MATerials MATemàtics
Volum 2025, treball no. 2, 56 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/web/matmat

El teorema de Lekkerkerker-Boland, o cómo resolver un crimen usando teoría de grafos*

Mercedes Flores Fernández i Víctor Jiménez López

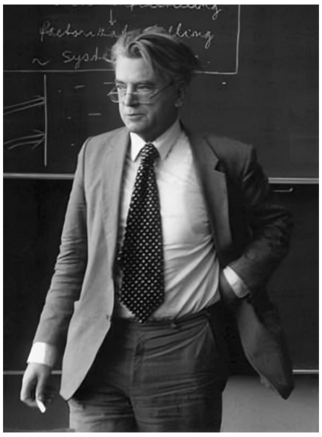
1. Introducción

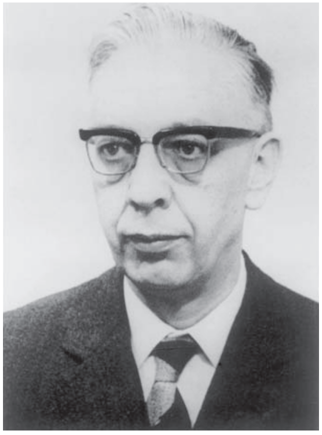
Este artículo propone al lector un doble divertimento, matemático y literario. Por una parte, se presenta una prueba, autocontenida y accesible para los no versados en la materia, de un sofisticado resultado de la teoría de grafos. Por otra se muestra cómo, contra todo pronóstico, dicho teorema puede usarse como piedra angular sobre la que construir la trama de un relato de ficción detectivesca.

El escenario del crimen. Y no, el cocodrilo no es el asesino, *todo lo contrario*.

*Este trabajo es una adaptación, para su publicación como artículo, del trabajo fin de grado de la primera autora, tutorizado por el segundo autor [17]. Por tanto, aunque no es una transcripción palabra por palabra del mismo, hay muchos párrafos donde la coincidencia es literal.

El resultado al que nos referimos, el teorema de Lekkerkerker-Boland [32], proporciona una caracterización intrínseca de los grafos de intervalos. Informalmente hablando, los vértices de un grafo de este tipo son una familia finita de subintervalos de la recta real, conectados mediante aristas cuando sus respectivas intersecciones son no vacías. Estos grafos son útiles para estudiar procesos que se organizan esencialmente en una dimensión, y encuentran aplicación en disciplinas tan diversas como la arqueología o la genética. De hecho, fue precisamente un problema en este segundo campo el que inspiró la búsqueda del resultado finalmente probado por Lekkerkerker y Boland. En cuanto al relato, *Qui a tué le duc de Densmore?* [5], fue publicado en 1994 por Claude Berge, un afamado investigador en teoría de grafos que a la vez fue miembro activo de OuLiPo, un singular taller de literatura creativa cuyas obras debían ceñirse a unas restricciones formales fijadas de antemano.





Cornelius Gerrit Lekkerkerker (1922-1999, izquierda) y Johan Christoph Boland (1914-1984, derecha), los *forenses* del caso.

Los siguientes cuatro secciones del trabajo se centran en la prueba del teorema. El artículo de Lekkerkerker y Boland no es fácil de leer, por lo que hemos preferido desarrollar con detalle una demostración de Cameron, Hoàng y Lévêque, relativamente reciente, esbozada en [10]: pensamos que es la que encaja más naturalmente en lo que podríamos considerar «cuerpo de doctrina estándar» de la teoría de grafos. Como tan a menudo ocurre con las pruebas presuntamente «breves» de teoremas importantes, los autores de [10] dan por obvias muchas cosas que no lo son (al menos para los que se acercan de primeras a esta materia), y las referencias que añaden no son todo lo claras que uno desearía, de ahí que hayamos invertido bastante espacio en la exposición de la misma.

Así, tras una sección preliminar con (casi todas) las definiciones importantes y algunos resultados elementales, tenemos una primera toma de contacto con los grafos de intervalos en la sección 3. Siguiendo bastante libremente el libro de Golumbic [24] (considerado la referencia estándar para este tipo de grafos), mostramos cómo describirlos en términos de una «metaestructura» de primordial importancia en lo que sigue, los llamados árboles de cliques.[1] Esencialmente, se trata de grafos conexos y sin ciclos cuyos vértices son los maxcliques (subgrafos completos maximales) del grafo inicial, de forma que los maxcliques que contienen un mismo vértice constituyen subgrafos conexos del árbol de cliques. Resulta que los grafos de intervalos se caracterizan por admitir una línea de cliques, es decir, un árbol de cliques cuyos maxcliques están alineados.

Los grafos cordales son, por así decir, aquellos cuyos ciclos pueden subdividirse hasta triángulos, y son fundamentales en el problema que nos ocupa porque todo grafo de intervalos es cordal. En la sección 4 (todavía siguiendo [24]) los caracterizamos de diversos modos, en particular como aquellos que admiten árboles de cliques. Aún les dedicaremos otra, la 5. A un mismo grafo cordal se le pueden asociar muchos árboles de cliques distintos, y aquí mostramos que el número de veces que un conjunto dado aparece como intersección de los extremos de sus aristas es independiente de ellos. Este resultado de invariancia es la clave de la demostración de Cameron, Hoàng y Lévêque y su parte más técnica, por lo que, para facilitar su lectura, hemos introducido la noción de división, que no figura en [10].

Por fin, la prueba del teorema, que afirma que los grafos de intervalos son exactamente los cordales sin tríos asteroidales (es decir, tres vértices tales que existe un camino entre cada par de ellos sin vértices adyacentes al tercero), se aborda en la sección 6. A título de curiosidad, cabe decir que la demostración de [10] nunca se ha publicado formalmente: el presente artículo sería, por tanto, la primera vez que aparece una prueba del teorema de Lekkerkerker-Boland «al alcance de todos los bolsillos».

En la secciones «literarias» del artículo, la 7 y la 8, analizamos a conciencia el enigma policiaco-combinatorio de Berge, no sin antes detenernos un poco en una cuestión, la de la presencia de las matemáticas en la literatura de ficción, que da bastante más de sí de lo que cabría pensar a priori (y no solo por las aportaciones del grupo OuLiPo, a las que dedicamos una especial atención). Para que la experiencia sea completa, hemos añadido como apéndice una traducción del relato (autorizada por los propietarios de los derechos de autor), hasta ahora inédito en castellano, adornada con abundantes notas explicativas.

Comprendemos que la extensión del artículo puede intimidar a no pocos lectores. Si tal es el caso, y prefieren limitarse a la parte lúdica del asunto, les bastaría leer las definiciones 2.1, 2.2, 3.1, 4.1 y 6.1, el enunciado del teorema 6.2, e irse sin más demora a la sección 7.

[1] Aquí estamos siguiendo la terminología estándar, pero estrictamente hablando lo preciso sería hablar de «árboles de maxcliques», ya que sus vértices no son todos los subgrafos completos del grafo de partida, solo los maximales. «Clique», a todo esto, es una palabra del inglés que puede traducirse como «clan» o «camarilla»; este último, quizá, es el término que habríamos debido utilizar, visto el perfil un tanto subversivo del artículo.

2. Preliminares

Comenzamos listando las nociones básicas que necesitaremos en el trabajo, demostrando de paso algunos resultados sencillos que serán luego de utilidad.

Definición 2.1. Un **grafo** (simple, no dirigido) $G = (V, E)$ es un par consistente en un conjunto finito de **vértices** V y otro de **aristas** E, entendiéndose por tales a pares no ordenados de elementos distintos x, y de V (los **extremos** de la arista), denotados abreviadamente como xy (o yx). Se permite que V y E puedan ser vacíos. Llamamos **orden** de G al cardinal $|V|$ de V.

Se dice que dos vértices son **adyacentes** si son extremos de una misma arista. Se define el conjunto de **vecinos** de un vértice $v \in V$ como el conjunto de vértices que son adyacentes a dicho vértice. Se denotará por $\mathrm{Adj}(v)$. Llamamos a $\mathrm{N}(v) = \{v\} \cup \mathrm{Adj}(v)$ el **entorno** de v.

Si $W \subset V$, llamamos a $G_W = (W, E_W)$ el **subgrafo inducido** por W en G, o más simplemente un **subgrafo** de G, donde $E_W = \{xy \in E : x, y \in W\}$. Se dice que el subgrafo es **completo** cuando $xy \in E_W$ para cada $x, y \in W$.

Definición 2.2. Un **camino** de **longitud** k de un grafo $G = (V, E)$ es una sucesión $[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ de vértices tal que $x_i x_{i+1} \in E$ para cada $0 \leq i < k$. Nótese que $k = 0$ es posible, es decir, $[x_0]$ es un camino. Diremos a veces que el camino **empieza** en x_0, **acaba** en x_k (o que **conecta** x_0 y x_k) y **pasa** por los puntos x_i, $0 \leq i \leq k$. También, que **contiene** a los puntos x_i y las aristas $x_i x_{i+1}$. Si $x_0 \neq x_k$, el camino será **abierto**, mientras que en el caso $x_0 = x_k$ será **cerrado**. Si los vértices x_i, x_j, $i \neq j$, son distintos (excepto a lo sumo si $\{i, j\} = \{0, k\}$), se dice que el camino es **simple**. Llamamos **ciclo** a todo camino cerrado simple de longitud al menos 3.

Observación 1. Si $[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ es un camino abierto, entonces todo camino de longitud minimal que empiece en x_0, acabe en x_k y cuyos vértices y aristas estén en el anterior es, de hecho, un camino simple abierto.

Observación 2. Notemos que la **aciclicidad** (la ausencia de ciclos en un grafo) es una propiedad **hereditaria**, es decir, si un grafo la tiene entonces la tienen igualmente todos sus subgrafos. A lo largo del trabajo nos encontraremos con diversas propiedades de este tipo: la de ser de intervalos (sección 3), las de ser cordal o de admitir un esquema perfecto (sección 4) y la de carecer de tríos asteroidales (sección 6).

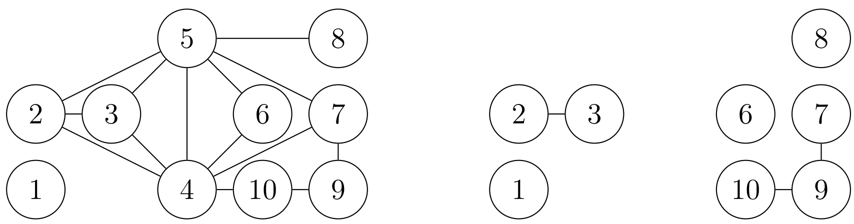
Definición 2.3. Un grafo $G = (V, E)$ se dice **conexo** si cualquier par de vértices está conectado por un camino (que puede tomarse simple por la observación 1). Igualmente, decimos que $W \subset V$ es **conexo** si G_W lo es. La relación de equivalencia «$\sim$» dada por

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \text{existe un camino conectando } x \text{ e } y$$

particiona V en las **componentes conexas** (o, simplemente, **componentes**) de G. Claramente, todas las componentes de G son subconjuntos conexos de V.

