre amb  $n - 1$  discs que hi ha al del mig, i passar-la al pal de la dreta, fet que necessita de nou  $M_{n-1}$  moviments. En resum,

$$M_n = M_{n-1} + 1 + M_{n-1} = 2M_{n-1} + 1 = f(M_{n-1}),$$

tal i com volíem veure.

El mateix Lucas, per ambientar el puzle, va inventar la següent llegenda: "Al gran temple de Benarés hi ha tres grans agulles. En una d'aquestes, un déu va posar als inicis dels temps, 64 discs d'or, tots de mida diferent, formant una torre com la de la figura. Nit i dia, els monjos del temple treballen movent els discos sense desviar-se de les regles immutables imposades pels déus. Quan hagin aconseguit traslladar tota la torre a la tercera agulla, arribarà la fi del món".

Si en lloc de ser una llegenda, fos una realitat, podríem estar ben tranquils ja que per fer  $M_{64} = 2^{64} - 1$  moviments, per molt ràpid que anessin els monjos, trigarien un temps que fins i tot costa d'imaginar.

Continuem amb un model basat en una iteració que estudia la població de peixos d'un llac. Per això farem les següents suposicions:

- Al principi, hi ha 1000 peixos al llac.
- Cada mes hi ha un 20% menys de peixos al llac, tenint en compte tant els que neixen, com els que es moren, com els que són pescats.
- Per evitar l'extinció dels peixos, a final de mes, les autoritats aboquen en el llac 100 peixos provinents d'una piscifactoria.

L'objectiu és saber com evolucionarà la població total de peixos al llac. Observem que si  $x$  denota la població total de peixos al principi d'un mes, al mes següent hi quedaran un 20% menys de peixos, és a dir  $\frac{80x}{100} = 0.8x$ , més els 100 peixos afegits a final de mes. En altres paraules, hi haurà  $f(x) = 0.8x + 100$  peixos al llac. Per tant, per saber com evolucionarà la població en mig any el que haurem de fer és iterar sis cops la funció  $f(x)$ . Tenim que:

$$1000 \rightarrow 900 \rightarrow 820 \rightarrow 756 \rightarrow 704.8 \rightarrow 663.84 \rightarrow 631.072$$

Iterant una mica més es pot veure que després de 3 anys la població s'estabilitzarà en una població de 500 peixos. De fet,  $f(500) = 500$ .

Models més realistes de poblacions s'obtenen prenent funcions d'iteració  $f$  més complicades i són usats en Ecologia per a predir el comportament de les poblacions i intentar evitar tant l'extinció d'algunes espècies com un creixement desmesurat d'altres (les anomenades plagues).

Acabarem aquesta secció d'exemples amb una conjectura famosa. Recordem que una conjectura és un resultat que quasi tots els especialistes en el tema que tracta pensen que hauria de ser cert, però tal que cap d'ells no ha pogut ni provar-lo ni desmentir-lo. A més, si la conjectura és susceptible de ser estudiada amb l'ajut d'ordinadors i programes, s'ha pogut verificar fins on poden arribar els ordinadors més potents disponibles fins al moment.

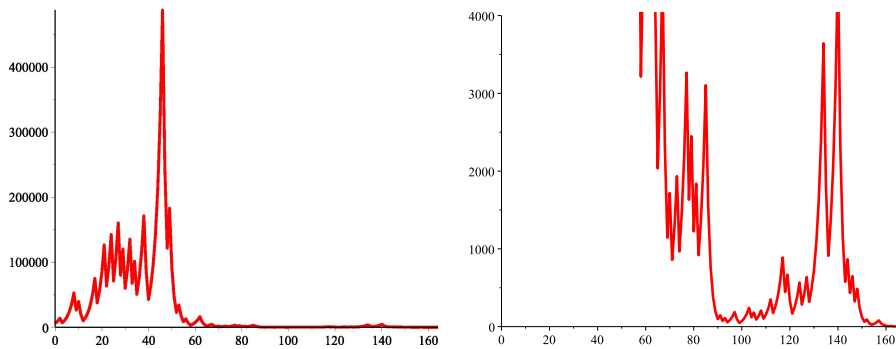
Aquesta conjectura, coneguda com a *Conjectura  $3x+1$* , afirma que si considerem una funció  $f$ , definida dels números naturals als números naturals, que val  $(3x+1)/2$  si  $x$  és senar i val  $x/2$  si  $x$  és parell, aleshores començant per a qualsevol valor natural positiu  $x_0$ , la successió  $x_n = f^n(x_0)$  acaba sent  $2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots$

Per exemple, el que afirma la conjectura és cert si comencem amb 11 ja que la successió és

$$11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots$$

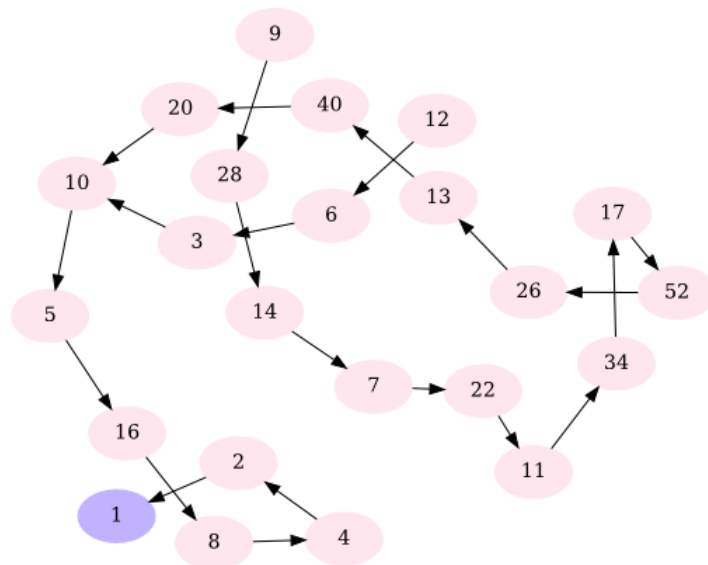
En llenguatge dinàmic, la conjectura ens diu que l'òrbita de tota condició inicial natural acaba en l'òrbita 2-periòdica  $\{1, 2\}$ . A la figura següent es mostren els 164 iterats que es necessiten per arribar a 2, si es comença per 6171 i una ampliació dels iterats a partir del 60. De fet, per primer cop

