

## Anàlisi d'un trencaclosques tipus Rubik. Un pretext per parlar de modelització, grups, geometria, computació i programació

Jaume Agudé

Endreçant un armari vaig trobar una vella joguina, força usada —un trencaclosques, o com vulgueu dir-li— una de les moltíssimes variants que s'han arribat a fer sobre el **cub de Rubik**. Es tractava d'una esfera (figura 1) amb quatre cercles màxims que determinen hemisferis que poden girar un respecte de l'altre. Vaig estar-hi donant voltes una estona, mirant de tornar a reconstruir, amb poca traça i poc èxit, les dues figures —els conegudíssims Mickey i Donald— i, inevitablement, vaig començar a pensar en com es podria modelitzar el joc, què podríem dir sobre el seu grup de moviments, quina seria la millor manera de programar-ne la solució. . . Semblava clar que era un trencaclosques més senzill que el cub de Rubik, però també vaig pensar que el seu caràcter esfèric el feia, geomètricament i potser també psicològicament, més interessant que el cub. Sense adonar-me'n, ja estava començant a escriure aquestes notes, que potser a algú l'hi vindrà de gust llegir.



Figura 1: un trencaclosques d'aspecte innocent

L'article que heu començat a llegir és, doncs, un simple *divertimento* sense cap pretensió d'originalitat ni de profunditat. Malgrat això, potser sí que pot tenir algun interès perquè, en l'excursió que emprendrem a la recerca de la solució del trencaclosques, anirem trobant, mentre fem camí, objectes i conceptes matemàtics importants —molt més importants, tanmateix, que la simple resolució d'un petit enigma. Per exemple, parlarem dels sòlids arquimedians i de la projecció estereogràfica, de les representacions i les extensions de grups, de diagrames de Dynkin i de la classificació dels grups de Lie, de qüestions indecidibles a la teoria de grups —com el famosíssim *problema de les paraules*—, del cos de 13 elements, d'òrbites i d'estabilitzadors, d'arrels de la unitat, de permutacions i del grup alternat... Crec que l'excursió —com el viatge a Ítaca— serà força més valuosa que el seu primer objectiu, que era resoldre un vell trencaclosques retrobat endreçant un armari.

## 1 Consideracions geomètriques

Geomètricament, l'objecte que volem estudiar és una **tesel·lació esfèrica** formada per sis quadrats esfèrics i vuit triangles equilàters esfèrics, que s'obté traçant sobre l'esfera quatre cercles màxims que formen angles de 60 o 120 graus. La versió lineal d'aquesta figura seria un políedre convex format també per sis quadrats i vuit triangles equilàters, un políedre que rep el nom de **cuboctàedre** i que podem pensar com un cub amb els vèrtex truncats *al màxim* (figura 2).

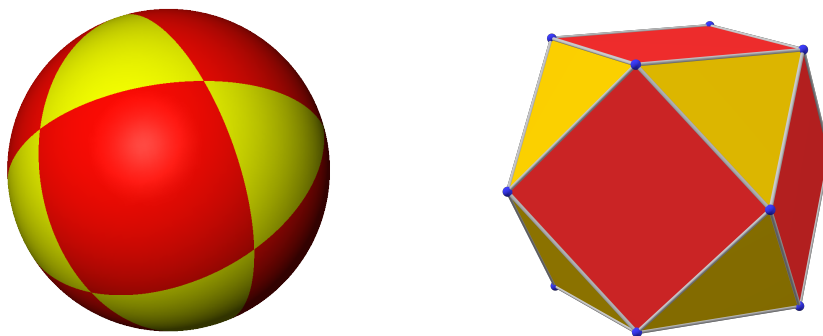


Figura 2: el cuboctàedre com a tesel·lació esfèrica i com a políedre convex.

Pappos d'Alexandria, el gran matemàtic del segle IV, en el llibre cinquè de la seva magna obra *Collecció matemàtica*, descriu **tretze políedres** que atribueix a Arquimedes<sup>1</sup> i completen la família dels famosos cinc sòlids platònics (figura 7). Els tretze políedres d'Arquimedes tenen en comú amb

<sup>1</sup>Heró d'Alexandria atribueix el cuboctàedre al mateix Plató.

els de Plató que són convexos, que les seves cares són polígons regulars i que tots els vèrtexs són indistingibles<sup>2</sup> però, mentre en els sòlids platònics —anomenats *regulars*— totes les cares són iguals, en els tretze políedres arquimedians —anomenats *semiregulars*— hi pot haver cares de tipus diferents, com en el cuboctàedre que ara ens ocupa que té cares que són quadrats i cares que són triangles equilàters. Estrictament parlant, de políedres semiregulars n'hi ha infinits perquè qualsevol prisma de base un polígon regular i cares laterals quadrades compleix les condicions que hem enumerat per als políedres d'Arquimedes; i això mateix podem dir de la família infinita dels *antiprismes* on les cares laterals són triangles equilàters que alternativament van quedant capiculats. Ara bé: si prescindim d'aquestes dues famílies infinites de políedres —que, certament, no tenen l'encant dels sòlids platònics— la llista de políedres semiregulars és finita i conté exactament<sup>3</sup> 13 objectes geomètrics que són els que va descriure Pappos en la seva obra.

Un dels més famosos d'aquests tretze sòlids arquimedians és el *rombicuboctàedre*, que apareix en una pintura clàssica que als matemàtics sempre ens emociona: el retrat del matemàtic *Luca Pacioli* pintat per Jacopo de' Barbari a finals del segle XV (Figura 3).



Figura 3: un rombicuboctàedre penja d'un fil en el famós retrat de Luca Pacioli.

<sup>2</sup>Dit d'una manera més tècnica: donats dos vèrtex qualsevol hi ha una simetria del políedre que transforma un vèrtex en l'altre.

<sup>3</sup>Exactament? Depèn: a la llista dels tretze n'hi ha dos que no són equivalents a les seves imatges especulars i, per tant, tindria sentit afegir aquestes imatges especulars a la llista i considerar que hi ha realment quinze sòlids arquimedians diferents.

Tornem al nostre trencaclosques i mirem com podem estudiar millor els moviments del cuboctàedre. El fet que es tracti d'un objecte tridimensional dificulta la comprensió dels mecanismes del joc —excepte per a les persones amb una extraordinària intuïció espacial.<sup>4</sup> Convindria, doncs, donar-ne una representació plana que fos fàcilment intel·ligible.

La millor manera de representar en un pla aquest objecte tridimensional és utilitzant la **projecció estereogràfica**. Recordem que aquesta importantíssima representació plana de l'esfera es defineix de la següent manera: escollim, per exemple, el pol sud de l'esfera com a centre de projecció i, des d'aquest punt, projectem els punts de l'esfera sobre el pla de l'equador (figura 4).

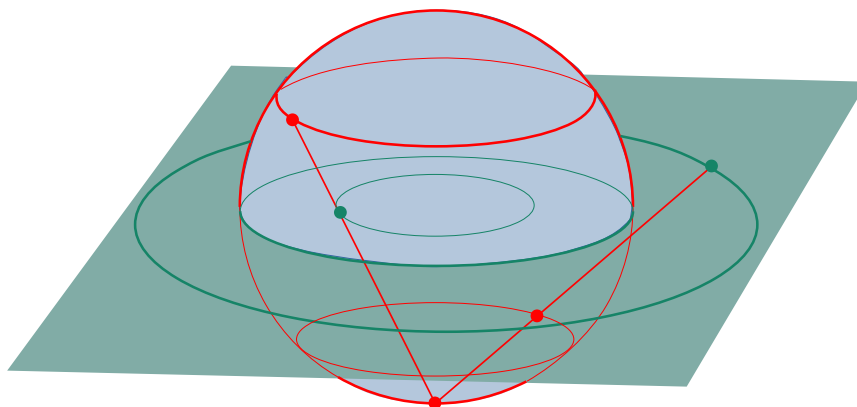


Figura 4: projecció estereogràfica des del pol sud al pla equatorial.

La projecció estereogràfica té moltes propietats geomètriques notables. Potser les més importants són que conserva els angles —es diu que és *conforme*— i que transforma les circumferències sobre l'esfera en circumferències al pla —o en rectes, si passen pel centre de la projecció. Aquesta segona propietat ens resulta magnífica per al nostre trencaclosques-cuboctàedre perquè els quatre cercles màxims al llarg dels quals es produeixen les rotacions bàsiques del joc vindran representats per circumferències del pla.

Si escollim com a centre de la projecció estereogràfica el centre d'un dels quadrats del trencaclosques obtenim un dibuix<sup>5</sup> com el de la figura 5. Hi veiem clarament els quatre cercles màxims, cinc dels sis quadrats (el sisè és, de fet, l'exterior de la figura) i els vuit triangles equilàters. Hem indicat

<sup>4</sup>En el cub de Rubik, per exemple, els colors de les peces centrals de cada cara del cub ens donen un sistema de referència extraordinàriament útil que aquí no tenim. A més, per algun motiu que els psicòlegs deuen haver estudiat, ens resulta més senzill imaginar què està passant amb les peces del cub que no veiem perquè són al darrere que no pas fer-ho amb les peces de la cara oculta d'una esfera.

<sup>5</sup>El dibuix de la figura 5 no és exactament una projecció estereogràfica, però la figura és més llegible d'aquesta manera.



