MAT^2
MATerials MATemàtics
Volum 2021, treball no. 4, 25 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/web/matmat

Distribución Multinomial Negativa. Una presentación elemental con ejemplos y aplicaciones

José M. Bogotá i Miguel A. Marmolejo L.

En el modelamiento de fenómenos aleatorios (ver Alabert [1] para una visión general) con frecuencia se contempla la repetición independiente de un mismo experimento aleatorio. Considere el caso de un experimento aleatorio con dos posibles resultados: éxito (**E**) de probabilidad $p \in (0,1)$ y fracaso (**F**) de probabilidad $q := 1 - p$ (ver figura 1).

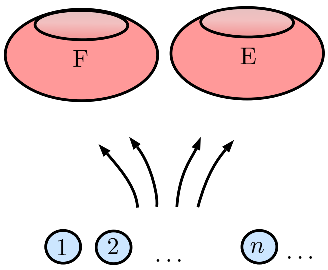


Figura 1: Experimento aleatorio con dos resultados

En este contexto, distribuciones de probabilidad o modelos probabilísticos importantes por su aplicabilidad son:

- El **modelo binomial** de parámetros n y p, que da cuenta del " número X de éxitos en exactamente n repeticiones del experimento". Su f.p. (función de probabilidad) o función de masa es

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

- El **modelo geométrico** de parámetro p, que representa el "número Y de repeticiones necesarias hasta obtener el primer éxito", cuya f.p. es

$$P(Y=j)=q^{j-1}p; \quad j=1,2,3,\ldots$$

En la literatura, también se conoce como **modelo geométrico** al "número Y^* de fracasos hasta que por primera vez se obtiene éxito" y que tiene f.p.

$$P(Y^*=j)=q^{j}p; \quad j=0,1,2,3,\ldots$$

Note que $Y^*=Y-1$.

- El **modelo de Pascal** de parámetros r y p, que cuenta el "número Z de repeticiones necesarias hasta obtener el r-ésimo éxito", que tiene f.p.

$$P(Z=m)=\binom{m-1}{m-r}p^r q^{m-r}; \quad m=r,r+1,r+2,\ldots$$

- El **modelo binomial negativo** de parámetros r y p, definido como "número W de fracasos hasta que se obtiene el r-ésimo éxito", de f.p.

$$P(W=m)=\binom{m+r-1}{r-1}p^r q^{m}; \quad m=0,1,2,\ldots$$

Observe que $W=Z-r$.

Estos modelos están relacionados con el teorema del binomio, la serie geométrica y la serie binomial negativa. En este sencillo contexto se pueden plantear un sinnúmero de problemas un tanto difíciles; por ejemplo, determinar la distribución del " número de repeticiones del experimento hasta que por primera vez se obtenga una racha de r éxitos". La solución a este problema es parte de las aplicaciones que se exponen en este artículo (subsección 5.5).

Considere ahora el caso de un experimento aleatorio con k ($k\geq 2$) posibles resultados: $\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2,\ldots,\mathbf{R}_k$ de probabilidades positivas $p_1,p_2,\ldots,p_k$, respectivamente; $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i=1$ (ver figura 2).

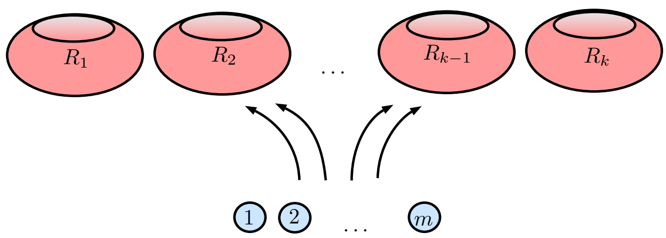


Figura 2: Experimento aleatorio con k resultados

El célebre **modelo multinomial** de parámetros m y $p_1, p_2, \ldots, p_k$ corresponde a la distribución conjunta del "número X_i de veces en que se obtiene el resultado $\mathbf{R}_i$ en exactamente m repeticiones del experimento"; $i = 1, 2, \ldots, k$. Como se sabe, su función de masa es

$$P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k] = \binom{m}{x_1, x_2, \ldots, x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k},$$

donde $x_i \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$; $\sum_{i=1}^{k} x_i = m$. Este modelo, relacionado con el teorema multinomial, tiene la propiedad de que sus distribuciones marginales y sus distribuciones condicionadas son del mismo tipo.

Este artículo versa sobre la **distribución multinomial negativa**, también llamada distribución binomial negativa multivariada, la cual surge en diversos contextos; ver por ejemplo la sección 3 de Sibuya et al. [23] o la sección 4.2 de Johnson et al. [13], donde se hacen sendas revisiones de esta distribución. El trabajo se enmarca en el siguiente contexto: considere un experimento aleatorio en el que se tiene éxito por una sola causa $\mathbf{E}$ de probabilidad p, y en el que se puede fracasar por una de k posibles causas disjuntas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,...,$\mathbf{F}_k$, de probabilidades $q_1, q_2, \ldots, q_k$, respectivamente; $p + \sum_{i=1}^{k} q_i = 1$ (ver figura 3).

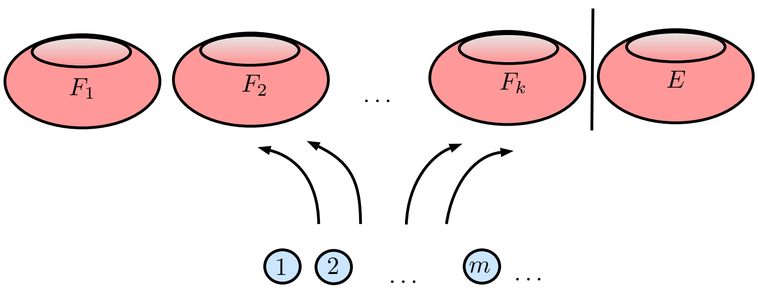


Figura 3: Experimento aleatorio con k fracasos y 1 éxito

Suponga que se hacen repeticiones independientes del experimento y que X_i es el número de veces que se observa el fracaso $\mathbf{F}_i$ hasta que se observa el r-ésimo éxito; $r \geq 1$, $i = 1, 2, \ldots k$. La distribución del vector aleatorio (v.a) $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ se conoce como distribución multinomial negativa de parámetros r y $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$. Cuando $r = 1$, esta distribución se denominará distribución geométrica k-dimensional de parámetro $\mathbf{q}$. Si bien es cierto que en este contexto el parámetro r es un número natural, la distribución multinomial negativa y algunas de sus distribuciones relacionadas están definidas para cualquier número real $r > 0$.

Aquí se da una presentación elemental de la distribución multinomial negativa, incluyendo nuevos resultados (Teoremas 2 y 9; Corolario 3 y Sección 4), que son utilizados en la Sección 5, donde se exponen ejemplos y aplicaciones de casos especiales y de funciones de v.a. (variables aleatorias) relacionadas con esta distribución. Siguiendo el contexto anterior, en la §1 se deduce la función de probabilidad y se establecen fórmulas recursivas para la funciones de masa y de distribución (Teorema 2 y Corolario 3). En la §2 se calculan la función generadora de momentos, el vector de medias y la matriz de covarianzas. Se resalta que la suma de r vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuídos (v.a.i.i.d.) con distribución geométrica k-dimensional de parámetro $\mathbf{q}$ es un v.a. con distribución multinomial negativa de parámetros r y $\mathbf{q}$ (Observación 5). La §3 se dedica a las distribuciones marginales y a las distribuciones condicionadas. Se muestra que la distribución multinomial negativa es una distribución condicionada de la distribución geométrica $(k+1)$-dimensional (Observación 8). También se incorpora la distribución de funciones lineales (Teorema 9) que resulta de mucha utilidad en las secciones siguientes. La §4 se dedica a las funciones máximo y mínimo; se enfatiza el cálculo de la probabilidad de que el mínimo sea 0 (Teorema 10). Finalmente, en la §5 se aplican los resultados previos para ilustrar el uso de este modelo probabilístico. El ejemplo 1 da una sucesión de v.a. idénticamente distribuídas no independientes que es intercambiable y toma valores enteros no negativos. En el ejemplo 2 se consideran los parámetros r y $\mathbf{q}$ aleatorios. El ejemplo 3 se dedica a la distribución de fracasos no disjuntos. En la aplicación 1 se reconsidera el problema del coleccionista de cupones. La aplicación 2 muestra que ciertas distribuciones multiparamétricas de orden k son funciones afines de la distribución multinomial negativa. También se muestra una relación con las sucesiones k-generealizadas de Fibonacci (Observación 13). Por último, en la aplicación 3 se determina la distribución de los fracasos hasta que se obtiene la primera racha de r éxitos. De hecho, este modelo probabilístico tiene diversas aplicaciones prácticas; quizá, la última reportada en la literatura aparece en Chen et al. [8].

1. Contexto y definición de la distribución multinomial negativa

En lo que sigue, $\mathbb{N}$ es el conjunto de números naturales, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \geq 2$ y $r \geq 1$ son naturales, $\mathbb{R}$ es el conjunto de números reales y $\mathbf{1}_A(\cdot)$ denota la función indicatriz del conjunto A. Para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{N}_0^k$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_k)$; $q_i \in (0, 1)$; $i = 1, 2, 3, \dots, k$, y $n \in \mathbb{N}$ se escribe:

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} x_i; \quad \mathbf{x}! = x_1!\, x_2! \cdots x_k!; \quad \mathbf{q}^{\mathbf{x}} = q_1^{x_1}\, q_2^{x_2} \cdots q_k^{x_k};$$

$$\binom{n}{\mathbf{x}} = \binom{n}{x_1, x_2, \ldots, x_k} = \frac{n!}{\mathbf{x}!}; \quad n = s(\mathbf{x}).$$

Sea ahora Y una v.a. que toma los $(k+1)$ valores $0, 1, 2, \ldots, k$ con probabilidades $p = P[Y = 0]$ (probabilidad de éxito) y $q_i = P[Y = i]$ (probabilidad de fracasar por la causa i). Haga

$$q := 1 - p = \sum_{i=1}^{k} q_i; \quad q_i^* = P[Y = i \mid Y > 0] = \frac{q_i}{q}; \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Suponga que se hacen observaciones independientes de la v.a. Y hasta que por r-ésima vez se observa el evento $\{Y = 0\}$ (r-ésimo éxito), y sean:

(i) X_0 el número de observaciones necesarias;

(ii) $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$, donde X_i es el número de veces en que se observa el evento $\{Y = i\}$; $i = 1, 2, 3, \ldots, k$, y

(iii) $S(\mathbb{X}) = S(X_1, X_2, \ldots, X_k) = \sum_{i=1}^{k} X_i$ (la v.a. que cuenta el número total de fracasos).