Si $S \subset V$ y $v, w \in V$ pertenecen a distintas componentes de $G_{V \setminus S}$, diremos que S es un $v - w$ **separador**, y que S es un $v - w$ **separador minimal** cuando es minimal con esta propiedad. Si no precisamos enfatizar v y w diremos más simplemente, según el caso, que S es un **separador** o un **separador minimal**. Llamaremos S-**componente** de G a toda componente D de $G_{V \setminus S}$ con la propiedad de que $\mathrm{Adj}(x) \cap D \neq \emptyset$ para cada $x \in S$. Denotamos por $\Sigma_G(S)$ (o $\Sigma(S)$ si no hay ambigüedad sobre G) al total de S-componentes de G.

Véase la figura 1.



(a) Grafo inicial. (b) Grafo inducido por $\{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Figura 1: Ilustración de la definición 2.3. Para el grafo $G = (V, E)$ de la izquierda, el conjunto $S = \{4, 5\}$ es el único $2 - 7$ separador minimal. Las componentes de $G_{V \setminus S}$ (derecha) son $\{1\}$, $\{2, 3\}$, $\{6\}$, $\{7, 9, 10\}$ y $\{8\}$, con $\Sigma(S) = 3$ (ni $\{1\}$ ni $\{8\}$ son S-componentes de G).

Observación 3. Si $S \subset V$, la familia de componentes de $G_{V \setminus S}$ es la única partición $D_1, \dots, D_r$ de $V \setminus S$ tal que D_i es conexo y $\mathrm{Adj}(x) \in D_i \cup S$ para cada $x \in D_i$, $i = 1, \dots, r$.

Si S es un separador entonces, por definición, $G_{V \setminus S}$ tiene al menos dos componentes. El siguiente lema muestra que si S es, además, minimal, entonces puede decirse otro tanto respecto a las S-componentes, es decir, $\Sigma(S) \geq 2$:

Lema 2.4. *Supongamos que S es un $v - w$ separador minimal de $G = (V, E)$. Sean A y B las componentes de $G_{V \setminus S}$ que contienen, respectivamente, a v y w. Entonces tanto A como B son S-componentes de G.*

Demostración. Sea $x \in S$ un vértice arbitrario. Sabemos que todo camino que conecta los vértices v y w en G tiene un primer vértice en S, por definición de $v - w$ separador. Supongamos por reducción al absurdo que ese primer vértice es siempre distinto de x. Entonces todo camino que conecta v y w en G ha de pasar por $S \setminus \{x\}$, es decir, $S \setminus \{x\}$ es un $v - w$ separador, lo cual contradice la minimalidad de S. Por tanto, existe un camino de v a w cuyo primer vértice en S es x, de manera que el vértice z previo a x

perteneciente al camino está en A, es decir, $z \in A \cap \operatorname{Adj}(x)$. Por tanto, A es una S-componente de G.

Argumentando de la misma manera con el último vértice en S de los caminos que conectan v y w, deducimos que $B \cap \operatorname{Adj}(x) \neq \emptyset$ y, por tanto, que B es una S-componente de G. □

Definición 2.5. Un grafo $T = (V, E)$ conexo y acíclico se denomina **árbol**. A los vértices de T con exactamente un vecino se les denomina **hojas**.[2]

En los casos particulares en que el orden de T es 0 o 1, o existe un camino simple abierto $[v_1, \ldots, v_n]$ tal que $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $E = \{v_1v_2, \ldots, v_{n-1}v_n\}$, decimos que T es una **línea** y llamamos a dicho camino (o a $[v]$ cuando $V = \{v\}$) una **alineación** de T.

La siguiente caracterización de árbol es bien conocida, véase, por ejemplo, [13, Theorem 3.11, p. 65]:

Proposición 2.6. *Un grafo $T = (V, E)$ es un árbol si y solo si para cada $x, y \in V$, $x \neq y$, existe un único camino simple que empieza en x y acaba en y.*

Demostración. Supongamos que $T = (V, E)$ es un árbol. Dados $x, y \in V$, $x \neq y$, sabemos por la conexión de T que existe al menos un camino simple conectando x e y. Supongamos ahora que existen puntos conectados por dos caminos simples abiertos distintos y elijamos, entre todos ellos, al par $x \neq y$ para el que la suma de las longitudes de ambos caminos es minimal. La minimalidad garantiza que no hay ningún punto aparte de x e y por el que pasen ambos caminos, por lo que yuxtaponiéndolos obtendríamos un ciclo, que no puede existir por ser T un árbol.

Recíprocamente, supongamos que para cada $x, y \in V$, $x \neq y$, existe un único camino simple que empieza en x y acaba en y. Probaremos que T es conexo y acíclico. Lo primero es trivial. Supongamos, por reducción al absurdo, que T contiene al menos un ciclo $[x, x_0, \ldots, x_k, y, x]$. Separando este ciclo en $[x, x_0, \ldots, x_k, y]$ e $[y, x]$, obtenemos dos caminos simples distintos conectando x e y, contradiciendo la hipótesis. □

Denotaremos por $T[x, y]$ al camino único de la proposición anterior (con $T[x, x] = [x]$). Si $xy \in E$, denotaremos también $V_{x-y} = \{z \in V : y \notin T[x, z]\}$, $V_{y-x} = \{z \in V : x \notin T[y, z]\}$. Informalmente hablando, V_{x-y} contendría a los vértices del árbol «más próximos» a x que a y, y al contrario para V_{y-x}. Conforme al apartado 2 del siguiente lema, llamaremos a V_{x-y}, V_{y-x} la xy-**partición** de V.

[2] Apurando el símil botánico, estaríamos hablando, más bien, de un árbol «sin raíz», como esas resecas plantas rodadoras que aparecen en las películas del oeste. Las «hojas» serían, claro está, los extremos pinchosos de las mismas.

Lema 2.7. *Sea $T = (V, E)$ un árbol. Entonces se cumplen las afirmaciones siguientes:*

1. *T tiene a lo sumo dos hojas si y solo si es una línea.*

2. *Si $xy \in E$ entonces V_{x-y}, V_{y-x} es una partición de V en dos subconjuntos conexos, y xy es la única arista que conecta vértices de V_{x-y} con vértices de V_{y-x}.*

3. *Si $\{C_i\}_{i=1}^k$ es una familia de subconjuntos conexos de V, su intersección $\bigcap_{i=1}^k C_i$ también es conexa.*

Demostración. Comenzamos probando 1. Supongamos que T es una línea. Entonces tenemos dos posibilidades: la primera es que $|V|$ es 0 o 1, en cuyo caso habría 0 hojas, y la segunda que $|V| \geq 2$, donde se tendrían exactamente dos hojas debido a la existencia del camino simple abierto que nos proporciona la definición de línea.

Supongamos ahora que T tiene a lo sumo dos hojas y veamos que es una línea. Supongamos, por reducción al absurdo, que esto último no se cumple. Fijamos un camino simple abierto $[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ de máxima longitud. Dicho camino existe porque $|V| \geq 2$ y entonces, por la conexión, $\mathrm{Adj}(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in V$. La maximalidad y la ausencia de ciclos garantizan que x_0 y x_k son hojas, y como T no es una línea, existe un vértice y no contenido en ese camino. Sea ahora $[y_0, y_1, \ldots, y_l]$ un camino simple abierto de longitud máxima pasando por el vértice y. De nuevo, la maximalidad y la aciclicidad aseguran que y_0 e y_l son hojas. Ahora bien, la proposición 2.6 impide que pueda darse la igualdad $\{x_0, x_k\} = \{y_0, y_l\}$, es decir, al menos tres de estos vértices son distintos. Por lo tanto, T tiene al menos tres hojas, lo que completa la prueba de 1.

Para probar 2, comenzamos viendo que V_{x-y}, V_{y-x} es una partición de V. Para ello, debemos demostrar que si $z \notin V_{x-y}$ entonces $z \in V_{y-x}$ y si $z \in V_{x-y}$ entonces $z \notin V_{y-x}$. Supongamos que $z \notin V_{x-y}$, es decir, $y \in T[x, z]$. Entonces la parte del camino $T[x, z]$ que empieza en y y termina en z es, por la proposición 2.6, $T[y, z]$, luego $x \notin T[y, z]$ y por tanto $z \in V_{y-x}$. Si, por otro lado, $z \in V_{x-y}$, es decir, $y \notin T[x, z]$, entonces $T[y, z]$, de nuevo por la proposición 2.6, es el resultado de añadir al camino $T[x, z]$ la arista yx, con lo cual $x \in T[y, z]$ y por tanto $z \notin V_{y-x}$.

En segundo lugar, probamos que estos subconjuntos de V son conexos. Pero esto se obtiene de manera inmediata haciendo uso de la definición de los subconjuntos. De hecho, si $z \in V_{x-y}$, entonces todos los vértices por los que pasa el camino $T[x, z]$ (en particular x) pertenecen a V_{x-y}, lo que garantiza la conexión (y, análogamente, la de V_{y-x}).

Por último, veamos que xy es la única arista que conecta vértices de V_{x-y} con vértices de V_{y-x}. Supongamos, en efecto, que $z \in V_{x-y}$, $u \in V_{y-x}$ y $zu \in E$. Entonces la concatenación del camino $T[x, z]$, la arista zu y el camino $T[u,y]$ proporciona un camino conectando x e y. Dado que $T[x,z]$ está en V_{x-y} y $T[u,y]$ está en V_{y-x}, este camino es simple por ser V_{x-y}, V_{y-x} una partición, así que ha de coincidir con la arista xy, ya que $[x,y]$ es trivialmente un camino simple conectando x e y. Esto solo es posible si $z = x$ y $u = y$.