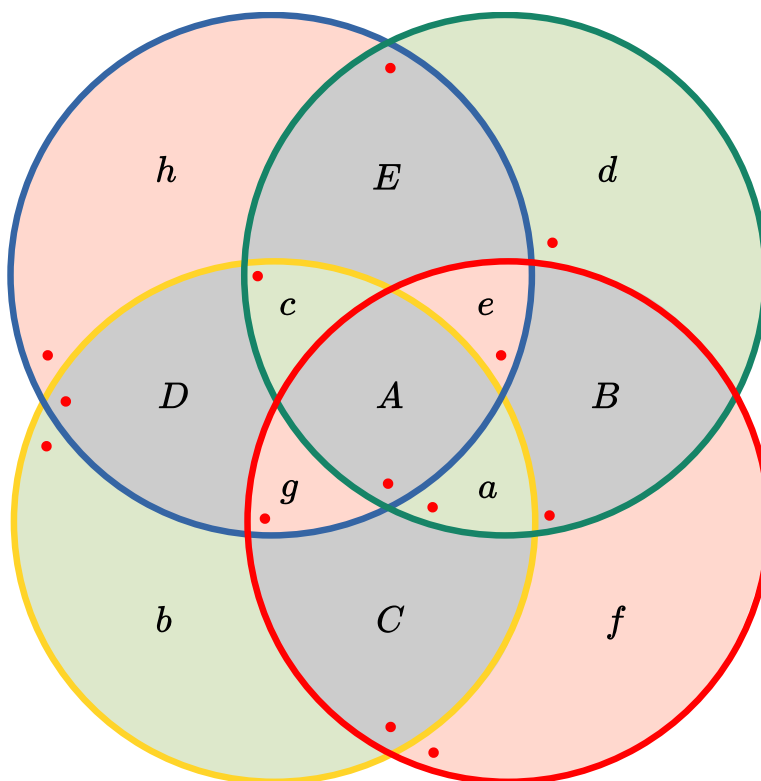


Figura 5: projecció estereogràfica (aproximada) del trencaclosques.

els 5 quadrats amb les lletres  $A, B, C, D, E$  i els 8 triangles amb les lletres  $a, b, c, d, e, f, g, h$ . Com que a la resolució del joc és crucial l'orientació de cadascuna de les seves peces —o, com a mínim, l'orientació de les peces que contenen alguna figura— ens cal tenir definida una orientació per a cada quadrat i cada triangle. Això ho hem fet amb un punt vermell situat prop d'un vèrtex de cadascuna de les peces.

Aquesta versió plana del trencaclosques és molt útil per a l'estudi que farem a continuació i, de fet, a moltes persones els pot resultar més senzill raonar sobre la figura plana —per exemple, a l'hora trobar moviments adients per a resoldre el trencaclosques— que no pas sobre l'objecte tridimensional.

En la versió del joc que inclou les figures d'en Mickey i en Donald, podem prendre el centre de la projecció al centre del quadrat que conté les cames d'en Mickey. Aleshores, el cap d'en Mickey és a  $E$ , la seva mà esquerra és a  $h$  i la dreta és a  $d$ ; el cap d'en Donald és a  $A$ , les cames són a  $C$ , la mà esquerra és a  $a$  i la mà dreta és a  $g$ ; els quadrats  $B, D$  i els triangles  $b, c, e, f$  estan en blanc. Tanmateix, en aquesta anàlisi podem suposar que aquestes sis peces també tenen alguna figura: això fa que el trencaclosques sigui molt més difícil de resoldre per a una persona, però per a l'estudi matemàtic que

farem aquesta complicació extra no representa cap dificultat especial, ans al contrari (com veurem).

## 2 Modelització: d'un joc a un grup

Per poder analitzar el joc, per poder resoldre el trencaclosques, ens cal capturar les seves propietats en una estructura matemàtica adient. Aquesta estructura serà, com és ben sabut, un **grup**<sup>6</sup> **finit** que anomenarem  $\mathcal{G}$ , les propietats del qual, si podem esbrinar-les, ens han de resoldre les preguntes que ens puguem fer sobre el desenvolupament del joc —incloent, és clar, el descobriment d'un mètode programable de resoldre'l. Aquest pas crucial de l'objecte d'estudi a una estructura matemàtica precisa és el que anomenem **modelització**.

Els elements del grup  $\mathcal{G}$  vindran donats pels diversos moviments que podem fer amb el cuboctàedre. Comencem, doncs, fixant algunes primeres idees sobre aquest grup.

- L'essència del trencaclosques consisteix en que els dos hemisferis determinats per qualsevol dels quatre cercles màxims es poden fer rodar lliurement un respecte de l'altre, de manera que si fem rotacions de 120 o 240 graus tornem a tenir un cuboctàedre. Aquests seran els *moviments elementals* del joc i, també, els generadors del grup  $\mathcal{G}$ .
- Les **simetries del cuboctàedre** formen un grup de 48 elements que és el mateix que el grup de simetries del cub. La meitat d'aquestes simetries són rotacions i formen un grup isomorf a  $\Sigma_4$ , el grup simètric que permuta les quatre diagonals del cub. Els elements d'aquest grup serien moviments globals de l'esfera amb en Mickey i en Donald i, clarament, **no ens interessen en aquest estudi**, perquè només ens interessen els moviments que impliquin fer rodar dos hemisferis un respecte de l'altre. En conclusió, en tots els moviments del grup  $\mathcal{G}$  suposarem que l'esfera es queda fixa i, per tant, podem suposar que un dels quadrats —diguem que és el que a la projecció estereogràfica s'estén fins l'infinit— es manté fix en tot moment. Dit d'una manera més intuïtiva: les cames d'en Mickey estan «ben posades» en tot moment i no es belluguen mai.
- Designem  $R_1, R_2, R_3, R_4$  els moviments elementals consistents en fer rodar 120 graus en sentit horari un hemisferi, seguint algun dels cercles màxims que hem representat amb els colors vermell, groc, verd i blau,

<sup>6</sup>En tot problema, gairebé sempre hi ha un grup que ens pot ajudar a resoldre'l. Modificant lleugerament una frase d'Alexandre Dumas que va esdevenir un tòpic de la novel·la negra, podríem dir: «*Il y a un groupe dans toutes les affaires; aussitôt qu'on me fait un rapport, je dis: «Cherchez le groupe!»*».

respectivament (figura 5 i figura 6). Un **moviment** serà qualsevol composició dels quatre moviments elementals. Direm que dos moviments són **equivalents** quan l'efecte que produeixin en les 13 peces del joc (recordem que hi ha un quadrat que mai no es mou) sigui el mateix. Aleshores,  $\mathcal{G}$  és el quocient del conjunt dels moviments per la relació d'equivalència que hem definit. És clar que  $\mathcal{G}$  és un **grup** i l'estructura d'aquest grup codifica tot el comportament del trencaclosques.

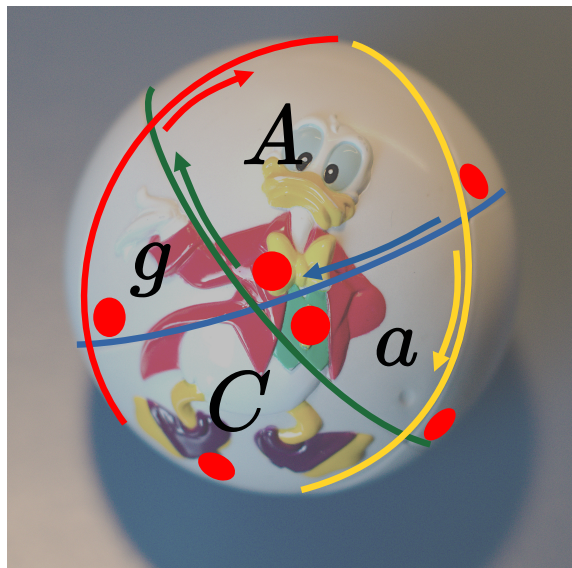


Figura 6: els generadors  $R_1$  (vermell),  $R_2$  (groc),  $R_3$  (verd) i  $R_4$  (blau).

- Tenim ben definit el grup  $\mathcal{G}$  i, de moment, només sabem d'ell que
  - $\mathcal{G}$  està generat per quatre elements d'ordre 3: cada rotació, feta tres vegades consecutives, torna a deixar-ho tot com estava.
  - $\mathcal{G}$  és un grup finit perquè és clar que les 13 peces del trencaclosques només es poden situar d'un nombre finit de maneres diferents,

El que farem a partir d'ara serà estudiar les propietats d'aquest grup  $\mathcal{G}$ .

### 3 Representacions naturals del grup $\mathcal{G}$

Podem dir que el mateix trencaclosques és una representació<sup>7</sup> física del grup  $\mathcal{G}$ . Com podem trobar una representació algebraica de  $\mathcal{G}$  que ens permeti fer càlculs i determinar completament, si és possible, la seva estructura?

<sup>7</sup>La paraula *representació* té un significat molt precís en teoria de grups. Aquí l'estem utilitzant d'una manera informal però el que direm està molt relacionat amb el concepte formal de representació d'un grup.

Com que, per definició, dos elements de  $\mathcal{G}$  són iguals si produeixen el mateix efecte sobre el cuboctàedre, la manera natural de codificar els elements de  $\mathcal{G}$  és a partir d'una codificació de les diferents configuracions del trencaclosques.

Coneixerem la situació del trencaclosques en qualsevol moment si sabem on és cadascuna de les seves peces i quina orientació té. Comencem amb una sèrie d'observacions simples.