Entonces:

(a) La v.a. X_0 tiene distribución de Pascal de parámetros p y r con soporte en $\mathcal{D} = \{r, (r+1), (r+2), \ldots\}$, esto es,

$$P[X_0 = m] = \binom{m-1}{m-r} p^r\, q^{m-r}\, \mathbf{1}_{\mathcal{D}}(m).$$

(b) Dado que $X_0 = S(\mathbb{X}) + r$, la v.a. $S(\mathbb{X})$ tiene distribución binomial negativa de parámetros p y r con soporte en $\mathbb{N}_0$; i.e.,

$$P[S(\mathbb{X}) = n] = \binom{n+r-1}{r-1} p^r\, q^n\, \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0}(n).$$

(c) El vector aleatorio $(\mathbb{X} \mid X_0 = m) = (X_1, X_2, \ldots, X_k \mid S(\mathbb{X}) = m - r)$ tiene distribución multinomial de parámetros $(m-r), q_1^*, q_2^*, \ldots, q_k^*$, i.e.

$$\begin{aligned} P[\mathbb{X} = \mathbf{x} \mid X_0 = m] &= P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k \mid S(\mathbb{X}) = m - r] \\ &= \binom{m-r}{x_1, x_2, \ldots, x_k} (q_1^*)^{x_1} (q_2^*)^{x_2} \ldots (q_k^*)^{x_k} \\ &\qquad \times \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, \mathbf{1}_{\{S(\mathbf{x}) = m-r\}}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \\ &\equiv \binom{m-r}{\mathbf{x}} (\mathbf{q}^*)^{\mathbf{x}}\, \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(\mathbf{x})\, \mathbf{1}_{\{S(\mathbf{x}) = m-r\}}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Ahora bien, por la fórmula de la probabilidad total,

$$\begin{aligned}
P[\mathbb{X}=\mathbf{x}] &= \sum_{m=r}^{\infty} P[\mathbb{X}=\mathbf{x} \mid X_0=m]\, P[X_0=m] \\
&= \sum_{m=r}^{\infty} \binom{m-r}{\mathbf{x}} (\mathbf{q}^*)^{\mathbf{x}}\, \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(\mathbf{x})\, \mathbf{1}_{\{S(\mathbf{x})=m-r\}}(\mathbf{x}) \binom{m-1}{m-r} p^r\, q^{m-r} \\
&= p^r \sum_{m=r}^{\infty} \binom{m-1}{\mathbf{x}} \frac{1}{(r-1)!} \mathbf{q}^{\mathbf{x}}\, \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(\mathbf{x})\, \mathbf{1}_{\{S(\mathbf{x})=m-r\}}(\mathbf{x}) \\
&= p^r \sum_{m=r}^{\infty} \binom{\mathbf{s}(\mathbf{x})+(r-1)}{\mathbf{x},(r-1)} \mathbf{q}^{\mathbf{x}}\, \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(\mathbf{x})\, \mathbf{1}_{\{S(\mathbf{x})=m-r\}}(\mathbf{x}) \\
&= p^r \binom{\mathbf{s}(\mathbf{x})+(r-1)}{\mathbf{x},(r-1)} \mathbf{q}^{\mathbf{x}}\, \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(\mathbf{x}) \sum_{m=r}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S(\mathbf{x})=m-r\}}(\mathbf{x}) \\
&= p^r \binom{\mathbf{s}(\mathbf{x})+(\mathbf{r}-\mathbf{1})}{\mathbf{x},(r-1)} \mathbf{q}^{\mathbf{x}}\, \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(\mathbf{x}) \\
&\equiv p^r \binom{x_1+x_2+\cdots+x_k+(r-1)}{x_1,x_2,\ldots,x_k,(r-1)} q_1^{x_1} q_2^{x_2} \ldots q_k^{x_k} \\
&\qquad \times \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(x_1,x_2,\ldots,x_k).
\end{aligned}$$

Definición 1. *Un vector aleatorio* $\mathbb{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_k)$ *tiene distribución multinomial negativa de parámetros* $r\in\mathbb{N}$ *y* $\mathbf{q}=(q_1,q_2,\ldots,q_k)$*;* $q_i\in(0,1)$*;* $i=1,2,\ldots,k$*;* $\sum_{i=1}^{k} q_i<1$*, en símbolos:* $\mathbb{X}\sim\mathcal{MN}(\mathbf{x};r,\mathbf{q})$*, si su función de probabilidad es*

$$\mathcal{MN}(\mathbf{x};r,\mathbf{q}) \equiv p_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) := P[\mathbb{X}=\mathbf{x}] = p^r \binom{\mathbf{s}(\mathbf{x})+(r-1)}{\mathbf{x},(r-1)} \mathbf{q}^{\mathbf{x}}\, \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(\mathbf{x}),$$

donde $p=1-\sum_{i=1}^{k} q_i$*. Cuando* $r=1$*, esta distribución se denomina distribución geométrica* k*-dimensional de parámetro* $\mathbf{q}$ *y se escribe:* $\mathbb{X}\sim\mathcal{G}^{(k)}(\mathbf{x};\mathbf{q})$*. Su función de masa es, para* $\mathbf{x}\in\mathbb{N}_0^k$*:*

$$\mathcal{G}^{(k)}(\mathbf{x};\mathbf{q}) \equiv p_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) := P[\mathbb{X}=\mathbf{x}] = p\binom{\mathbf{s}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} \mathbf{q}^{\mathbf{x}} = p\, q^{\mathbf{s}(\mathbf{x})} \frac{\prod_{i=1}^{k} \frac{\mathrm{e}^{-q_i}\, q_i^{x_i}}{x_i!}}{\frac{\mathrm{e}^{-q}\, q^{\mathbf{s}(\mathbf{x})}}{\mathbf{s}(\mathbf{x})!}}.$$

Con el fin de establecer fórmulas recursivas para estas funciones de masa, conviene hacer algunas observaciones sobre los números $\binom{\mathbf{s}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}}$. En primer lugar, la igualdad $n!=(n-1)!\,n$; $n\in\mathbb{N}$, implica la identidad

$$\binom{\mathbf{s}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} \binom{\mathbf{s}(\tilde{\mathbf{x}}_i)}{\tilde{\mathbf{x}}_i} \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x}\neq\mathbf{0}, \tag{1}$$

donde $\tilde{\mathbf{x}}_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, (x_i - 1), x_{i+1}, \ldots, x_k)$. Aquí se sobrentiende que un número combinatorio es cero si uno de los denominadores es -1. Esta identidad es la ley de formación del triángulo de Pascal cuando $k = 2$ (ver figura 4), y de la llamada pirámide de Pascal cuando $k = 3$. La cantidad $\binom{\mathbf{s}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}}$ se puede interpretar como el número de caminos, sobre la retícula $\mathbb{N}_0^k$, entre el origen y el punto $\mathbf{x}$ (ver figura 4).

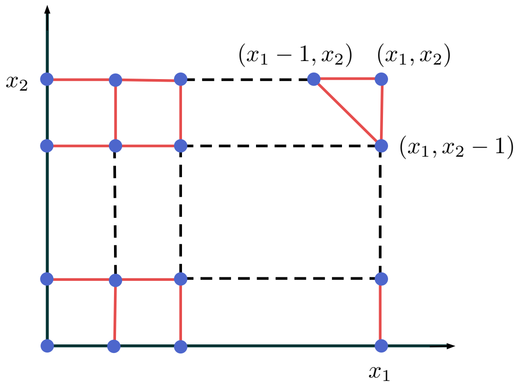


Figura 4: $\binom{x_1+x_2}{x_1,x_2} = \binom{(x_1-1)+x_2}{(x_1-1),x_2} + \binom{x_1+(x_2-1)}{x_1,(x_2-1)}$

En segundo lugar, algunas sumas de los números $\binom{\mathbf{s}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}}$ conducen a sucesiones generalizadas de Fibonacci. Suponga que $n_i \in \mathbb{N}$; $i = 1, 2, \ldots, k$ con $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. Sea ahora $L : \mathbb{N}_0^k \to \mathcal{D}$ la función lineal $L(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} n_i\, x_i$, donde $\mathcal{D} = L(\mathbb{N}_0^k)$. Si

$$\mathfrak{F}(n) := \sum_{L(\mathbf{x})=n} \binom{\mathbf{s}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(\mathbf{x}), \tag{2}$$

entonces, por la identidad anterior, $\mathfrak{F}(n)$ satisface la siguiente relación tipo Fibonacci para $n \in \mathcal{D}$:

$$\mathfrak{F}(0) = 1$$

y

$$\mathfrak{F}(n) = \mathfrak{F}(n - n_1) + \mathfrak{F}(n - n_2) + \cdots + \mathfrak{F}(n - n_k), \quad n \in \mathcal{D} - \{0\},$$

donde se sobrentiende que $\mathfrak{F}(n) = 0$ si $n \notin \mathcal{D} - \{0\}$. Al tomar $n_i = i$; $i = 1, 2, \ldots, k$, se obtiene la sucesión k-generalizada de Fibonacci sobre $\mathbb{N}_0$: $\mathfrak{F}(0) = 1$ y $\mathfrak{F}(n) = \mathfrak{F}(n-1) + \mathfrak{F}(n-2) + \cdots + \mathfrak{F}(n-k); n \in \mathbb{N}$. Esta sucesión ha sido ampliamente estudiada; en particular, Dresden y Du [10] demostraron (ver Teorema 2) que para todo $n \geq 3 - k$:

$$\mathfrak{F}(n) = \mathrm{rnd}\Big(\frac{\lambda - 1}{2 + (k+1)(\lambda - 2)} \lambda^{n-1}\Big),$$

donde rnd (x) indica el valor de x redondeado al entero más cercano: $\text{rnd}(x) = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ y λ es la única raíz positiva de la ecuación $x^k - x^{k-1} - \cdots - 1 = 0$.