$x_{164} = 2$  i el valor més allunyat és  $x_{46} = 487700$ . Se sap que el resultat és cert per a tot  $x_0$  menor que  $87 \times 2^{60}$ . Hi ha molta més informació als diferents *surveys* escrits sobre el tema. Per exemple podeu consultar el de J. C. Lagarias, *The Ultimate challenge: the  $3x + 1$  problem*, publicat per l'*American Mathematical Society* l'any 2010. Segons l'autor "Aquesta conjectura és un problema extraordinàriament difícil, completament fora de l'abast de les matemàtiques d'avui en dia".



De vegades es presenta una versió equivalent de la conjectura en què el  $(3x + 1)/2$  es canvia simplement per un  $3x + 1$  en la definició de  $f$ . Aquesta equivalència es deguda a al fet que  $3x + 1$  és sempre parell. És clar que aleshores la conjectura té un enunciat equivalent que afirma que tota successió acaba fent  $4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots$ ; és a dir, tota condició inicial natural acaba en l'òrbita 3-periòdica  $\{1, 2, 4\}$ .

Una il·lustració extreta de la plana web d'en Martin Thoma d'aquesta versió equivalent de la conjectura es mostra a la figura següent:



Sembla ser que la primera persona que va estudiar aquesta qüestió va ser el matemàtic alemany Lothar Collatz, als voltants de 1930. També es coneix com conjectura de Collatz, conjectura d'Ulam, problema de Kakutani o problema de Syracuse.

El resultat no és sempre cert si  $x_0$  és un enter no positiu. Començant amb 0,  $-1$ ,  $-5$  o  $-17$  apareixen quatre comportaments finals diferents. Per exemple tenim

$$-5 \rightarrow -7 \rightarrow -10 \rightarrow -5 \rightarrow -7 \rightarrow -10 \rightarrow \dots$$

De moment no s'han trobat altres comportaments finals.

## Una iteració que acaba quasi sempre en un capicua

Ara ja estem a punt d'ocupar-nos d'un dels fets principals que ha motivat l'escriptura d'aquesta nota. Enunciarem aquest fet també en forma de *conjectura*. Per enunciar la conjectura usarem la funció *rever*, que actua sobre els números naturals i senzillament el que fa és girar l'ordre de les seves xifres. Així, per exemple,

$$\text{rever}(123) = 321 \quad \text{o} \quad \text{rever}(37905) = 50973.$$

És divertit observar que el nom de la funció és un palíndrom en si mateix.

**Conjectura del 196.** *Considerem la funció  $f(n) = n + \text{rever}(n)$ . Aleshores, per a quasi tota llavor inicial natural  $n$  hi ha un número natural  $k$ , de manera que si fem*

$$n \rightarrow f(n) \rightarrow f(f(n)) = f^2(n) \rightarrow f^3(n) \rightarrow \dots \rightarrow f^k(n),$$

*aleshores  $f^k(n)$  és capicua. A més, el valor més petit per al qual això no passa és  $n = 196$ .*

Comencem amb un cas senzill per entendre millor l'enunciat. Per exemple, si prenem  $n = 183$ ,  $f(183) = 183 + 381 = 564$ ,  $f^2(183) = f(564) = 564 + 465 = 1029$ , i en general tenim

$$183 \rightarrow 564 \rightarrow 1029 \rightarrow 1029 + 9201 = 10230 \rightarrow 10230 + 3201 = 13431,$$

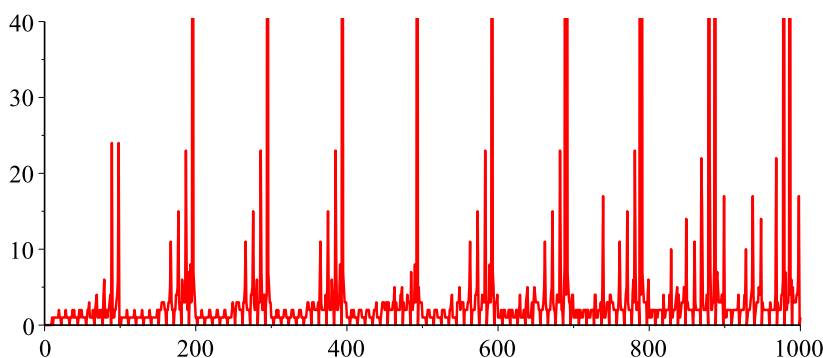
que ja és capicua i per tant  $k = 4$ . Mireu també la il·lustració de la primera plana. Si es comença per  $n = 89$ , es necessiten 24 iteracions (és a dir  $k = 24$ ) per trobar un valor capicua, que acaba sent 8813200023188.