- Si prescindim de l'orientació, la situació de les 13 peces la podem descriure com una permutació del conjunt

$$\{A, B, C, D, E, a, b, c, d, e, f, g, h\},$$

és a dir, com un element del grup simètric  $\Sigma_{13}$ . És clar que no totes les permutacions són possibles: és evident que un quadrat no pot ocupar el lloc d'un triangle ni a l'inrevés. Encara hi ha una altra restricció que pot passar desapercebuda en un primer moment: en el dibuix de la figura 5 es veu clar que els moviments elementals no poden dur un triangle verd a una casella rosa, ni un triangle rosa a una casella verda, és a dir, els triangles verds  $a, b, c, d$  es permuten entre ells i els triangles roses  $e, f, g, h$  també ho fan.<sup>8</sup> Potser encara hi ha altres restriccions menys evidents però, en tot cas, la situació de les 13 peces —sense tenir en compte la seva orientació— vindrà donada per una permutació del grup  $\Sigma_5 \times \Sigma_4 \times \Sigma_4$ . N'hi ha 69.120.

- L'orientació de cada peça, com que hem fixat una orientació inicial —els punts vermells a la figura 5— la podem donar indicant quina rotació (en sentit horari) té la peça sobre l'orientació inicial. Cada quadrat pot quedar girat 0, 90, 180 o 270 graus i cada triangle equilàter pot quedar girat 0, 120 o 240 graus. Això vol dir que per a cada permutació de les peces del trencaclosques podem tenir, en principi,  $5^4 \times 8^3 = 320.000$  possibilitats. Com en el cas anterior, no tots aquests girs seran possibles utilitzant els moviments del joc, però aquestes xifres ens donen una cota superior al nombre d'elements que pot tenir  $\mathcal{G}$ :

$$|\mathcal{G}| \leq 69.120 \times 320.000 = 22.118.400.000.$$

Si féssim trampa desmuntant el trencaclosques, com que ja no tindríem la restricció dels triangles verds i els triangles roses, podríem tornar-lo a muntar de 1.548.288.000.000 maneres diferents: fent una combinació diferent cada segon, trigariem prop de cinquanta mil anys en haver-les fet totes.

<sup>8</sup>Si, per exemple, observem que la mà dreta d'en Mickey (triangle  $d$ ) és al lloc on hi hauria d'haver la mà dreta d'en Donald (triangle  $g$ ), podem estar segurs que el joc ha estat manipulat fraudulentament.

- Un gir de 90 graus el podem representar analíticament utilitzant una arrel quarta (primitiva<sup>9</sup>) de la unitat que, com és habitual, denotarem per  $i$ . D'aquesta manera, les quatre orientacions possibles de la peça  $A$  serien

$$A, \quad iA, \quad i^2A = -A, \quad i^3A.$$

Anàlogament, les tres orientacions d'una peça triangular les podem representar utilitzant una arrel cúbica (primitiva) de la unitat que, com és habitual, denotarem  $\omega$  i així, per exemple, les tres orientacions de la peça  $a$  serien

$$a, \quad \omega a, \quad \omega^2 a.$$

Al cos dels nombres complexos tenim les arrels de la unitat  $i, \omega$  que necessitem, però aquest cos no ens convé gens de cara a les computacions que hem de fer. Una opció molt millor és considerar **el cos de 13 elements**  $\mathbb{F}_{13}$  que és el cos més petit<sup>10</sup> que conté les arrels quartes i les arrels cúbiques de la unitat: en aquest cos podem prendre  $i = 5$  i  $\omega = 3$ .

Amb tot això que hem dit veiem que els elements de  $\mathcal{G}$  es poden representar com **permutacions amb coeficients** i aquests coeficients són potències de  $i$  o potències de  $\omega$  que podem interpretar com elements del cos  $\mathbb{F}_{13}$ . Aquesta mena de grups admeten representacions lineals molt senzilles, és a dir, podem representar els elements de  $\mathcal{G}$  com a matrius **monomials**<sup>11</sup>  $13 \times 13$  sobre el cos  $\mathbb{F}_{13}$ .

Per escriure les matrius que corresponen als moviments bàsics és molt útil la representació estereogràfica de la figura 5. Prenem  $A, B, C, D, E, a, b, c, d, e, f, g, h$  com a base d'un espai vectorial sobre  $\mathbb{F}_{13}$  i escrivim els quatre generadors  $R_1, R_2, R_3, R_4$  de  $\mathcal{G}$  com a matrius en aquesta base.

Observem que aquestes matrius tindran la forma  $\begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & Z \end{pmatrix}$  on  $X$  és una

matriu  $5 \times 5$  corresponent als quadrats i  $Y, Z$  són matrius  $4 \times 4$  corresponents, respectivament, als triangles verds i els triangles roses. Les matrius  $X, Y, Z$

<sup>9</sup>Diem que  $\zeta$  és una arrel primitiva  $n$ -èssima de la unitat si  $\zeta^n = 1$  però  $\zeta^r \neq 1$  per tot  $0 < r < n$ .

<sup>10</sup>Per cada primer  $p$  i cada  $r > 0$  hi ha un cos finit amb  $p^r$  elements que es denota per  $\mathbb{F}_{p^r}$ . Aquests són, llevat d'isomorfisme, tots els cossos finits que hi ha. El grup multiplicatiu de  $\mathbb{F}_{p^r}$  és un grup cíclic d'ordre  $p^r - 1$ . Per tant, si volem tenir una arrel quarta i una arrel cúbica (primitives, és clar) de la unitat, cal que  $p^r - 1$  sigui múltiple de 12. Per tant, el cos més petit que podem utilitzar és el cos amb  $p = 13$  i  $r = 1$ .

<sup>11</sup>Una matriu monomial és la que a cada fila i a cada columna té un únic terme diferent de zero.

són, per a cadascun dels quatre generadors, aquestes:

$$R_1 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_2 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 : \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ i^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_4 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & i^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \omega^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenim, doncs, una bona definició algebraica del grup  $\mathcal{G}$ : és el subgrup del grup lineal  $\text{GL}_{13}(\mathbb{F}_{13})$  generat per les quatre matrius  $13 \times 13$  que tenen, a la diagonal, les matrius anteriors. Ara ja podem començar a estudiar-lo.

## 4 Les eines de sage i GAP ens permeten analitzar el grup $\mathcal{G}$

Per analitzar  $\mathcal{G}$  ens cal disposar d'eines per poder resoldre alguns problemes computacionals fonamentals a la teoria de grups, com són aquests:

- **Ordre.** Hem de ser capaços de calcular l'ordre —és a dir, el nombre d'elements— de  $\mathcal{G}$  i de certs subgrups que ens interessin.
- **Òrbites.** Si  $G$  és un grup que actua sobre un conjunt  $X$ , l'òrbita d'un punt  $x \in X$  és el conjunt de tots els  $y \in X$  tals que existeix algun  $g \in G$  que compleix  $gx = y$ . En el nostre cas, l'òrbita d'una peça (orientada) del trencaclosques està formada per totes les *posicions* que pot ocupar aquesta peça al llarg del joc.



- **Estabilitzadors.** Si  $G$  és un grup que actua sobre un conjunt  $X$  i tenim  $x \in X$ , l'estabilitzador de  $x$  és el subgrup de  $G$  format per tots els  $g \in G$  tals que  $gx = x$ . En el nostre cas, si ja tenim una peça ben posada, ens interessarà conèixer quins moviments deixen aquesta peça tal com està.
- **El problema de les paraules.** Aquest és un problema molt important a la teoria de grups. La versió d'aquest problema que ens interessarà en aquest estudi serà aquesta: donat un grup  $G$ , un conjunt de generadors  $g_1, \dots, g_n$ , i un element  $g \in G$ , trobar una expressió de  $g$  com a producte dels generadors; és a dir, trobar una *paraula*  $g_{i_1}g_{i_2} \cdots g_{i_k} = g$ . Observem que si podem resoldre aquest problema per al nostre grup  $\mathcal{G}$  ja tenim, immediatament, una solució del trencaclosques: si ens donen el trencaclosques desordenat, prenem nota de quina permutació tenen les seves peces, resollem el problema de les paraules i trobem una paraula en els generadors  $R_1, R_2, R_3, R_4$  que doni lloc a aquesta permutació, apliquem la paraula inversa i tornarem el trencaclosques a la seva posició inicial.

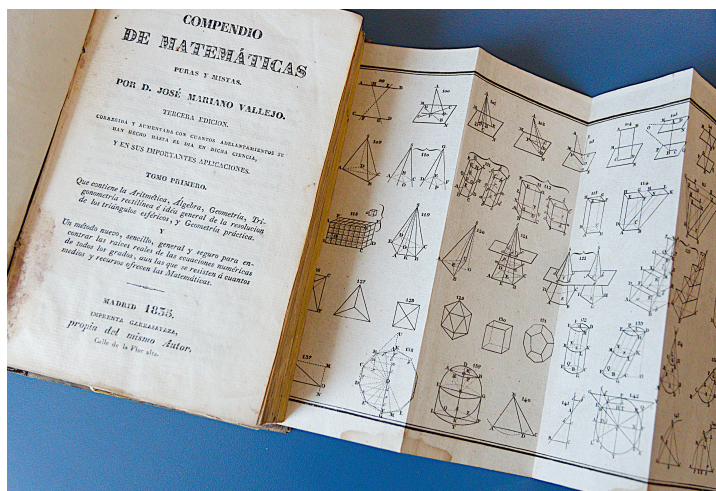


Figura 7: una làmina amb els cinc sòlids platònics en un llibre de matemàtiques del 1819 (any de la primera edició). La representació del tetràedre i de l'octàedre no són les millors possibles.