Teorema 2 (Fórmulas recursivas)**.** *Con las notaciones precedentes:*

(i) Si $\mathbb{X} \sim \mathcal{G}^{(k)}(\mathbf{x};\mathbf{q})$, su función de masa verifica la siguiente fórmula recursiva:

$$\mathcal{G}^{(k)}(\mathbf{0};\mathbf{q}) \equiv p_{\mathbb{X}}(\mathbf{0}) = p$$

y, para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}_0^k - \{\mathbf{0}\}$:

$$\mathcal{G}^{(k)}(\mathbf{x};\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{k} q_i\, \mathcal{G}^{(k)}(\tilde{\mathbf{x}}_i;\mathbf{q}).$$

(ii) Si $\mathbb{X} \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}; r, \mathbf{q})$; $r \geq 2$, vale la siguiente fórmula recursiva para su función de masa:

$$\mathcal{MN}(\mathbf{0}; r, \mathbf{q}) = p^r$$

y, para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}_0^k - \{\mathbf{0}\}$:

$$\mathcal{MN}(\mathbf{x}; r, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{k} q_i \mathcal{MN}(\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{i}; r, \mathbf{q}) + p\mathcal{MN}(\mathbf{x}; (r-1), \mathbf{q}).$$

Demostración. *(i)* Por la identidad (1), para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{(k)}(\mathbf{x};\mathbf{q}) \equiv p_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) &= p \binom{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{x_1, x_2, \ldots, x_k} q_1^{x_1} q_2^{x_2} \ldots q_k^{x_k} \\
&= q_1\, p_{\mathbb{X}}((x_1 - 1), x_2, \ldots, x_k) + q_2\, p_{\mathbb{X}}(x_1, (x_2 - 1), \ldots, x_k) + \\
&\qquad \cdots + q_k\, p_{\mathbb{X}}(x_1, x_2, \ldots, (x_k - 1)) \\
&= \sum_{i=1}^{k} q_i\, \mathcal{G}^{(k)}(\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{i};\mathbf{q}).
\end{aligned}$$

La demostración de *(ii)* sigue las mismas líneas. □

Las anteriores fómulas recursivas llevan a otras para la distribución de las colas. El caso de la distribución geométrica k-dimensional es el contenido del siguiente corolario.

Corolario 3. *Si $\mathbb{X} \sim \mathcal{G}^{(k)}(\mathbf{x};\mathbf{q})$, entonces $P(\mathcal{G}^{(k)}(\mathbf{x};\mathbf{q}) \geq 0) = 1$ y para $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}_0^k - \{0\}$*

$$P(\mathcal{G}^{(k)}(\mathbf{x};\mathbf{q}) \geq \mathbf{n}) = \sum_{i=1}^{k} q_i\, P(\mathcal{G}^{(k)}(\mathbf{x};\mathbf{q}) \geq \tilde{\mathbf{n}}_i),$$

donde $\tilde{\mathbf{n}}_i = (n_1, \ldots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1}, \ldots, n_k)$ y $\mathbf{x} \geq \mathbf{n}$ indica que $x_i \geq n_i$; $i = 1, 2, \ldots, k$.

Es bien conocido que la función de distribución de la binomial negativa tiene una expresión integral en términos de la función beta incompleta. Igual sucede con la distribución multinomial negativa; en Johnson et al. [13] se dan las siguientes fórmulas ((36.5) y (36.6)), la primera de las cuales corresponde a la función de distribución de $\mathbb{X} \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}; r, \mathbf{q})$. Para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}_0^k$:

$$P(\bigcap_{i=1}^{k}\{X_i \le x_i\}) = \int_{q_k/p}^{\infty}\int_{q_{k-1}/p}^{\infty}\cdots\int_{q_1/p}^{\infty} g(\mathbf{u})\,d\mathbf{u} \tag{3}$$

$$P(\bigcap_{i=1}^{k}\{X_i > x_i\}) = \int_{0}^{q_k/p}\int_{0}^{q_{k-1}/p}\cdots\int_{0}^{q_1/p} g(\mathbf{u})\,d\mathbf{u}, \tag{4}$$

donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$, $d\mathbf{u} = du_1 du_2 \ldots du_k$ y

$$g(\mathbf{u}) = \binom{\mathbf{s}(\mathbf{x}) + (r-1) + k}{\mathbf{x}, (r-1)} \frac{\prod_{i=1}^{k} u_i^{x_i}}{[1+\mathbf{s}(\mathbf{u})]^{\mathbf{s}(\mathbf{x})+r+k}}; \quad u_i > 0, \quad \mathbf{s}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{k} u_i.$$

2. Función generadora de momentos, vector de medias y matriz de covarianzas

Teorema 4. *Si $\mathbb{X} \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}; r, \mathbf{q})$, entonces*

(1) La f.g.m. (función generadora de momentos) de $\mathbb{X}$ está dada por

$$M_{\mathbb{X}}(\mathbf{t}) = p^r[1 - M(\mathbf{t})]^{-r},$$

donde $M(\mathbf{t}) = q_1\,\mathrm{e}^{t_1} + q_2\,\mathrm{e}^{t_2} + \cdots + q_k\,\mathrm{e}^{t_k}$; $t_i < -\ln(q)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

(2) El vector de medias y la matriz de covarianzas de $\mathbb{X}$ son:

$$\mu_{\mathbb{X}} = E[\mathbb{X}] = \frac{r}{p}\,\mathbf{q}; \quad \mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & . & . & . & q_k \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathbb{X}} = \mathrm{Cov}[\mathbb{X}] = \frac{r}{p}\,\mathrm{diag}(q_1, q_2, \ldots, q_k) + \frac{r}{p^2}\,\mathbf{q}\,\mathbf{q}^T.$$

Demostración. Como el v.a. $(\mathbb{X} \mid X_0 = m) = (X_1, X_2, \ldots, X_k \mid X_0 = m)$ tiene distribución multinomial de parámetros $(m-r), q_1^*, q_2^*, \ldots, q_k^*$, entonces su f.g.m. es

$$M_{(\mathbb{X}|X_0=m)}(\mathbf{t}) = [q_1^*\,\mathrm{e}^{t_1} + q_2^*\,\mathrm{e}^{t_2} + \cdots + q_k^*\,\mathrm{e}^{t_k}]^{(m-r)};\ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^k.$$

Ahora, por la propiedad de la doble esperanza:

$$\begin{aligned}
M_{\mathbb{X}}(\mathbf{t}) &= E[\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{k} t_i X_i}] = E[E[e^{\sum_{i=1}^{k} t_i X_i} \mid X_0]] \\
&= \sum_{m=r}^{\infty} [q_1^* \,\mathrm{e}^{t_1} + q_2^* \,\mathrm{e}^{t_2} + \cdots + q_k^* \,\mathrm{e}^{t_k}]^{(m-r)} \binom{m-1}{m-r} p^r \, q^{(m-r)} \\
&= p^r \sum_{m=r}^{\infty} \binom{m-1}{m-r} [q_1 \,\mathrm{e}^{t_1} + q_2 \,\mathrm{e}^{t_2} + \cdots + q_k \,\mathrm{e}^{t_k}]^{(m-r)} \\
&= p^r \sum_{i=0}^{\infty} \binom{(r-1)+i}{i} [M(\mathbf{t})]^i = p^r [1 - M(\mathbf{t})]^{-r},
\end{aligned}$$

definida para todos los $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$ tales que $t_i < h := -\ln(q)$; $i = 1, 2, \ldots, k$. En efecto, bajo estas condiciones:

$$M(\mathbf{t}) = q_1 \,\mathrm{e}^{t_1} + q_2 \,\mathrm{e}^{t_2} + \cdots + q_k \,\mathrm{e}^{t_k} < q_1 \,\mathrm{e}^{h} + q_2 \,\mathrm{e}^{h} + \cdots + q_k \,\mathrm{e}^{h} = q \,\mathrm{e}^{h} = 1.$$

Queda demostrada la parte (1) del teorema. Derivando la f.g.m. obtenemos las expresiones dadas en (2). □

Observación 5. *Por la estructura de la f.g.m. de la distribución multinomial negativa; si* $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots, \mathbb{X}_n$ *son v.a. independientes con* $\mathbb{X}_i \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}; r_i, \mathbf{q})$*;* $i = 1, 2, \ldots, n$*, entonces* $\sum_{j=1}^{n} \mathbb{X}_i \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}; r = \sum_{i=1}^{n} r_i, \mathbf{q})$*. En particular, si* $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots, \mathbb{X}_r$ *son v.a. i.i.d. con* $\mathbb{X}_i \sim \mathcal{G}^{(k)}(\mathbf{x}; \mathbf{q})$*;* $i = 1, 2, \ldots, r$*, entonces* $\sum_{j=1}^{r} \mathbb{X}_i \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}; r, \mathbf{q})$*.*

3. Distribuciones marginales, distribuciones condicionadas y funciones lineales

Si $\mathbb{X} \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}; r, \mathbf{q})$, entonces las distribuciones marginales, las distribuciones condicionadas y algunas funciones lineales de $\mathbb{X}$ son de la misma familia. Por el contexto del problema o por un uso de la f.g.m., fácilmente se establece en siguiente teorema.