Per altra banda, resulta que si es comença amb 196 encara no s'ha trobat cap iterat que sigui capicua, tot i els milions que se n'han calculat, consulteu per exemple el treball de Y. Nishiyama, *Numerical palindromes and the 196 problem*, *International Journal of Pure and Applied Mathematics* del 2012. Es desconeix qui va ser el primer que va estudiar aquesta qüestió i la referència més antiga és el treball de D. Lehmer, *Sujets d'étude* publicat a la

revista belga de divulgació matemàtica *Sphinx* l'any 1938. La qüestió es va tornar a popularitzar a partir del treball de TC. W. Trigg, *Palindromes by Addition*, *Mathematics Magazine* de l'any 1967.

En anglès, els números  $n$  tals que cap dels seus iterats és capicua s'anomenen de vegades *números de Lychrel* (un anagrama de *Cheryl*, nom de la parella del matemàtic nord-americà Wade Van Landingham que els va estudiar). Veiem a continuació que els números menors que 1000 que podrien ser de Lychrel són

196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978, 986.



A la figura anterior fem una gràfica que posa sobre cada número natural (que es pren com a valor inicial quan iterem per  $f$ ) una barra d'alçada el mínim nombre de vegades  $k$  que hem d'iterar  $f$  per arribar a un valor capicua, o 40 (triat per raons estètiques) en cas que, després de 1000 iteracions, no haguem trobat un capicua. Observi's, que excepte els 13 valors de la llista anterior (que corresponen als pics més alts de la gràfica), fent iteracions per  $f$  com a molt 24 cops, ja hem obtingut un resultat capicua. L'autor agraeix en Toni Guillamon per compartir el codi que permet generar aquesta figura.

En resum, avui en dia no es coneix cap número de Lychrel en base 10 i el candidat més petit a ser-ho és el 196.

Per altra banda, sí que se sap que hi ha números de Lychrel en base 2. A continuació, i per acabar, comencem recordant breument com s'escriuen els números en base 2 i mostrem un número de Lychrel en aquesta base.

Per exemple, el número 15869 és l'expressió abreujada en base 10 d'ell mateix ja que  $15869 = 1 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 9 \times 10^0$ , on recordem que  $10^0 = 1$ . Així, el número 22, en base 10 s'escriu com  $22 = 2 \times 10^1 + 2 \times 10^0$ , mentre que el mateix número en base 2 s'escriu com  $10110_2$ , ja que  $10110_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 16 + 4 + 2 = 22$ .

Si comencem amb  $10110_2$ , i fem la iteració corresponent a  $f$ , però en base 2, tenim que  $f^4(n) = 10110100_2$ , ja que

$$10110_2 \rightarrow 10110_2 + 01101_2 = 100011_2 \rightarrow 1010100_2 \rightarrow 1101001_2 \rightarrow 10110100_2,$$



$f^8(n) = 1011101000_2, f^{12}(n) = 101111010000_2$ . En general, A. Brousseau demostra l'any 1969 a *Palindromes by Addition in Base Two*, publicat a *Mathematics Magazine*, que després de  $4m$  iteracions s'arriba a un número que comença en 10, després té  $m + 1$  uns, segueix un 01 i acaba amb  $m + 1$  zeros, i tot el procés mai passa per cap capicua. En resum,  $10110_2$  és un número de Lychrel ja que  $f^k(10110_2)$  no és capicua per a cap valor de  $k$ .

## Capicues en altres problemes matemàtics

Quan un s'interessa per les matemàtiques i pels capicues, a part de la qüestió tractada a la secció anterior, apareixen moltes altres preguntes naturals que involucren els dos temes. Sense ànims de ser exhaustius, en aquesta darrera secció parlarem de la relació entre el nombres capicua i diferents conceptes: nombres primers, quadrats màgics, nombres de Fibonacci i de Lucas, les potències d'un número, capicues expressats en bases diferents, la descomposició de números en sumes de capicues i igualtats palindròmiques. També es demostrarà que la suma dels inversos de tots els capicues és finita i es calcularà una aproximació del valor d'aquesta suma. Un article clàssic sobre el tema, del gran divulgador Martin Gardner, és *Backward run numbers, letters, words and sentences until boggles the mind*, publicat el 1970 al volum 223 del *Scientific American*, a la secció *Mathematical Games*. Un de més modern és: *121, 404 et autres nombres palindromes*, del matemàtic i divulgador francès J.-P. Delahaye, publicat a *Pour la Science*, vol. 480 de l'any 2017. Vegeu també: <http://www.magic-squares.net/palindromes.htm>

### Capicues i primers.

Una primera pregunta natural és saber si hi ha infinits nombres primers que siguin al mateix temps capicues. Per exemple, els nombres primers capicua de més d'una xifra, més petits que 10000, són:

11, 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929.

Observem que l'únic valor de la llista amb dues xifres és 11. Demostrarem a continuació que l'únic nombre capicua primer amb un número parell de xifres és precisament el 11 i, de fet, el següent de la llista anterior és ja el 10301. La prova es basa en la següent afirmació: *tot nombre capicua, amb un número parell de xifres és divisible entre 11*. Anem a demostrar l'afirmació per nombres amb vuit xifres, que per tant s'escriuen com  $ABCDDCBA$ , amb  $0 \leq A, B, C, D \leq 9$ . La prova per al cas general es pot fer d'una manera similar i es deixa per al lector.