Tots aquests problemes són extraordinàriament difícils de resoldre i, en molts casos, impossibles,<sup>12</sup> i formen part del nucli de la *teoria computacional*

<sup>12</sup>En aquesta àrea ens trobem amb una gran quantitat de problemes que són *indecidibles*, és a dir, s'ha demostrat que no hi pot haver cap algorisme que trobi, en tots els casos, la solució. Donem un exemple concret: que una matriu  $4 \times 4$  amb coeficients enters, invertible, es pugui expressar o no com a producte d'unes quantes matrius donades és indecidible.

de grups, una branca molt activa de les matemàtiques. Els millors algorismes coneguts estan incorporats al software de referència en aquests temes que és **GAP** i també formen part de **sage**, que és el software que hem utilitzat per preparar aquest estudi.

Afortunadament, hi ha bons algorismes per resoldre aquests problemes en la categoria dels **grups de permutacions** i això fa que la representació lineal de  $\mathcal{G}$  que hem considerat abans no sigui apropiada per investigar l'estructura del nostre grup. Malgrat que aquella representació lineal és molt natural, l'haurem de traduir en una representació de  $\mathcal{G}$  com a grup de permutacions, inevitablement més feixuga. La manera de fer-ho és, en lloc de considerar les peces del trencaclosques com a vectors, considerar el conjunt de totes les peces amb totes les orientacions. És a dir, a partir d'ara considerarem  $\mathcal{G}$  com un grup de permutacions d'aquest conjunt de 44 elements:

$$\begin{aligned} & [A, iA, i^2A, i^3A, B, iB, i^2B, i^3B, C, iC, i^2C, i^3C, D, iD, i^2D, i^3D, \\ & E, iE, i^2E, i^3E, a, \omega a, \omega^2 a, b, \omega b, \omega^2 b, c, \omega c, \omega^2 c, d, \omega d, \omega^2 d, \\ & e, \omega e, \omega^2 e, f, \omega f, \omega^2 f, g, \omega g, \omega^2 g, h, \omega h, \omega^2 h]. \end{aligned}$$

Concretament, els moviments elementals vindran donats per aquestes permutacions (expressades com a productes de 3-cicles disjunts):

$$\begin{aligned} R_1 = & (A, iB, i^3C) (B, i^2C, i^3A) (C, iA, i^2B) (i^2A, i^3B, iC) \\ & (a, \omega a, \omega^2 a) (e, \omega f, \omega^2 g) (f, \omega g, \omega^2 e) (g, \omega e, \omega^2 f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2 = & (A, iC, i^2D) (C, iD, i^3A) (D, i^2A, i^3C) (i^3D, iA, i^2C) \\ & (a, \omega b, \omega^2 c) (b, \omega c, \omega^2 a) (c, \omega a, \omega^2 b) (g, \omega g, \omega^2 g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3 = & (A, i^3E, i^3B) (E, B, iA) (iB, i^2A, iE) (i^2B, i^3A, i^2E) \\ & (a, c, \omega^2 d) (d, \omega a, \omega c) (e, \omega e, \omega^2 e) (\omega^2 a, \omega^2 c, \omega d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_4 = & (A, D, iE) (E, i^3A, i^3D) (i^2E, iA, iD) (i^2A, i^2D, i^3E) \\ & (c, \omega c, \omega^2 c) (e, g, \omega h) (h, \omega^2 e, \omega^2 g) (\omega e, \omega g, \omega^2 h) \end{aligned}$$

Com que els moviments elementals són d'ordre 3, El seus inversos consisteixen a fer la mateixa rotació *en sentit antihorari*. Per això, és útil introduir aquesta notació:

$$L_1 := R_1^2 = R_1^{-1}, \quad L_2 := R_2^2 = R_2^{-1}, \quad L_3 := R_3^2 = R_3^{-1}, \quad L_4 := R_4^2 = R_4^{-1}.$$

Ja tenim a punt les eines per començar a estudiar el grup  $\mathcal{G}$ . Per exemple Sage calcula amb gran velocitat l'ordre dels grups involucrats. D'entrada:

$$|\mathcal{G}| = 100.776.960 = 2^{10} 3^9 5.$$

Veiem que  $\mathcal{G}$  és un grup prou gran com per justificar l'ús dels mètodes de la teoria computacional de grups, però és encara un grup força petit. Per comparació, recordem que el nombre d'elements del grup del **cub de Rubik** és de 43.252.003.274.489.856.000, que és un nombre 11 ordres de magnitud més gran que l'ordre de  $\mathcal{G}$ .

### Permutacions no orientades i una extensió de grups

Ja hem comentat anteriorment que, si ens oblidem de l'orientació de les peces del trencaclosques, obtenim permutacions dels 5 quadrats  $A, B, C, D, E$ , dels quatre triangles verds  $a, b, c, d$  i dels quatre triangles roses  $e, f, g, h$ . Matemàticament, tenim un homomorfisme de grups

$$\varphi : \mathcal{G} \longrightarrow \Sigma_5 \times \Sigma_4 \times \Sigma_4.$$

Definim el grup *no orientat*  $\mathcal{G}^u$  com la imatge  $\varphi(\mathcal{G}) \subseteq \Sigma_5 \times (\Sigma_4)^2$ . Què podem dir d'aquest grup? Les eines de **sage** ens permeten dilucidar fàcilment l'estructura de  $\mathcal{G}^u$  i el resultat és aquest:

$$\mathcal{G}^u = A_5 \times A_4 \times A_4$$

on  $A_n$  indica el grup alternat de  $n$  objectes, és a dir, el grup de les permutacions *parelles*. Per tant, amb els moviments permesos en el joc podem obtenir qualsevol permutació parella de les peces quadrades, qualsevol permutació parella dels triangles verds i qualsevol permutació parella dels triangles roses, i només podem obtenir permutacions parelles.

Acabem de trobar un **epimorfisme de grups**

$$\varphi : \mathcal{G} \longrightarrow A_5 \times (A_4)^2$$

que, automàticament, ens definirà un **subgrup normal** de  $\mathcal{G}$ : el **nucli** de  $\varphi$ , que designarem per  $K$  i ha de tenir exactament

$$|K| = |\mathcal{G}| / |A_5 \times (A_4)^2| = 11.664 = 2^4 \cdot 3^6$$

elements. En el llenguatge de la teoria de grups, direm de  $\mathcal{G}$  és una **extensió** de  $A_5 \times (A_4)^2$  per  $K$  i escriurem

$$K \twoheadrightarrow \mathcal{G} \twoheadrightarrow A_5 \times (A_4)^2.$$

### Dilucidació de l'estructura de $\mathcal{G}$

El pas següent a l'hora de determinar l'estructura de  $\mathcal{G}$  és determinar l'estructura del nucli  $K$  que, per definició, és el grup de tots els moviments que deixen totes les peces del trencaclosques al seu lloc —potser amb les orientacions canviades. Les eines de **sage** permeten resoldre fàcilment aquesta qüestió i això és el que trobem:

- $K$  és un grup abelià.  $K = K_2 \times K_3$  amb  $K_2 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$  i  $K_3 \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6$ .
- $K_2$  està format per moviments de  $\mathcal{G}$  que **canvien els signes** (i.e. girs de 180 graus) dels quadrats. És a dir,  $A \mapsto -A$ ,  $B \mapsto -B$ ,  $C \mapsto -C$ ,  $D \mapsto -D$ ,  $E \mapsto -E$ . Aquests cinc possibles canvis de signe formen un grup  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5$  i  $K_2$  és precisament el subgrup d'índex dos format pels moviments que canvien de signe un nombre parell de quadrats. És a dir,  $K_2 = \{(x, y, z, t, w) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5 : x + y + z + t + w = 0\}$ .
- $K_3$  admet una descripció similar.  $K_3 = K_3^v \times K_3^r$ , on  $K_3^v$  està format per rotacions dels triangles verds de manera que  $K_3^v = \{(x, y, z, t) \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4 : x + y + z + t = 0\}$ , i el mateix podem dir de  $K_3^r$  respecte dels triangles roses.

En conclusió, tenim una extensió amb nucli abelià

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \twoheadrightarrow \mathcal{G} \twoheadrightarrow A_5 \times (A_4)^2.$$

Sempre que tenim una extensió de grups tenim una **acció** del grup quotient sobre el grup nucli. En aquest cas, tindrem una acció de  $A_5 \times (A_4)^2$  sobre  $K_2 \times K_3$ . Aquesta acció es pot calcular de manera totalment explícita —amb l'ajuda de **sage**— i veiem que és l'acció més natural que podíem imaginar:  $A_5$  actua trivialment sobre  $K_3$  i actua sobre  $K_2$  per permutacions dels factors de  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5$ ; un  $A_4$  actua trivialment sobre  $K_2$  i sobre  $K_3^v$  i actua sobre  $K_3^r$  per permutació dels factors de  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ ; l'altre  $A_4$  fa el mateix amb els triangles roses.

Encara no ho sabem tot sobre el grup  $\mathcal{G}$ , però ens hi anem acostant. Estem veient que tot sembla com si els quadrats i els triangles anessin cadascun per la seva banda, de manera independent uns dels altres i, encara, entre els triangles també sembla que els verds i els roses es moguin independentment. Això suggereix que potser  $\mathcal{G}$  **descompon com a producte cartesià de tres grups**, un grup que actua només sobre els quadrats, un grup que actua només sobre els triangles verds i un tercer grup que actua només sobre els triangles roses

$$\mathcal{G} = \mathcal{Q} \times \mathcal{T}_v \times \mathcal{T}_r?$$

Intentarem ara confirmar o desmentir aquesta hipòtesi.