Teorema 6. *Suponga que* $\mathbb{X} \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}; r, \mathbf{q})$*.*

(1) Si para el conjunto de índices $I := \{i_1, i_2, \ldots, i_j\} \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$*;* $1 \leq j \leq (k-1)$*, se hace* $q_{_I} = \sum_{i \in I} q_i$*, entonces*

$$\tilde{\mathbb{X}} = (X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_j}) \sim \mathcal{MN}(\tilde{\mathbf{x}}; r, \tilde{\mathbf{q}}), \quad \tilde{\mathbf{q}} = \frac{1}{p + q_{_I}} (q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots, q_{i_j}).$$

(2) *Si* $= \{I_1, I_2, \ldots, I_j\}$ *es una partición disjunta de* $\{1, 2, \ldots, k\}$; $2 \le j \le k$, $I_i \ne \emptyset$; $i = 1, 2, \ldots, j$ *y* $\hat{\mathbf{q}} = (\sum_{i \in I_1} q_i, \sum_{i \in I_2} q_i, \ldots, \sum_{i \in I_j} q_i)$, *entonces*

$$\hat{\mathbb{X}} := (\sum_{i \in I_1} X_i, \sum_{i \in I_2} X_i, \ldots, \sum_{i \in I_j} X_i) \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}; r, \hat{\mathbf{q}}).$$

Teorema 7. *Suponga que* $\mathbb{X} \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}; r, \mathbf{q})$. *Para* $1 \le j \le (k-1)$, *particione el v.a.* $\mathbb{X}$ *y el vector de parámetros* $\mathbf{q}$ *de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} \mathbb{X} &= (\mathbb{X}_1; \mathbb{X}_2) = (X_1, X_2, \ldots, X_j; X_{j+1}, X_{j+2}, \ldots, X_k); \\ \mathbf{q} &= (\mathbf{q}_1; \mathbf{q}_2) = (q_1, q_2, \ldots, q_j; q_{j+1}, q_{j+2}, \ldots, q_k). \end{aligned}$$

Sea $\mathbf{c}_2 = (c_{j+1}, c_{j+2}, \ldots, c_k) \in N_0^{(k-j)}$ *fijo y escriba* $\mathbf{s}(\mathbf{c_2}) = \sum_{i=j+1}^{k} c_i$. *Entonces se verifica:* $(\mathbb{X}_1 \mid \mathbb{X}_2 = \mathbf{c}_2) \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}_1; \mathbf{s}(\mathbf{c}_2) + r, \mathbf{q}_1)$.

Demostración. Aplicando el teorema 6 con $I = \{j+1, j+2, \ldots, k\}$ se concluye que $\mathbb{X}_2 \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}_2; r, \tilde{\mathbf{q}}_2)$, donde $\tilde{\mathbf{q}}_2 = \frac{1}{p+q_{_I}}(q_{j+1}, q_{j+2}, \ldots, q_k)$; $q_{_I} = \sum_{i=j+1}^{k} q_i$. Por tanto:

$$\begin{aligned} p_{\mathbb{X}_1 \mid \mathbb{X}_2}(\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{c}_2) &= \frac{p_{(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{c}_2)}{p_{\mathbb{X}_2}(\mathbf{c}_2)} \\ &= (p + q_{_I})^{\mathbf{s}(\mathbf{c}_2) + r} \binom{\mathbf{s}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{s}(\mathbf{c}_2) + (r-1)}{\mathbf{x}_1, \mathbf{s}(\mathbf{c}_2) + (r-1)} \mathbf{q}_1{}^{\mathbf{x}_1} \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^j}(\mathbf{x}_1). \end{aligned}$$

□

Observación 8. *Si* $\hat{\mathbb{X}} = (\mathbb{X}; X_{k+1}) = (X_1, X_2, \ldots, X_k; X_{k+1}) \sim \mathcal{G}^{k+1}(\hat{\mathbf{x}}; \hat{\mathbf{q}})$, *donde* $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, x_{k+1}) = (x_1, \ldots, x_k; x_{k+1})$ *y* $\hat{\mathbf{q}} = (\mathbf{q}; q_{k+1}) = (q_1, \ldots, q_k; q_{k+1})$, *entonces* $(\mathbb{X} \mid X_{k+1} = r-1) \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}; r, \mathbf{q})$.

Teorema 9 (Funciones lineales). *Suponga que* $\mathbb{X} \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}; r, \mathbf{q})$ *y que* $A = [a_{ij}]_{m \times k} \in \mathcal{M}_{m \times k}(\mathbb{R})$ *es una matriz de constantes. Considere la función lineal* $A : \mathbb{N}_0^k \to \mathcal{D}$ *definida por* $A(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$, *donde* $\mathcal{D} := A(\mathbb{N}_0^k)$. *Entonces el v.a.* $\mathbb{Y} = A\mathbb{X}$ *tiene las siguientes características:*

(1) *Función generadora de momentos*

$$\begin{aligned} M_{_\mathbb{Y}}(\mathbf{t}) &= M_{_\mathbb{X}}(A^T \mathbf{t}) \quad (\mathbf{t}^T = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & . & . & . & t_m \end{bmatrix}) \\ &= p^r \Big[1 - \Big(q_1\, \mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{m} a_{j1} t_j} + q_2\, \mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{m} a_{j2} t_j} + \cdots + q_k\, \mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{m} a_{jk} t_j}\Big)\Big]^{-r}, \end{aligned}$$

donde $|t_i| < \frac{h}{m\,\alpha}$; $\alpha := \text{máx}\{|a_{ij}|\, ; i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, k\}$; $h := -\ln(q)$.

(2) Vector de medias:

$$E[\mathbb{Y}] = A\mu_{\mathbb{X}} = \frac{r}{p}A\mathbf{q}$$

y matriz de covarianzas

$$\mathrm{Var}[\mathbb{Y}] = A\mathbf{\Sigma}_{\mathbb{X}}A^T = \frac{r}{p}\,A\,\mathrm{diag}(q_1, q_2, \ldots, q_k)\,A^T + \frac{r}{p^2}\,A\,\mathbf{q}\,\mathbf{q}^T\,A^T.$$

(3) Función de masa

$$P[\mathbb{Y} = \mathbf{y}] = p^r \sum_{A\mathbf{x}=\mathbf{y}} \binom{\mathbf{s}(\mathbf{x}) + (r-1)}{\mathbf{x}, (r-1)} \mathbf{q}^{\mathbf{x}}\, \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(\mathbf{x})\, \mathbf{1}_{\mathcal{D}}(\mathbf{y}).$$

Demostración. Para demostrar (1) es suficiente notar que si $|t_j| < \frac{h}{m\,\alpha}$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{k} q_i\, \mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, t_j} \leq \sum_{i=1}^{k} q_i\, \mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{m} |a_{ji}\, t_j|} < \sum_{i=1}^{k} q_i\, \mathrm{e}^{h} = q\, \mathrm{e}^{h} = 1.$$

La demostración de (2) se sigue de las propiedades de la esperanza:

$$E[\mathbb{Y}] = E[A\mathbb{X}] = A\mu_{\mathbb{X}} = \frac{r}{p}\,A\mathbf{q}$$
$$\mathrm{Var}[\mathbb{Y}] = \mathrm{Var}[A\mathbb{X}] = A\mathbf{\Sigma}_{\mathbb{X}}A^T = \frac{r}{p}\,A\,\mathrm{diag}(q_1, q_2, \ldots, q_k)\,A^T + \frac{r}{p^2}\,A\,\mathbf{q}\,\mathbf{q}^T\,A^T.$$

La expresión en (3) se sigue de la definición del v.a. $\mathbb{Y}$. □

4. Distribuciones del máximo y del mínimo

Si $\mathbb{X} \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}; r, \mathbf{q})$, las funciones de distribución de las v.a. $\mathbf{M}(\mathbb{X}) := \max\limits_{1\leq i\leq k}\{X_i\}$ y $\mathbf{m}(\mathbb{X}) := \min\limits_{1\leq i\leq k}\{X_i\}$ se obtienen de las fórmulas (3) y (4). En efecto; de una parte $P(\mathbf{M}(\mathbb{X}) \leq n) = P(\bigcap_{i=1}^{k}\{X_i \leq n\})$ y de otra parte $P(\mathbf{m}(\mathbb{X}) > n) = P(\bigcap_{i=1}^{k}\{X_i > n\})$. No parece fácil encontrar fórmulas cerradas para estas expresiones; excepto para $n = 0$. Cuando $r = 1$, el valor $P(\mathbf{m}(\mathbb{X}) = 0)$ se usará adelante (ver aplicación 1).

En el siguiente teorema, S_j es el conjunto de los $\binom{k}{j}$ subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, k\}$ que tienen j elementos; $1 \leq j \leq k$ y para $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_j\} \in S_j$; $q_{_I} = q_{i_1} + q_{i_2} + \cdots + q_{i_j}$.

