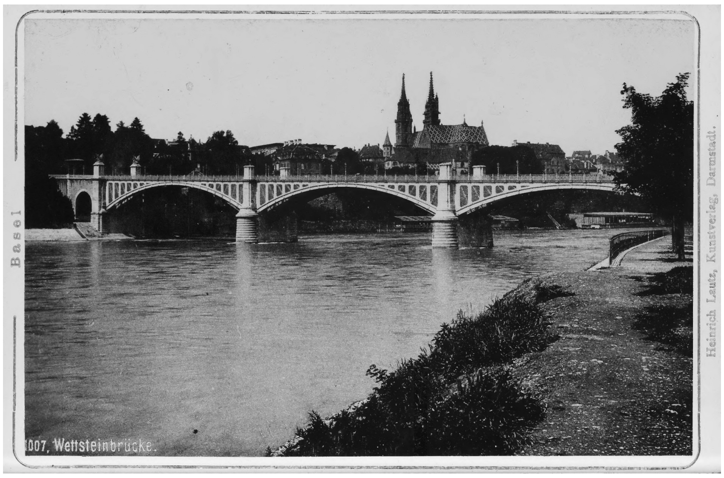
MAT^2
MATerials MATemàtics
Volum 2022, treball no. 4, 11 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/web/matmat

El problema de Basilea

Laura Prat

El *problema de Basilea*, que consisteix a avaluar el resultat de la suma infinita dels inversos dels quadrats dels nombres naturals, va ser plantejat el 1644 per Pietro Mengoli i va romandre obert 90 anys fins que Euler el va resoldre l'any 1734. Parlarem d'un parell de demostracions d'Euler d'aquest resultat així com també de la funció zeta de Riemann.



Vista antiga de Basilea

1 Introducció: sèries numèriques i el problema de Basilea

Un dels problemes matemàtics més antics consisteix a calcular la suma d'una sèrie donada. Retrocedint fins a Arquímedes podem considerar el problema de la quadratura de la paràbola, és a dir, determinar l'àrea tancada entre una paràbola i una línea recta. Arquímedes, disseccionant l'àrea en qüestió en triangles cada cop més petits, de manera que les seves àrees formin una progressió geomètrica i calculant la suma de la sèrie geomètrica resultant, va aconseguir demostrar que aquesta àrea és $4/3$ l'àrea del triangle inscrit. Per tant podem afirmar que Arquímedes ja sabia calcular sumes de sèries geomètriques.

Cap al 1350, Oresme va demostrar que la sèrie harmònica, és a dir la suma dels inversos dels nombres naturals, és divergent (és a dir, que suma infinit). Això és fàcil de veure fent un argument d'agrupació de termes de la manera següent:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\ &\geq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=+\infty.\end{aligned}$$

Un problema que podia semblar similar a l'anterior (però que no ho és!) seria calcular la suma dels inversos dels quadrats dels nombres naturals. Calcular el resultat d'aquesta suma infinita rep el nom de *Problema de Basilea*. Aquest nom prové de la ciutat natal tant del matemàtic Leonhard Euler com d'una de les famílies de matemàtics més importants de la història, els Bernoulli. El *problema de Basilea* consisteix doncs en avaluar el valor de la suma de la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots. \tag{1}$$

Va ser plantejat per primer cop l'any 1644 per Pietro Mengoli [M] i resolt per Leonhard Euler 90 anys després, concretament el 1734. Durant la seva vida, Euler va poder presentar tres solucions diferents d'aquest problema i des de llavors molts matemàtics han continuat treballant per obtenir noves proves d'aquest resultat, mirat-se el problema des de punts de vista diferents.