Comencem observant que  $1001 = 11 \times 91$ ,  $100001 = 11 \times 9091$  i finalment

que  $10000001 = 11 \times 90901$ . Per tant,

$$\begin{aligned} ABCDDCBA &= A \times 10000000 + B \times 1000000 + C \times 100000 + D \times 10000 \\ &\quad + D \times 1000 + C \times 100 + B \times 10 + A \\ &= A \times 10000001 + B \times 1000010 + C \times 100100 + D \times 11000 \\ &= 11 \times (A \times 90901 + B \times 10 \times 9091 + C \times 100 \times 91 \\ &\quad + D \times 1000) \end{aligned}$$

i com a conseqüència  $ABCDDCBA$  és divisible per 11, tal i com volíem veure.

A partir del treball de Banks, Hart i Sakata de 2004, *Almost all palindromes are composite*, publicat al *Mathematical Research Letters*, se sap que molt pocs nombres primers són capicua. Avui en dia el nombre primer capicua més gran conegut és

$$10^{474500} + 999 \times 10^{237249} + 1,$$

i té 474501 xifres. Potser el primer capicua més famós és  $1 \times 10^{30} + 666 \times 10^{14} + 1$ , és a dir

$$10000000000000066600000000000001,$$

que es coneix com primer de Belfegor, en honor d'un dimoni de les tradicions jueva i cristiana. La raó del nom és la superstició, ja que a la seva expressió apareixen dues vegades 13 zeros seguits, valor sovint associat amb la mala sort, i al mig té el número 666, conegut com el nombre de la bèstia, relacionat en numerologia amb el dimoni o amb l'Anticrist.

Un nombre primer  $p$  es diu que és un *primer de Germain* si  $S(p) = 2p + 1$  és també primer. Aquests nombres van ser considerats per primer cop per Marie-Sophie Germain, que va viure entre els segles XVIII i XIX. Germain va conjecturar que n'hi havia infinits, i aquesta conjectura encara no se sap si és certa o no. Per exemple, el número  $p = 11$  ho és ja que  $2 \times 11 + 1 = 23$  també és primer. Se'n coneixen de més de 380000 xifres. També és interessant investigar si hi ha infinits primers de Germain palindròmics. Per exemple, 191 ho és ja que  $2 \times 191 + 1 = 383$  és primer. El mateix passa amb 39493939493, ja que  $2 \times 39493939493 + 1 = 78987878987$  és primer.

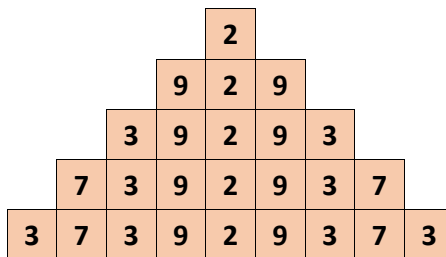
Si  $p$ ,  $S(p)$  i  $S(S(p))$  són tres números primers, aleshores es diu que tenim una *cadena de Cunningham de mida 3*, en honor al matemàtic britànic Allan Cunningham, que va viure a cavall dels segles XIX i XX. La cadena més gran coneguda, en la qual els tres números són capicua ve donada per

$$\begin{aligned} &19091918181818181919091, \quad 38183836363636363838183 \\ &\text{i } 76367672727272727676367. \end{aligned}$$

Dintre dels nombres primers n'hi ha uns que són molt especials que s'anomenen *primers absoluts*, o també *primers permutables*. Aquests són els

primers de més d'una xifra tals que tant el propi número com qualsevol altre construït permutant totes les seves xifres són primers. N'hi ha de dos tipus: els que tenen totes les xifres iguals i el que no. És clar que els de la primera classe només poden estar formats per tires de  $n$  números 1 seguits. Així són primers 11 o 111111111111111111. De fet, aquestes tirallongues d'1's s'anomenen *repunits* i coincideixen amb  $(10^n - 1)/9$ . Els únics primers que es coneixen corresponen a  $n = 2, 19, 23, 317$  i 1031. Altres candidats a ser repunits primers corresponen a  $n = 49081$  o 86453, però encara no s'ha provat. De la segona classe de primers permutables només es coneixen el 13, 17, 37, 79, 113, 199, 337 i les seves permutacions de xifres. Per exemple, 113, 131 i 311 són els tres nombres primers. En particular, només es coneixen tres nombres primers capicues i permutables, amb xifres no totes igual: 131, 373 i 919.

Acabem aquesta secció amb la il·lustració de la figura següent. És el que s'anomena piràmide de nombres primers capicua. S'ha extret del treball *Palindromic prime pyramids*, publicat per Honaker i Caldwell l'any 2000 al *Journal of Recreational Mathematics*.



Hi ha piràmides similars més altes però tals que o bé tenen un primer de més xifres a dalt de tot, o bé l'increment del número de xifres a cada nivell és més gran que 2.

### Capicues i nombres de Fibonacci.

La presència de valors capicua en altres conjunts de nombres famosos és també objecte d'estudi. Per exemple, si prenem els nombres de Fibonacci, definits com  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ , amb  $F_0 = F_1 = 1$ ; obtenim 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ... El capicua més gran que es coneix és 55 i es pensa que potser no n'hi haurà cap de més gran, però aquest fet, cas de ser cert, sembla molt difícil de demostrar. De manera semblant la gent es pregunta sobre la presència de capicues a la successió de nombres de Lucas. Aquests nombres, que es denoten per  $L_n$ , venen donats també per la recurrència  $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ , però en aquest cas,  $L_0 = 2$  i  $L_1 = 1$ . Per tant tenim la successió 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ... Després del 11, el següent capicua és  $L_{25} = 167761$  i també es pensa que serà l'últim de la llista. És divertit observar que  $L_n = F_{n-2} + F_n$ .