Teorema 10. *Con las notaciones precedentes:*

(i) Si $\mathbb{X} \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}; r, \mathbf{q})$ *, entonces*

$$P(\mathbf{m}(\mathbb{X}) = 0) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \Big[\sum_{I \in S_j} \left(\frac{p}{p + q_I} \right)^r \Big].$$

(ii) Si $\mathbb{X} \sim \mathcal{G}^{(k)}(\mathbf{x}; \mathbf{q})$*, entonces*

$$P(\mathbf{m}(\mathbb{X}) = 0) = 1 - \int_0^\infty p\, \mathrm{e}^{-p\,x} \prod_{i=1}^{k} (1 - \mathrm{e}^{q_i\,x})\, dx.$$

Demostración. *(i)* Por el teorema 1, para cada conjunto $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_j\} \in S_j$ se cumple: $P(X_{i_1} = 0, X_{i_2} = 0, \ldots, X_{i_j} = 0) = \left(\frac{p}{p+q_I}\right)^r$. Por la fórmula de inclusión-exclusión

$$P(\mathbf{m}(\mathbb{X}) = 0) = P(\bigcup_{i=1}^{k} \{X_i = 0\}) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \Big[\sum_{I \in S_j} \left(\frac{p}{p + q_I} \right)^r \Big].$$

(ii) Teniendo en cuenta que $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(p+q_I)x}\, dx = \frac{1}{p + q_I}$, cuando $r = 1$:

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{m}(\mathbb{X}) = 0) &= P(\bigcup_{i=1}^{k} \{X_i = 0\}) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \Big[\sum_{I \in S_j} \frac{p}{p + q_I} \Big] \\
&= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \Big[\sum_{I \in S_j} p \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(p+q_I)x} \Big]\, dx \\
&= \int_0^\infty p\, \mathrm{e}^{-p\,x} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \Big[\sum_{I \in S_j} \mathrm{e}^{-q_I\,x} \Big]\, dx \\
&= \int_0^\infty p\, \mathrm{e}^{-p\,x} \Big[1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - \mathrm{e}^{-q_i\,x})\, dx \Big]\, dx \\
&= 1 - \int_0^\infty p\, \mathrm{e}^{-p\,x} \prod_{i=1}^{k} (1 - \mathrm{e}^{-q_i\,x})\, dx.
\end{aligned}$$

□

Observación 11. *Si* $\mathbb{X} \sim \mathcal{G}^{(k)}(\mathbf{x}; \mathbf{q})$*, entonces de las inclusiones de eventos* $\{S(\mathbb{X}) \leq n\} \subseteq \{\mathbf{M}(\mathbb{X}) \leq n\} \subseteq \{S(\mathbb{X}) \leq k\,n\}$ *implican que para* $n \in \mathbb{N}_0$*:*

$$1 - q^{n+1} \leq P(\mathbf{M}(\mathbb{X}) \leq n) \leq 1 - q^{k\,n+1}; \quad q = \sum_{i=1}^{k} q_i,$$

y de la inclusión $\{\mathbf{m}(\mathbb{X}) \geq n\} \subseteq \{S(\mathbb{X}) \geq k\,n\}$ *se sigue*

$$P(\mathbf{m}(\mathbb{X}) \geq n) \leq q^{k\,n}.$$

5. Ejemplos y aplicaciones

5.1. Ejemplo 1. Distribución multinomial negativa uniforme

Suponga que $p = q_1 = q_2 = \cdots = q_k = \frac{1}{k+1}$; esto es, $\mathbf{q} = \frac{1}{k+1}\,\mathbf{1}$; donde $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^k$. Si $\mathbb{X} \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}; r, \frac{1}{k+1}\,\mathbf{1})$, entonces su función de masa es

$$p_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) = \left[\frac{1}{k+1}\right]^{\mathbf{s}(\mathbf{x})+r} \binom{\mathbf{s}(\mathbf{x}) + (r-1)}{\mathbf{x}, (r-1)} \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(\mathbf{x}),$$

la cual es simétrica en $\mathbf{x}$, lo que significa que $\mathbb{X}$ es intercambiable; i.e., para cada permutación σ de $\{1, 2, \ldots, k\}$, los v.a. $\mathbb{X}$ y $\sigma\mathbb{X} = (X_{\sigma_1}, X_{\sigma_2}, \ldots, X_{\sigma_k})$ tienen la misma distribución. En este caso, escribiendo $\mathbf{1}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$, el vector de medias es $E[\mathbb{X}] = r\,\mathbf{1}$ y la matriz de covarianzas es $\mathrm{Cov}[\mathbb{X}] = r[I + \mathbf{1}\,\mathbf{1}^T]$.

Observación 12. *Si $\mathbb{X} \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}; r, \frac{1}{k+1}\mathbf{1})$, por el teorema 6, para cada subconjunto no vacío $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_j\}$ de $\{1, 2, \ldots, k\}$ se cumple la relación $(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_j}) \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}; r, \frac{1}{j+1}\mathbf{1})$. En particular: (i) Para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, X_i tiene distribución binomial negativa de parámetros r y $\tilde{q} = \frac{1}{2}$ o, dicho de otra manera, $X_i \sim \mathcal{MN}(x_i; r, \tilde{q} = \frac{1}{2})$; (ii) Si se escribe $\hat{\mathbb{X}} = (\mathbb{X}; X_{(k+1)}) = (X_1, X_2, \ldots, X_k; X_{(k+1)}) \sim \mathcal{MN}(\hat{\mathbf{x}}; r, \frac{1}{k+2}\mathbf{1})$, entonces $\mathbb{X} \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}; r, \frac{1}{k+1}\mathbf{1})$.*

Mina de Riutort, Guardiola de Berguedà (Catalunya).

Ilustración (Compare con el Ejemplo 1.5(B), pg.23 de Ross [22]). Un minero está atrapado en una mina que tiene tres puertas. La puerta 0 conduce a un túnel que lo lleva a la salida después de 2 horas de viaje. Las puertas 1 y 2 conducen a sendos túneles que lo regresan a la mina después de 3 y 5 horas, respectivamente.

Suponiendo que cada vez el minero escoge al azar una puerta, se determina ahora la f.g.m. y la distribución del tiempo T que el minero se demora en salir de la mina. Si X_i es el número de veces que el minero escoge la puerta i; $i = 1, 2$, entonces $\mathbb{X} = (X_1, X_2) \sim \mathcal{G}^{(2)}(\mathbf{x}; r, \frac{1}{3}\mathbf{1})$ y $T = T(\mathbb{X}) = 3\,X_1 + 5\,X_2 + 2$. Por el teorema 9, la f.g.m. de T es

$$M_T(t) = \mathrm{e}^{2\,t}[3 - \mathrm{e}^{3\,t} - \mathrm{e}^{5\,t}]^{-1}; \quad t < \frac{-\ln(2/3)}{5},$$

y la función de masa de T es

$$P(T = t) = \sum_{3\,x_1 + 5\,x_2 + 2 = t} \left[\frac{1}{3}\right]^{x_1+x_2+1} \binom{x_1 + x_2}{x_1, x_2} \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^2}(x_1, x_2).$$

Note que $E[T] = 3\,E[X_1] + 5\,E[X_2] + 2 = 10$ horas.

5.2. Ejemplo 2. Aleatorización de los parámetros

Tal como se estableció en la §1, la distribución multinomial negativa es la composición de una distribución multinomial con una distribución de Pascal. En este ejemplo se consideran los parámetros r y $\mathbf{q}$ como aleatorios.

Ejemplo 2.1 ***R* aleatorio.** Suponga que R es una v.a. con distribución geométrica de parámetro $\alpha \in (0,1)$, i.e., $P[R=r] = \beta^{r-1}\,\alpha\,\mathbf{1}_{\mathbb{N}}(r)$; $\beta = 1-\alpha$. Si $[\mathbb{X} \mid R = r] \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}; r, \mathbf{q})$, entonces $\mathbb{X} \sim \mathcal{G}^{(k)}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{q}})$, donde $\hat{\mathbf{q}} = \frac{1}{1-p\,\beta}\mathbf{q}$. En efecto:

$$
\begin{aligned}
P[\mathbb{X}=\mathbf{x}] &= \sum_{r=1}^{\infty} P[\mathbb{X}=\mathbf{x} \mid R=r]\, P[R=r] \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} p^r \binom{\mathbf{s}(\mathbf{x})+(r-1)}{\mathbf{x},(r-1)} \mathbf{q}^{\mathbf{x}}\, \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(\mathbf{x})\, \beta^{r-1}\,\alpha \\
&= p\,\alpha \binom{\mathbf{s}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} \mathbf{q}^{\mathbf{x}}\, \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(\mathbf{x}) \sum_{r=1}^{\infty} \binom{\mathbf{s}(\mathbf{x})+(r-1)}{(r-1)} [p\,\beta]^{r-1} \\
&= p\,\alpha \binom{\mathbf{s}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} \mathbf{q}^{\mathbf{x}}\, \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(\mathbf{x}) \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\mathbf{s}(\mathbf{x})+j}{j} [p\,\beta]^{j} \\
&= p\,\alpha \binom{\mathbf{s}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} \mathbf{q}^{\mathbf{x}}\, \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(\mathbf{x})\ [1-p\,\beta]^{-\mathbf{s}(\mathbf{x})-1} \\
&= \hat{p} \binom{\mathbf{s}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{q}}^{\mathbf{x}}\, \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(\mathbf{x}); \quad \hat{p} = \frac{p\,\alpha}{1-p\,\beta}.
\end{aligned}
$$

Aplicación. Sea $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots$ una sucesión de v.a.i.i.d. con $\mathbb{X}_j \sim \mathcal{G}^k(\mathbf{x}, \mathbf{q})$. En la observación 5 se estableció que para $r \in \mathbb{N}$ fijo, $S_r = \sum\limits_{j=1}^{r} \mathbb{X}_j \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}; r, \mathbf{q})$. Ahora bien; si R es una v.a. con distribución geométrica de parámetro α y R es independiente de $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots$, entonces el resultado anterior asegura que $S_R = \sum\limits_{j=1}^{R} \mathbb{X}_j \sim \mathcal{G}^{(k)}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{q}})$.

