MAT^2
MATerials MATemàtics
Volum 2022, treball no. 5, 20 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/web/matmat

La función peine de Dirichlet y algunas funciones patológicas similares: propiedades analíticas y diofánticas

Juan Luis Varona

En este artículo estudiamos la continuidad y derivabilidad de la función

$$f_\nu(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \\ 1/q^\nu, & \text{si } x = p/q \in \mathbb{Q}, \text{ fracción irreducible,} \end{cases}$$

para diferentes valores de ν, y lo relacionamos con propiedades de aproximación diofántica. Para cada $\nu > 0$, la función f_ν es continua en los irracionales y discontinua en los racionales. Pero lo más interesante ocurre cuando tomamos $\nu > 2$. En ese caso, f_ν es derivable en un conjunto D_ν tal que tanto D_ν como $\mathbb{R} \setminus D_\nu$ son densos en $\mathbb{R}$. Además, la medida de Lebesgue del conjunto $\mathbb{R} \setminus D_\nu$ es 0, y su dimensión de Hausdorff es $2/\nu$. En las demostraciones se utiliza la aproximación diofántica por medio de fracciones continuas. Asimismo, mostramos una reformulación del teorema de Thue-Siegel-Roth en términos de la derivabilidad de f_ν para $\nu > 2$. Y concluimos el artículo demostrando que la situación contraria a lo que sucede con las funciones f_ν con $\nu > 0$ no es posible: no existe ninguna función que sea continua en los racionales y discontinua en los irracionales.

1. Introducción

Al estudiar matemáticas de manera seria y rigurosa necesitamos definiciones precisas y útiles, en el sentido de que esas definiciones se puedan utilizar para demostrar teoremas. Por ejemplo, y si hablamos de funciones reales de variable real, la idea intuitiva de que una función es continua si se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel no tiene ninguna utilidad en ese sentido. Sin embargo, es prácticamente lo único que se ve actualmente, como concepto de función continua, en enseñanzas medias, y también en muchas ingenierías, ya en la universidad.

Pero, en realidad, esas ideas intuitivas, o no muy rigurosas, fueron las que dominaron en el tratamiento de las funciones durante mucho tiempo. La primera definición de continuidad mediante ε-δ, tal como hacemos ahora, la dio Bolzano en 1817. Durante un tiempo los matemáticos no fueron conscientes de que continuidad y continuidad uniforme no era lo mismo; fue Heine quien, en 1872, proporcionó la primera definición publicada de continuidad uniforme (aunque con ideas basadas en conferencias dadas por Dirichlet en 1854).

De hecho, no sólo el concepto de función continua tenía sus dificultades, sino también el propio concepto de función. No fue fácil desvincular el concepto de función del de «fórmula» o «expresión algebraica»; incluso lo que ahora entendemos como función definida a trozos era algo extraño. Pero es que, además, la teoría de conjuntos no se desarrolló hasta finales del siglo XIX (con Cantor y Dedekind), luego, sin que existiese aún el concepto de conjunto, no era posible definir función entre dos conjuntos con la naturalidad que lo hacemos ahora.

Bolzano, Cantor, Dedekind y Dirichlet son cuatro de los matemáticos que introdujeron el rigor en el tratamiento de las funciones.

Actualmente, ya tenemos todos los ingredientes para dar este tipo de definiciones con rigor, y todos los matemáticos las conocemos, así que no hay ninguna necesidad de recordarlas; no explicaremos aquí el concepto de función continua en un punto de su dominio, ni el de función continua en un determinado conjunto. También conocemos todos perfectamente el concepto de derivabilidad, y tampoco hace falta recordarlo.

Los alumnos que llegan a la universidad —estoy pensando en una titulación de matemáticas o muy similar— se topan con esas definiciones cuya necesidad no entienden —todos recordaremos cómo, en los primeros meses de la carrera de matemáticas, los profesores nos demostraban cosas que considerábamos completamente obvias—, pero que tienen que aprender a manejar. Realmente, no son definiciones fáciles; a la comunidad matemática en su conjunto le costó siglos llegar a ellas. Y una forma de ver para qué hace falta dar definiciones «tan raras» es plantear la continuidad de funciones que no sean las habituales.

Entender —aunque sea sin rigor— la continuidad de polinomios, funciones trigonométricas, funciones elementales en general, se puede hacer atendiendo al dibujo. Incluso visualizar el teorema de Bolzano[1] (si una función es continua en un intervalo $[a, b]$ y tiene signos distintos en a y en b, existe un punto intermedio en el que la función se anula). Para ver que eso no es suficiente, hace falta disponer de funciones «más raras», en las que el dibujo nos diga nada; de hecho, en las que ni siquiera esté claro cuál es la gráfica de la función. Con estas funciones se pueden mostrar comportamientos inesperados, y por lo tanto se acostumbra a llamarlas funciones patológicas. A mi modo de ver estas funciones son de gran ayuda para comprender los conceptos.

La primera función patológica a la que nos podemos enfrentar es la *función de Dirichlet*, que se define como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Provistos de la definición de continuidad mediante ε-δ, es inmediato comprobar que esta función no es continua en ningún punto. Desde luego, eso es algo que no le ocurre nunca a las funciones elementales. No es difícil imaginar cómo sería el dibujo de esta función: tanto los racionales como los irracionales son densos en los reales, así que el dibujo de esta función $y = f(x)$ lo veríamos como una línea a altura $y = 0$ y otra línea a altura $y = 1$; en ambos casos, las líneas tendrían infinitos agujeros, pero de grosor nulo, así que en la práctica serían imperceptibles. Si nos restringimos al intervalo $(0, 2)$ y representamos la imagen de una cantidad finita de puntos, los racionales de denominador ≤ 12, lo que tendríamos sería algo así como lo que se muestra en la figura 1, que a veces se denomina *peine de Dirichlet* (las líneas verticales no forman parte del dibujo de la función, pero ayudan a ver la distribución de los puntos de coordenadas racionales cuando acotamos el tamaño del denominador, y es lo que hace que reciba el nombre de «peine»).

[1] Como suele comentar un amigo, la diferencia entre un ingeniero y un matemático es que, para el primero, el teorema de Bolzano es una obviedad y, para el segundo, un hecho que hay que demostrar.