Abans de la demostració d'Euler, molts matemàtics havien treballat en el problema obtenint resultats parcials. El mateix Mengoli, el 1650, va poder sumar la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n},$$

que inicialment sembla prou semblant a la del problema de Basilea. Mengoli va observar que factoritzant els denominadors podia escriure cada terme de la sèrie anterior com

$$\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

i per tant, apareixia una sèrie telescòpica fàcilment sumable

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ =(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots=1.\end{aligned}$$

John Wallis, el 1655, va aconseguir aproximar el valor de la sèrie (1) per 1.645, això vol dir —ara que ja sabem que el resultat és $\pi^2/6$— que l'error que va fer va ser menor a una mil·lèssima i suposaria haver de sumar 1071 termes de la sèrie (1)!

Jakob Bernoulli, el 1689, va demostrar que per a tot $k \geq 2$ es compleix

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<2.$$

Aquest fet es podria veure, per exemple, escrivint

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+n}=2,$$

o bé agrupant els termes com ara farem per obtenir una sèrie geomètrica (que com he dit abans, ja feia temps que sabien calcular)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}\right)\\ +\left(\frac{1}{8^2}+\cdots+\frac{1}{15^2}\right)+\cdots\\ <1+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{4^2}+\frac{8}{8^2}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2.\end{aligned}$$

El mateix Bernoulli, el 1689, també va observar que

$$\frac{1}{2^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots$$

i per tant, restant-ho de la sèrie original (1) del problema de Basilea, tenim que

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \tag{2}$$

relacionant així la suma dels inversos dels senars al quadrat amb la nostra sèrie (1).

En aquest sentit altres autors van donar resultats com, per exemple, Christian Goldbach que cap al 1729 va veure que el valor de la suma era un nombre entre 41/35 i 5/3. O bé James Stirling que el 1730 va aproximar-la fins a la novena xifra decimal dient que el valor era aproximadament 1.644934066!

Finalment, el 1734, al primer Volum de l'obra *Introductio in Analysin Infinitorum* [E], Euler va escriure el text que traduït al català vindria a dir:

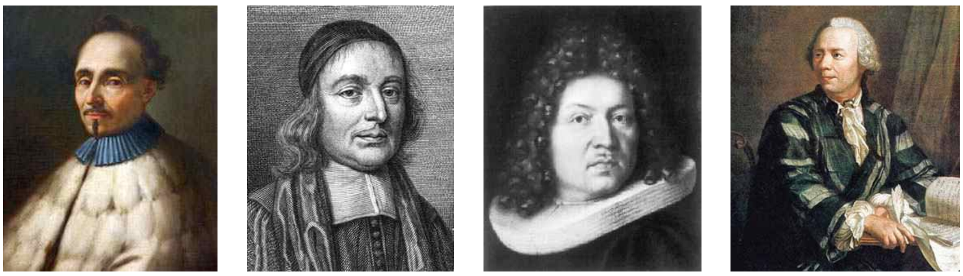
> *S'ha treballat tant en la sèrie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$*, que sembla molt improbable que alguna cosa nova encara pugui sorgir... Jo, igual que d'altres, no he pogut aconseguir més que valors aproximats de la seva suma... Ara, però, i contra tot pronòstic, he trobat una expressió elegant per la suma de la sèrie que depèn de la quadratura del cercle (i.e. de* π*)... He demostrat que 6 cops la suma de la sèrie és igual al quadrat de la longitud de la circumferència de diàmetre 1.*

Per tant, Euler va resoldre el *problema de Basilea*:

Teorema (Euler (1734))**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

L'estructura d'aquests article serà la següent. A les seccions 2 i 3, veurem dues demostracions diferents d'Euler d'aquest resultat mentre que a la secció 4 s'introduirà la funció zeta de Riemann, relacionant-la amb el *problema de Basilea*.



Mengoli, Wallis, Bernoulli i Euler van treballar en el problema de Basilea.

2 Primera demostració del problema de Basilea

Abans de dur a terme la primera demostració del problema de Basilea, cal parlar de les eines que tenien en aquella època per interpretar sèries infinites.

Fins aproximadament el segle XIX, quan Cauchy introdueix el concepte de **successió convergent**, la justificació de les igualtats del tipus

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots, \tag{3}$$

es feia fent ús del càlcul algebraic bàsic, sense tenir en compte per res el concepte de convergència. És a dir, es duia a terme la multiplicació

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots) = (1+x+x^2+\cdots) - (x+x^2+x^3+\cdots) = 1,$$

com si d'un producte entre polinomis es tractés.