La prueba de 3 es inmediata: si $x, y \in \bigcap_{i=1}^{k} C_i$, basta probar que $T[x,y]$ está contenido en C_i para todo $i = 1, \ldots, k$. Ahora bien, la propiedad de no existencia de ciclos es hereditaria (observación 2), por lo que, como T es un árbol, los subgrafos inducidos por cada subconjunto conexo C_i, T_{C_i}, serán árboles. Podemos así aplicar la proposición 2.6 a cada uno de ellos, obteniendo los respectivos caminos $T_{C_i}[x,y]$ en C_i. Por la unicidad de caminos en T, $T_{C_i}[x,y] = T[x,y]$ para todo i. Finalmente, $T[x,y]$ está contenido en $\bigcap_{i=1}^{k} C_i$. □

Definición 2.8. Sea $G = (V,E)$ un grafo. Llamamos **clique** a un subconjunto de vértices $C \subset V$ tal que $xy \in E$ para todo par de puntos $x \neq y$ de C. En otras palabras, es un conjunto de vértices tal que el subgrafo inducido por C en G es completo. Notemos que el conjunto vacío y los conjuntos de un único vértice son cliques, y que los cliques son subconjuntos conexos de V. Diremos que C es un **maxclique** si no existe ningún otro clique de G que contenga a C como subconjunto propio, es decir, si induce un subgrafo completo y maximal con esta propiedad.

Sea $\mathscr{K}$ la familia de maxcliques de G, con $\mathscr{K}_v = \{K \in \mathscr{K} : v \in K\}$. Decimos que G admite un **árbol de cliques** (respectivamente, una **línea de cliques**) $\mathscr{T} = (\mathscr{K}, \mathscr{E})$ si $\mathscr{T}$ es un árbol (respectivamente, una línea) y $\mathscr{K}_v$ es conexo en $\mathscr{T}$ para cada $v \in V$. La **etiqueta** S de una arista $KK' \in \mathscr{E}$ es el conjunto intersección de sus extremos, $S = K \cap K'$.

Véase la figura 2.

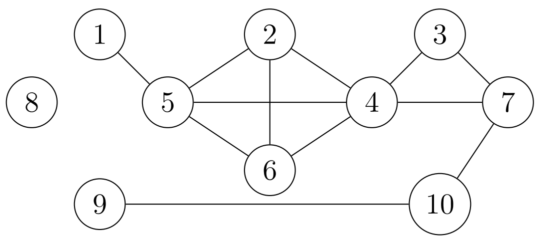


Figura 2: Ilustración de la definición 2.8. La familia de maxcliques de este grafo es $\mathscr{K} = \{\{8\},\{1,5\},\{7,10\},\{9,10\},\{3,4,7\},\{2,4,5,6\}\}$, con, por ejemplo, $\mathscr{K}_5 = \{\{1,5\},\{2,4,5,6\}\}$, $\mathscr{K}_8 = \{\{8\}\}$. Por el contrario, $\emptyset$, $\{1\}$, $\{3,4\}$ o $\{2,4,5\}$ serían cliques pero no maxcliques. Una línea de cliques para el mismo es, por ejemplo, $\{8\} - \{9,10\} - \{7,10\} - \{3,4,7\} - \{2,4,5,6\} - \{1,5\}$.

3. Grafos de intervalos

Es momento de presentar debidamente a los grandes protagonistas (con permiso del detective Ralston, el mayordomo Stewart e incluso el cocodrilo Arquímedes) del presente trabajo:

Definición 3.1. Sea $G = (V, E)$. Decimos que G es un **grafo de intervalos** si existe una colección de intervalos $\{I(v)\}_{v \in V}$ (es decir, de subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$), tal que $vw \in E$ si y solo si $I(v) \cap I(w) \neq \emptyset$. Toda colección de intervalos con dicha propiedad se denomina una **representación** del grafo de intervalos G.

El grafo de la figura 2, por ejemplo, es de intervalos. Una posible representación del mismo es $I(9) = [0, 1]$, $I(10) = [1, 2]$, $I(7) = [2, 4]$, $I(3) = [3, 5]$, $I(4) = [4, 6]$, $I(2) = [6, 8]$, $I(6) = [6, 9]$, $I(5) = [6, 10]$, $I(1) = [10, 11]$, $I(8) = [12, 13]$.

Observación 4. Notemos que los intervalos de la representación $\{I(v)\}_{v \in V}$ pueden, en principio, ser vacíos y/o repetirse. Partiendo de ella es sencillo, no obstante, encontrar otra cuyos intervalos $I'(v)$ sean todos compactos, no vacíos ni degenerados a un punto y distintos dos a dos. El modo de proceder es el siguiente. Primero elegimos, para par de intervalos $I(v), I(w)$ cuya intersección es no vacía, un punto $c_{vw} \in I(v) \cap I(w)$. Si C denota al conjunto unión de dichos puntos, e $I^*(v)$ es el intervalo más pequeño que contiene a $C \cap I(v)$, es claro que $\{I^*(v)\}_{v \in V}$ es una representación de G mediante intervalos compactos, algunos de ellos quizá vacíos. Sin más que sustituir estos últimos por otros no vacíos, disjuntos entre sí y de los demás, podemos suponer que todos los intervalos $\{I^*(v)\}_{v \in V}$ son compactos y no vacíos, aunque tal vez degenerados a un punto. Como existe un valor $\delta > 0$ tal que, si dos intervalos cualesquiera $I^*(v), I^*(w)$ son disjuntos, entonces la distancia que los separa es mayor que $\delta > 0$ (por ser estos intervalos compactos), podemos agrandar ligeramente los intervalos de $\{I^*(v)\}_{v \in V}$ y conseguir que la familia resultante $\{I'(v)\}_{v \in V}$ sea la representación de G buscada.

Los grafos de intervalos son herramientas matemáticas de gran utilidad para modelar problemas reales que se estructuran en una dimensión lineal, bien sea por restricciones físicas, dependencias de tiempo o funciones de coste [24, pp. 181–184]. Un sencillo ejemplo de lo anterior consiste en determinar el mínimo número de refrigeradores para almacenar diversos compuestos químicos, cada uno de los cuales solo puede conservarse en un determinado rango de temperaturas: los vértices del grafo representarían los compuestos, que estarían conectados por una arista cuando sus rangos de conservación (que serían los intervalos de su representación) son parcialmente coincidentes. Las familias finitas de intervalos satisfacen (como implícitamente veremos en la prueba del teorema 3.2) la llamada **propiedad de Helly**: si cada par de ellos se intersecan, la intersección total es no vacía. Así pues, los compuestos que forman un clique pueden almacenarse en un único refrigerador, y el problema se traduce en encontrar un cubrimiento mínimo por maxcliques del grafo.

Estos grafos encuentran acomodo en disciplinas tan inesperadas como la arqueología, donde se utilizan en seriación, un método para ordenar cronológicamente objetos. Flinders Petrie[3] desarrolló este método estudiando cerámica en tumbas egipcias, a fin de determinar intervalos de tiempo de uso de artefactos y momentos de entierro de tumbas. Como a cada objeto corresponde un periodo de tiempo (que desconocemos) durante el que estuvo en uso, y cada enterramiento donde aparece uno de dichos objetos se produjo en un momento preciso (también ignorado) dentro de ese periodo, podemos pensar en un grafo cuyos vértices sean los artefactos, conectados por una arista cuando se han encontrado en la misma tumba. Si encontramos una colección de intervalos que sirva como representación del grafo, puede ayudarnos a dilucidar los periodos de tiempo que estamos investigando.

Otra aplicación de particular interés, esta en el ámbito de la biología, es el llamado problema de Benzer[4], que investiga si los subelementos de un gen están organizados linealmente. Benzer lo plantea así en [2]:

> From the classical researches of Morgan and his school, the chromosome is known as a linear arrangement of hereditary elements, the "genes." These elements must have an internal structure of their own. At this finer level, within the "gene" the question arises again: what is the arrangement of the *sub*-elements? Specifically, are *they* linked together in a linear order analogous to the higher level of integration of the genes in the chromosome?
>
> [...] A crucial examination of the question should be made from the point of view of *topology*, since it is a matter of how the parts of the structure are connected to each other, rather than of the distances between them. Experiments to explore the topology should ask *qualitative* questions (e.g., do two parts of the structure touch each other or not?) rather than *quantitative* ones (how far apart are they?).

Ahora bien, disponemos de datos experimentales sobre lugares concretos del gen donde aparecen gran variedad de mutaciones. Si el grafo constituido por dichas secuencias, conectadas cuando una mutación es común a ambas, es de intervalos, la hipótesis de linealidad no queda probada, pero sí reforzada; en cambio, una respuesta negativa refuta la hipótesis. Los experimentos de

[3] William Matthew Flinders Petrie (1853-1942) fue un importante egiptólogo de nacionalidad británica, considerado el fundador de la arqueología científica.

[4] El estadounidense Seymour Benzer (1921-2007) fue uno de los biólogos moleculares y genetistas más renombrados del siglo XX.

Seymour Benzer con una maqueta de la mosca de la fruta (*Drosophila melanogaster*), 1974.

Benzer con el virus Phage T4 apoyaron la idea de linealidad (ver [2, 3, 39]). Hoy la asumimos casi como un axioma, tan acostumbrados estamos a oír hablar de secuenciación genética, pero por aquel entonces, recién descubierta la estructura en doble hélice del ADN, se trataba de un problema de capital importancia en la biología.

El principal objetivo del artículo, como indicamos en la introducción, es proporcionar una caracterización intríseca de los grafos de intervalos, fácil de chequear en la práctica (e ilustrarla con una aplicación de menos trascendencia científica que las anteriores, pero sin duda más divertida). Aún falta bastante para eso, por lo que de momento cerramos la sección con un teorema de Gilmore y Hoffman [23] que plasma de un modo muy relevador su naturaleza unidimensional. En lo que sigue, si A, B son subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, entonces $A < B$ significa que $x < y$ para cada $x \in A$, $y \in B$.

Teorema 3.2. *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Entonces G es un grafo de intervalos si y solo si admite una línea de cliques.*

Demostración. Supongamos que G es un grafo de intervalos y sea $\{I(v)\}_{v\in V}$ una representación de G. Podemos descartar el caso trivial $V = \emptyset$ (así que todos los maxcliques de G son no vacíos) y suponer, de acuerdo con la observación 4, que los intervalos de la representación son también no vacíos y acotados.

Afirmamos que si $K \neq \emptyset$ es un clique, entonces $H = \bigcap_{x\in K} I(x)$ es un intervalo no vacío. La prueba es sencilla por inducción sobre el cardinal r de K. Si $r = 1$, la afirmación es consecuencia de que $I(v) \neq \emptyset$ para todo v. Supongamos ahora que la afirmación es cierta para todos los cliques de tamaño menor que r, fijemos $v \in K$ y usemos la inducción para deducir que $H' = \bigcap_{x\in K\setminus\{v\}} I(x)$ es un intervalo no vacío. Sean L y R los intervalos maximales verificando $L < H' < R$. La definición de H' garantiza la existencia de puntos $y \neq v \neq z$ en K tales que $I(y) \cap L = \emptyset$, $I(z) \cap R = \emptyset$, y si $I(v)$ estuviese contenido en L o en R entonces no se intersecaría con alguno de los intervalos $I(y), I(z)$, lo cual es una contradicción. Consecuentemente, $I(v)$ se interseca con H', luego $H = H' \cap I(v)$ es un intervalo no vacío.