Entender la continuidad de esta función, y de algunas de las que mostraremos a continuación, es lo que diferencia las matemáticas de bachillerato de las más avanzadas que se estudian en determinadas carreras universitarias. Por cierto, se puede comprobar que una manera alternativa de representar la función de Dirichlet es ésta:

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \cos^{2n}(m!\,\pi x).$$

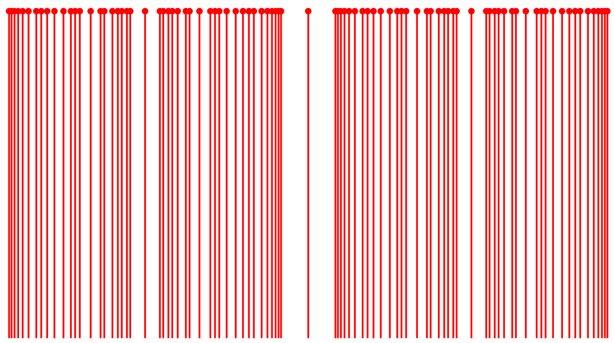

Figura 1: Representación esquemática del peine de Dirichlet en el intervalo $(0, 2)$.

Otra función patológica muy bien conocida es la denominada *función de Thomae*:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{q}, & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ fracción irreducible,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

(realmente, la primera línea de la definición no hace falta si $x = 0$ lo interpretamos con $0 = 0/1$; esto es lo que haremos a partir de ahora). Como veremos un poco más adelante, es continua en todos los números irracionales y discontinua en todos los números racionales; raro, ¿no? Esta función es tan interesante como nombres distintos tiene: también se denomina función de Dirichlet modificada, función *popcorn* (función de las palomitas de maíz, en español), función de las gotas de lluvia, función *ruler* (función de la regla), función de Riemann y función de las estrellas sobre Babilonia (este último nombre se lo puso John Conway). Restringiéndonos al intervalo $(0, 2)$ y representando sólo la imagen de los racionales de denominador ≤ 25, el aspecto de la función de Thomae se muestra en la figura 2.

Modificando un poco la definición anterior, ¿qué pasa si, en el lugar de $f(x) = 1/q$, tomamos $f(x) = 1/q^\nu$ (con ν prefijado)? Es decir, dado $\nu \in \mathbb{R}$, definamos

$$f_\nu(x) = \begin{cases} \frac{1}{q^\nu}, & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ fracción irreducible,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

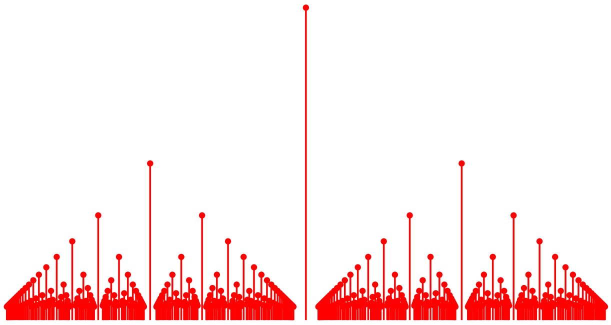

Figura 2: Representación esquemática de la función de Thomae en el intervalo $(0, 2)$.

¿Cómo será la continuidad de esta función, dependiendo de ν? ¿Será derivable en algunos puntos? Analizar el comportamiento de estas funciones es el objetivo de estas notas. Por cierto, obsérvese que, con esta notación, f_0 es la función de Dirichlet y f_1 es la función de Thomae; además, $f_\nu = f_1^\nu$. En la figura 3 se puede ver el aspecto de $f_{1/2}$ y f_2, en ambos casos representando sólo los racionales de denominador ≤ 25 en el intervalo $(0, 2)$. Por descontado, las funciones f_ν no son nuevas y muchas de sus propiedades ya habían sido estudiadas previamente en la literatura matemática; por ejemplo, en [3, 5, 10, 11] (no siempre con las mismas pruebas que aquí incluimos).

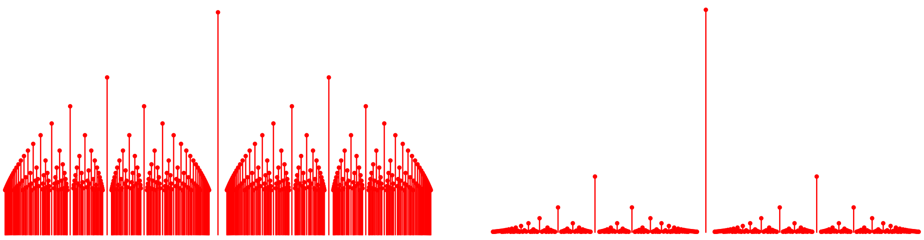

Figura 3: Las funciones $f_{1/2}$ (izquierda) y f_2 (derecha) en el intervalo $(0, 2)$.

Antes de abordar lo que aquí perseguimos, merece la pena comentar que el comportamiento contrario al que se produce con la función de Thomae no es posible: no puede existir una función continua en los racionales y discontinua en los irracionales. La demostración de este resultado no es difícil, pero no está relacionada con las funciones f_ν en las que estamos ahora interesados; aplazamos dicha demostración hasta la última sección del artículo. Así pues, dejemos esto y volvamos a las funciones f_ν.

En lo que sigue, utilizaremos muy a menudo la continuidad de una función por medio de sucesiones. Es decir, usaremos que una función f es continua en un punto x de su dominio si y sólo si $f(x_n) \to f(x)$ para cada sucesión $\{x_n\}$ que tiende a x.

Dado $\nu \in \mathbb{R}$, usaremos D_ν para denotar el conjunto de los puntos en los que la función f_ν es derivable. Es fácil comprobar que, para cada $\nu > 0$, la función f_ν es continua en los irracionales y discontinua en los racionales. Pero lo más interesante es lo que ocurre para $\nu > 2$; demostraremos que, en ese caso, tanto D_ν como su complementario $\mathbb{R} \setminus D_\nu$ son densos en $\mathbb{R}$, y que la medida de Lebesgue de $\mathbb{R} \setminus D_\nu$ es 0. Así pues, f_ν para $\nu > 2$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ salvo en un conjunto de medida nula, y esto a pesar de que f_ν no es continua en ningún número racional; un hecho, a mi modo de ver, sorprendente.

Veremos asimismo bastantes relaciones con la aproximación diofántica; en particular, una reformulación del teorema de Thue-Siegel-Roth en términos de las funciones f_ν. Y estudiaremos la dimensión de Haussdorf (dimensión fractal) de algunos de los conjuntos que nos aparezcan. Aunque con distinto grado de detalle e incidiendo en aspectos distintos, una parte no pequeña de lo que aquí se cuenta se puede encontrar también en el artículo [14].