Ejemplo 2.2 **$\mathcal{Q}$ aleatorio.** Si $[\mathbb{X} \mid \mathcal{Q} = \mathbf{q}] \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}; r, \mathbf{q})$ y $\mathcal{Q}$ tiene distribución Dirichlet de parámetro $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{(k+1)})$; $\alpha_i > 0$; i.e., $\mathcal{Q}$ es un vector aleatorio continuo con función de densidad

$$
f_{\mathcal{Q}}(\mathbf{q}) = \frac{\Gamma(\mathbf{s}(\alpha))}{\prod\limits_{i=1}^{(k+1)} \Gamma(\alpha_i)} \left[\prod_{i=1}^{k} q_i^{\alpha_i - 1}\right] p^{\alpha_{(k+1)}-1}\, \mathbf{1}_{\mathcal{T}}(\mathbf{q}),
$$

siendo $\mathbf{s}(\alpha) = \sum\limits_{i=1}^{(k+1)} \alpha_i$, $\mathcal{T} = \{\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_k) \in (0,1)^k : \sum\limits_{i=1}^{k} q_i < 1\}$ y $p = 1 - \sum\limits_{i=1}^{k} q_i$, entonces la función de masa de $\mathbb{X}$ es (ver Mosimann [15], donde se aplica esta distribución):

$$
\begin{aligned}
P[\mathbb{X}=\mathbf{x}] &= \int_{\mathcal{T}} P[\mathbb{X}=\mathbf{x} \mid \mathcal{Q}=\mathbf{q}]\, f_{\mathcal{Q}}(\mathbf{q})\, d\mathbf{q} \quad (\mathbf{x}\in\mathbb{N}_0^k)\\
&= \binom{\mathbf{s}(\mathbf{x})+(r-1)}{\mathbf{x},(r-1)} \frac{\Gamma(\mathbf{s}(\alpha))}{\prod\limits_{i=1}^{(k+1)}\Gamma(\alpha_i)} \int_{\mathcal{T}} \left[\prod_{i=1}^{k} q_i^{x_i+\alpha_i-1}\right] p^{r+\alpha_{(k+1)}-1}\, d\mathbf{q}\\
&= \binom{\mathbf{s}(\mathbf{x})+(r-1)}{\mathbf{x},(r-1)} \frac{\Gamma(\mathbf{s}(\alpha))\,\Gamma(r+\alpha_{(k+1)})}{\prod\limits_{i=1}^{(k+1)}\Gamma(\alpha_i)} \frac{\prod\limits_{i=1}^{k}\Gamma(x_i+\alpha_i)}{\Gamma(\mathbf{s}(\mathbf{x})+\mathbf{s}(\alpha)+r)}.
\end{aligned}
$$

Expresiones para el vector de medias y para la matriz de covarianzas de $\mathbb{X}$ aparecen en la Tabla 1, pg. 58, de Mosimann [15]. Cuando $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{(k+1)}=1$, o lo que es lo mismo, $\mathcal{Q}\sim$ Uniforme$(\mathcal{T})$, después de simplificar se obtiene:

$$
P[\mathbb{X}=\mathbf{x}] = \frac{r\,k!}{\prod\limits_{j=0}^{k}(\mathbf{s}(\mathbf{x})+r+j)} \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(\mathbf{x}).
$$

Es claro que en este caso, para cada permutación σ de $\{1,2,\ldots,k\}$, los vectores aleatorios $\mathbb{X}$ y $\sigma\mathbb{X}=(X_{\sigma_1},X_{\sigma_2},\ldots,X_{\sigma_k})$ tienen la misma distribución.

5.3. Ejemplo 3. El caso de fracasos no disjuntos

Este caso se reduce al de fracasos disjuntos considerando los eventos $\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i$, donde cada A_i es F_i o F_i^c y no todos son del tipo F_i^c. Como ilustración, en el caso de dos fracasos no disjuntos F_1 y F_2 considere los eventos: $C_1 := F_1\cap F_2^c$, $C_2 := F_1^c\cap F_2$ y $C_3 := F_1\cap F_2$ (ver figura 5).

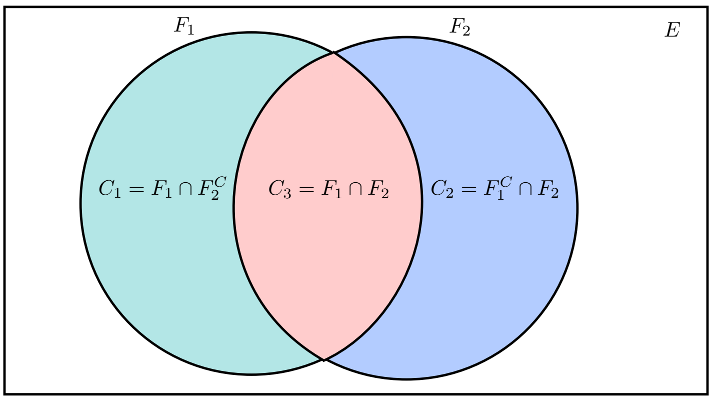


Figura 5: Fracasos no disjuntos

Si Y_i es el número de veces que se observa el evento C_i hasta que se obtiene el r-ésimo éxito, y $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (P(C_1), P(C_2), P(C_3);\ \beta_i \in (0,1);$ $\sum_{i=1}^{3} \beta_i < 1$, entonces $\mathbb{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3) \sim \mathcal{MN}(\mathbf{y}; r, \boldsymbol{\beta})$. Ahora, si X_i es el número de veces que se observa el fracaso F_i hasta que se obtiene el r-ésimo éxito, entonces

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_3 \\ Y_2 + Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = A\mathbb{Y}.$$

Por el teorema 4, la f.g.m. del v.a. $\mathbb{X}$ es

$$m_{\mathbb{X}}(t) = p^r \left[1 - \left(\beta_1 \, \mathrm{e}^{t_1} + \beta_2 \, \mathrm{e}^{t_2} + \beta_3 \, \mathrm{e}^{(t_1+t_2)}\right)\right]^{-r},$$

donde $t_i < -\ln(\sum\limits_{i=1}^{3} \beta_i)$; $i = 1, 2$.

5.4. Aplicación 1. El coleccionista de cupones: el último cupón

Considere el famoso problema del coleccionista de cupones, de los cuales hay k tipos diferentes: $1, 2, \ldots, k$ (por ejemplo, un álbum con 20 cupones; ver figura 6). Supóngase que los cupones se consiguen uno a uno en una sucesión de v.a.i.i.d., cada una tomando el valor i con probabilidad p_i; $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$. Sean N el número mínimo de cupones necesarios para conseguir la colección completa de los k cupones y U el último tipo de cupón conseguido hasta completar la colección. El problema de determinar las distribuciones de N y de U, y cuestiones relacionadas, ha sido resuelto con diferentes herramientas; la distribución geométrica, el proceso de Poisson y cadenas de Markov, entre otras (ver Ferrante y Saltalamacchia [11] o Brown et al. [6]).

(a) Tossa de Mar (b) Montserrat (c) Cardona

Figura 6: Álbum de imágenes de Catalunya

Aquí, para determinar la distribución de N se hace referencia al modelo multinomial y el cálculo de la distribución de U se aborda con la distribución geométrica $(k-1)$-dimensional.

En lo que sigue S_j es el conjunto de los $\binom{k}{j}$ subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, k\}$ que tienen j elementos; $1 \leq j \leq k$. Para $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_j\} \in S_j$, sean

$p_{_I} = p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_j}$ y $q_{_I} = 1 - p_{_I}$. Con estas notaciones, valen las siguientes igualdades, de las cuales la (a) y la (b) aparecen en Brown et al. [6] (Proposición $1(a)$, y $1(b)$).

(a) $P(N > n) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \Big[\sum_{I \in S_j} q_{_I}^{n} \Big]$; $n = 1, 2, \ldots$

(b) $P(N = n) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \Big[\sum_{I \in S_j} p_{_I}\, q_{_I}^{n-1} \Big]$.

(c) $E[\mathrm{e}^{t\,N}] = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \Big[\sum_{I \in S_j} \frac{p_{_I}\,\mathrm{e}^t}{1 - q_{_I}\,\mathrm{e}^t} \Big]$; $t < \min_{I \in S_j, j \neq k} \{-\ln(q_{_I})\}$.

(d) $E[N] = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \Big[\sum_{I \in S_j} \frac{1}{p_{_I}} \Big] = \int_0^{\infty} \Big(1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - \mathrm{e}^{-p_i x})\Big)\, dx.$

En efecto; si Z_i es el número de cupones del tipo i entre los primeros n cupones conseguidos, entonces el v.a. $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_k)$ tiene distribución multinomial de parámetros $n; p_1, p_2, \ldots, p_k$, por lo que para $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_j\} \in S_j$:

$$P(Z_{i_1} = 0, Z_{i_2} = 0, \ldots, Z_{i_j} = 0) = P\Big(\sum_{s=1}^{j} Z_{i_s} = 0\Big) = q_{_I}^{n}.$$

Puesto que $P(N > n) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{k} \{Z_i = 0\}\Big)$, la fórmula de inclusión-exclusión conduce a la expresión (a). Para obtener la expresión (b), es suficiente escribir $P(N = n) = P(N > n - 1) - P(N > n)$ y usar (a). La justificación de (c) es como sigue:

$$\begin{aligned} E[\mathrm{e}^{t\,N}] &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \Big[\sum_{I \in S_j} p_{_I}\, q_{_I}^{n-1}\, \mathrm{e}^{t\,n} \Big] \\ &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \Big[\sum_{I \in S_j} p_{_I}\, \mathrm{e}^t \sum_{n=1}^{\infty} (q_{_I}\, \mathrm{e}^t)^{n-1} \Big] \\ &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \Big[\sum_{I \in S_j} \frac{p_{_I}\, \mathrm{e}^t}{1 - q_{_I}\, \mathrm{e}^t} \Big]. \end{aligned}$$

Por último, la primera igualdad en (d) se sigue de (c), y la segunda igualdad se debe a que $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\, dx = \frac{1}{\lambda}$; $\lambda > 0$ (compare (d) con la Sección 3.1 de Ferrante y Saltalamacchia).