La **primera descomposició** de  $\mathcal{G}$  com a producte de dos grups, un que mou els quadrats i l'altre que mou els triangles és, amb l'ajuda de **sage**, relativament senzilla de trobar. En efecte, aquests dos subgrups de  $\mathcal{G}$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &:= \{x \in \mathcal{G} : x = 1 \text{ en els triangles} \} \\ \mathcal{T} &:= \{x \in \mathcal{G} : x = 1 \text{ en els quadrats} \} \end{aligned}$$

tenen les propietats següents

- Els dos subgrups **commuten**: si  $x \in \mathcal{Q}$ ,  $y \in \mathcal{T}$ , aleshores  $xy = yx$ . Això és evident si tenim en compte, per exemple, la representació matricial de  $\mathcal{G}$  que hem vist anteriorment.
- La intersecció dels dos subgrups consisteix únicament en la identitat. Això és evident.
- De les dues propietats anteriors es dedueix que tenim un homomorfisme injectiu  $\phi : \mathcal{Q} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{G}$ .
- **sage** ens diu que  $|\mathcal{Q}| = 960$  i  $|\mathcal{T}| = 104.976$ . Com que  $960 \times 104.976 = 100.776.960 = |\mathcal{G}|$ , deduïm que  $\phi$  és un isomorfisme i  $\mathcal{G} = \mathcal{Q} \times \mathcal{T}$ .

Aquesta descomposició redueix el problema d'estudiar  $\mathcal{G}$  al problema d'estudiar dos grups més senzills:  $\mathcal{Q}$  i  $\mathcal{T}$ . A més, aquests dos grups també són extensions de grups alternats:

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 &\hookrightarrow \mathcal{Q} \twoheadrightarrow A_5 \\ (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6 &\hookrightarrow \mathcal{T} \twoheadrightarrow (A_4)^2 \end{aligned}$$

La **segona descomposició** consistirà en descompondre  $\mathcal{T}$  com a producte de dos grups, si és possible. Si procedim de la mateixa manera que abans de seguida veiem que els ordres no quadren. Pensant-hi una estona ens adonem que demanar que  $x = 1$  en els triangles roses o verds és massa restrictiu. Imaginem, per exemple, que hi hagués un moviment  $s$  tal que

$$s(a) = \omega a, \quad s(b) = \omega b, \quad s(c) = \omega c, \quad s(d) = \omega d.$$

Aquest moviment vindria donat, en els triangles verds, per una matriu diagonal amb tots els termes de la diagonal iguals, el que es coneix com *matriu escalar*. Aquestes matrius són **centrals**: commuten amb qualsevol altra matriu. Amb aquesta idea, definim

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_v &:= \{x \in \mathcal{T} : x \text{ ve donat per una matriu escalar en els triangles roses} \} \\ \mathcal{T}_r &:= \{x \in \mathcal{T} : x \text{ ve donat per una matriu escalar en els triangles verds} \} \end{aligned}$$

Aquests dos grups tenen les condicions que volíem —**sage** ens calcula els seus ordres i resulten iguals a 324, i també comprova que la seva intersecció és trivial— i arribem a la conclusió que, efectivament, el grup del trenca-closques  $\mathcal{G}$  és un producte de tres grups  $\mathcal{G} = \mathcal{Q} \times \mathcal{T}_v \times \mathcal{T}_r$  cadascun dels quals està descrit com una extensió. Com que els grups  $\mathcal{T}_v$  i  $\mathcal{T}_r$  són equivalents en tots els aspectes, farem un canvi de notació i els denotarem indistintament per la lletra  $\mathcal{T}$ .

Encara ens falta alguna mica més d'informació per poder afirmar que coneixem exactament qui són aquests dos grups  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{T}$ .

### El grup $\mathcal{Q}$ i el selecte *Club dels Grups Finites de Reflexions*

De moment sabem que el grup  $\mathcal{Q}$  és una extensió d'un grup alternat per un grup dels que s'anomenen *abelians elementals*

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \twoheadrightarrow \mathcal{Q} \twoheadrightarrow A_5$$

i també sabem exactament com actua  $A_5$  sobre  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ . Amb això, però, no n'hi ha prou per saber exactament qui és  $\mathcal{Q}$ , perquè d'extensions com aquesta n'hi pot haver més d'una.

De totes les extensions possibles, la més senzilla és la que es coneix com el *producte semidirecte* —denotat amb el símbol  $\rtimes$ — que es distingeix de les altres en el fet que la projecció  $\pi : \mathcal{Q} \twoheadrightarrow A_5$  admet una *secció*, és a dir, hi ha un homomorfisme de grups  $s : A_5 \rightarrow \mathcal{Q}$  tal que  $\pi s(x) = x$  per tot  $x \in A_5$ . És  $\mathcal{Q}$  un producte semidirecte? Novament, amb les eines de càlcul de **sage** no és gens difícil trobar una secció  $s$  com la que ens cal, i tenim, finalment, una descripció completa del grup  $\mathcal{Q}$ :

$$\mathcal{Q} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes A_5,$$

el producte semidirecte del grup alternat  $A_5$  —que ens controla les permutacions dels quadrats del cuboctàedre— i el grup abelià elemental  $K_2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$  —que ens controla el signe  $\pm$  dels quadrats—, de manera que  $A_5$  actua sobre  $K_2$  de la manera que hem explicat més amunt.

$\mathcal{Q}$  no és un grup qualsevol: està emparentat amb aquest grup lleugerament més gran

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes \Sigma_5,$$

que pertany al selecte club dels **grups finits de reflexions**.<sup>13</sup> Ara caldria explicar per què els membres d'aquest club són tan significatius, però el tema és tan immens i les seves ramificacions tan extenses i profundes que no serà fàcil de resumir-les en poques paraules.

Imaginem que entrem en una sala plena de miralls, de manera que la nostra imatge es reflecteix indefinidament sobre els miralls i podem observar una quantitat immensa —generalment, infinita— d'imatges de nosaltres mateixos. Excepcionalment, hi ha algunes configuracions de miralls que produeixen només una quantitat finita d'imatges nostres: haurem construït un **calidoscopi** (tridimensional) i el grup que generen les reflexions en els miralls direm que és un *grup finit de reflexions*.

Com podem construir aquests bonics calidoscopis tridimensionals? Els políedres regulars —sí, tornen a aparèixer els **sòlids platònics!**— ens donen cinc calidoscopis 3-D perquè el grup de simetria de cadascun d'aquests cossos està generat per tres reflexions i és, per tant, un grup finit de reflexions.

Com sempre succeeix a les matemàtiques, no hi ha cap motiu per quedar-nos en la consuetudinària — i potser una mica avorrida— dimensió tres: els

<sup>13</sup>De fet,  $\mathcal{G}$  seria el subgrup de les **rotacions** del grup de reflexions  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes \Sigma_5$ .



políedres regulars en dimensió 4, 5, 6, ... ens donaran més grups finits de reflexions. Arribats en aquest punt, és natural preguntar-se: quants políedres regulars hi ha en dimensió arbitrària? quants grups finits de reflexions hi ha en total? quants calidoscopis diferents podríem construir si no fóssim presoners d'aquestes escasses tres dimensions on sembla que vivim?

Els grups finits de reflexions van ser classificats l'any 1935 pel geòmetra canadenc H. S. M. Coxeter. Els irreductibles —els que no es poden expressar com a productes d'altres grups de reflexions— consisteixen en quatre famílies infinites denotades  $A_n$  ( $n \geq 1$ ),  $B_n$  ( $n \geq 2$ ),  $D_n$  ( $n \geq 4$ ),  $I_2(r)$ , ( $r \geq 5$ ,  $r \neq 6$ ), i exactament **set** grups més, denotats  $G_2$ ,  $H_3$ ,  $H_4$ ,  $F_4$ ,  $E_6$ ,  $E_7$  i  $E_8$ .<sup>14</sup> L'estructura abstracta d'aquests grups ve completament descrita per uns diagrames molt senzills anomenats, segons el context on apareguin, **diagrames de Coxeter** o **diagrames de Dynkin**, i són els de la figura 8. En aquesta taula hi podem trobar, per exemple, els grups de simetria dels sòlids platònics: el del tetràedre és  $A_3$ , el del cub i l'octàedre és  $B_3$  i el del dodecàedre i l'icosàedre és  $H_3$ . Les simetries d'un polígon regular de  $r$  costats formen el grup  $I_2(r)$ . El grup  $G_2$  no és altra cosa que el grup  $I_2(6)$  format per les simetries d'un hexàgon regular, però aquest grup és tan important que té ben guanyat l'honor de tenir un nom propi.

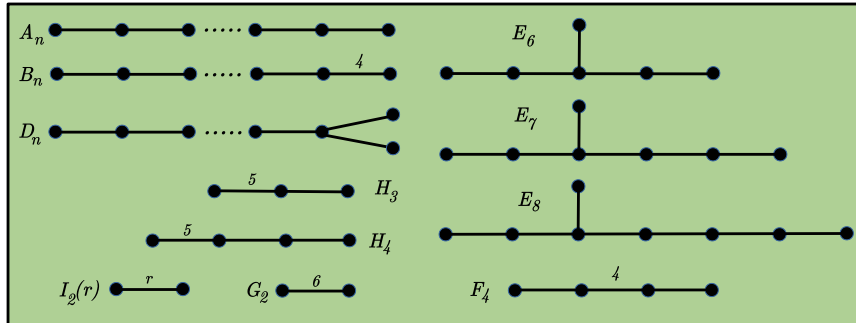


Figura 8: els membres irreductibles del Club dels Grups Finites de Reflexions.