### Capicues i potències.

És fàcil provar que hi ha infinits capicua de la forma  $n^2$ : n'hi ha prou amb observar que  $(10^m + 1)^2 = 10^{2m} + 2 \times 10^m + 1$ . Així,  $10001^2 = 100020001$ . Tampoc és difícil trobar-ne d'altres en què  $n$  no és capicua. Per exemple,  $26^2 = 676$ ,  $143^2 = 24442$  o  $22865^2 = 522808225$ . N'hi de molt més grans, per exemple

$$3069306930693^2 = 9420645034800084305460249.$$

No passa pas el mateix amb els cubs  $n^3$ . De fet, 2201 és l'únic número no capicua que es coneix tal que el seu cub és capicua: es té que  $2201^3 = 10662526601$ . Tots el números de la forma  $n^4$  capicues que es coneixen provenen d'un número de la forma  $n = 100 \cdots 001$ , que també és capicua. Per exemple,  $(10001)^4 = 10004000600040001$ . No es coneixen nombres capicua de la forma  $n^k$ , amb  $n > 1$  i  $k \geq 5$ , i es pensa que no n'hi ha, vegeu per exemple el treball de Simmons, *On palindromic sequences of non-palindromic numbers* publicat al *Journal of Recreational Mathematics* l'any 1972.

### Descomposició de números com a suma de capicues.

Goldbach, al segle XVIII, va proposar demostrar que tot nombre natural més gran que 5 és suma de tres nombres primers. Ràpidament Euler li va respondre que la seva conjectura era conseqüència del que avui en dia es coneix com a Conjectura de Goldbach i que afirma que *tot nombre parell, més gran que 2, és suma de dos nombres primers*. Aquesta conjectura encara s'està intentant demostrar, però una qüestió molt semblant, que involucra nombres capicua en lloc de nombres primers, s'ha respost recentment. Els matemàtics Cilleruelo, Luca i Baxter, al treball *Every positive integer is a sum of three palindromes*, publicat al 2018 a la revista *Mathematics of Computation*, han demostrat el que diu el seu títol: *tot número natural es pot descomposar (sovint de més d'una manera) com a suma de tres números capicua*. Per exemple

$$2021 = 2002 + 11 + 8 \quad \text{o} \quad 3141592 = 2200022 + 926629 + 14941.$$

S'ha demostrat que hi ha infinits nombres naturals que no es poden posar com la suma de només dos capicues. Els més petits són:

$$21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 201, 1031, 1041, \dots$$

### Quadrats màgics de capicues.

Els quadrats màgics estan formats per  $n^2$  números naturals, tots diferents, distribuïts en una quadrícula  $n \times n$ , de manera que la suma de totes les seves

2	7	6	343	101	252	1771	2	141	88
9	5	1	141	232	323	3	121	959	919
4	3	8	212	363	121	151	878	44	929
						77	1001	858	66

columnes, files i diagonals principals val un mateix valor, que s'anomena constant de quadrat. La humanitat n'ha construït des de fa més de 5000 anys, i el més antic que es coneix és el de l'esquerra de la figura anterior, que té constant 15.

Estem interessats a construir quadrats màgics en els quals tant tots els seus elements com la seva constant siguin nombres capicua. El quadrat del mig ho compleix, ja que té constant 696 però tots coincidiríem en dir que és una mica artificial. El quadrat de la dreta sí que ens deixa satisfets. La seva constant és 2002. Un quadrat màgic més espectacular de mida  $8 \times 8$ , amb constant 4884, és el de la figura següent. Els sub-quadrats centrals de mides  $4 \times 4$  i  $6 \times 6$  són també màgics, amb constants respectives 2442 i 3663.

363	424	646	747	757	767	787	393
696	232	383	898	939	969	242	525
676	949	222	595	737	888	272	545
656	868	959	666	444	373	353	565
636	343	484	333	999	626	878	585
535	292	777	848	262	555	929	686
494	979	838	323	282	252	989	727
828	797	575	474	464	454	434	858

### Distància entre capicues.

El matemàtic francès contemporani Cédric Villani va popularitzar una qüestió divertida que involucra també als nombres capicua. Aquesta és: *Si prenem tots els nombres capicua amb exactament  $k$  xifres, quina és la distància mínima  $d_k$  entre tots ells?* La resposta és senzilla però una mica sorprenent.

La successió  $d_k$  és la següent: 1, 11, 10, 11, 11, ... Per comprovar-ho només cal llistar aquests capicues per cada  $k$  fixa. Per exemple, si  $k = 1$ , són: 1, 2, 3, 4, ..., 9 i per tant  $d_1 = 1$ . Si  $k = 2$ , són: 11, 22, 33, 44, ..., 99 i tenim que  $d_2 = 11$ . Per,  $k = 3$ , són: 101, 111, 121, ..., 989, 999 i  $d_3 = 10$ . Per  $k > 3$  sempre  $d_k = 11$  ja que per exemple,  $200 \cdots 002 - 199 \cdots 991 = 11$ .