Para determinar la distribución de la v.a. U, el último cupón conseguido hasta completar la colección, se empieza calculando $P(U = k)$. Para

$i = 1, 2, \ldots, (k-1)$, sea X_i es el número de cupones del tipo i conseguidos hasta que por primera vez se obtiene el cupón k. Entonces el v.a. $(X_1, X_2, \ldots, X_{k-1})$ tiene distribución geométrica $(k-1)$-dimensional de parámetro

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_{k-1}); \quad q_i \equiv p_i; \quad i = 1, 2, \ldots, k-1,$$

por lo que $p \equiv p_k$. En este contexto,

$$P(U = k) = P(\bigcap_{i=1}^{k-1} \{X_i \geq 1\}) = P(\text{mín}\{X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}\}) \geq 1).$$

Por el teorema 10:

$$P(U = k) = \int_0^\infty p\, \mathrm{e}^{-p\, x} \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \mathrm{e}^{q_i\, x})\, dx \equiv \int_0^\infty p_k\, \mathrm{e}^{-p_k\, x} \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \mathrm{e}^{p_i\, x})\, dx.$$

Por simetría, para $j = 1, 2, \ldots, k$:

$$P(U = j) = \int_0^\infty p_j\, \mathrm{e}^{-p_j\, x} \prod_{i=1; i \neq j}^{k} (1 - \mathrm{e}^{p_i\, x})\, dx,$$

que es la Proposición $1-(e)$ en Brown et al. [6]. Obviamente, si $p_1 = p_2 = \cdots = p_k = \frac{1}{k}$, entonces $P(U = j) = \frac{1}{k}$ para $j = 1, 2, \ldots, k$.

5.5. Aplicación 2. Distribuciones multiparamétricas de orden k

En 1983, Philippou et al. [18] introdujeron la llamada distribución geométrica de orden k , que ya en 1982 Philippou y Muwafi [21] habían mencionado en conexión con sucesiones de Fibonacci. Desde entonces, en más de un centenar de trabajos se han reportado nuevos resultados y nuevas distribuciones relacionadas: Aki y Hirano [2], [3], Aki et al. [4], Barry y Bello [5], Charalambides [7], Philippou y Makri [19], [20] Philippou [16], [17], Koutras y Eryilmaz [14], entre otros. Enseguida se muestra que algunas de estas distribuciones son funciones afines de la distribución multinomial negativa.

Aplicación 2.1 Distribución geométrica de orden k
Si $\mathbb{X} \sim \mathcal{G}^{(k)}(\mathbf{x}; \mathbf{q})$, donde $q_i = \beta\, \alpha^{i-1}$; $i = 1, 2, \ldots, k$; $\beta = 1 - \alpha$, la distribución de la v.a. $H(\mathbb{X}) = (\sum_{i=1}^{k} i\, X_i) + k$ es denominada por Philippou et al. [18] distribución geométrica de orden k (Definición 2.1). Corresponde al número de ensayos hasta obtener la primera racha de k éxitos en ensayos independientes de Bernoulli con probabilidad de éxito $\alpha \in (0, 1)$ (ver figura 7).

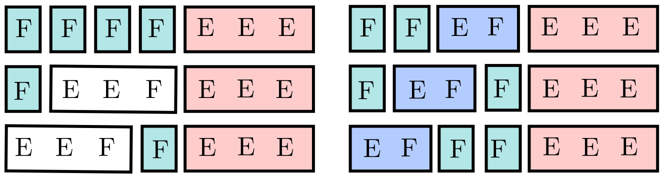


Figura 7: Primera racha de $k = 3$ éxitos en $n = 7$ ensayos

En este caso $p = \alpha^k$, $\mathcal{D} := H(\mathbb{N}_0^k) = \{k, (k+1), \dots\}$ y la función de masa $f(n) = p_{H(\mathbb{X})}(n)$ es

$$\begin{aligned} f(n) &= \Big[\sum_{H(\mathbf{x})=n} p \binom{\mathbf{s}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} \mathbf{q}^{\mathbf{x}} \, \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(\mathbf{x}) \Big] \mathbf{1}_{\mathcal{D}}(n) \\ &= \Big[\alpha^n \sum_{H(\mathbf{x})=n} \binom{\mathbf{s}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\mathbf{s}(\mathbf{x})} \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(\mathbf{x}) \Big] \mathbf{1}_{\mathcal{D}}(n). \end{aligned}$$

Según el teorema 2 esta función satisface:

$$f(k) = p = \alpha^k$$

y para $n > k$:

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{H(\mathbf{x})=n} \sum_{i=1}^{k} q_i \, \mathcal{G}^{(k)}(\tilde{\mathbf{x}}_i; \mathbf{q}); \quad \tilde{\mathbf{x}}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, (x_i - 1), x_{i+1}, \dots, x_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} q_i \sum_{H(\tilde{\mathbf{x}}_i)=n-n_i} \mathcal{G}^{(k)}(\tilde{\mathbf{x}}_i; \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{k} q_i \, f(n - n_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \beta \alpha^{i-1} f(n-i). \end{aligned}$$

En 2015, Dilworth y Mane [9] dieron una fórmula para $f(n)$ en términos de las raíces de la ecuación auxiliar $z^k - \sum_{i=1}^{k} \beta \, \alpha^{i-1} \, z^{k-i} = 0$.

De otra parte, por el teorema 4, la f.g.m. de la v.a $H(\mathbb{X})$ es $M_{H(\mathbb{X})}(t) = \alpha^k \, \mathrm{e}^{k\,t}[1 - M(\mathbf{t})]^{-1}$, donde $M(t) = \beta \, \mathrm{e}^t + \beta \, \alpha \, \mathrm{e}^{2\,t} + \cdots + \beta \, \alpha^{(k-1)} \, \mathrm{e}^{k\,t}$; $t < -\ln(1 - \alpha^k)$. La fórmula recursiva para $f(n)$ y el cálculo de la f.g.m. de $H(\mathbb{X})$ son los resultados principales de Barry y Bello [5].

Para recrear el contexto introducido por Philippou y Muwafi [21], suponga que se extrae al azar un "bloque" de una urna que contiene $k+1$ "bloques" descritos como sigue:

$$B_0 = \underbrace{\boxed{\mathrm{E}}\boxed{\mathrm{E}}\cdots\boxed{\mathrm{E}}}_{k};$$

$$B_1 = \boxed{\text{F}};\quad B_2 = \boxed{\text{E}}\boxed{\text{F}};\quad B_3 = \boxed{\text{E}}\boxed{\text{E}}\boxed{\text{F}};\cdots; B_k = \underbrace{\boxed{\text{E}}\boxed{\text{E}}\cdots\boxed{\text{E}}}_{k-1}\boxed{\text{F}},$$

que la probabilidad de que se extraiga el bloque B_0 es $P(B_0) = p = \alpha^k$ y que para $i = 1, 2, \ldots, k$, la probabilidad de que se extraiga el i-ésimo bloque es $P(B_i) = q_i = \beta\alpha^{i-1}$. Ahora, si de manera independiente se repite este experimento aleatorio hasta que por primera vez se extrae el bloque B_0 y X_i es el número de veces que se extrae el bloque B_i; $i = 1, 2, \ldots, k$ entonces $(X_1, X_2, \ldots, X_k) \sim \mathcal{G}^{(k)}(\mathbf{x}; \mathbf{q})$ y $H(\mathbb{X}) = (\sum_{i=1}^{k} i\, X_i) + k$ se interpreta como el número de ensayos hasta la primera racha de k éxitos en ensayos independientes de Bernoulli con probabilidad de éxito α.

Observación 13 (Relación con sucesiones de Fibonacci)**.** *Suponga que* $\mathbb{X} \sim \mathcal{G}^{(k)}(\mathbf{x}; \mathbf{q})$*, donde* $q_i = r^i$*;* $i = 1, 2, \ldots, k$*,* $r \in (0, \frac{1}{2}]$ *y que* $L(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{k} i\, X_i$*. Entonces la función de masa* $f(n) = p_{L(\mathbb{X})}(n)$ *de la v.a.* $L(\mathbb{X})$ *es*

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{L(\mathbf{x})=n} p \binom{\mathbf{s}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} \mathbf{q}^{\mathbf{x}}\, \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(\mathbf{x})\, \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0}(n) \\ &= p\, r^n \sum_{L(\mathbf{x})=n} \binom{\mathbf{s}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}}\, \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(\mathbf{x}) \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0}(n) \\ &= p\, r^n\, \mathfrak{F}(n)\, \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0}(n), \end{aligned}$$

donde $p = 1 - \sum_{i=1}^{k} r^i$ *y* $\mathfrak{F}(n)$ *es el n-ésimo término de la sucesión k-generalizada de Fibonacci (ver la fórmula (2)).*

Aplicación 2.2 Distribución binomial negativa de orden k de parámetros r y q

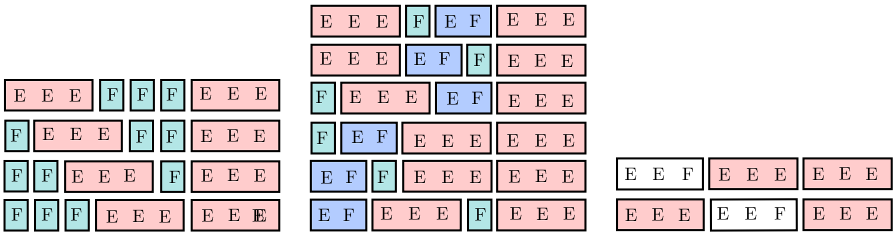
Si $\mathbb{X} \sim \mathcal{MN}(\mathbf{x}; r, \mathbf{q})$, la distribución de la v.a. $L(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{k} i\, X_i$ es denominada por Philippou [16] distribución binomial negativa de orden k de parámetros r y $\mathbf{q}$ (Definición 2.2). En este caso $\mathcal{D} := L(\mathbb{N}_0^k) = \mathbb{N}_0$ y la función de masa se puede escribir como

$$p_{L(\mathbb{X})}(n) = \left[p^r \sum_{L(\mathbf{x})=n} \binom{\mathbf{s}(\mathbf{x}) + (r-1)}{\mathbf{x}, (r-1)} \mathbf{q}^{\mathbf{x}}\, \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0^k}(\mathbf{x})\right] \mathbf{1}_{\mathbb{N}_0}(n).$$

Por el teorema 4, la f.g.m. de $L(\mathbb{X})$ es

$$M_{L(\mathbb{X})}(t) = p^r \left[1 - (q_1\, \mathrm{e}^t + q_2\, \mathrm{e}^{2\,t} + \cdots + q_k\, \mathrm{e}^{k\,t})\right]^{-r}, \quad t < -\ln(q).$$

Si, como en la aplicación anterior, $q_i = \beta\, \alpha^{i-1}$; $i = 1, 2, \ldots, k$; $\beta = 1 - \alpha$, la distribución de la v.a. $L(\mathbb{X}) + rk = (\sum_{i=1}^{k} i\, X_i) + r\, k$ se interpreta como como el número de ensayos hasta la r-ésima racha (no sobrepuesta) de k éxitos en ensayos independientes de Bernoulli con probabilidad de éxito α (compare con la Sección 2 de Philippou [17]). Para $r = 2$, $k = 3$ y $n = 9$, en la figura 8 se ilustran los casos asociados a las soluciones $(3, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ de la ecuación $L(\mathbb{X}) + r\,k = n$.