2. Caso $\nu \leq 0$

Dado $x = p/q \in \mathbb{Q}$ (irreducible), tomemos una sucesión de números irracionales $\{x_n\}$ tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$; entonces $f_\nu(x_n) = 0$ para cada n y la sucesión $\{f_\nu(x_n)\}$ no converge a $f_\nu(x) = 1/q^\nu \neq 0$, luego f_ν no es continua en x.

Por otra parte, dado $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tomemos $\{p_n/q_n\}$ una sucesión de números racionales (irreducibles) tal que $p_n/q_n \to x$ cuando $n \to \infty$; entonces $f_\nu(p_n/q_n) = 1/q_n^\nu \geq 1$ para cada $n$pues ($\nu \leq 0$ y $q_n \geq 1$), así que la sucesión $\{f_\nu(x_n)\}$ no puede converger a $f(x) = 0$, luego f_ν tampoco es continua en x.

Así pues, f_ν no es continua en ningún punto. Y, por tanto, tampoco es derivable en ningún punto.

3. Caso $0 < \nu \leq 2$

Dado $x = p/q \in \mathbb{Q}$ (irreducible), que f_ν no es continua en x se comprueba exactamente igual que en el caso $\nu \leq 0$.

Por el contrario, dado $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, vamos a demostrar que f_ν es continua en x comprobando que $f_\nu(x_n) \to f_\nu(x) = 0$ para cada sucesión $\{x_n\}$ que converja a x. Como $f_\nu(y) = f_\nu(x)$ para cada número irracional y, sin pérdida de generalidad podemos considerar que $x_n = p_n/q_n \in \mathbb{Q}$ (irreducibles) para cada n. Utilicemos ahora que si $p_n/q_n \to x$, un número irracional, forzosamente se debe cumplir $q_n \to \infty$, una propiedad que no es difícil de demostrar. Entonces, $f_\nu(x_n) = 1/q_n^\nu \to 0 = f(x)$ y por tanto f_ν es continua en x.

Pero ¿qué pasa con la derivabilidad de f_ν?

Como f_ν no en continua en los racionales, tampoco puede ser derivable en ellos, así que basta estudiar la derivabilidad en los irracionales. Es claro que si la derivada existe en un número irracional, esta derivada deberá ser 0. De este modo, lo único que tenemos que ver es si, dada una sucesión $\{x_n\}$ cualquiera que tiende a x (de nuevo podemos asumir que $x_n = p_n/q_n$, irracionales irreducibles), siempre se puede asegurar que

$$\lim_n \frac{f_\nu(x_n) - f_\nu(x)}{x_n - x} = 0. \tag{1}$$

Esto se puede analizar en términos de la aproximación de números reales por racionales. Dado un número irracional x, el teorema de Dirichlet asegura que existe una constante positiva C tal que la desigualdad

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{C}{q^2} \tag{2}$$

tiene infinitas soluciones racionales p/q; la demostración de este teorema es sencilla, pues basta usar el principio del palomar. Aunque ahora no lo necesitaremos, el teorema de Hurwitz precisa el resultado anterior, y demuestra que la menor contante C tal que la propiedad anterior es cierta para cualquier irracional x es $C = 1/\sqrt{5}$. Para más detalles sobre ambos teoremas véase, por ejemplo, [15, capítulo 4].

Así, dado un número irracional x, existe C y una sucesión de números $\{x_n\} = \{p_n/q_n\}$ (con $q_n \to \infty$) tal que $|x - p_n/q_n| < C/q_n^2$. Entonces,

$$\left| \frac{f_\nu(x_n) - f_\nu(x)}{x_n - x} \right| = \left| \frac{1/q_n^\nu - 0}{p_n/q_n - x} \right| > q_n^{2-\nu}/C,$$

y $q_n^\nu/C \to \infty$ por ser $0 < \nu < 2$ (o es $\geq 1/C$ si $\nu = 2$), luego no se puede cumplir (1), y f no es derivable en x.

En resumen, f_ν es discontinua en los racionales y continua en los irracionales, y no es derivable en ningún número real. Este resultado ya fue observado en [5], donde, además, se prueba que f_ν no es lipschitziana en ningún punto cuando $0 < \nu < 2$; es decir, que, sea cual sea el punto x, no existe ninguna constante M tal que $|f_\nu(x) - f_\nu(y)| \leq M\,|x - y|$ para todos los y en un entorno de x.

4. Caso $\nu > 2$

Con la misma demostración que en el caso $0 < \nu \leq 2$, f_ν no es continua en los racionales y sí lo es en los irracionales. Además, no puede ser derivable en los racionales por no ser continua en ellos. Hay que analizar si f_ν con $\nu > 0$ es derivable en los irracionales.

El estudio la derivabilidad de f_ν en los irracionales se va a reducir al estudio de la aproximación de un irracional por racionales. Para obtener buenas aproximaciones por racionales (lo que se denomina *aproximación diofántica*), uno de los métodos más habituales y útiles es emplear fracciones continuas, así que vamos a introducirlas de manera breve; con mucho más detalle, las fracciones continuas se estudian, por ejemplo, en [7], [9, capítulo 7] o [15, capítulo 5].

Dado un número irracional x, sea

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}} \tag{3}$$

su desarrollo como fracción continua (infinita). Los a_k se denominan *cocientes incompletos* y cumplen $a_k \in \mathbb{Z}$ y $a_k > 0$ para $k > 0$. Si truncamos (3) hasta a_k, lo que obtenemos es una fracción p_k/q_k, y se dice que eso es un *convergente* o un *aproximante* de x. La teoría de fracciones continuas demuestra que el desarrollo (3) siempre existe y es único si, como resulta natural, queremos que se cumpla $\lim_k p_k/q_k = x$. Quizás conviene precisar que los números racionales también tienen desarrollo en fracción continua, pero éste es siempre finito, no infinito.

Las fracciones p_k/q_k se pueden obtener por medio de la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} p_k &= a_k\, p_{k-1} + p_{k-2}, \\ q_k &= a_k\, q_{k-1} + q_{k-2} \end{aligned}$$

que empieza con $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, $p_0 = a_0$, y $q_0 = 1$. Una de las propiedades básicas de la aproximación por fracciones continuas es que

$$\frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} < \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k\, q_{k+1}} \tag{4}$$

para cada $k \geq 0$. A partir de aquí, y teniendo en cuenta que $\{q_k\}$ siempre es una sucesión creciente, se sigue que $|x - p_k/q_k| < 1/q_k^2$ para cada convergente p_k/q_k. En particular, esto demuestra que (2) con $C = 1$ tiene infinitas soluciones racionales.