Què podem dir dels políedres regulars més enllà de la dimensió tres? No ens fem il·lusions: n'hi ha molt pocs. Poquíssims. Observem que al pla tenim infinits polígons regulars i quan passem a l'espai ja només tenim cinc políedres regulars. Quan creix la dimensió, les exigències de la regularitat es fan cada vegada més difícils de satisfer. Si visquéssim en dimensió quatre encara tindríem unes joguines ben boniques: a banda de les generalitzacions a quatre dimensions del tetràedre, el cub i l'octàedre (que és el dual del cub) —que existeixen en qualsevol dimensió— tenim unes espectaculars generalitzacions del dodecàedre i l'icosàedre, i també un sisè políedre formidable

<sup>14</sup>Sembla que ens haguem saltat la lletra  $C$ . Efectivament, la família  $C_n$  també existeix, però en aquest context que ara ens ocupa,  $C_n = B_n$ .

que no té parangó amb cap dels cinc sòlids platònics; però més enllà de la dimensió quatre només queden el tetràedre, el cub i el seu dual.

Els políedres regulars que hi ha en dimensió quatre no tenen noms atractius.<sup>15</sup> S'acostumen a designar: **4-símplex** (el tetràedre de dimensió 4), **4-cub**, **16-cel·la** (l'octàedre de dimensió 4, figura 9), **24-cel·la**, **120-cel·la**<sup>16</sup> (figura 9) i **600-cel·la**, i aquests últims nombres (16, 24, 120, 600) fan referència al nombre de «cares» de dimensió 3 que tenen. Evidentment, els grups de simetria d'aquests políedres regulars han de sortir a la llista dels grups finits de reflexions: el grup de simetria del 4-símplex és  $A_4$ , la 16-cel·la i el cub són duals un de l'altra i el seu grup de simetria és  $B_4$ ; la 120-cel·la i la 600-cel·la són duals una de l'altra i el seu grup de simetria és  $H_4$ ; finalment, l'excepcional 24-cel·la —té 24 3-cares que són octàedres— és auto-dual i té com a grup de simetria el grup  $F_4$ , que és potser el membre el club de la figura 8 que va més per lliure: no forma part de cap família.



Figura 9: esquerra: els 8 vèrtex i les 24 arestes de la 16-cel·la; els 32 triangles equilàters i els 16 tetràedres sòlids ens els hem d'imaginar. Dreta: una representació parcial de la 120-cel·la va ser portada a Nature perquè contenia un article que especulava, a partir d'una anàlisi de la radiació còsmica de fons, que la forma de l'univers podria ser una *esfera de Poincaré* (que és un quocient de la 120-cel·la).

A partir del concepte simple de *reflexió* hem anat trobant objectes fascinants, però tot això només és la punta d'un iceberg immensament més

<sup>15</sup>Sí que tenen nom. De fet, en tenen molts —hecatonicosacoron, dodecacontacoron, hexacosicoron i coses així— però són noms que han tingut poc èxit, per motius evidents.

<sup>16</sup>La 120-cel·la, el políedre regular en dimensió 4 que té 120 cares de dimensió 3 que són dodecàedres sòlids és, incontestablement, el més fascinant de tots els políedres regulars que existeixen. Entre moltes altres coses, aquest políedre de 600 vèrtex, 1200 arestes, 720 pentàgons regulars i 120 dodecàedres sòlids juga un paper essencial en la construcció de l'*esfera de Poincaré*. L'autor va pronunciar una conferència de divulgació l'any 2009 a la universitat d'Almeria en la que es parlava de l'article de Nature (figura 9) i de la 120-cel·la, d'una manera molt elemental. Un vídeo d'aquesta conferència es pot trobar a <http://mat.uab.cat/~aguade/teaching.html>.

gran. Per exemple, aquests grups juguen un paper molt important en la **teoria d'invariants polinòmics** i en el problema de l'**empaquetament d'esferes**, per fer esment de només dos temes profunds de dues àrees força separades. Però potser on la repercussió dels grups de reflexions és més transcendental és en la **classificació del grups de Lie i de les àlgebres de Lie**.<sup>17</sup>

A cada grup de Lie compacte i connex li podem associar, de manera canònica, un grup finit anomenat el **grup de Weyl** del grup de Lie. Aquest grup de Weyl té dues propietats importantíssimes: en primer lloc, conté molta informació —pràcticament tota— sobre el grup de Lie; en segon lloc, és un grup finit de reflexions i, per tant, ha de ser producte d'alguns grups del *club* de la figura 8. Aleshores, la classificació dels grups finits de reflexions és la que ens dóna la clau per al gran teorema de classificació dels grups de Lie compactes connexos.

Un exemple de grup de Lie compacte i connex que tots coneixem és el grup de les matrius ortogonals  $n \times n$  amb determinant positiu, denotat  $SO_n(\mathbb{R})$  i format per les rotacions de l'espai vectorial  $\mathbb{R}^n$ . En aquest cas, el seu grup de Weyl és del tipus  $B_{(n-1)/2}$  si  $n$  és senar i del tipus  $D_{n/2}$  si  $n$  és parell.

Podríem seguir indefinidament explorant tots aquests temes, però en algun moment ens hem d'aturar i retornar al nostre trencaclosques: hauríem de relacionar tot això que hem dit amb el grup  $\mathcal{Q}$  de moviments dels quadrats del trencaclosques. Recordem que havíem vist que  $\mathcal{Q}$  era un subgrup d'índex dos del grup  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes \Sigma_5$ . Tenim això:

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes \Sigma_5 = D_5.$$

En particular,  $\mathcal{Q}$  està molt proper a

- El grup de Weyl del grup de Lie  $SO_{10}(\mathbb{R})$ .
- El grup de simetries d'un políedre semiregular en dimensió 5 anomenat el **5-demicub** que té 16 vèrtex, 80 arestes, 160 cares que són triangles equilàters, 120 cares de dimensió 3 que són tetràedres i 26 cares de dimensió 4 de les quals 10 són com el políedre regular que abans hem anomenat la 16-cel·la i les altres 16 són tetràedres de dimensió 4.

<sup>17</sup>S'ha interpretat aquesta classificació dels grups finits de reflexions i dels grups de Lie com dues manifestacions d'un esquema molt profund que potser apareix per primera vegada al llibre 13 d'Euclides, quan es classifiquen els cinc sòlids platònics. El 1976, V. I. Arnold va incloure a la llista dels «grans problemes de la matemàtica actual» el «problema A-D-E» que demana trobar la raó última de l'aparició, a moltes àrees de les matemàtiques, d'una classificació de tipus A-D-E com la de la figura 8. Per a més detalls sobre això, vegeu l'article «*The ubiquity of Coxeter-Dynkin diagrams*» (Hazewinkel *et. al.*, Nieuw Arch. Wisk. 1977).

### $\mathcal{T}$ i un club de grups menys conegut

Recordem que  $\mathcal{T}$  era el grup de moviments del trencaclosques que no toquen els quadrats i actuen com a matrius escalars sobre els triangles d'un color. Havíem arribat a veure que  $\mathcal{T}$  era una extensió

$$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \twoheadrightarrow \mathcal{T} \twoheadrightarrow A_4$$

de la que coneixem l'acció de  $A_4$  sobre  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ . Tal com hem dit en l'apartat anterior, encara no podem dir que sapiguem exactament com és  $\mathcal{T}$  perquè no sabem si existeix o no una secció de l'extensió. Igual com en el cas de  $\mathcal{Q}$ , no és difícil programar **sage** perquè busqui una secció i, com que la troba, podem concloure que  **$\mathcal{T}$  és també un producte semidirecte**

$$\mathcal{T} = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes A_4.$$

Ni aquest grup ni el grup  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \Sigma_4$  no apareixen a la noble llista de membres del Club dels Grups Finites de Reflexions, però aquest segon grup sí que pertany a un club important, menys aristocràtic que el dels grups de reflexions, però definitivament molt més *hipster*. Expliquem-ho.

Hi ha dues menes de matemàtics: els que se senten fascinats i satisfets amb les meravelles que ens ofereix el món dels nombres reals —els políedres regulars, els grups de Lie compactes . . .—, i els que també creuen que tot això és fascinant però **troben a faltar arrels de la unitat**. Aquests segons pensen que els reals «estan bé», però a nivell d'arrels de la unitat són un món paupèrrim: només 1 i  $-1$ . Quina misèria! Hi ha cossos —els cossos finits  $\mathbb{F}_{p^r}$ , el cos  $p$ -àdic  $\mathbb{Q}_p$ — que tenen una quantitat raonable d'arrels de la unitat i també hi ha el cos dels complexos  $\mathbb{C}$ , que les té totes!

En el món real —vol dir el món dels nombres reals  $\mathbb{R}$ — les reflexions han de tenir ordre dos: jo tinc una imatge al mirall i la imatge del mirall em té a mi com a imatge, i prou. En canvi, si hi ha arrels de la unitat i definim el concepte de reflexió d'una manera apropiada, podem tenir reflexions d'ordre  $> 2$ . I políedres? Quins políedres regulars podem tenir, per exemple, a  $\mathbb{C}^n$ ? Podem classificar els grups finits generats per reflexions complexes?