Noteu que quan a l'expressió (3) canviem $-x$ per x obtenim

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots.$$

Tot i que aquesta "manera" d'interpretar les sèries els portava a coses una mica contradictòries i que era evident que alguna cosa no s'acabava d'entendre bé, molts matemàtics de l'època ja estaven familiaritzats amb els desenvolupaments en sèries de potències. De fet, com que argumentant com a (3) obtenien identitats de l'estil

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots,$$

i a més ja sabien que

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x,$$

Gregory, cap al 1668, ja coneixia el desenvolupament de la funció $\arctan x$ en sèrie de potències:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

(integrant terme a terme la suma).

També es coneixien, a tall d'exemple, els desenvolupaments:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \log(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

Com ja hem vist, era habitual tractar les sèries de potències com si fossin polinomis amb infinits termes. Per dur a terme la primera demostració del *problema de Basilea*, Euler va fer servir el ben conegut resultat de factorització de polinomis següent:

Teorema 2.1 (Teorema de factorització de Descartes)**.** *Sigui P un polinomi i $r \in \mathbb{R}$ una arrel de P, i.e. $P(r) = 0$. Llavors $(x - r)$ és un factor de P.*

Demostració: Si escrivim $P(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots a_n\,x^n$, llavors tenim que

$$P(x) - P(y) = a_1(x - y) + a_2(x^2 - y^2) + \cdots + a_n(x^n - y^n).$$

Com que tots aquests termes es poden dividir per $(x - y)$, i.e.

$$x^m - y^m = (x - y)(x^{m-1} + x^{m-2}\,y + \cdots + x\,y^{m-2} + y^{m-1}),$$

tenim $P(x) - P(y) = (x - y)Q(x, y)$. Ara fem $y = r$ i obtenim

$$P(x) - P(r) = (x - r)Q(x) \Longrightarrow P(x) = (x - r)Q(x).$$

Per tant, $(x - r)$ és un factor del polinomi P. □

Com a conseqüència d'aquest resultat obtenim el corol·lari següent:

Corol·lari 2.2. *Considerem un polinomi $P(x) = 1 - a_1\,x + a_2\,x^2 - \cdots + (-1)^n a_n\,x^n$ amb $a_k \geq 0$, $1 \leq k \leq n$, i arrels $b_1, \ldots, b_n$. Llavors,*

$$P(x) = \left(1 - \frac{x}{b_1}\right)\left(1 - \frac{x}{b_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{b_n}\right).$$

Igualant els coeficients de les dues expressions de P en el corol·lari, obtenim que

$$a_1 = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n},\ a_2 = \frac{1}{b_1\,b_2} + \frac{1}{b_1\,b_3} + \cdots + \frac{1}{b_{n-1}\,b_n},\ a_3 = \cdots \tag{4}$$

Per tant, fàcilment podem deduïr les identitats següents:

$$S_2 = \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} + \cdots + \frac{1}{b_n^2} = a_1^2 - 2a_2, \tag{5}$$

$$S_3 = \frac{1}{b_1^3} + \cdots + \frac{1}{b_n^3} = a_1^3 - 3a_1\,a_2 + 3a_3 \tag{6}$$

$$S_4 = \frac{1}{b_1^4} + \cdots + \frac{1}{b_n^4} = a_1^4 - 4a_1^2\,a_2 + 4a_1\,a_3 + 2a_2^2 - 4a_4. \tag{7}$$

La idea d'Euler era aplicar aquest resultat a una funció no polinomial, de fet a una sèrie de potències (ja hem vist abans que això era habitual a l'època). Més concretament a la sèrie

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^3}{7!} \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n\, x^n.$$

Com que les arrels d'aquest "polinomi infinit" són π^2, $(2\pi)^2$, $(3\pi)^2$, ..., Euler va aplicar aquí el teorema 2.2 i va obtenir la factorització:

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \left(1 - \frac{x}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x}{3^2\pi^2}\right)\cdots.$$

Per tant, de la primera igualtat de (4), va poder deduïr

$$a_1 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \cdots.$$

que dona de forma immediata la solució del problema de Basilea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Anàlogament, de (5) es dedueix que

$$a_1^2 - 2a_2 = \frac{1}{3!^2} - \frac{2}{5!} = \frac{1}{90} = \frac{1}{\pi^4} + \frac{1}{2^4\pi^4} + \frac{1}{3^4\pi^4} + \cdots,$$

i per tant

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

I de (6),

$$S_3 = \frac{1}{\pi^6} + \frac{1}{2^6\pi^6} + \frac{1}{3^6\pi^6} + \cdots \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

I així successivament. En general, es pot obtenir

$$1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \cdots = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}, \tag{8}$$

on B_{2n} són els anomenats nombres de Bernoulli.

La "demostració" d'Euler, tot i no ser massa rigorosa, posava de manifest la seva gran intuició matemàtica. Més endavant, gràcies a l'aparició i al desenvolupament de la teoria de les funcions analítiques en variable complexa (sobretot gràcies als treballs de Cauchy i Weierstrass sobre factorització infinita d'aquestes funcions), aquesta demostració que acabem de presentar va passar a ser completament vàlida.

3 Una altra demostració del problema de Basilea

En la segona demostració que veurem en aquest article, Euler va utilitzar tres identitats. La primera és conseqüència del Teorema fonamental del càlcul (o del canvi de variable $u = \arcsin t$ si es prefereix)

$$\frac{1}{2}\big(\arcsin x\big)^2 = \int_0^x \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}dt. \tag{9}$$

La segona cosa que necessitava Euler, era el desenvolupament en sèrie de potències de la funció $\arcsin(x)$. Per obtenir-lo, va escriure

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

va desenvolupar l'integrand en sèrie de potències i va integrar terme a terme per obtenir

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{10}$$

El tercer ingredient era demostrar les igualtats

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = 1 \tag{11}$$

i, per a $n \geq 1$,

$$\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{n+1}{n+2} \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt, \tag{12}$$

cosa que es pot fer amb una integració directa i duent a terme una integració per parts respectivament.

Veiem ara doncs, com es poden utilitzar (9), (10), (11) i (12) per obtenir la solució del *problema de Basilea*. Primer substituim $x = 1$ en (9),

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2}(\arcsin 1)^2 = \int_0^1 \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Després canviem $\arcsin t$ pel seu desenvolupament en sèrie de potències obtingut en (10) i integrem terme a terme. Així

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2}(\arcsin 1)^2 &= \int_0^1 \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2 (2n+1)} \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}} dt. \end{aligned}$$

Si ara utilitzem (11) i (12), podem calcular totes les integrals i obtenir

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Finalment (2) ens dona el resultat desitjat.

4 La funció Zeta de Riemann

Si en la sèrie que apareix en el problema de Basilea, canviem l'exponent 2 per s i escrivim

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \tag{13}$$

obtenim el que s'anomena la funció zeta de Riemann. Euler va demostrar la igualtat següent:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{11^s}} \cdots = \prod_{p \text{ primer}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}. \tag{14}$$

I per tant, va posar de manifest l'origen de la relació entre la funció zeta i els nombres primers.

Per entendre la igualtat (14), notem que si $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, llavors la sèrie geomètrica de raó z és convergent, i la seva suma val

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots .$$

Per tant, cada terme del producte (14) pot ser expressat com

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots ,$$

és a dir que (14) vindria a ser

$$\prod_{p \text{ primer}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^{ks}}\right)\left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{3^{ks}}\right)\left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{5^{ks}}\right) \cdots .$$

Com que la descomposició en factors primers de qualsevol nombre natural és única, a l'efectuar els productes, cada terme $\frac{1}{n^s}$ apareix un cop i només un únic cop. Per exemple, per obtenir $\frac{1}{45^s}$ en la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, aquest terme apareixerà al multiplicar l'1 de $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^{ks}}$, amb el $\frac{1}{3^{2s}}$ de $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{3^{ks}}$, amb el $\frac{1}{5^{2s}}$ de la tercera sèrie i amb l'1 en tota la resta. Aquesta seria la interpretació de la *fórmula d'Euler* (14).