Los convergentes de un número x siempre son muy buenas aproximaciones, en el sentido que describimos a continuación (en todas las fracciones, asumimos implícitamente que los denominadores son positivos). Se dice que una fracción irreducible a/b es una *aproximación óptima de primera especie* de x si se verifica $|x - h/k| > |x - a/b|$ para toda fracción $h/k \neq a/b$ con denominador $k \leq b$; y se dice que es *aproximación óptima de segunda especie* si $|x\,k - h| > |x\,b - a|$ para toda fracción $h/k \neq a/b$ con $k \leq b$ (es sencillo comprobar que toda aproximación óptima de segunda especie lo es también de primera). Pues bien, otra propiedad elemental de las fracciones continuas es que los convergentes son aproximaciones óptimas de primera y segunda especie. Así pues, dicho de una manera más informal, los convergentes de x son las mejores aproximaciones racionales que podemos tener si no queremos que el denominador sea demasiado grande.

Por otra parte, dada una función $\varphi : \mathbb{N} \to (0, \infty)$, decimos que un número real x tiene *aproximación por racionales de orden* $\varphi(q)$ si existe alguna constante C, que sólo puede depender de x y de la función φ, tal que la desigualdad

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < C\,\varphi(q) \tag{5}$$

tiene infinitas soluciones p/q (con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$). Antes hemos visto que cualquier número irracional tiene una aproximación por racionales de orden $\varphi(q) = 1/q^2$.

En cambio, si una función $\varphi(q)$ decrece más rápido que $1/q^2$ (por ejemplo $\varphi(q) = 1/q^r$ con $r > 2$), no todos los irracionales tienen aproximación por racionales de orden $\varphi(q)$. Pero, construyéndolo por medio de su fracción continua, siempre es posible encontrar un irracional x que tenga aproximación por racionales del orden que queramos. Por ejemplo, dada una función positiva cualquiera $\varphi(q)$, construyamos el número x eligiendo los cocientes incompletos de su fracción continua de modo que satisfagan las desigualdades

$$a_{k+1} > \frac{1}{q_k^2\,\varphi(q_k)}, \quad k \geq 0.$$

Es claro que esto siempre se puede hacer, y de infinitas formas; en particular, a_0 se puede elegir de manera arbitraria. De este modo, por la desigualdad derecha de (4) tenemos que

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k\,q_{k+1}} = \frac{1}{q_k(a_{k+1}\,q_k + q_{k-1})} \leq \frac{1}{a_{k+1}\,q_k^2} < \varphi(q_k)$$

para cualquier $k \geq 0$. Podemos además asegurar que cualquier x así construido es irracional, pues su fracción continua no es finita. Así pues, hemos probado lo siguiente:

Lema 1 ([7, teorema 22, p. 35])**.** *Dada cualquier función $\varphi : \mathbb{N} \to (0, \infty)$, siempre existen infinitos irracionales x tales que la desigualdad*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \varphi(q)$$

tiene una cantidad infinita de soluciones racionales p/q.

Comprobemos ahora el siguiente resultado, que también es sencillo:

Lema 2 ([7, teorema 23, p. 36])**.** *Para cada número irracional x cuyos cocientes incompletos estén acotados, y para una constante C positiva suficientemente pequeña, la desigualdad*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{C}{q^2} \tag{6}$$

no tiene ninguna solución racional p/q. En cambio, para cualquier x cuyos cocientes incompletos no estén acotados, y para $C > 0$ arbitraria, la desigualdad (6) tiene infinitas soluciones p/q.

Demostración. Sin más que usar la recurrencia $q_{k+1} = a_{k+1}\, q_k + q_{k-1}$, comencemos escribiendo (4) como

$$\frac{1}{q_k^2(a_{k+1} + 1 + q_{k-1}/q_k)} < \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^2(a_{k+1} + q_{k-1}/q_k)},$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{q_k^2(a_{k+1} + 2)} < \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^2\, a_{k+1}}. \tag{7}$$

Comprobemos ahora la segunda aserción del lema. Si los cocientes incompletos de x no están acotados, para cualquier $C > 0$ existirán infinitos enteros k tales que $a_{k+1} > 1/C$. Y la desigualdad derecha de (7) prueba que

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{C}{q_k^2}$$

para todos ellos.

Demostremos finalmente la primera aserción del lema. Sea x tal que todos sus cocientes incompletos cumplen $a_k < M$ para cierta constante M. Entonces, por la desigualdad de la izquierda en (7),

$$\frac{1}{q_k^2(M + 2)} < \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right|.$$

Sean ahora p y q enteros arbitrarios (con $q > 0$), y tomemos el k que cumple $q_{k-1} < q \le q_k$ (este k siempre existe pues, por la relación de recurrencia, los q_k tienen a infinito de forma creciente). Como los convergentes son aproximaciones óptimas de primera especie, se tiene

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{p}{q} \right| &\ge \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| > \frac{1}{q_k^2(M+2)} = \frac{1}{q^2(M+2)} \left(\frac{q}{q_k} \right)^2 \\ &> \frac{1}{q^2(M+2)} \left(\frac{q_{k-1}}{q_k} \right)^2 = \frac{1}{q^2(M+2)} \left(\frac{q_{k-1}}{a_k\, q_{k-1} + q_{k-2}} \right)^2 \\ &> \frac{1}{q^2(M+2)} \frac{1}{(a_k + 1)^2} > \frac{1}{(M+2)(M+1)^2\, q^2}. \end{aligned}$$

De este modo, si elegimos

$$C < \frac{1}{(M+2)(M+1)^2},$$

ningún p/q (con $q > 0$) podrá satisfacer la desigualdad (6). $\square$

Con esto, ya podemos probar el siguiente teorema:

Teorema 1. *Para $\nu > 2$, la función f_ν es discontinua (y en consecuencia no derivable) en los racionales, y continua en los irracionales. Con respecto a la derivabilidad, se cumple lo siguiente:*

(a) Si x es número irracional cuyo desarrollo en fracción continua tiene los cocientes incompletos acotados, entonces f_ν es derivable en x.

(b) Existen infinitos números irracionales x tales que f_ν no es derivable en x.

Además, tanto el conjunto de los números que satisfacen (a), como el de los números que satisfacen (b), son no numerables.

Demostración. La continuidad se estudia como en el caso $\nu = 1$.