(a) $(3, 0, 0)$ (b) $(1, 1, 0)$ (c) $(0, 0, 1)$

Figura 8: Casos asociados a $X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 2 \times 3 = 9$

5.6. Aplicación 3. Distribución de los fracasos hasta la primera racha de r éxitos

Nuevamente, considere un experimento aleatorio en el que se tiene éxito por una sola causa $\mathbf{E}$ de probabilidad p, y en el que se puede fracasar por una de k posibles causas disjuntas $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$,. . . , $\mathbf{F}_k$, de probabilidades q_1, q_2, . . . , q_k, respectivamente; $p + \sum_{i=1}^{k} q_i = 1$. Suponga ahora que se hacen repeticiones independientes del experimento y que Y_i es el número de veces que se observa el fracaso $\mathbf{F}_i$ hasta que se observa la primera racha de r éxitos; $i = 1, 2, \ldots, k$, $r \geq 2$. Se determina ahora la distribución de $\mathbb{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$ (ver figura 9, donde $k = r = 2$).

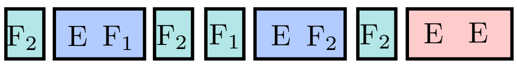


Figura 9: $\mathbb{Y} = (Y_1, Y_2) = (2, 4)$

Suponga que se extrae al azar un "bloque" de una urna que contiene $(r \times k) + 1$ "bloques" descritos como sigue:

$$B_0 = \underbrace{\boxed{\text{E}}\boxed{\text{E}}\cdots\boxed{\text{E}}}_{r};$$

$$B_{ij} = \underbrace{\boxed{\text{E}}\boxed{\text{E}}\cdots\boxed{\text{E}}}_{i-1}\boxed{\text{F}_j}; \quad i = 1, 2, \ldots r,\; j = 1, 2, \ldots, k,$$

que la probabilidad de que se extraiga el bloque B_0 es $P(B_0) = p^r$ y que para $i = 1, 2, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, k$, la probabilidad de que se extraiga el bloque ij es $P(B_{ij}) = p^{i-1}\,q_j$. Ahora, si de manera independiente se repite este experimento aleatorio hasta que por primera vez se extrae el bloque B_0 y X_{ij} es el número de veces que se extrae el bloque B_{ij}; $i, j = 1, 2, \ldots, k$ entonces el v.a.

$$\mathbb{X} = (X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1k}; X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2k}; \cdots ; X_{r1}, X_{r2}, \ldots, X_{rk})$$

tiene distribución $\mathcal{G}^{(r\times k)}(\mathbf{x}; \mathbf{q})$; donde, por supuesto

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_k; p\,q_1, p\,q_2, \ldots, p\,q_k; \cdots ; p^{r-1}\,q_1, p^{r-1}\,q_2, \ldots, p^{r-1}\,q_k).$$

En este contexto, $\mathbb{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) = (\sum_{i=1}^{r} X_{i1}, \sum_{i=1}^{r} X_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^{r} X_{ik})$ y por el teorema 2, $\mathbb{Y} \sim \mathcal{G}^{(k)}(\mathbf{y}; \hat{\mathbf{q}})$, donde $\hat{\mathbf{q}} = \frac{1-p^r}{1-p}(q_1, q_2, \ldots, q_k)$ (confronte con la Sección 2 de Aki y Hirano [3]). De otra parte, nuevamente por el teorema 2, el v.a. $\mathbb{Z} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_r) = (\sum_{j=1}^{k} X_{1j}, \sum_{j=1}^{k} X_{2j}, \ldots, \sum_{j=1}^{k} X_{rj})$ tiene distribución $\mathcal{G}^{(r)}(\mathbf{z}; \tilde{\mathbf{q}})$, siendo $\tilde{\mathbf{q}} = (q, p\,q, p^2\,q \ldots, p^{r-1}\,q)$; $q = \sum_{i=1}^{k} q_i$, $p = 1 - q$. De hecho, el número total de éxitos hasta la primera racha de r éxitos es $\mathcal{H}(\mathbb{Z}) = Z_2 + 2\,Z_3 + \cdots + (r-1)\,Z_r + r$. Por el teorema 9, la f.g.m. de la v.a. $\mathcal{H}(\mathbb{Z})$ es

$$M_{\mathcal{H}(\mathbb{Z})}(t) = \left(p\,\mathrm{e}^t\right)^r \left[1 - q\left[1 + \left(p\,\mathrm{e}^t\right) + \left(p\,\mathrm{e}^t\right)^2 + \cdots + \left(p\,\mathrm{e}^t\right)^{(r-1)}\right]\right]^{-1}$$

para $t < \frac{-\ln(1-p^r)}{r-1}$.

Referencias

[1] Alabert A., "The modelling of random phenomena", *Materials Matemàtics*, Vol. 2015, No. 3, 42 pg. http://mat.uab.cat/web/matmat/v2015n03/

[2] Aki S. and Hirano K., "Distributions of number of failures and successes until the first consecutive k successes", *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* (1994), Vol.46, No.1, pg. 193-202.

[3] Aki S. and Hirano K., "Join distributions of number of success-runs and failures until the first consecutive k successes", *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* (1995), Vol.47, No.2, pg. 225-235.

[4] Aki S., Kuboki, H. and Hirano K., "On discrete distributions of order k", *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* (1984), Vol.36, No.3, pg. 431-440.

[5] Barry, M. J. and Bello, A. J. L., "The moment generating function of the geometric distribution of order k", *The Fibonacci Quarterly* (1993), Vol.31, No.2, pg. 178-180.

[6] Brown, M., Peköz E. A. and Ross S. M., "Coupon Collecting", *Probability in the Engineering and Information Sciences* (2008), Vol.22, pg. 221-229.

[7] Charalambides, Ch. A. , "On discrete distributions of order k", *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* (1986), Vol.38, Part A, pg. 557-568.

[8] Chen Y., Wu Y., Chen W., Zhao T., Zhang W. and Shen T-J., "Application of a Negative Multinomial Model gives insight into rarity-area relationships", *Forest* (2020), Vol.11, 571.

[9] Dilworth S. J. and Mane S. R., "Success run waiting times and Fuss-Catalan numbers", *Journal of Probability and Statistics* (2015), Article ID 482462, 11 pgs.

[10] Dresden G. P. B. and Du Z., "A simplified Binet formula for k-generalized Fibonacci numbers", *Journal of Integer Sequences* (2014), Vol. 17, Article 14.4.7.

[11] Ferrante M. and Saltalamacchia M., "The coupon collector's problem", *Materials Matemàtics*, Vol. 2014, No.2, 35 pg. http://mat.uab.cat/web/matmat/v2014n02/

[12] Jonson N. L., Kotz S. and Kemp W.(1992) *Discrete Univariate Discrete Distributions. Second Edition* John Wiley and Sons, Inc. ISBN: 0-471-58897-9

[13] Jonson N. L., Kotz S. and Balakrishnan N.(1997) *Discrete Multivariate Distributions* John Wiley and Sons, Inc. ISBN: 978-0-471-12844-1

[14] Koutras M. V. and Eryilmaz S., "Compound geometric distribution of order k", *Metodol Comput Appl Probab* (2017), Vol. 19, No. 19, pg. 377-393.

[15] Mosimann J. E., "On the compound negative multinomial distribution and correlations among inverse sampled pollen counts", *Biometrika* (1963), Vol. 50, No.1 y 2, pg. 47-54.

[16] Philippou A. N., "On multiparameter distributions of order k", *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* (1988), Vol.40, No.3, pg. 467-475.

[17] Philippou A. N., "Distributions of order k with applications", Proceeding, ICMET'13 (17-20 Dec 2013), Kerala, India 2015, pg. 3-12.

[18] Philippou A. N., Georghiou, C. and Philippou G.N., "A generalized geometric distribution and some of its properties", *Statistics and Probability Letters* (1983), Vol.1, No.4, pg.171-175.

[19] Philippou A. N. and Makri F. S., "Longest success runs and Fibonacci-type polinomials", *Fibonacci Quarterly* (1985), Vol.23, No.4, pg. 338-346.

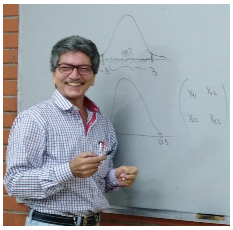
[20] Philippou A. N. and Makri F. S., "Successes, runs and longest runs", *Statistics and Probability Letters* (1986), Vol. 4, No. 4, pg. 211-215.

[21] Philippou A. N. and Muwafi, A., "Waiting for the k-th consecutive succes and the Fibonacci sequence of order k", *Fibonacci Quarterly* (1982), Vol. 20, No. 1, pg. 28-32.

[22] Ross S. (1996) *Stochastic Processes. Second edition* Jhon Wiley and Sons, Inc. ISBN 0-471-12062-6.

[23] Sibuya M., Yoshimura I. and Shimizu R., "Negative multinomial distrubution", *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* (1964), Vol. 16, No. 1, pg. 409-426.

José M. Bogotá
Universidad del Valle
Cali-Colombia
jose.bogota@correounivalle.edu.co



Miguel A. Marmolejo L.
Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle
Cali-Colombia
miguel.marmolejo@correounivalle.edu.co

Publicat el 14 d'octubre de 2021