Abans ja hem vist que $\zeta(1) = \infty$ (resultat d'Oresme cap al 1350), que $\zeta(2) = \pi^2/6$ (resultat d'Euler el 1734), així com l'expressió (8) de $\zeta(2k)$ en termes dels nombres de Bernoulli. Una altra manera de calcular els valors $\zeta(2k)$ la proporcionen les sèries de Fourier a través de la igualtat de Bessel

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2,$$

aplicada a les funcions $f(x) = x^k$, $0 \leq x < 1$ (on $\hat{f}(k)$ designa el k-èsim coeficient de Fourier de la funció f). Pel que fa als valors senars de s, el 1978 Roger Apéry, [A], va demostrar que $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$. Malauradament la demostració d'Apéry no es pot extendre a la resta de s senars. Un fet indicatiu de la dificultat d'obtenir aquest resultat és que per a la resta de valors senars, el problema corresponent encara resta obert. A [V] podeu trobar una excel·lent exposició de la prova d'Apéry.

Totes aquestes investigacions d'Euler, van desembocar, un segle més tard, en els treballs de Bernhard Riemann, que va extendre la funció $\zeta(s)$ a valors complexos $s = x + iy \in \mathbb{C}$. Resulta que, quan $x > 1$, ζ defineix una sèrie convergent absolutament i uniformement, i per tant és una funció analítica (i sense zeros). Per tant, podem considerar una prolongació analítica a tot $\mathbb{C}$ (que coincideixi amb ζ a $x > 1$). Es pot veure que aquesta prolongació satisfà $\zeta(-2m) = 0$ per $m \in \mathbb{N}$ (zeros trivials) i que té un pol simple a $s = 1$. Riemann va demostrar també que la funció ζ té infinits zeros a la banda $0 \leq x \leq 1$ (zeros no trivials).

La distribució dels nombres primers entre els naturals no segueix cap patró regular, però Riemann va observar que la freqüència dels nombres primers està molt relacionada amb el comportament de la funció ζ. D'aquí la ben coneguda *Hipòtesi de Riemann* (veure [R]).

Teorema. *Tots els zeros no trivials de la funció ζ estan sobre la recta $x = \dfrac{1}{2}$.*

En aquesta direcció, hi ha un resultat del 1895 de Hadamard, [H], i de De la Vallée-Poussin que afirma que els zeros no trivials de ζ estan a la banda $0 < x < 1$. I un de Hardy, [Ha], del 1914, que diu que a la recta crítica $x = 1/2$, ζ hi té infinits zeros. L'any 1900, Hilbert va posar la *Hipòtesi de Riemann* a la llista de problemes més importants que els matemàtics haurien d'afrontar i també cal dir que és un dels problemes del mil·leni del Clay Mathematical Institute.

Referències

[A] R. Apéry, *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Astérisque, pp. 11-13, 1979.

[E] L. Euler, *Introductio in Analysin Infinitorum*, Vol. 1, 1748.

[H] J. Hadamard, *Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques,* Bull. Soc. Math. France 24, 199-220 (1896).

[Ha] G. H. Hardy, *Comptes Rendus*, Acad. Sci. Paris, 158 (1914), 1012-1014.

[M] P. Mengoli. *Novae Quadraturae Arithmeticae, seu De additione fractionum.*

[R] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebener Grösse.* Monastsber. Akad. Berlin, 671-680, (1859).

[V] A. Van der Poorten, *A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$, Math. Intelligencer 1, 1979, n 4.

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona i
Centre de Recerca Matemàtica
laurapb@mat.uab.cat

Publicat el 23 de setembre de 2022