### Capicues que són una mica més capicues.

És clar que l'expressió d'un número sigui capicua depèn de la base en què l'escrivim. Per exemple, 35 no és capicua quan es considera l'expressió normal en base 10, però l'expressió en base 6 sí que ho és ja que  $5 \times 6 + 5 = 35$  i, per tant,  $35_{10} = 55_6$ . Els nombres de més d'una xifra que tenen una expressió capicua en base 10 i que també la tenen en una altra base  $b$ , amb  $2 \leq b \leq 9$ , els hi direm *bi-capicues*. Per exemple, 99 o 121 ho són ja que

$$99_{10} = 1100011_2 \quad \text{i} \quad 121_{10} = 171_8.$$

També hi ha nombres *tri-capicues* com 292, 373 o 585 amb les expressions

$$292_{10} = 444_8 = 565_7, \quad 373_{10} = 454_9 = 565_8 \quad \text{o} \quad 585_{10} = 1111_8 = 1001001001_2.$$

No coneixem cap nombre que tingui una expressió capicua en base 10 i tres bases més, totes menors que 10. Quan es consideren bases  $b > 10$  la qüestió no és tan interessant ja que tot nombre natural  $n$  té una expressió capicua en base  $n - 1$ , donat que la igualtat  $n = 1 \times (n - 1) + 1$  fa que  $n_{10} = 11_{n-1}$ , i només té una xifra en totes les bases  $b > n$ .

### La suma dels inversos de tots els capicues.

A continuació ens ocuparem d'un problema de caire bastant diferent, que necessita una petita introducció i que involucrarà tots els nombres capicua. Més concretament, parlarem de la sèrie harmònica i les seves subsumes. Per tenir més informació sobre el tema, es pot consultar el treball de l'autor *Sumes harmòniques* publicat a *Materials Matemàtics* l'any 2017 i les seves referències. La sèrie harmònica consisteix en la suma infinita dels inversos de tots els nombres naturals, és a dir,

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Una primera pregunta natural és saber si la suma anterior és finita o val infinit (més tècnicament, en el primer cas es diu que la suma és *convergent* i en el segon que és *divergent*). Aquesta qüestió ja va ser resolta als voltants de 1350, pel filòsof francès Nicole Oresme. La suma és divergent i la prova

d'Oresme és basa en la següent idea:

$$\begin{aligned}
 S &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \cdots \\
 &> 1 + \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} + 8 \times \frac{1}{16} + \cdots \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots
 \end{aligned}$$

A partir d'aquest primer resultat els matemàtics s'han preguntat si la suma dels inversos de diferents tipus de nombres naturals són convergents o divergents. Una breu llista de casos considerats, per als quals el corresponent resultat és ben conegut, és:

- La suma dels inversos de tots els nombres primers és divergent. Aquest resultat va ser provat per Euler al 1737.
- La suma dels inversos de tots els nombres primers bessons és convergent. Aquest resultat va ser demostrat per Brun al 1919. Recordem que els primers bessons són les parelles de primers de la forma  $(p, p + 2)$ , com per exemple  $(3, 5)$ ,  $(11, 13)$ ,  $(137, 139)$  o  $(13931, 13933)$ .
- Per a tot  $k$  fixat, la suma dels inversos de tots els múltiples de  $k$  és divergent.
- La suma dels inversos de tots el quadrats és convergent. De fet Euler al 1734 va provar que

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

- La suma dels inversos de tots els números que no tenen cap 9 a la seva expressió és convergent. Aquest resultat va ser provat al 1914 per Kempner i també és cert si es canvia el 9 per qualsevol altra xifra.

Per tant, en el nostre context, és natural preguntar-se què passa si sumem els inversos de tots el nombres capicua. Veurem a continuació que aquesta suma és convergent. Més concretament, demostrarem que si l'anomenem

$$\Omega = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{22} + \cdots + \frac{1}{99} + \frac{1}{101} + \frac{1}{111} + \cdots + \frac{1}{989} + \frac{1}{999} + \cdots,$$

aleshores  $3.33 < \Omega < 3.52$ . De fet, altres autors ja han provat que  $\Omega = 3.3702832\dots$

Per fer la nostra prova definim  $\Omega_k$  com la suma dels inversos dels capicues d'exactament  $k$  xifres. Així,

$$\Omega_1 = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{9} = \frac{7129}{2520} \quad \text{i} \quad \Omega_2 = \frac{1}{11} + \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{99} = \frac{\Omega_1}{11} = \frac{7129}{27720}.$$

Per obtenir  $\Omega_3$  s'han de sumar 90 fraccions i s'arriba a un resultat amb numerador i denominador amb moltes xifres. En tot cas, després de molts càlculs s'obté que

$$\Omega_3 = \sum_{k=0}^9 \sum_{j=1}^9 \frac{1}{j \times 101 + k \times 10} = 0.204845 \dots$$

En resum, tenim que  $\Omega_{1,2,3} = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = 3.319 \dots$  Com que  $\Omega = \Omega_{1,2,3} + (\Omega_4 + \Omega_5) + (\Omega_6 + \Omega_7) + \dots$ , ara estudiarem els valors de les parelles  $\Omega_{2m} + \Omega_{2m+1}$  quan  $m = 2, 3, 4, 5, \dots$  Començarem per  $\Omega_4 + \Omega_5$ . Els capicues amb quatre xifres estan entre 1001 (el més petit) i 9999 (el més gran). A més n'hi ha exactament 90 ja que tots són de la forma  $ABBA$ , amb  $A$  una xifra qualsevol entre 1 i 9, i  $B$  també arbitrària, però entre 0 i 9. És a dir  $9 \times 10 = 90$  possibilitats. Per tant

$$\frac{9}{1000} = \frac{90}{10000} < 90 \times \frac{1}{9999} < \Omega_4 < 90 \times \frac{1}{1001} < \frac{90}{1000} = \frac{9}{100}.$$