El concepte de políedre regular a  $\mathbb{C}^n$  va ser definit per Geoffrey Colin Shephard l'any 1952 i els grups finits de reflexions complexes van ser classificats per John Arthur Todd i Shephard el 1954, a partir d'estudis anteriors de diversos geomètres, alguns dels quals es remunten fins el segle XIX. La *bíblia* dels políedres complexos és l'obra de Coxeter *Regular Complex Polytopes* del 1974.

La llista de Shephard–Todd conté 37 grups (els tres primers representen famílies infinites) que podem designar  $\mathbb{G}_1, \dots, \mathbb{G}_{37}$ . Evidentment, els grups *reals* també han de formar part d'aquesta llista:  $A_n$  és  $\mathbb{G}_1$ ;  $B_n, D_n, I_2, G_2$  són casos particulars de la família  $\mathbb{G}_2$ ;  $H_3$  és  $\mathbb{G}_{23}$ ;  $F_4$  és  $\mathbb{G}_{28}$ ;  $H_5$  és  $\mathbb{G}_{30}$  i  $E_6, E_7, E_8$  són, respectivament,  $\mathbb{G}_{35}, \mathbb{G}_{36}$  i  $\mathbb{G}_{37}$ . Pel que fa als grups que no

apareixen en el món dels reals, la llista conté una plètor de grups en el pla: vint grups; hi ha també quatre grups nous en dimensió 3, dos grups nous en dimensió 4, un en dimensió 5 i un en dimensió 6.

Ja hem dit abans que el principal motiu que fa que els grups finits de reflexions reals siguin tan importants és que molts d'ells apareixen com a *grups de Weyl* de grups de Lie compactes i juguen un paper clau en el teorema de classificació dels grups (i les àlgebres) de Lie. Els grups complexos de reflexions també han tingut un paper crucial en el desenvolupament de la topologia algebraica durant l'últim quart del segle XX perquè, en la seva versió  $p$ -àdica, són **grups de Weyl** d'uns objectes topològics que generalitzen els grups de Lie compactes connexos. Aquests objectes s'anomenen **grups  $p$ -compactes** i la seva construcció i classificació es va poder dur a terme amb l'esforç combinat, durant més de vint anys, de diversos equips d'investigadors (incloent un equip de l'Autònoma de Barcelona).

Sentint-ho molt, hem de posar fi a aquesta disquisició que potser ens ha dut massa lluny. Abans de tancar aquest capítol, tornem al grup  $\mathcal{T}$  que hem trobat analitzant els moviments del trencaclosques amb en Mickey i en Donald. Resumint,  $\mathcal{T}$  és un subgrup d'índex 2 del grup  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \Sigma_4$ . Aquest grup és un grup de reflexions complexes que s'acostuma a designar com  $G(3, 3, 4)$  i pertany a la família que ocupa el segon lloc a la llista de Shephard–Todd. És el grup de simetries d'un políedre complex semiregular a  $\mathbb{C}^4$  que aquests autors denoten  $\frac{1}{2}\gamma_4^3$ . Finalment, és el grup de Weyl d'un grup  $p$ -compacte que existeix per a tot primer  $p$  de la forma  $3k + 1$ .

## 5 Solució del trencaclosques

En un procediment per resoldre el trencaclosques:

- L'**input** és la posició i l'orientació de les 13 peces del joc. Per exemple,

```
['iB', 'iD', 'i2E', 'iC', 'i3A', 'c', 'w2d', 'a', 'w2b', 'h',
 'w2e', 'g', 'wf']
```

voldria dir que la peça  $A$  es troba on hi hauria d'haver la peça  $B$  i a més està girada 90 graus respecte de l'orientació inicial de la peça  $E$ , la peça  $B$  es troba al lloc on hi ha d'haver la peça  $D$  i també està girada 90 graus, etc.

- L'**output** ha de ser o bé un missatge d'error —que indicaria que la permutació és impossible que s'hagi obtingut fent moviments lícits— o bé una paraula en els generadors  $R_1, R_2, R_3, R_4$  i els seus inversos  $L_1, L_2, L_3, L_4$  que, llegida d'esquerra a dreta,<sup>18</sup> ens doni unes instruc-

<sup>18</sup>Recordem que a **sage** les permutacions actuen *per la dreta*, és a dir  $(\sigma\tau)(x) = \tau(\sigma(x))$ .

cions per tornar el trencaclosques al seu estat inicial. Per exemple:

```
'L4*R3*L2*L3*R1*R3*R4*L3*L1*L2*R1*R2*L1*L2*L1*R2*R1*R2
*L1*R1*R2*L1*R2*L1*L2*R1*L2*R2*L3*L1*R3*R4*L2*R1*R4*L1
*L4*R3*R1*R2*R1*L2*L1*L3*L1*R2*L1*L2*L3*R2*L1*L3*R1*L2
*L1*L2*L1'
```

Podem seguir dues estratègies de resolució del trencaclosques:

1. Una primera estratègia podria ser buscar directament la paraula necessària per aconseguir la permutació donada com a input. Més concretament, l'input és una permutació  $x$  que, presumiblement, pertany al grup  $\mathcal{G}$ . Com hem dit abans, n'hi ha prou amb utilitzar l'algorisme de solució del problema de les paraules que forma part de `sage` i trobar l'expressió de  $x^{-1}$  com a paraula en els generadors  $R_1, R_2, R_3, R_4$ . Aquest mètode té diversos inconvenients. En primer lloc, depèn de l'algorisme de `sage` —que és l'algorisme de `GAP`— i, per tant, no es pot programar directament en altres llenguatges de programació. D'altra banda, el mètode no és transparent, no ens dóna cap estratègia per poder resoldre el trencaclosques «a mà», ni tampoc ens permet analitzar l'estructura del grup  $\mathcal{G}$  i la seva realització material en el joc.
2. Una altra estratègia de treball que sembla molt millor consisteix a procedir com ho faria una persona que s'enfrontés al joc: anar posant les peces a lloc una darrere l'altra. Fent-ho així obtindrem diversos beneficis: tindrem un mètode general que es pot programar sense necessitat de cap llibreria sofisticada, entendrem millor l'estructura de  $\mathcal{G}$ , trobarem una cota superior per al nombre de moviments necessaris per resoldre el trencaclosques, etc.

Procedim, doncs, posant a lloc una a una les peces del trencaclosques en aquest ordre:

$E, d, h, A, C, g, a$ , i la resta.

En la versió concreta de la figura 1, això voldria dir que comencem amb el cap d'en Mickey ( $E$ ) i seguim amb la seva mà dreta ( $d$ ), la seva mà esquerra ( $h$ ), el cap d'en Donald ( $A$ ), els seus peus ( $C$ ), la seva mà dreta ( $g$ ) i la seva mà esquerra ( $a$ ). En aquest punt tindrem resolt el joc de la figura 1 i, en el pas següent, situarem al seu lloc la resta de peces com si també continguessin una figura que les distingís.

Cada vegada que tenim una peça al seu lloc, el nombre de moviments que podem fer, sense perdre la feina que ja hem fet, ve donat per l'ordre de l'estabilitzador a  $\mathcal{G}$  de les peces ja col·locades. Denotem aquests estabilitzadors amb subíndex. Tenim una cadena de subgrups

$$\mathcal{G} \supset \mathcal{G}_E \supset \mathcal{G}_{E,d} \supset \mathcal{G}_{E,d,h} \supset \mathcal{G}_{E,d,h,A} \supset \mathcal{G}_{E,d,h,A,C} \supset \mathcal{G}_{E,d,h,A,C,g} \supset \mathcal{G}_{E,d,h,A,C,g,a}$$



que tenen ordres decreixents

$$100.776.960 > 10.077.696 > 839.808 > 69.984 > 8.748 > 1.458 > 162 > 18.$$

Això ens diu que, si bé per a una persona el joc es fa més difícil a mida que tenim ben posades més peces, per a **sage**, en canvi, tot esdevé més senzill a mida que va avançant el joc.

### Col·loquem en Mickey a lloc

Normalment, una persona que juga amb el trencaclosques per primera vegada arriba a completar aquesta primera fase del joc amb una relativa facilitat. De fet, quan volem programar aquesta fase, **sage** és força útil però, de fet, és molt més simple anar trobant les solucions «a mà».

1. Si calculem l'**òrbita** de  $E$  per  $\mathcal{G}$  observem que  $E$  —el cap d'en Mickey— només pot trobar-se en alguna de les posicions  $\pm iA$ ,  $\pm B$ ,  $\pm C$ ,  $\pm iD$ ,  $\pm E$  i, en cadascun d'aquests casos, n'hi ha prou amb un o dos moviments elementals per dur  $E$  al seu lloc.
2. Posem a lloc ara la mà dreta d'en Mickey  $d$ . Si calculem l'òrbita de  $d$  per  $\mathcal{G}_E$  veiem que  $d$  es pot trobar a qualsevol dels triangles  $a, b, c, d$  amb qualsevol orientació. Ens cal trobar, doncs, onze paraules (la que fa dotze és la identitat) per dur la peça a la posició  $d$  a partir del lloc on sigui. És molt senzill fer-ho a mà i observem que ho podem fer amb paraules de longitud tres, quatre o, com a màxim, cinc.
3. Posem a lloc ara la mà esquerra d'en Mickey  $h$ . Si calculem l'òrbita de  $h$  per  $\mathcal{G}_{E,d}$  veiem que  $h$  es pot trobar a qualsevol dels triangles  $e, f, g, h$  amb qualsevol orientació. La situació és lleugerament més complicada i en algun cas necessitem fins a 7 moviments elementals per dur  $h$  al seu lloc —sense perdre, evidentment, la bona col·locació de les peces  $E$  i  $d$  que havíem aconseguit en els passos anteriors.