El hecho anterior permite asociar, a cada maxclique K de G, el intervalo no vacío $H(K) := \bigcap_{x \in K} I(x)$. Notemos que si $y \notin K$ entonces, por la maximalidad, $I(y) \cap H(K) = \emptyset$. Por tanto, $H(K) \cap H(K') = \emptyset$ para cada par de maxcliques distintos K, K', lo que permite numerar la familia $\mathscr{K} = \{K_1, K_2, \ldots, K_m\}$ de maxcliques de G de modo que se cumple $H(K_1) < H(K_2) < \cdots < H(K_m)$. Observemos que si $i < j < k$ y $x \in K_i \cap K_k$, entonces $I(x)$ se interseca tanto con $H(K_i)$ como con $H(K_k)$, luego también con $H(K_j)$, lo que implica que $x \in K_j$. Esto significa que si definimos $\mathscr{T} = (\mathscr{K}, \mathscr{E})$ como

$$K_i K_j \in \mathscr{E} \quad \Leftrightarrow \quad j = i + 1,$$

entonces $\mathscr{T}$ es una línea de cliques para G.

Recíprocamente, supongamos que $\mathscr{T} = (\mathscr{K}, \mathscr{E})$ es una línea de cliques para G y sea $[K_1, K_2, \ldots, K_m]$ una alineación de $\mathscr{T}$. Para cada $x \in V$, sea $I(x) = [\mathrm{mín}_{x \in K_i} i, \mathrm{máx}_{x \in K_i} i]$. Por ser $\mathscr{T}$ una línea de cliques, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ pertenece a $I(x)$ si y solo si $x \in K_i$. Por tanto,

$$I(x) \cap I(y) \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; \text{existe } i \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ tal que } x, y \in K_i \;\Leftrightarrow\; xy \in E.$$

$\square$

4. Grafos cordales: caracterización

Los grafos cordales fueron introducidos por Hajnal y Surányi en [26]. Al igual que los de intervalos, encuentran aplicación en variadas disciplinas [35, Section 2.4, pp. 32–42] y son imprescindibles para demostrar (de hecho, para enunciar) el teorema de Lekkerkerker-Boland. Informalmente hablando, son aquellos cuyos ciclos pueden descomponerse como uniones de ciclos de longitud 3, por lo que es común encontrarlos en la literatura con el nombre, quizá más atinado, de **triangulables**.

Definición 4.1. Dados $G = (V, E)$ un grafo y τ un ciclo en G, se dice que una arista que une dos vértices no consecutivos de τ es una **cuerda**. Diremos que G es un grafo **cordal** si cada ciclo de longitud mayor o igual que 4 contiene una cuerda.

El grafo de la figura 2, por ejemplo, es claramente cordal. El de la figura 1a, por el contrario, no lo es, ya que $[9, 7, 4, 10, 9]$ es un ciclo de longitud 4 sin cuerdas.

En esta sección caracterizamos los grafos cordales de distintos modos, todos los cuales nos serán de utilidad más adelante. Uno de ellos requiere el siguiente concepto:

Definición 4.2. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un vértice v se dice **simplicial** si el conjunto de sus vecinos $\mathrm{Adj}(v)$ es un clique de G. Si $\sigma = [v_1; v_2; \ldots; v_n]$ es un orden de los vértices (todos los de V), diremos que σ es un **esquema perfecto** si v_i es un vértice simplicial del subgrafo inducido $G_{\{v_i,\ldots,v_n\}}$ para todo $i = 1, \ldots, n$, es decir, cada conjunto $\{v_j \in \mathrm{Adj}(v_i) : j > i\}$ es un clique.

Nótese que un esquema perfecto no tiene por qué ser un camino, de ahí que hayamos usado puntos y comas para separar sus vértices.

Las equivalencias $[1 \Leftrightarrow 2]$ y $[1 \Leftrightarrow 3]$ del siguiente teorema fueron probadas, respectivamente, en [18] y [16]. La equivalencia $[1 \Leftrightarrow 4]$ aparece en [45, 21, 8]. Nosotros hemos seguido parcialmente [24, Theorem 4.1, p. 83, y Theorem 4.8, p. 92], descomponiendo como allí la prueba en dos partes: primero demostramos $[1 \Leftrightarrow 2]$ y a continuación, con la ayuda de este resultado y un lema adicional basado en él, el resto de las equivalencias.

Teorema 4.3. *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *G es cordal.*
2. *Cada conjunto separador minimal es un clique de G.*
3. *G admite un esquema perfecto. Además, cualquier vértice simplicial puede iniciar un esquema perfecto.*
4. *G admite un árbol de cliques.*

Demostración de la equivalencia $[1 \Leftrightarrow 2]$. $[1 \Rightarrow 2]$ Supongamos que G es cordal. Sea S un conjunto $v - w$ separador minimal de G con A y B siendo las componentes conexas del subgrafo $G_{V\setminus S}$ conteniendo v y w, respectivamente. Como consecuencia del lema 2.4, obtenemos que tanto A como B son S-componentes de G, es decir, cumplen la propiedad de que $\mathrm{Adj}(x) \cap A \neq \emptyset$ y $\mathrm{Adj}(x) \cap B \neq \emptyset$ para todo $x \in S$. Por lo tanto, para cualquier par de vértices $x, y \in S$, $x \neq y$, existen caminos $[x, a_1, \ldots, a_r, y]$ e $[y, b_1, \ldots, b_t, x]$, donde $a_i \in A$ para todo $i = 1, \ldots, r$ y $b_j \in B$ para todo $j = 1, \ldots, t$, que eligimos de manera que sean los de menor longitud posible que empiezan en x y acaban en y. Se sigue que la concatenación de los dos caminos anteriores, $[x, a_1, \ldots, a_r, y, b_1, \ldots, b_t, x]$, forma un ciclo cuya longitud es al menos 4.

Ahora bien, por ser G cordal, este ciclo contiene una cuerda. Dado que S separa A y B, dicha cuerda no puede ser del tipo $a_i b_j$. Por otro lado, la minimalidad excluye las posibilidades $a_i a_j$, $b_i b_j$, $x a_i$, $a_i y$, $y b_j$ y $b_j x$. Por tanto, dicha cuerda es xy.

$[2 \Rightarrow 1]$ Supongamos que todo conjunto separador minimal es un clique en G, y consideremos en G un ciclo $[v, x, w, y_1, \ldots, y_k, v]$ con $k \geq 1$, es decir, de al menos longitud 4. Queremos probar que este ciclo contiene una cuerda. Si $vw \in E$, esta sería la cuerda buscada, así que supongamos que $vw \notin E$.

Observamos que, entonces, $V \setminus \{v, w\}$ es un $v - w$ separador, que a su vez contendrá un $v - w$ separador minimal S, que por hipótesis es un clique de G. No hay ningún vértice en una componente de $V \setminus S$ que tenga vecinos en otra componente, pues entonces S no las separaría. Por tanto, $x \in S$. Además, alguno de los vértices y_i ha de estar en S; de lo contrario, todos estarían en una única componente D de $V \setminus S$ y también $v, w \in D$, llegando a una contradicción. Por tanto, $y_i \in S$ para algún i, y como S es un clique, $xy_i \in E$ es la cuerda buscada. □

Lema 4.4 ([40, Lemma 4]). *Supongamos que $G = (V, E)$ es cordal y $C \subsetneq V$ es un clique. Entonces $V \setminus C$ contiene un vértice simplicial.*

Demostración. Demostramos la afirmación por inducción sobre el orden $|V|$ del grafo. Si $|V| \leq 1$ la afirmación es trivial. Supongamos que es cierta para todos los grafos cordales con orden menor que $|V|$. Si el propio V es un clique, la afirmación es de nuevo trivial, por lo que podemos suponer que V tiene dos vértices no adyacentes y, por tanto, que G admite un conjunto separador minimal S, que por el apartado 2 del teorema 4.3 es un clique. Dado que a lo sumo puede haber una componente de $G_{V \setminus S}$ que contenga vértices de C (pues es un clique), existe alguna componente D de $G_{V \setminus S}$ tal que $D \cap C = \emptyset$. Sean $W = D \cup S$ y $H = G_W$. Como $|W| < |V|$ y H es cordal (por ser esta condición, como ya comentamos, hereditaria para subgrafos), existe un vértice $v \in D = W \setminus S$ que es simplicial en H por la hipótesis de inducción. Ahora bien, dado que $v \in D$, se tiene $\mathrm{Adj}(v) \subset W$, y por tanto v es también un vértice simplicial de G. Como $D \cap C = \emptyset$, v es el vértice buscado. □

Demostración de las equivalencias [$1 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4$]. [$1 \Rightarrow 3$] De acuerdo con el lema anterior, si G es cordal entonces tiene vértices simpliciales: sea a uno cualquiera de ellos. Entonces, dado que $G_{V \setminus \{a\}}$ es cordal y de menor orden que G, admite por inducción un esquema perfecto que, cuando se adjunta al vértice a, forma un esquema perfecto para el grafo G.

[$3 \Rightarrow 4$] Mostramos que si G admite un esquema perfecto entonces también admite un árbol de cliques $\mathscr{T} = (\mathscr{K}, \mathscr{E})$, y razonamos para ello por inducción sobre el orden de G. Fijemos, de acuerdo con la hipótesis, un vértice simplicial a de G y sea $A = \mathrm{N}(a)$. Claramente, A es un maxclique de G. De acuerdo con la hipótesis, y teniendo en cuenta que la existencia de esquemas perfectos es una propiedad hereditaria, sabemos que $G' = G_{V \setminus \{a\}}$ admite un árbol de cliques $\mathscr{T}' = (\mathscr{K}', \mathscr{E}')$. Al ser a simplicial, A es el único maxclique de G que contiene a a. Por tanto, si denotamos $B = \mathrm{Adj}(a) = A \setminus \{a\}$ solo caben dos posibilidades:

- Si B es un maxclique de G', entonces $\mathscr{K} = (\mathscr{K}' \setminus \{B\}) \cup \{A\}$.
- Si B no es un maxclique de G', entonces $\mathscr{K} = \mathscr{K}' \cup \{A\}$.