(a) Es claro que, si f_ν es derivable en un irracional x, forzosamente debe ser $f'_\nu(x) = 0$. Y vamos a ver que esto es precisamente lo que ocurre con irracionales tales que los convergentes de su desarrollo en fracción continua están acotados. Para ello, sólo necesitamos comprobar que, para cualquier sucesión $\{x_n\}$ que tiende a x (y con $x_n \neq x$ para todo n), se cumple

$$\lim_n \frac{f_\nu(x_n) - f_\nu(x)}{x_n - x} = 0.$$

Sin perdida de generalidad podemos suponer que $\{x_n\}$ es una sucesión de racionales, digamos $x_n = p_n/q_n$. La primera parte del lema 2 asegura que, para cierto valor de C, se cumple $|x - p_n/q_n| \geq C/q_n^2$ para cada n. Entonces,

$$\left| \frac{f_\nu(p_n/q_n) - f_\nu(x)}{p_n/q_n - x} \right| = \left| \frac{1/q_n^\nu - 0}{p_n/q_n - x} \right| \leq \frac{1/q_n^\nu}{C/q_n^2} = \frac{1}{C\, q_n^{\nu-2}},$$

que tiende a 0 cuando $n \to \infty$, luego f_ν es derivable en x.

(b) Tomemos ahora, en el lema 1, $\varphi(q) = 1/q^{\nu+1}$. Entonces, para cualquier x tal que la desigualdad $|x - p/q| < \varphi(q)$ tenga infinitas soluciones, tomemos $\{p_n/q_n\}$ una sucesión de racionales tal que $|x - p_n/q_n| < 1/q_n^{\nu+1}$ para cada n. En particular, $p_n/q_n \to x$ y, además,

$$\left| \frac{f_\nu(p_n/q_n) - f_\nu(x)}{p_n/q_n - x} \right| = \left| \frac{1/q_n^\nu - 0}{p_n/q_n - x} \right| > \frac{1/q_n^\nu}{1/q_n^{\nu+1}} = q_n,$$

que tiende a ∞ cuando $n \to \infty$, luego f_ν no es derivable en x.

Que tanto el conjunto de los números que satisfacen (a), como el de los números que satisfacen (b), son no numerables, es inmediato por construcción de los correspondientes x según los lemas 2 y 1, respectivamente. (Para demostrar que un conjunto es no numerable se puede usar el tradicional argumento diagonal de Cantor.) □

Hemos probado que hay una cantidad no numerable de irracionales en los que f_ν es derivable y otra cantidad no numerable de irracionales en los que f_ν no es derivable, así que vamos a refinar la pregunta. En términos de la teoría de la medida, ¿qué es más habitual entre los irracionales, la derivabilidad o la no derivabilidad de f_ν?

Para responder a esta pregunta, usaremos el siguiente resultado, que a menudo se conoce con el nombre de teorema de Khinchin; no es complicado pero sí más especializado que los anteriores lemas, así que no incluiremos aquí su demostración. Como es habitual, «casi todo x» significa «todo x excepto un conjunto de medida nula».

Lema 3 ([7, teorema 32, p. 69]). *Supongamos que $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ es una función positiva y continua tal $g(t)t$ es una función no creciente. Entonces, la desigualdad*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{g(q)}{q} \tag{8}$$

tiene, para casi todo x, una cantidad infinita de soluciones racionales p/q si, para algún s positivo, la integral

$$\int_s^\infty g(t)\,dt \tag{9}$$

diverge. Por otra parte, si la integral (9) converge, la desigualdad (8) tiene, para casi todo x, sólo una cantidad finita de soluciones racionales p/q.

La segunda parte de este lema es la herramienta principal para poder probar el siguiente teorema, que resume el comportamiento patológico de f_ν cuando $\nu > 2$. (En [3] se puede encontrar una demostración alternativa de la derivabilidad de f_ν en casi todo punto que no usa el resultado de Khinchin; y [5] contiene una demostración de la densidad que no usa específicamente la medida de los conjuntos.)

Teorema 2. *Para $\nu > 2$, denotemos*

$$\begin{aligned} C_\nu &= \{\, x \in \mathbb{R} : f_\nu \text{ es continua en } x \,\}, \\ D_\nu &= \{\, x \in \mathbb{R} : f_\nu \text{ es derivable en } x \,\}. \end{aligned}$$

Entonces, la medida de Lebesgue de los conjuntos $\mathbb{R} \setminus C_\nu$ y $\mathbb{R} \setminus D_\nu$ es 0, pero los cuatro conjuntos C_ν, $\mathbb{R} \setminus C_\nu$, D_ν y $\mathbb{R} \setminus D_\nu$ son densos en $\mathbb{R}$.

Demostración. Se cumple $C_\nu = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (luego $\mathbb{R} \setminus C_\nu = \mathbb{Q}$), y es bien conocido que $\mathbb{Q}$ tiene medida 0. Además, tanto los racionales como los irracionales son densos en los reales, es decir, $\overline{C_\nu} = \overline{\mathbb{R} \setminus C_\nu} = \mathbb{R}$. A partir de aquí, y sin más que usar $\mathbb{R} \setminus C_\nu \subset \mathbb{R} \setminus D_\nu$, también se tiene que $\overline{\mathbb{R} \setminus D_\nu} = \mathbb{R}$.

Para calcular la medida de $\mathbb{R} \setminus D_\nu$, tomemos la función $g(t)$ dada por $g(t) = 1/(t \log^2(t+1))$. Como $\int_1^\infty 1/(t \log^2(t+1))\, dt < \infty$, la segunda parte del lema 3 prueba que, para casi todo x, la desigualdad

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2 \log^2(q+1)}$$

sólo puede tener una cantidad finita de soluciones racionales. Esto implica que, para cada uno de estos x, existe una constante positiva $C(x)$ tal que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{C(x)}{q^2 \log^2(q+1)}$$

no tiene ninguna solución racional. Fijémonos asimismo en que, como los racionales tienen medida 0, se puede decir lo mismo para casi todos los irracionales x. Afirmamos que f_ν es derivable en todos estos x; y, en consecuencia, la medida de $\mathbb{R} \setminus D_\nu$ es 0.

Para probar esta afirmación, procedamos como en (a) del teorema 1. Para cada sucesión de racionales p_n/q_n que tiende al irracional x, se tiene

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{C(x)}{q_n^2 \log^2(q_n+1)}$$

para cada n. Entonces,

$$\left| \frac{f_\nu(p_n/q_n) - f_\nu(x)}{p_n/q_n - x} \right| \leq \frac{1/q_n^\nu}{C(x)/(q_n^2 \log^2(q_n+1))} = \frac{\log^2(q_n+1)}{C(x) q_n^{\nu-2}},$$

que tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Esto prueba que f_ν es derivable en x.