De manera semblant, tenim que hi ha 900 capicues de 5 xifres ( $ABCBA$ ), i estan entre 10001 i 99999. Així,

$$\frac{9}{1000} = \frac{900}{100000} < 900 \times \frac{1}{99999} < \Omega_5 < 900 \times \frac{1}{10001} < \frac{900}{10000} = \frac{9}{100}.$$

Combinant els dos resultats obtenim que

$$\frac{9}{500} < \Omega_4 + \Omega_5 < \frac{9}{50}.$$

Amb una mica de paciència, i seguint les mateixes idees, s'obté que per a tot  $m \geq 2$ ,

$$\frac{9}{5 \times 10^m} < \Omega_{2m} + \Omega_{2m+1} < \frac{9}{5 \times 10^{m-1}}.$$

En resum,

$$\begin{aligned} \frac{9}{500} \times \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots\right) &= \frac{9}{5 \times 10^2} + \frac{9}{5 \times 10^3} + \frac{9}{5 \times 10^4} + \dots \\ &< (\Omega_4 + \Omega_5) + (\Omega_6 + \Omega_7) + (\Omega_8 + \Omega_9) + \dots \\ &< \frac{9}{5 \times 10^1} + \frac{9}{5 \times 10^2} + \frac{9}{5 \times 10^3} + \dots \\ &= \frac{9}{50} \times \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots\right). \end{aligned}$$



Usant que per a  $0 < r < 1$ ,  $1 + r + r^2 + r^3 + \dots = 1/(1 - r)$ , amb  $r = 1/10$ , obtenim

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots = \frac{10}{9}.$$

Per tant

$$0.02 = \frac{1}{50} < (\Omega_4 + \Omega_5) + (\Omega_6 + \Omega_7) + (\Omega_8 + \Omega_9) + \dots < \frac{1}{5} = 0.2.$$

En resum,

$$3.33 < 3.339\dots = \Omega_{1,2,3} + \frac{1}{50} < \Omega < \Omega_{1,2,3} + \frac{1}{5} = 3.519\dots < 3.52,$$

tal i com volíem demostrar.

### Palíndroms matemàtics.

L'última qüestió que tractem és la cerca d'igualtats matemàtiques correctes i no trivials, que coincideixen si les llegim d'esquerra a dreta o de dreta a esquerra. Anomenarem a aquestes relacions *igualtats palindròmiques* o també *palíndroms matemàtics*. N'hi ha de molt fàcils com  $12 \times 21 = 252 = 12 \times 21$  o  $124 \times 842 = 248 \times 421$ . De fet, si  $0 \leq A, B, C, D \leq 9$ , són tals que  $A \times C = B \times D$ , es compleix que  $AB \times CD = DC \times BA$ , ja que  $(10 \times A + B) \times (10 \times C + D) = (10 \times D + C) \times (10 \times B + A)$ .

Altres palíndroms matemàtics molt més interessants són

$$\begin{aligned} 2 \times 11 \times 121111121 &= 2664444662 = 121111121 \times 11 \times 2, \\ 134 \times 201 &= 26934 \quad \text{i} \quad 43962 = 102 \times 431, \\ 221 \times 312 &= 68952 \quad \text{i} \quad 25986 = 213 \times 122, \\ 77 \times 80088 &= 6166776 \quad \text{i} \quad 6776616 = 88008 \times 77, \\ 121112 \times 111112 &= 13456996544 \quad \text{i} \quad 44569965431 = 211111 \times 211121. \end{aligned}$$

Un treball dedicat a estudiar aquests tipus de palíndroms és *On polynomial pairs of integers* i va ser publicat per Ezerman, Meyer i Solé, l'any 2015 al *Journal of Integer Sequences*.

Els palíndroms matemàtics ens han animat a acabar aquest treball amb un recull de *frases palindròmiques*, o simplement *palíndroms*, tant en català com en castellà. De fet l'equivalent lingüístic als palíndroms matemàtics són els palíndroms. Els que presentem a continuació no són originals, i l'origen de molts d'ells es perd en el temps, tot i que n'hi ha alguns de força actuals. La seva tria és personal i, com ja hem comentat, basada en el fet que les frases siguin el més naturals possible.

## Apèndix 1: Palíndroms en català



Acabem aquesta secció amb uns quants palíndroms més. El lector interessat en saber-ne encara més pot consultar la recopilació d'en Jesús Lladó, *18081 Palíndroms catalans*, que es pot trobar a la plana del Club Palindromista Internacional. (<http://cpalindromistai.blogspot.com/2018/09/indice-de-semagames-1-120.html>)

A Dènia ve l'Eva i neda  
 A Gavà la gent nega la vaga  
 Ai, fa mal la màfia  
 A la babalà  
 Ànim: a casa camina!  
 Argentina, la lluna anul·la la nit negra  
 Arròs a la sorra

Atrapa'l, o l'aparta!  
 Atrofiada i forta  
 A treballar allà, Berta  
 Català a l'atac  
 Cita-la a l'àtic  
 El bo plau al poble  
 És així, ase!

És a la gorga groga l'ase  
 Futur brut. Uf!  
 Gram amarg  
 I ara rai  
 La veu que val  
 L'aconselles? No cal  
 L'atur brutal  
 Llet al clatell  
 Lúcid, irònic, i no ridícul

Meló verd, net i tendre volem  
 No saps pas on!  
 Reté l'èter  
 Se li veu que vil és  
 Sé on no és  
 Sénen té sis nens i set nenes  
 Sorollós so: lloros  
 Té tara: baratet!  
 Tip, el pastor ara farà rots a ple pit

## Apèndix 2: Palíndroms en castellà



Continuem amb una petita selecció de palíndroms en castellà. Per saber-ne més es pot consultar la web d'en Víctor Carbajo (<http://www.carbajo.net/varios/pal.html>) i el seu treball *232232 Palíndromos españoles*.