En el primer caso, el árbol $\mathscr{T}$ buscado se obtiene a partir de $\mathscr{T}'$ sin más que renombrar B como A. En el segundo, fijado un maxclique K de G' conteniendo a B (que es también un maxclique de G), $\mathscr{T}$ se construye a partir de $\mathscr{T}'$ añadiendo A y conectándolo con una arista a K. En cualquier caso, $\mathscr{K}_a = \{A\}$ y $\mathscr{K}_x = \mathscr{K}'_x$ para todo $x \notin B$, en tanto que $\mathscr{K}_x = (\mathscr{K}'_x \cup \{A\}) \setminus \{B\}$ (si se da la primera posibilidad) y $\mathscr{K}_x = \mathscr{K}'_x \cup \{A\} \supset \{A, K\}$ (si ocurre la segunda) para todo $x \in B$. En ambas situaciones es claro que $\mathscr{T}$ es un árbol de cliques.

[4 ⇒ 1] Supongamos que G admite un árbol de cliques $\mathscr{T} = (\mathscr{K}, \mathscr{E})$ y, por reducción al absurdo, que contiene un ciclo $[v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k = v_0]$ sin cuerdas y con $k \geq 4$. A continuación trabajaremos módulo k y abreviaremos escribiendo $\mathscr{T}_i = \mathscr{K}_{v_i}$, cuando la hipótesis 4 garantiza que estos conjuntos son subárboles de $\mathscr{T}$, y la que queremos refutar se traduce en que $\mathscr{T}_i \cap \mathscr{T}_j \neq \emptyset$ si y solo si i y j difieren en, a lo sumo, 1 módulo k.

Sea K_i un vértice de $\mathscr{T}_i \cap \mathscr{T}_{i+1}$ $(i = 0, \ldots, k-1)$ y sean $\mathscr{P}_i \subset \mathscr{T}_i$ los (únicos) caminos simples en $\mathscr{T}$ conectando K_{i-1} y K_i. Notemos que la ausencia de ciclos en $\mathscr{T}$ obliga a que los caminos $\mathscr{P}_i$ y $\mathscr{P}_{i+1}$ solo coincidan en los últimos vértices de $\mathscr{P}_i$ (quizá solo en K_i), que igualmente serán los primeros de $\mathscr{P}_{i+1}$. Si L_i es el primer vértice de $\mathscr{P}_i$ (y último de $\mathscr{P}_{i+1}$) que pertenece a ambos caminos, y $\mathscr{Q}_i \subset \mathscr{P}_i$ es el camino que empieza en L_{i-1} y acaba en L_i, es claro que $\mathscr{Q}_i \cap \mathscr{Q}_j = \emptyset$ para los valores de i y j que difieren en más de 1 módulo k y $\mathscr{Q}_i \cap \mathscr{Q}_{i+1} = \{L_i\}$ para $i = 0, \ldots, k-1$. Entonces, la concatenación de los caminos $\mathscr{Q}_i$ es un ciclo, contradiciendo así la definición de árbol. □

Los teoremas 3.2 y 4.3 evidencian la conexión entre los grafos de intervalos y los cordales: los primeros son un tipo particular de los segundos. Este resultado fue, hasta donde sabemos, el primero que se probó acerca de los grafos de intervalos [26]: una demostración prácticamente directa puede encontrarse en [24, Proposition 1.2, p. 14].

Corolario 4.5. *Si $G = (V, E)$ es un grafo de intervalos, entonces es cordal.*

5. Grafos cordales: divisiones e invariancia

A un mismo grafo cordal se le pueden asociar, en principio, muchos árboles de cliques (apartado 4 del teorema 4.3). El modo «canónico» de hacerlo es con el famoso **algoritmo voraz de Kruskal**: las aristas se van eligiendo sucesivamente de manera que sus etiquetas tengan el mayor cardinal posible sin que aparezcan ciclos [35, Theorem 2.3, p. 22]. El propósito de esta sección, la más técnica del artículo, es doble. Por un lado, proporcionar una herramienta para «cortar y pegar» que nos permita, a partir de unos ciertos árboles de cliques, construir otros (proposición 5.2). Por otro, mostrar que el número de aristas de un árbol de cliques con una etiqueta dada es un invariante del grafo (teorema 5.4).

Definición 5.1. Sean $G = (V, E)$ un grafo y $V_1, V_2 \subset V$. Decimos que V_1, V_2 es una **división** de V con **divisor** $V_1 \cap V_2$ si las familias $\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2$ de maxcliques de los respectivos subgrafos G_{V_1}, G_{V_2} constituyen una partición de la familia de maxcliques $\mathscr{K}$ de G. Llamamos a $\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2$ la **partición asociada** a la división V_1, V_2.

Notemos que, aunque V es la unión de V_1 y V_2, su divisor puede no ser vacío, así que estos conjuntos no constituyen, en general, una partición de V. Así, en el caso del grafo de la figura 2, $V_1 = \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$ y $V_2 = \{3, 4, 7, 9, 10\}$ es una división de V con divisor $\{4\}$. En cambio, $V_1 = \{1, 2, 5, 6, 8\}$ y $V_2 = \{2, 3, 4, 6, 7, 9, 10\}$ no es una división de V, ya que, por ejemplo, $\{2, 4, 6\}$ es un maxclique de G_{V_2} pero no es un maxclique de G.

Proposición 5.2. *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se cumplen las afirmaciones siguientes:*

1. *Supongamos que $\mathscr{T} = (\mathscr{K}, \mathscr{E})$ es un árbol de cliques de G y $K_1K_2 \in \mathscr{E}$ con etiqueta $S = K_1 \cap K_2$. Sea $\mathscr{K}_1 = \mathscr{K}_{K_1-K_2}$, $\mathscr{K}_2 = \mathscr{K}_{K_2-K_1}$, la K_1K_2-partición de $\mathscr{K}$, y denotemos por V_i al conjunto unión de los maxcliques de $\mathscr{K}_i$, $i = 1, 2$. Entonces V_1, V_2 es una división de V con partición asociada $\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2$ y divisor S, y los subgrafos inducidos $\mathscr{T}_{\mathscr{K}_i}$ son árboles de cliques de G_{V_i}.*

2. *Sean V_1, V_2 una división de V con divisor S, $\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2$ su partición asociada y $\mathscr{T}_i = (\mathscr{K}_i, \mathscr{E}_i)$ árboles de cliques de G_{V_i}, $i = 1, 2$. Supongamos que existen maxcliques $K_i \subset V_i$ tales que $K_1 \cap K_2 = S$. Entonces $\mathscr{T} = (\mathscr{K}_1 \cup \mathscr{K}_2, \mathscr{E}_1 \cup \mathscr{E}_2 \cup \{K_1K_2\})$ es un árbol de cliques de G.*

Demostración. Probamos 1. Comenzamos demostrando que $V_1 \cap V_2 = S$ a través de la doble inclusión.

La inclusión $S \subset V_1 \cap V_2$ es obvia, ya que V_i es la unión de los maxcliques en $\mathscr{K}_i$, $i = 1, 2$, y $K_1 \in \mathscr{K}_1$ y $K_2 \in \mathscr{K}_2$. Recíprocamente, sea $v \in V_1 \cap V_2$ y fijemos $K'_1 \in \mathscr{K}_1$ y $K'_2 \in \mathscr{K}_2$ tales que $v \in K'_1 \cap K'_2$. Por el apartado 2 del lema 2.7, $\mathscr{K}_{K_1-K_2}$ y $\mathscr{K}_{K_2-K_1}$ es una partición de $\mathscr{K}$ en subconjuntos conexos y K_1K_2 es la única arista que conecta vértices de $\mathscr{K}_{K_1-K_2}$ con vértices de $\mathscr{K}_{K_2-K_1}$. Luego tenemos que el camino $\mathscr{T}[K'_1, K'_2]$ debe contener esa arista. Ahora bien, por ser $\mathscr{K}_v$ conexo, este camino está en $\mathscr{K}_v$, luego también K_1 y K_2 contienen a v, es decir, $v \in S$. Con esto terminamos de probar la doble inclusión y, por tanto, $S = V_1 \cap V_2$.

En segundo lugar, probaremos que V_1, V_2 es una división de V con partición asociada $\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2$.

Supongamos que K es un maxclique de G_{V_1} y sea K' un maxclique de G tal que $K \subset K'$ (un maxclique de un subgrafo de G no tiene que ser necesariamente un maxclique de G). Notemos que K' debe pertenecer o bien a $\mathscr{K}_1$ o bien a $\mathscr{K}_2$, ya que $\mathscr{K}_1 = \mathscr{K}_{K_1-K_2}$ y $\mathscr{K}_2 = \mathscr{K}_{K_2-K_1}$ constituyen una partición de $\mathscr{K}$. Por tanto, no puede ocurrir $K' \in \mathscr{K}_2$, porque $K \subset K' \in \mathscr{K}_2$ implicaría $K \subset V_1 \cap V_2 = K_1 \cap K_2 \subsetneq K_1$, es decir, $K \subsetneq K_1$, siendo K_1 un clique mayor en G_{V_1}, contradiciendo la maximalidad de K. Entonces $K' \in \mathscr{K}_1$ y, por tanto, $K = K'$.

En resumen, los maxcliques de G_{V_1} son los elementos de $\mathscr{K}_1$, y análogamente los de G_{V_2} son los elementos de $\mathscr{K}_2$. Así pues, V_1, V_2 es una división de V con partición asociada $\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2$ y divisor $K_1 \cap K_2$.

Notemos finalmente que $\mathscr{K}_i$ y $\mathscr{K}_{i,v} = \mathscr{K}_i \cap \mathscr{K}_v$ son conexos para cada $v \in V$ y cada $i = 1, 2$ por los apartados 2 y 3 del lema 2.7. Por tanto, $\mathscr{T}_{\mathscr{K}_i}$ son árboles de cliques de G_{V_i}.

Ahora probaremos 2. Para ello debemos verificar que $\mathscr{T}$ es un árbol y que todos los conjuntos $\mathscr{K}_v$ son conexos.

Comenzamos viendo que $\mathscr{T}$ es un árbol (conexo y acíclico), pero esto es sencillo, ya que K_1K_2 es la única arista de $\mathscr{E}_1 \cup \mathscr{E}_2 \cup \{K_1K_2\}$ conectando vértices de los subárboles $\mathscr{T}_1$ y $\mathscr{T}_2$, lo que garantiza la conexión. Más aún, la existencia de un ciclo en $\mathscr{T}$ exigiría la de dos caminos simples con inicio en $\mathscr{K}_1$ y final en $\mathscr{K}_2$ y aristas disjuntas, lo que contradice el hecho de que exista una única arista conectando vértices de $\mathscr{K}_1$ con vértices de $\mathscr{K}_2$.