Finalmente, la densidad de D_ν es consecuencia de que, si un conjunto $\mathbb{R} \setminus S$ tiene medida de Lebesgue 0, entonces S es denso en $\mathbb{R}$. Éste es un resultado bien conocido, pero, como la demostración es corta y sencilla, vamos a probarlo (lo hacemos por reducción al absurdo). La clausura de S es un conjunto cerrado; si existiera un x que no pertenece a $\overline{S}$, existiría un intervalo abierto I alrededor de x tal que $I \cap \overline{S} = \emptyset$, y en consecuencia también $I \cap S = \emptyset$, luego $I \subset \mathbb{R} \setminus S$; pero I tiene medida positiva, lo cual es una contradicción. □

Una vez que sabemos que la medida de un subconjunto de los reales es 0, es natural intentar estimar el «tamaño» de ese conjunto por medio de su dimensión de Hausdorff (es decir, su dimensión como conjunto fractal), que deberá ser un número entre 0 y 1. Cuanto más grande sea la dimensión, «mayor» es el conjunto. En nuestro caso, en particular, ¿cuál es la dimensión de Hausdorff de $\mathbb{R} \setminus D_\nu$, el conjunto de puntos en los que f_ν no es derivable? (Como f_ν es continua en los irracionales y discontinua en los racionales, $\mathbb{R} \setminus C_\nu = \mathbb{Q}$ y su dimensión de Hausdorff es 0, eso no tiene ningún misterio).

De manera independiente, Jarník [6] y Besicovitch [2] probaron que, para $\nu > 2$, la dimensión de Hausdorff de

$$E_\nu = \{\, x \in \mathbb{R} : |x - p/q| < 1/q^\nu \text{ tiene infinitas soluciones racionales} \,\}$$

es $\dim(E_\nu) = 2/\nu$; este resultado se conoce habitualmente como teorema de Jarník-Besicovitch (en [1] se puede ver la dimensión de Hausdorff algunos otros conjuntos definidos en términos de aproximación por racionales).

No es verdad que $\mathbb{R} \setminus D_\nu = E_\nu$ pero, con lo que hemos visto hasta ahora, el lector se puede imaginar que son conjuntos que están íntimamente relacionados. Aunque no daremos la demostración, sin demasiada dificultad, y utilizando el teorema de Jarník-Besicovitch, eso permite probar lo siguiente:

Teorema 3 ([4, teorema 1]). *Para $\nu > 2$, la dimensión de Hausdorff de $\mathbb{R} \setminus D_\nu$ es $\dim(\mathbb{R} \setminus D_\nu) = 2/\nu$.*

5. Reinterpretación del teorema de Thue-Siegel -Roth por medio de f_ν

El teorema de Thue-Siegel-Roth (que también se denomina, simplemente, teorema de Roth) es un resultado fundamental en el campo de la aproximación por racionales. Lo probó Roth en 1955 —gracias a ello recibió la medalla Fields en el Congreso Mundial de los Matemáticos que se celebró en Edimburgo en 1958—, y culminaba los esfuerzos previos de Thue, Siegel, Gelfond y Dyson durante la primera parte del siglo XX. El artículo original de Roth es [12]; también se puede encontrar una demostración detallada en [9, capítulo 6].

Recordemos que un número algebraico es un número (real o complejo, aquí estamos tratando sólo con reales) que es solución de un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Z}$ (o en $\mathbb{Q}$, da igual exigir una cosa que la otra). Más en concreto, se dice que un número es algebraico de orden n si es raíz de un polinomio irreducible de orden n; y se dice que es trascendente si no es algebraico. Así, por ejemplo, los racionales son los algebraicos de orden 1, el número $\sqrt{2}$ es algebraico de orden 2, y los números e y π son transcendentes.

Históricamente, el orden de aproximación por racionales —tal como lo hemos definido en (5)— estaba muy relacionado con el orden de los números algebraicos; podemos ver los detalles en [15, capítulo 4]. En 1844 Liouville probó que, si x es un número algebraico de orden $n \geq 2$, dicho x no se podía aproximar por racionales con orden $\varphi(q) = 1/q^{n+\alpha}$ para ningún $\alpha > 0$. Dicho de otra forma, que si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ se puede aproximar por racionales con orden $\varphi(q) = 1/q^m$ para cualquier m, ese x debe ser transcendente. Esto permitió a Liouville probar que $\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$ (o $\sum_{k=1}^{\infty} a^{-k!}$ con $a \geq 2$ entero) es un número trascendente, el primer número trascendente conocido (antes de eso, los matemáticos ni siquiera estaban seguros de que tales números existieran realmente).

¿Había relación entre el n como orden de número algebraico y el m de $\varphi(q) = 1/q^m$ para el que se podía conseguir aproximación por racionales de ese orden? Eso parecía, según el teorema de Liouville y lo que habían probado Thue, Siegel, Gelfond y Dyson antes de que Roth entrara en juego.

El teorema de Roth asegura que, si x es un número algebraico, y cualquiera que sea el $\alpha > 0$ que tomemos, la desigualdad

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\alpha}} \tag{10}$$

sólo tiene un número finito de soluciones racionales p/q. O, de manera equivalente, que si x es un número algebraico irracional, existe una constante positiva $C(x, \alpha)$ tal que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{C(x, \alpha)}{q^{2+\alpha}} \tag{11}$$

no tiene ninguna solución racional.

Como en el caso del teorema de Liouville, el de Roth se usa a menudo como criterio de trascendencia: si, para algún $\alpha > 0$, la desigualdad (10) tiene infinitas soluciones racionales, x será un número trascendente. El criterio de Roth es mucho más potente que el de Liouville, y permite demostrar la trascendencia de números como $\sum_{k=1}^{\infty} a^{-m^k}$ con $a \geq 2$ y $m \geq 3$. (El que esto escribe no se resiste a citar su reciente artículo [16] en el que, aplicando los criterios de Liouville y de Roth, se encuentran números transcendentes que se pueden usar como constantes generadoras de primos.)