Com que els peus d'en Mickey són, per definició, sempre al seu lloc, amb aquests tres passos ja tenim reconstruïda la figura d'en Mickey.

### Col·loquem en Donald a lloc

Ara que ja tenim en Mickey a lloc, observem que els moviments  $R_1, R_2$  no toquen les peces que inclouen en Mickey. Per aquest motiu, a l'hora de reconstruir en Donald, si apliquem moviments que només continguin aquestes dues rotacions, no haurem de patir per malmetre la feina feta amb en Mickey. Com veurem, això no sempre és possible.

4. Calculant l'òrbita de  $A$  veiem que  $A$  només pot ser a  $\pm A$ ,  $\pm iB$ ,  $\pm iC$ ,  $\pm D$ . En qualsevol d'aquests casos, és trivial dur  $A$  al seu lloc fent un o dos moviments elementals que només continguin  $R_1, R_2$ .

5. Procedim a col·locar al seu lloc els peus d'en Donald, la peça  $C$ . Aquí les coses comencen a ser complicades per a un jugador humà novell i aquí sí que hem de començar a utilitzar la capacitat de `sage` de resoldre el problema de les paraules. Comencem calculant l'òrbita de  $C$  per  $\mathcal{G}_{E,d,h,A}$  i observem que només hi ha sis opcions per a la situació de  $C$ :  $\pm B$ ,  $\pm C$ ,  $\pm iD$ . Si ara calculem l'òrbita de  $C$  per  $\langle R_1, R_2 \rangle \cap \mathcal{G}_{E,d,h,A}$  veurem que és estrictament més petita que l'anterior:  $B$ ,  $C$ ,  $-iD$ . Això vol dir que, en la meitat dels casos, és impossible posar els peus d'en Donald al seu lloc sense moure, en algun moment, en Mickey i, evidentment, tornar-lo a recompondre.

Com hem dit abans, el grup  $\mathcal{G}_{E,d,h,A}$  té 8.744 elements i d'aquests només n'hi ha 1.458 que duguin  $iD$  a  $C$ . Podem demanar a `sage` que els estudiï tots i trobi el que es pot escriure amb la paraula més curta en  $R_1, R_2, R_4$ . Fem el mateix amb  $-C$  i  $-B$ . Trobem paraules de longitud sis o vuit que ens resolen el problema.

6. Pel que fa a la mà dreta d'en Donald, la peça  $g$ , veiem que l'òrbita per  $\mathcal{G}_{E,d,h,A,C}$  consisteix en els triangles  $e, f, g$  amb qualsevol orientació. També podem veure que en aquest cas sí que podem dur  $g$  al seu lloc només amb les rotacions  $R_1$  i  $R_2$ , cosa que fa que la solució sigui més intuïtiva. Com en el cas anterior, el grup és prou petit com per demanar a `sage` que resolgui el problema de les paraules per a tots els seus elements i busqui la paraula més curta.<sup>19</sup> Obtenim moviments de longitud sis o vuit que ens posen  $g$  a lloc.
7. Ens falta només l'última peça del trencaclosques de la figura 1: la mà esquerra d'en Donald. Dur-la a lloc és el moviment més complicat. Procedim igual que en la fase anterior i obtenim paraules que, com a màxim, involucren 17 rotacions elementals.

En aquest moment hem acabat el joc si ens referim només a la versió de la figura 1 que incorpora sis peces sense cap figura. Seguint els set passos anteriors, hem necessitat un màxim de 49 moviments elementals. Això ens dóna una cota superior per al que de vegades es coneix com el *nombre de déu* del joc: el nombre mínim de moviments elementals per resoldre el joc en tots els casos.<sup>20</sup> Per exemple, en el famós **cub de Rubik** es coneix que aquest nombre és només de 20. Nosaltres hem obtingut una cota superior de 49 per al nostre trencaclosques, però és gairebé segur que el nombre de déu serà molt inferior.

Arribats fins aquí, no té sentit aturar-se i no arribar fins el final: resoldre el trencaclosques complet, amb totes les seves 13 peces.

<sup>19</sup>No hi ha cap garantia que les paraules que obté `sage` siguin les més curtes possibles.

<sup>20</sup>És a dir, el nombre de déu és el mínim  $n$  tal que qualsevol configuració del joc es pot retornar a la posició d'inici amb un nombre  $\leq n$  de moviments elementals.

## El pas final: reordenar totes les altres peces

Quan hem arribat fins aquí, de les tretze peces del joc n'hi ha com a mínim 8 que estan ben posades i ben orientades: els quadrats  $A$ ,  $C$ ,  $E$  i els triangles  $a$ ,  $d$ ,  $g$ ,  $h$ . Ens falta resituar al seu lloc els quadrats  $B$ ,  $D$  i els triangles  $b$ ,  $c$ ,  $e$ ,  $f$ . Segons el que hem vist abans  $|\mathcal{G}_{A,C,E,a,d,g,h}| = 18$  i, per tant, disposem només de 18 moviments per acabar el trencaclosques —i aquests moviments han de ser suficients.

Com que aquest grup és tan petit, ha de ser ben senzill dilucidar la seva estructura. `sage` ens diu que és el grup abelià  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ , producte d'un grup cíclic d'ordre 2 i dos grups cíclics d'ordre 3. Com actuen aquests grups sobre les cares? El grup d'ordre 2 permuta  $B$  amb  $-B$  i  $D$  amb  $-D$ , un dels grups d'ordre 3 transforma

$$b \mapsto \omega b \mapsto \omega^2 b \quad \text{i} \quad c \mapsto \omega^2 c \mapsto \omega c$$

i l'altre

$$e \mapsto \omega e \mapsto \omega^2 e \quad \text{i} \quad f \mapsto \omega^2 f \mapsto \omega f.$$

Per a cadascun d'aquests 18 elements `sage` ens troba una paraula en els moviments elementals. Alguna d'aquestes paraules arriba a tenir 37 lletres. Utilitzant aquestes paraules, tenim el trencaclosques resolt. La cota superior per al nombre de déu ha pujat fins a 86.

## A la pràctica

Amb tota l'anàlisi anterior sembla que el trencaclosques ja no té secrets per a nosaltres, però no és exactament així perquè si ara volem aplicar la informació anterior a resoldre la versió del joc que apareix a la figura 1 ens trobem que només coneixem la situació de les peces que tenen alguna figura, mentre que l'input que necessita el nostre mètode requereix tenir informació completa sobre la situació i l'orientació de totes les peces.

Si volem resoldre el trencaclosques de la figura 1 una manera de procedir seria aquesta:

1. Trobem la situació i l'orientació de les 7 peces que tenen algun dibuix. Són els quadrats  $A$ ,  $C$ ,  $E$  i els triangles  $a$ ,  $d$ ,  $g$ ,  $h$ . Per exemple, tindrem una descripció com aquesta:

$$['i3B', 'iA', 'E', 'a', 'w2g', 'wb', 'w2h'].$$

Per fer això, —que és força més laboriós del que pot semblar— ens hem d'ajudar amb la figura 5.

2. Aquest input que tenim és insuficient com a input per al nostre programa de resolució. El que hem de fer és completar-lo —de qualsevol manera— a un input **vàlid** que tingui en compte totes les 13 peces. La

manera més senzilla de fer això és completar la llista anterior a l'atzar i comprovar si el procés de resolució certifica que l'input que hem trobat és vàlid. Fem això tantes vegades com calgui fins que trobem una entrada vàlida.

3. Apliquem a aquest input vàlid el mètode que hem trobat.

Un cop fet el que acabem d'explicar, haurem obtingut 7 moviments que, si els fem sobre el trencaclosques, ens els tornaran a la seva posició original. A la figura 6 hi tenim marcades les rotacions bàsiques  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  i  $R_4$ .

Podem accedir al mètode de resolució, escrit en el llenguatge de `sage`, a través de l'enllaç següent



que obrirà una finestra del vostre navegador on podreu comprovar el seu funcionament<sup>21</sup>. L'script conté només la solució del joc, no tots els càlculs que hem fet per a trobar-la i per analitzar el grup del trencaclosques. Observem que l'script `sage` només utilitza eines matemàtiques elementals i, per tant, podria ser traduït fàcilment a altres llenguatges com, per exemple, python.

Per acabar el projecte estaria molt bé implementar el joc en una esfera digital sobre la que s'hi pogués jugar a través d'un navegador. Algú s'anima a fer-ho?<sup>22</sup>



Departament de Matemàtiques  
Universitat Autònoma de Barcelona  
[Jaume.Aguade@uab.cat](mailto:Jaume.Aguade@uab.cat)  
ORCID:0000-0001-5579-7289

*Publicat el 9 de juny de 2023*

<sup>21</sup>En alguns navegadors l'enllaç pot no funcionar degut a la llargada de l'adreça. Carregar l'enllaç en un navegador diferent pot solucionar el problema.

<sup>22</sup>Les il·lustracions d'aquest article són de l'autor, excepte la figura 2 (By Watchduck, CC BY 4.0 <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>, via Wikimedia Commons; By Tomruen at English Wikipedia - Own work, Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=17032931>) i la figura 9 (By Tomruen at English Wikipedia. Transferred from en.wikipedia to Commons by Jalo using CommonsHelper, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4694965>).