En segundo lugar, probaremos que todos los conjuntos $\mathscr{K}_v$ son conexos. Existen dos posibilidades: si $v \in V_i \setminus S$ para algún $i \in \{1, 2\}$, se tiene la igualdad $\mathscr{K}_v = \mathscr{K}_{i,v}$, luego $\mathscr{K}_v$ es conexo por ser $\mathscr{T}_i$ un árbol de cliques. La otra posibilidad es que $v \in S$, en cuyo caso $K_i \in \mathscr{K}_{i,v}$ para cada i, y $\mathscr{K}_v = \mathscr{K}_{1,v} \cup \mathscr{K}_{2,v}$ es conexo por ser unión de conexos y por ser K_1K_2 una arista de $\mathscr{T}$. □

Observación 5. Notemos que, con las condiciones y notación del apartado 1 de la proposición anterior, se tiene que S es un $x - y$ separador para todo $x \in V_1 \setminus S$ e $y \in V_2 \setminus S$, y un $x - y$ separador minimal para todo $x \in K_1 \setminus S$ e $y \in K_2 \setminus S$ [29, Lemma 2.1]. En efecto, sean $x \in V_1 \setminus S$ e $y \in V_2 \setminus S$. Si existe un camino en $V \setminus S$ conectando x e y, ha de existir una arista $zu \in E$ tal que $z \in V_1 \setminus S$, $u \in V_2 \setminus S$, y por tanto un maxclique $K \supset \{z, u\}$, lo cual es imposible porque K no pertenecería ni a $\mathscr{K}_1$ ni a $\mathscr{K}_2$. Por tanto, S es un $x - y$ separador. Su minimalidad cuando $x \in K_1 \setminus S$ e $y \in K_2 \setminus S$ es inmediata, ya que si $S' \subsetneq S$ y $z \in S \setminus S'$, entonces $[x, z, y]$ es un camino que conecta x e y y no pasa por S'.

El otro resultado que nos interesa necesita un lema preparatorio.

Lema 5.3 ([22, Theorem 1 (fact 3)]). *Supongamos que $G = (V, E)$ es un grafo cordal, S un clique y D una S-componente de G. Entonces existe $v \in D$ tal que $S \subset \mathrm{Adj}(v)$. En particular, S no es un maxclique.*

Demostración. Sean $W = D \cup S$ y $H = G_W$. De acuerdo con el lema 4.4, H admite un vértice simplicial $v_1 \in D$, por lo que podemos aplicar el apartado

3 del teorema 4.3 y encontrar un esquema perfecto para H que empieza en v_1. Del mismo modo, podemos encontrar un esquema perfecto para $H' = G_{W'}$ con $W' = W \setminus \{v_1\}$, que empieza en un cierto vértice v_2 de $D \setminus \{v_1\}$, y por tanto un esquema perfecto para H empieza en $v_1; v_2$. Reiterando el procedimiento, encontramos un esquema perfecto $[v_1; \dots; v_k; s_1; \dots; s_l]$ para H tal que $S = \{s_1, \dots, s_l\}$ (el orden en que añadimos al final los vértices de S es irrelevante, puesto que este es un clique). Mostramos a continuación que $v = v_k$ es el vértice buscado.

Sea $x \in S$. Por ser D una S-componente de G, $D \cup \{x\}$ es conexo, por lo que existe un camino $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ de longitud minimal (por tanto, simple) en $D \cup \{x\}$ conectando $x = x_0$ y $v = x_n$. Supongamos por reducción al absurdo que $n \geq 2$ y sea $1 \leq i \leq n-1$ tal que $x_i = v_j$ con j lo más pequeño posible. Entonces $x_{i-1}, x_{i+1} \in \mathrm{Adj}(x_i)$ y ambos están a la derecha de x_i en el esquema perfecto anteriormente citado, por lo que son adyacentes. En consecuencia, $[x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_n]$ es también un camino conectando x y v, lo que contradice la minimalidad. Por tanto $n = 1$, es decir, $x \in \mathrm{Adj}(v)$. Así pues, $S \subset \mathrm{Adj}(v)$, como queríamos demostrar. □

Observación 6. Supongamos que G es cordal y S es un clique. Entonces el total $\Sigma(S)$ de S-componentes de G es cero si y solo si es un maxclique. En efecto, si S es un maxclique, entonces $\Sigma(S) = 0$ por el lema 5.3. Recíprocamente, si S no es un maxclique y $v \in V \setminus S$ es tal que $S \cup \{v\}$ es un clique, entonces la componente de $G_{V \setminus S}$ que contiene a v es, trivialmente, una S-componente de G, así que $\Sigma(S) \geq 1$.

Asimismo, $\Sigma(S) \geq 2$ si y solo si S es un separador minimal. La parte «si» de la afirmación es cierta en general (lema 2.4). Respecto a la parte «solo si», basta usar el lema 5.3 para encontrar puntos v, w en distintas S-componentes de G tales que tanto $S \cup \{v\}$ como $S \cup \{w\}$ son cliques. Obviamente, S es un $v - w$ separador minimal.

El siguiente teorema se plantea como ejercicio en [35, p. 23], y en [10] se indica [21] como referencia, pero no parece que este resultado se pruebe allí de forma explícita.

Teorema 5.4. *Supongamos que $G = (V, E)$ es cordal, $\mathscr{T} = (\mathscr{K}, \mathscr{E})$ un árbol de cliques de G y S un clique no maximal. El total de aristas de $\mathscr{T}$ que tienen por etiqueta a S es $\Sigma(S) - 1$, es decir, su número no depende de $\mathscr{T}$, solo de G.*

Demostración. Lo demostraremos mediante inducción sobre el orden del grafo G. Supongamos en primer lugar que $|V| \leq 1$. En este caso, la afirmación es trivial ya que si $V = \emptyset$ entonces G no tiene cliques no maximales; y si $V = \{v\}$, entonces el único clique no maximal es $S = \emptyset$, con $\Sigma(S) = 1$, y como $\mathscr{K}$ tiene a $\{v\}$ como único elemento, $\mathscr{T}$ no tiene aristas.

Supongamos como hipótesis de inducción que la afirmación se cumple para todos los grafos de orden menor que $|V|$ y veámoslo para G. Debemos distinguir dos casos:

En primer lugar, supongamos que S no es un separador minimal. Entonces $\Sigma(S) = 1$ por la observación 6. Ahora bien, la observación 5 establece que todas las etiquetas de $\mathscr{T}$ son separadores minimales, así que ninguna de ellas puede ser S. Luego, en este primer caso, el total de aristas del árbol $\mathscr{T}$ que tienen por etiqueta a S es $\Sigma(S) - 1 = 0$.

En segundo lugar, supongamos que S es un $v - w$ separador minimal. Conforme a lo comentado en la observación 6, $\Sigma(S) \geq 2$ y podemos suponer que tanto $S \cup \{v\}$ como $S \cup \{w\}$ son cliques.

Como el árbol $\mathscr{T}$ tiene más de un vértice (de lo contrario V sería un maxclique y entonces S no sería un separador), el apartado 1 del lema 2.7 garantiza la existencia de una arista $Q_1Q_2 \in \mathscr{E}$ tal que Q_1 es una hoja. Aplicamos el apartado 1 de la proposición 5.2 a esta arista: sea $\mathscr{K}_1 = \mathscr{K}_{Q_1-Q_2}$ y $\mathscr{K}_2 = \mathscr{K}_{Q_2-Q_1}$ la Q_1Q_2-partición de $\mathscr{K}$, y denotemos por V_i al conjunto unión de los maxcliques de $\mathscr{K}_i$ para $i = 1, 2$. Entonces V_1, V_2 es una división de V con partición asociada $\mathscr{K}_1$, $\mathscr{K}_2$ y divisor $Q_1 \cap Q_2$, y los subgrafos inducidos $\mathscr{T}_{\mathscr{K}_i}$ son árboles de cliques de G_{V_i} para cada $i = 1, 2$.

De hecho, $\mathscr{K}_1 = \{Q_1\}$, $\mathscr{K}_2 = \mathscr{K} \setminus \{Q_1\}$, y si denotamos $S_0 = Q_1 \cap Q_2$ y $D = Q_1 \setminus S_0$, entonces $V_1 = Q_1$, $V_2 = V \setminus D$. De acuerdo con la observación 5, D es una componente de $V \setminus S_0$ (de hecho, una S_0-componente de G). Así pues, $\mathrm{Adj}(x) \subset Q_1$ para todo $x \in D$. Observemos que no puede ocurrir que v y w pertenezcan simultáneamente a Q_1, así que podemos suponer $v \notin Q_1$. Como $v \in \mathrm{Adj}(x)$ para todo $x \in S$, deducimos que $S \subset V_2$.

Denotemos por $D_1, \ldots, D_r$ a las componentes de $G_{V_2 \setminus S}$. Debemos distinguir tres posibilidades:

1. $S_0 \not\subset S$. Si suponemos, sin perdida de generalidad, que $\emptyset \neq S_0 \setminus S \subset D_1$, entonces la familia de componentes de $G_{V \setminus S}$ es $D \cup D_1, \ldots, D_r$ (recuérdese la observación 3). Sea $x \in S$. Si $\mathrm{Adj}(x)$ no contiene ningún punto de $D_1 \supset S_0 \setminus S$, es porque $x \notin S_0$, así que $\mathrm{Adj}(x)$ tampoco contiene puntos de $D \cup D_1$. Consecuentemente, $D \cup D_1$ es una S-componente de G si y solo si D_1 es una S-componente de V_2, luego $\Sigma_{G_{V_2}}(S) = \Sigma(S)$.

2. $S_0 \subsetneq S$. En este caso las componentes de $G_{V \setminus S}$ serían $D, D_1, \ldots, D_r$, y D no es una S-componente de G porque $\mathrm{Adj}(x) \cap D = \emptyset$ para todo $x \in S \setminus S_0$. Por tanto $\Sigma_{G_{V_2}}(S) = \Sigma(S)$.

3. $S_0 = S$. Las componentes de $G_{V \setminus S}$ son de nuevo $D, D_1, \ldots, D_r$, pero en este caso D sí es una S-componente de G. Entonces $\Sigma_{G_{V_2}}(S) = \Sigma(S) - 1$.