En todo caso, conviene aclarar que el criterio de Roth (o pequeñas modificaciones suyas) dista de ser una condición necesaria de trascendencia. Hay «muchos» números trascendentes cuya trascendencia no se puede probar usando el teorema de Thue-Siegel-Roth (o no se sabe cómo hacerlo), y requieren métodos específicos. Así ocurre, por ejemplo, con los dos números trascendentes más famosos, e y π. La trascendencia de e la probó Hermite en 1873, y, la de π, Lindemann en 1882; se pueden ver demostraciones de ambos resultados en [15, capítulo 6].

Pero, volviendo a las funciones f_ν de las que trata este artículo, ¿qué tiene que ver el teorema de Thue-Siegel-Roth con esas funciones? Lo que ocurre es que se puede reformular el teorema de Thue-Siegel-Roth en términos de la derivabilidad de f_ν para $\nu > 2$. Vamos a ver qué quiere decir esto.

En primer lugar, demostremos el siguiente teorema, que se puede encontrar en [5] o [11]:

Teorema 4. *Sea $\nu > 2$. Si x es un número algebraico irracional, entonces f_ν es derivable en x.*

Demostración. Sea x un número algebraico irracional y tomemos la constante Para probar la derivabilidad de f_ν en x basta ver que, para cualquier sucesión de racionales $\{p_n/q_n\}$ que tiende a x, se cumple

$$\lim_n \frac{f_\nu(p_n/q_n) - f_\nu(x)}{p_n/q_n - x} = 0.$$

Como (11) no tiene soluciones racionales, tenemos que

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{C(x,\alpha)}{q_n^{2+\alpha}}$$

para cada n, y en consecuencia

$$\left| \frac{f_\nu(p_n/q_n) - f_\nu(x)}{p_n/q_n - x} \right| = \left| \frac{1/q_n^\nu - 0}{p_n/q_n - x} \right| \leq \frac{1/q_n^\nu}{C(x,\alpha)/q_n^{2+\alpha}} = \frac{1}{C(x,\alpha) q_n^{(\nu-2)/2}},$$

que tiende a 0 cuando $n \to \infty$. $\square$

Dicho de otra forma, lo que afirma este teorema es que «si f_ν no es derivable en x, entonces x es un número racional o un número trascendente». Eso sí, lo mismo que ocurre con el criterio de Roth, la no derivabilidad en x sólo sirve para detectar una pequeña proporción de números trascendentes; hay muchos números trascendentes x para los cuales f_ν es derivable en x.

Hemos probado el teorema 4 utilizando el teorema de Thue-Siegel-Roth. Pero lo que queremos ahora recalcar es que, de hecho, son dos teoremas equivalentes —en el sentido de que, si asumimos que uno de los dos teoremas es cierto, el otro se deduce de él con argumentos sencillos—. A esto nos referimos cuando decimos que el teorema 4 es una reinterpretación o una reformulación del teorema de Thue-Siegel-Roth. Aparentemente, y aunque el teorema 4 ya era conocido antes, esta equivalencia fue observada por primera vez en [14]. Como ya hemos comentado, el teorema de Thue-Siegel-Roth es uno de los más importantes en el campo de la aproximación diofántica; a mi modo de ver, una reformulación en términos de la derivabilidad en los números algebraicos de una función patológica es realmente bonita.

Así pues, lo que tenemos que ver ahora es cómo deducir el teorema de Thue-Siegel-Roth a partir del teorema 4.

Dado x un número algebraico no racional, y $\nu > 2$, el teorema 4 asegura que f_ν es derivable en x, así que existe

$$\lim_{y \to x} \frac{f_\nu(y) - f_\nu(x)}{y - x} = f'_\nu(x).$$

Al aproximar $y \to x$ utilizando y irracionales, y como $f_\nu(y) = f_\nu(x) = 0$, resulta obvio que $f'_\nu(x) = 0$. En consecuencia, al aproximar $y \to x$ por racionales, es decir, $y = p/q$, también se debe cumplir

$$\lim_{p/q \to x} \frac{f_\nu(p/q) - f_\nu(x)}{p/q - x} = \lim_{p/q \to x} \frac{1/q^\nu}{p/q - x} = 0.$$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{1}{q^\nu} \le \varepsilon \left| \frac{p}{q} - x \right|$$

cuando $p/q \in (x - \delta, x + \delta)$. Es ahora fácil comprobar que lo mismo sucede para cualquier $p/q \in \mathbb{Q}$, quizás con una constante mayor ε' en lugar de ε. Así, (11) con $\alpha = \nu - 2$ y la constante positiva $C(x, \alpha) = 1/\varepsilon'$ no tiene ninguna solución racional, y hemos probado el teorema de Thue-Siegel-Roth, tal como pretendíamos.

6. La continuidad sólo en los racionales no es posible

Hemos visto que la función Thomae, que denominábamos f_1, es continua en los irracionales y discontinua en los racionales. De hecho, lo mismo le ocurría a cualquier función f_ν con $\nu > 0$. Vamos ahora a demostrar que el comportamiento contrario no es posible, es decir, que no existe ninguna función real que sea continua en los racionales y discontinua en los irracionales.

Comencemos recordando algunos hechos topológicos básicos. De manera muy general, una topología en X es una colección de subconjuntos de X, denominados *abiertos*, que cumplen ciertas propiedades; y se denominan *cerrados* a los complementarios de los conjuntos abiertos. Por definición, en una topología cualquiera (aunque aquí sólo nos interesa la topología euclídea usual), la unión arbitraria de conjuntos abiertos es un abierto, y la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un cerrado. En cambio, eso ya no es así con uniones arbitrarias de cerrados ni con intersecciones arbitrarias de abiertos (pensado en la topología usual, y teniendo en cuenta que en ella los puntos son conjuntos cerrados, si la unión arbitraria de cerrados fuese un cerrado, cualquier conjunto sería cerrado; y, tomando complementarios, también cualquier conjunto sería abierto). Lo que ocurre con uniones de cerrados e intersección de abiertos es más restrictivo: la unión finita de cerrados es un cerrado, y la unión finita de abiertos es un abierto.

Algo a medio camino entre uniones finitas y uniones arbitrarias es tomar uniones numerables (lo mismo podemos decir de las intersecciones, claro). En general, ni las uniones numerables de cerrados son un cerrado ni las intersecciones numerables de abiertos son un abierto, pero este tipo de conjuntos tienen mucha importancia cuando, en teoría de la medida, se introducen los conjuntos de Borel, y tienen nombre propio.

Los conjuntos cerrados son conjuntos de Borel, y también lo son los abiertos. Asimismo son conjuntos de Borel las uniones numerables de cerrados, y las intersecciones numerables de abiertos. Respectivamente, a estos conjuntos se les denomina F_σ y G_δ. La notación es de Haussdorf: las letras F y

G se usaban habitualmente para designar los conjuntos cerrados y los abiertos, respectivamente; y, en alemán, σ se refiere a la unión (*Summe*) y δ a la intersección (*Durchschnitt*).