¡Ámame, mamá! ¿Educas? ¡Sacude!	Ojo rojo Oso baboso	Severo revés Sin anís
Abajo me mojaba Amigo, no gima Amo retratarte Roma Añora la roña Ataca o acata Ateo poco poeta Avisa si va	Edipo lo pide La Roma amoral Nos ideó Edison No subas, abusón Odié lo leído Raro ese orar Robas ese sabor	Saca tu butacas Sale el as Salomé, me molas Senil oí violines Sobornos son robos Sometamos o matemos Zapear trae paz
Abusón, acá no suba A mi me mima Ana, la tacaña catalana Anita lava la tina Arde ya la yedra Asirnos a la sonrisa A ti no, bonita	Ella té dará detalle Isaac no ronca así La moral, claro, mal Lavan esa base naval Ligar es ser ágil Notará más esa mara- tón	Odié lo no leído Oirás orar a Rosario Robaba oro a babor Se van sus naves Sé verlas al revés Sé verle del revés Y ahora paro hay
A Mafalda dad la fama Amargor pleno con el programa Edipo: la mamá lo pide Ese bello sol le bese No deseo yo ese don No, reír no, solo sonrieron Obeso, lo sé: solo sebo		¡Ojo! corre poco perro cojo Roma le aviva el amor Roza las alas al azor Sam, nos sometemos: son más ¡Y él alababa la ley! Yo de todo te doy Yo social y laico soy
Átale, demoníaco Caín, o me delata El asesor de Pedro se sale Isaías, no beses ese bonsái así La sed serà mares de sal Los led no son del sol Nati, mis alumnos son mulas: imitan Oí lo de mamá: me dolió		Sí, si toses es eso: tisis Sólo dí sol a los ídolos Sonreí, Bogart no cede contra gobier- nos Son robos, no solo son sobornos Yo dono rosas, oro no doy Yo, hada, no bebo nada hoy
Anula la luz azul a la luna Dábale arroz a la zorra el abad		Eso lo dirá mi marido, lo sé ¡Sí, a por todas! Arrasad otro país
Si esa saca la nariz irán a la casa seis		
A mamá Roma le aviva el amor a papá y a papá Roma le aviva el amor a mamá		

### Apèndix 3: Palíndroms en català i castellà alhora



Uns quants més serien:

A cavar a Caravaca  
Alaba la bala  
Aló, hola?

Amor a Roma  
Amor, broma?  
Arca sacra

Ser tres  
Sí, sí, Isis  
Tu mama, mamut!

N'hi ha que la diferència és mínima, com: *A la moda doma-la* i *A la moda dómala*, o bé *Làmina animal*, versus *Lámina animal*. També és curiós observar que el palíndrom del primer Apèndix, *Arriba la birra*, té sentit en les dues llengües, però té diferent significat!

### Apunts finals


- Dintre dels palíndroms hi ha el que podríem anomenar *superpalíndroms*, ja que a part de ser-ho, escrits en majúscules admeten una simetria axial total, ja sigui horitzontal o vertical, que també es presenta sovint a la natura. Vegeu per exemple les figures següents. MATAM és una regió de Senegal. Altres superpalíndroms en castellà són el nom OTO o les expressions OIDO ODIO, o EH COCO O COCHE, i en anglès, les exclamacions OK KO, o WOW, o la paraula MOM.



Superpalíndroms amb eix de simetria vertical.



Superpalíndroms amb eix de simetria horitzontal.

- *Aibofòbia* és dels pocs palíndroms d'una sola paraula que han sortit en aquest treball. Significa “fòbia als palíndroms”. Curiosament en anglès s'anomena *aibohphobia*.
- L'escriptor canari Carlos Felipe Martell ha fet un recull de palíndroms sobre estadística. En són un parell: *Siso truco o Curtosis*, i *¡Ojo! ¿Caí de mal lado modal? La Media cojo*.
- Entre els palindromistes, els quadrats màgics desperten molt d'interès. Un dels motius és la seva semblança amb el famós quadrat de paraules que es va trobat a les ruïnes de Pompeia, el qual en particular conté la paraula capicua TENET, que darrerament també s'ha fet famosa per una pel·lícula homònima. El significat de les cinc paraules que hi apareixen no és del tot clar. A la figura es mostra el quadrat mil·lenari que hi ha a l'abadia italiana de San Pietro ad Oratorium a Capetrano.
 
- Pel que sabem, l'únic article matemàtic amb títol palindròmic és la nota curta *AB y BA*, publicat per l'autor a la *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, l'any 2020.
- Acabem aquest escrit amb els únics palíndroms originals que hi apareixen. El primer és un consell per a les contrasenyes que ha d'usar un matemàtic: *ni pi, ni mini PIN*, els altres dos són una mica més matemàtics: *I si dividís i?; I dividí, dividí, dividí,...* Aquests palíndroms s'anomenen monovocàlics ja que només hi apareix la vocal *i*.

### Agraïments

L'autor està recolzat pels projectes del MICIIN, número PID2019-104658GB-I00 i de l'AGAUR número 2017SGR1617.



Dpt. de Matemàtiques  
Univ. Autònoma de Barcelona i  
Centre de Recerca Matemàtica  
[gasull@mat.uab.cat](mailto:gasull@mat.uab.cat)

*Publicat el 23 d'abril de 2021*