Como $\Sigma_{G_{V_2}}(S) \geq 1$ por ser $\Sigma(S) \geq 2$, S es un clique no maximal de G_{V_2}. Por tanto, podemos aplicar la hipótesis de inducción al subgrafo G_{V_2} y S y deducir que el total de aristas de $\mathscr{T}_{\mathscr{K}\setminus\{Q_1\}}$ cuya etiqueta es S es $\Sigma_{G_{V_2}}(S)-1$. Ahora bien, dicho total de aristas coincide con el total de aristas del árbol $\mathscr{T}$ con etiqueta S en los casos 1 y 2 y es una unidad inferior en el caso 3. Por tanto el total de aristas de $\mathscr{T}$ con etiqueta S es $\Sigma(S)-1$, como queríamos demostrar. □

Observación 7. Notemos que, junto con la observación 5 y el hecho de que $\Sigma(S) \geq 2$ si y solo si S es un separador minimal (observación 6), el teorema 5.4 caracteriza las etiquetas de los árboles de cliques de los grafos cordales: son precisamente sus separadores minimales.

6. El teorema de Lekkerkerker-Boland

Estamos listos (módulo una última definición) para enunciar y probar el resultado central del artículo:

Definición 6.1. Se dice que un trío de vértices de un grafo $G=(V,E)$ es **asteroidal** si cada par de ellos puede conectarse con un camino que no se interseca con el entorno del tercero.

Teorema 6.2 (Lekkerkerker-Boland). *Sea $G=(V,E)$ un grafo. Entonces G es un grafo de intervalos si y solo si es cordal y carece de tríos asteroidales.*

Históricamente, la cuestión se remonta a Hajós [27], quien en 1957 planteó el problema de caracterizar los grafos de intervalos basándose en sus propiedades intrínsecas. Dos años más tarde, y de manera independiente, Seymour Benzer se encontró con un problema similar en sus investigaciones sobre la estructura interna de los genes, ya mencionadas al principio de la sección 3. El artículo de Benzer [2] captó la atención de Johannes de Groot, un destacado topólogo holandés de mediados del siglo pasado. De Groot realizó algunos avances en el tema y sugirió el problema a dos colegas de la Universidad de Ámsterdam, C. G. Lekkerkerker y J. Ch. Boland [32], quienes lograron demostrar el teorema en 1962, publicando su trabajo en la prestigiosa *Fundamenta Mathematicae*. Posteriormente, los grafos de intervalos han sido caracterizados de diversas maneras; sin embargo, ninguna de estas caracterizaciones parece poseer la elegancia de la primera (ni ser tan útil, a luz de lo que veremos en la sección siguiente, para los criminólogos...).

La demostración de Lekkerkerker y Boland no requiere técnicas avanzadas de teoría de grafos, pero es bastante enrevesada. En 1982 Halin acortó la prueba usando las llamadas «descomposiciones primas de grafos» [28], pero su trabajo tampoco es fácil de leer. En [35, Theorem 3.3, p. 47] McKee y McMorris retoman la idea de Halin con una herramienta más adecuada, los árboles de cliques, y dan una demostración del teorema casi directa. Desafortunadamente, como ellos mismos reconocen en la fe de erratas *online* del libro, su prueba es incorrecta. Cameron, Hoàng y Lévêque repararon la demostración (usando igualmente árboles de cliques) y la incluyeron en un *preprint* subido a arXiv en 2008 [10]; esta es la prueba que se ha seguido aquí. Curiosamente, se han publicado dos versiones del trabajo en revistas de investigación, una sin pruebas de los resultados principales [11] y la otra con ellas [12], pero la del teorema de Lekkerkerker-Boland se omite en ambas.

Demostración del teorema 6.2. La parte «solo si» de la equivalencia es sencilla. Supongamos que G es un grafo de intervalos. Por el corolario 4.5 se tiene que G es cordal, por lo que solo resta probar que G carece de tríos asteroidales. Para ello, fijemos una representación $\{I(v)\}_{v\in V}$ de G por intervalos no vacíos (observación 4) y supongamos que los vértices x, y, z forman un trío asteroidal de G. Como los intervalos $I(x), I(y), I(z)$ son disjuntos dos a dos, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $I(x) < I(y) < I(z)$. Por la definición de trío asteroidal existe un camino $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ desde $x = x_0$ hasta $z = x_n$ sin vértices en $\mathrm{N}(y)$. Esto, por un lado, implica que $I(x) \cup I(x_1) \cup \dots \cup I(x_{n-1}) \cup I(z)$ es un intervalo, y por otro lado tenemos que $I(y)$ no se interseca con él, por lo que hemos llegado a una contradicción.

Resta demostrar la parte «si» del teorema. Supongamos, por reducción al absurdo, que la afirmación es falsa y que G tiene orden minimal entre todos los grafos cordales y sin tríos asteroidales que no son grafos de intervalos. Por ser G cordal, el apartado 4 del teorema 4.3 asegura que G admite un árbol de cliques $\mathscr{T} = (\mathscr{K}, \mathscr{E})$, pero, al no ser un grafo de intervalos, $\mathscr{T}$ no puede ser una línea por el teorema 3.2. Ahora, dado que $\mathscr{T}$ no es una línea, el apartado 1 del lema 2.7 garantiza la existencia de al menos tres hojas, que denotaremos por Q_1, Q_2, Q_3, en $\mathscr{T}$. Denotamos por Q'_i a sus respectivos (únicos) maxcliques adyacentes y escribimos asimismo $S_i = Q_i \cap Q'_i$ (la etiqueta correspondiente a la arista $Q_iQ'_i \in \mathscr{E}$) y $D_i = Q_i \setminus S_i$ para todo $i = 1, 2, 3$. Aplicando el apartado 1 de la proposición 5.2 a la $Q_iQ'_i$-partición de $\mathscr{K}$, obtenemos la división $V_{i,1} = Q_i$, $V_{i,2} = V \setminus D_i$, cuyo divisor es S_i para todo i. Más aún, $D_i \cap Q_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y los únicos vértices adyacentes a los de D_i son los de Q_i. Por tanto, fijados a placer $v_i \in D_i$, $\{v_1, v_2, v_3\}$, constituyen un trío de vértices distintos y no adyacentes dos a dos.

Ahora bien, por hipótesis este trío no puede ser asteroidal, por lo que podemos suponer (cambiando la notación si es preciso) que todo camino que conecta v_2 y v_3 pasa por $\mathrm{N}(v_1)$. Sea $\mathscr{T}[Q_2, Q_3] = [K_0, K_1, \dots, K_n]$ el único camino simple de $\mathscr{T}$ que conecta $Q_2 = K_0$ y $Q_3 = K_n$. Afirmamos que alguna de sus aristas tiene por etiqueta a un subconjunto de $S_1 = Q_1 \cap Q'_1$. En caso contrario, para cada $1 \leq j \leq n$ existirá un vértice $x_j \in (K_{j-1} \cap K_j) \setminus S_1$, y como el camino no tiene a Q_1 entre sus vértices, esto implica que ninguno de los vértices x_j pertenece a $S_1 \cup D_1 = Q_1$ ni, por tanto, a $\mathrm{N}(v_1)$. Añadiendo a la lista los vértices $x_0 = v_2$ y $x_{n+1} = v_3$, obtenemos una sucesión de vértices $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ tales que $x_j = x_{j+1}$ o $x_jx_{j+1} \in E$ para cada $1 \leq j \leq n$, y que por tanto permite construir un camino conectando v_2 y v_3 que no pasa por $\mathrm{N}(v_1)$, lo que es una contradicción con el hecho de suponer que no existen tríos asteroidales.

Así pues, hay al menos dos aristas en $\mathscr{T}$ cuyas etiquetas están contenidas en S_1, una del tipo $K_j \cap K_{j+1}$ y la propia $Q_1Q'_1$. Ahora bien, si denotamos $W = V \setminus D_1$ y $\mathscr{L} = \mathscr{K} \setminus \{Q_1\}$, el apartado 1 de la proposición 5.2 garantiza que $(\mathscr{L}, \mathscr{E} \setminus \{Q_1Q'_1\})$ es un árbol de cliques para G_W. Por la minimalidad de G, y ser hereditarias las propiedades de cordalidad y carecer de tríos asteroidales, G_W es un grafo de intervalos. Sea $\mathscr{P} = (\mathscr{L}, \mathscr{F})$ una línea de cliques para G_W con alineación $[P_1, P_2, \ldots, P_k]$, y recordemos que uno de estos maxcliques es Q'_1. Como $Q_1 \cap Q'_1 = S_1$ es el divisor de la división Q_1, W, podemos aplicar el apartado 2 de la proposición 5.2 a $\mathscr{P}$ y $\mathscr{Q} = (\{Q_1\}, \emptyset)$ y obtener un nuevo árbol de cliques $\mathscr{T}' = (\mathscr{K}, \mathscr{F} \cup \{Q_1Q'_1\})$ de G que, por así decir, es «casi» una línea.

El árbol $\mathscr{T}'$ tiene, por el teorema 5.4, al menos dos aristas cuyas etiquetas están contenidas en S_1. Como una es $Q_1Q'_1$, habrá alguna otra del tipo P_mP_{m+1}. Sea $\mathscr{P}' : [P_r, P_{r+1}, \ldots, P_s]$ la sublínea maximal de $\mathscr{P}$ conteniendo a Q'_1 y sin etiquetas que sean subconjuntos de S_1. No puede ocurrir a la vez $r = 1$ y $s = k$, por lo que supondremos $r > 1$ sin pérdida de generalidad y denotaremos $U = Q_1 \cup \bigcup_{r \le m \le s} P_m$, $\mathscr{P}_{\text{ini}} : [P_1, \ldots, P_{r-1}]$, $S_{\text{ini}} = P_{r-1} \cap P_r \subset S_1$ y $U_{\text{ini}} = \bigcup_{1 \le m < r} P_m$. Ahora cabe distinguir dos casos: (a) $s = k$ y (b) $s < k$.

Si estamos en el caso (a), usando de nuevo el apartado 1 de la proposición 5.2, deducimos que U_{ini}, U es una división de G con divisor S_{ini}. Si estamos en el caso (b), y denotamos $\mathscr{P}_{\text{fin}} : [P_{s+1}, \ldots, P_k]$, $S_{\text{fin}} = P_s \cap P_{s+1} \subset S_1$ y $U_{\text{fin}} = \bigcup_{s < m \le k} P_m$, aplicamos el apartado 1 de la proposición 5.2 dos veces: primero para obtener la división $U_{\text{ini}}, U \cup U_{\text{fin}}$ de V con divisor S_{ini}, y luego la división U, U_{fin} de $U \cup U_{\text{fin}}$ (relativa a $G_{U \cup U_{\text{fin}}}$) con divisor S_{fin}.