No es difícil demostrar —tanto para funciones de variable real como de variable compleja, y con la topología euclídea habitual— que el conjunto de puntos de continuidad de una función arbitraria es un G_δ. Y esto equivale (basta tomar complementarios) a que el conjunto de discontinuidades de una función siempre es un F_σ.

En efecto, supongamos por simplicidad que tenemos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Por definición, f es continua en x si, para cualquier $\varepsilon = 1/n > 0$, existe $\delta > 0$ tal $|f(x) - f(y)| < 1/n$ cuando $y \in (x - \delta, x + \delta)$. De aquí se sigue que el conjunto de puntos de continuidad de f se puede escribir como

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\delta>0} \big\{x : \operatorname{diam}\big(f((x-\delta, x+\delta))\big) < 1/n\big\}.$$

Para cada n, el conjunto $\bigcup_{\delta>0} \big\{x : \operatorname{diam}\big(f((x-\delta, x+\delta))\big) < 1/n\big\}$ es abierto; y, por definición, la intersección de todos ellos es un G_δ, tal como queríamos comprobar.

Necesitamos asimismo aplicar un teorema importante, el denominado teorema de Baire, que tiene muchas aplicaciones en distintas partes de las matemáticas. En concreto —y aunque aquí esto no lo usaremos—, dicho teorema implica dos de los resultados que hacen que los espacios de Banach sean muy útiles en análisis matemático, el teorema de Banach-Steinhaus y el teorema de la aplicación abierta.

Pues bien, el teorema de Baire afirma que, si X es un espacio métrico completo, la intersección de cualquier colección numerable de subconjuntos abiertos densos en X es densa en X. Su demostración se puede ver, por ejemplo, en [13, sección 5.2]. A menudo se alude al teorema de Baire con el nombre de *teorema de categoría*, por la siguiente razón.

Decimos que un conjunto $E \subset X$ es *diseminado* (o, con el mismo significado, *raro* o *denso en ninguna parte*) si su adherencia no contiene ningún subconjunto abierto no vacío de X; en los reales y con la topología euclídea, si no contiene ningún intervalo. A los conjuntos que son uniones numerables de conjuntos diseminados se los denomina *conjuntos de primera categoría*; a los demás, *conjuntos de segunda categoría* (esta terminología es de Baire). Sin más que tomar complementarios, el enunciado del teorema de Baire equivale a decir que ningún espacio métrico completo es de primera categoría.

Con todo esto ya podemos demostrar lo siguiente:

Teorema 5. *No puede existir una función continua en los racionales y discontinua en los irracionales.*

Demostración. Basta ver que los irracionales $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no son un conjunto F_σ; comprobémoslo por reducción al absurdo. Supongamos que $\mathbb{I} = \bigcup_{i=0}^{\infty} C_i$ con los C_i conjuntos cerrados. Como los irracionales no contienen ningún intervalo, tampoco los C_i pueden contener un intervalo. Entonces, cada uno de los C_i es diseminado; esto es, su adherencia no contiene ningún intervalo. Por tanto, $\mathbb{I}$ es un conjunto de primera categoría.

Por otra parte, $\mathbb{Q}$ es numerable, luego obviamente es de primera categoría. En consecuencia, también $\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$ debería ser de primera categoría. Pero esto contradice el teorema de Baire, que afirma que ningún espacio métrico completo es de primera categoría. □

Sí que es verdad una especie de recíproco al hecho de que el conjunto de discontinuidades de una función siempre es un F_σ: si $G \subset \mathbb{R}$ es un G_δ, existe una función real que es continua en G y que no es continua en ningún punto fuera de G (la demostración puede verse en [8]). Pero esto ya es más de lo que pretendíamos explicar.

Referencias

[1] A. Baker y W. M. Schmidt, Diophantine approximation and Hausdorff dimension, *Proc. London Math. Soc. (3)* **21** (1970), 1–11.

[2] A. S. Besicovitch, Sets of fractional dimension (IV): On rational approximations to real numbers, *J. London Math. Soc.* **9** (1934), 126–131.

[3] R. B. Darst y G. D. Taylor, Differentiating powers of an old friend, *Amer. Math. Monthly* **103** (1996), 415–416.

[4] M. Frantz, Two functions whose powers make fractals, *Amer. Math. Monthly* **105** (1998), 609–617.

[5] G. A. Heuer y Undergraduate Research Participation Group, Functions continuous at the irrationals and discontinuous at the rationals, *Amer. Math. Monthly* **72** (1965), 370–373.

[6] V. Jarník, Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Mass, *Recueil Math. Moscow* **36** (1929), 371–382.

[7] A. Ya. Khinchin, *Continued fractions*, The University of Chicago Press, 1964. Republicación: Dover, 1997.

[8] S. S. Kim, A characterization of the set of points of continuity of a real function, *Amer. Math. Monthly* **106** (1999), 258–259.

[9] S. J. Miller y R. Takloo-Bighash, *An invitation to modern number theory*, Princeton University Press, 2006.

[10] A. Norton, Continued fractions and differentiability of functions, *Amer. Math. Monthly* **95** (1988), 639–643.

[11] J. E. Nymann, An application of Diophantine approximation, *Amer. Math. Monthly* **76** (1969), 668–671.

[12] K. F. Roth, Rational approximation of algebraic numbers, *Mathematika* **2** (1955), 1–20; Corrigendum, *Mathematika* **2** (1955), 168.

[13] W. Rudin, *Análisis real y complejo*, Alhambra, Madrid, 1979.

[14] J. L. Varona, Differentiability of a pathological function, Diophantine approximation, and a reformulation of the Thue-Siegel-Roth theorem, *Austral. Math. Soc. Gaz.* **36** (2009), 353–361.

[15] J. L. Varona, *Recorridos por la teoría de números*, 2.ª ed., Electolibris y Real Sociedad Matemática Española, Murcia, 2019. Disponible en https://www.unirioja.es/cu/jvarona/libroTN.html

[16] J. L. Varona, A couple of transcendental prime-representing constants, *Amer. Math. Monthly* **128** (2021), 922–928.

Departamento de Matemáticas y Computación
Universidad de La Rioja
jvarona@unirioja.es
https://www.unirioja.es/cu/jvarona/

Publicat el 23 de setembre de 2022