Quitando primero a $\mathscr{T}'$ la línea $\mathscr{P}_{\text{ini}}$, y al árbol resultante la línea $\mathscr{P}_{\text{fin}}$ (si estamos en el caso (b)), obtenemos un árbol de cliques $\mathscr{H}$ de G_U. Un detalle a destacar en el caso (b) es el siguiente. Uno de los maxcliques de $\mathscr{P}'$, digamos P_t, es Q'_1, que contiene a S_1. Por su parte, P_r contiene a S_{ini} y P_s a S_{fin}. Como $\mathscr{P}$ es una línea de cliques, todos los subgrafos $\mathscr{L}_w$, $w \in W$, son conexos. En particular, todos los maxcliques entre P_r y P_t contienen a $S_{\text{ini}} \cap S_1 = S_{\text{ini}}$, y todos los maxcliques entre P_t y P_s a $S_{\text{fin}} \cap S_1 = S_{\text{fin}}$. En resumen, cada maxclique de $\mathscr{P}'$ contiene a S_{ini} o a S_{fin}.

Por la minimalidad de G, G_U es un grafo de intervalos, luego admite, además del árbol de cliques $\mathscr{H}$, una línea de cliques $\mathscr{H}'$ con alineación $[H_1, H_2, \ldots, H_{s-r+2}]$. Ahora bien, $\mathscr{H}$ tiene justo una arista $(Q_1Q'_1)$ cuya etiqueta es un subconjunto de S_1, así que lo mismo habrá de pasarle, por el teorema 5.4, a $\mathscr{H}'$. Como cualquier arista de $\mathscr{H}'$ que tenga como extremo a Q_1 tiene su etiqueta contenida en $Q_1 \cap \bigcup_{r \le m \le s} P_m = S_1$, concluimos que Q_1 es una de las dos hojas de $\mathscr{H}'$. No es restrictivo suponer que $Q_1 = H_1$ y (en el caso (b)) $S_{\text{fin}} \subset H_{s-r+2}$.

Estamos listos para acabar la demostración. En el caso (a) se tiene

$$S_{\text{ini}} = P_{r-1} \cap P_r = P_{r-1} \cap P_r \cap Q_1 \subset P_{r-1} \cap Q_1 \subset U_{\text{ini}} \cap U = S_{\text{ini}},$$

esto es, $P_{r-1} \cap H_1 = P_{r-1} \cap Q_1 = S_{\text{ini}}$, por lo que el apartado 2 de la proposición 5.2 permite concatenar las líneas $\mathscr{P}_{\text{ini}}$ y $\mathscr{H}'$ y obtener una línea de cliques para G, lo que contradice la hipótesis de que G no es un grafo de intervalos. Si estamos en el caso (b), tenemos

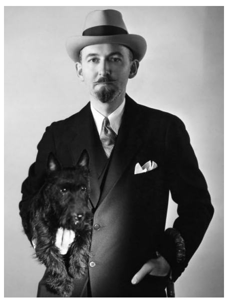
$$S_{\text{fin}} = P_{s+1} \cap P_s = P_{s+1} \cap P_s \cap H_{r-s+2} \subset P_{s+1} \cap H_{r-s+2} \subset U_{\text{fin}} \cap U = S_{\text{fin}},$$

luego $P_{s+1} \cap H_{s-r+2} = S_{\text{fin}}$ y, como antes, $P_{r-1} \cap H_1 = S_{\text{ini}}$. Concatenando el final de $\mathscr{H}'$ con $\mathscr{P}_{\text{fin}}$, y el principio de esta nueva línea con $\mathscr{P}_{\text{ini}}$, obtenemos una línea de cliques para G y, una vez más, una contradicción. □

7. Matemáticas y literatura

Desmintiendo la consabida, y ridícula, separación entre ciencias y letras, Alex Kasman, un profesor del College of Charleston, mantiene desde 2000 el sitio web `Mathematical Fiction` [31]. En él recoge referencias a más de 1600 textos de ficción donde las matemáticas juegan un papel no trivial. El material viene clasificado de modos muy diversos (autor, género, temática, rama...), típicamente con dobles valoraciones de 0 a 5 de acuerdo con su calidad literaria y la relevancia de su contenido matemático. Nosotros preferimos esta más simple (y melódica) organización:

- Historias con *matemáticos*.
- Historias con *matemáticas*.
- Historias con *metamatemáticas*.



Willard Huntington Wright (S. S. Van Dine), 1932.

El primer bloque incluiría aquellas obras cuyo protagonista es un profesional de la disciplina o, cuando menos, alguien muy versado o muy hábil en la misma. Su perfil psicológico ya es harina de otro costal. El cliché del sabio despistado aparece con frecuencia, aunque a veces de manera tan inusual como en *The curious incident of the dog in the night-time*, la (justamente) famosa novela de Mark Haddon [25], narrada en primera persona por un autista adolescente con extraordinarias habilidades deductivas. Imposible prescindir, asimismo, del asesino diabólico, cuya apoteosis es sin duda *The bishop murder case*, de S. S. Van Dine, un clásico de la Edad de Oro de la novela policiaca [44]. No se trata solo de que todos los sospechosos (y casi todos los asesinados) sean matemáticos y/o ajedrecistas, actividades más o menos isomorfas, por lo visto, para el autor. Fíjense cómo Philo Vance, el detective del caso, enfoca el asunto:

> Para comprender estos crímenes —comenzó— debemos, ante todo, considerar el bagaje intelectual del matemático, porque todos sus cálculos, cómputos y especulaciones tienden a destacar la relativa insignificancia de nuestro planeta y la vida humana. [...] ¿Puede sorprender que una persona que maneja tan colosales e inconmensurables conceptos en los que los individuos humanos son infinitesimales, pueda, con el tiempo, perder todo sentido de los valores terrenales y sentir un enorme desprecio por la vida humana? [...]
>
> En una persona normal que tiene sus recreaciones cotidianas, se mantiene un equilibrio constante entre las actividades conscientes e inconscientes. Las emociones, al ser frecuentemente sustituidas, no pueden acumularse. Pero en el caso del *anormal que invierte todo su tiempo en una intensa concentración mental* y que se inhibe de las demás emociones, el desbordamiento de su subconsciente es capaz de manifestarse con violencia. Esa larga inhibición y constante trabajo mental, sin distracción de ningún género, son causa de una explosión que a menudo *toma la forma de actos de indescriptible horror.* Ningún ser humano, por mucha inteligencia que tenga, puede escaparse de tales resultados.

Cuando vuelvan a su facultad, no miren a esos colegas que parecen pasarse la vida allí de un modo distinto, por favor: después de todo, la de Phile Vance es solo *una opinión.* En cualquier caso, también hay espacio en la ficción matemática para los investigadores *teóricamente* centrados. Ted Chiang propone un ejemplo particularmente conmovedor en su excelente[5] relato «Divided by zero» [14]: Renee Norwood, una lumbrera de la teoría de conjuntos, demuestra que la axiomática de Zermelo-Fraenkel con la que nos desayunamos todos los días conduce a contradicciones; más aún, el destrozo es tan profundo que *no admite* arreglo. Es algo que como, bien sabemos, *podría ocurrir*, y que simplemente esperamos que no suceda, igual que esperamos que no nos caiga un megameteorito encima y nos extinga como a los dinosaurios. ¿Imaginan las implicaciones emocionales, incluso metafísicas, de algo así? La pobre Renee, abrumada, acaba intentando suicidarse.

En los libros del segundo grupo de la lista, es el *gadget* matemático, más que el personaje en sí, el que acapara el protagonismo. El paradigma es *Flatland: a romance of many dimensions*, del reverendo Edwin A. Abbott

[5] En lo tocante a la, por desgracia escasa, producción literaria de Ted Chiang, el adjetivo «excelente» es un pleonasmo: no ha escrito nada que no lo sea.

[1], una fantasía que especula sobre cómo sería la vida en un mundo bidimensional. Se trata, en realidad, de un artificio para satirizar disimuladamente la moral y valores de la Inglaterra victoriana; las matemáticas (como en la mayoría de los textos de este tipo) son muy elementales. Hay excepciones, por descontado: un ejemplo de cierta enjundia y muy inspirado se debe a Carl Sagan, el célebre astrónomo y divulgador científico [42]. La novela en sí, *Contact*, no es ninguna obra de arte,[6] pero hay un momento de la trama, verdaderamente brillante, en que la heroína descubre una larguísima sucesión de ceros y unos en el desarrollo de la parte fraccionaria de π en base 11. La longitud total es el producto de dos primos, lo que sugiere reescribir estos dígitos como una matriz bidimensional; cuando lo hace, los unos dibujan en la pantalla de su ordenador un perfecto círculo. Y que los teólogos expliquen eso, si es que pueden. Por fin, junto a matemáticas banales y matemáticas (potencialmente al menos) de «verdad», habría que reservar un hueco en este apartado para las matemáticas «camelo», tan absurdas como los viajes supralumínimos, pero que bien gestionadas proporcionan episodios tan ocurrentes como «The no-sided professor», del infatigable Martin Gardner [20]. La premisa: ¿no podríamos repetir *de algún modo* el truco con el que construimos la cinta de Möbius, y plegar una y otra vez un objeto (digamos, un profesor) hasta que se quede *sin lados*?

$\pi_{11} = 3{,}16150702865a485\ldots$
```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```
$891063a1a5421307\ldots$

Figura 3: ¿Imaginan que fuera verdad?

El tercer y último paquete es más problemático: atañería a los textos cuya propia estructura está sometida a determinados artificios formales. Kasman los excluye de su web, y no le falta razón: en caso contrario, ¡habría que añadir casi toda la poesía! No es menos cierto, por otra parte, que así hurta a sus seguidores obras bien interesantes, como los simpáticos cinco lipogramas (textos sin alguna letra, en este caso las vocales) que Enrique Jardiel Poncela

[6] Y la película que se basó en ella todavía menos, por mucho que Jodie Foster sea la protagonista.

publicó entre 1926 y 1927 en el diario *La Voz* (dos de ellos recopilados en *El libro del convaleciente* [30]), narraciones sin principio ni fin tan impactantes como «Other people», de Neil Gaiman [19], o *The third policeman*, de Flann O'Brien [36], o historias autorreferenciales, en cuya trama se persona el propio autor, del calibre de *Niebla*, de Miguel de Unamuno [43], o «Tlön, Uqbar, Orbis Tertius», incluida en las legendarias *Ficciones* del no menos legendario Jorge Luis Borges [6].

En este contexto, el grupo OuLiPo, acrónimo de «OUvroir de LIttérature POtentielle» (Taller de Literatura Potencial), juega en una liga aparte. Fundado el París el 24 de noviembre de 1960, por iniciativa de Raymond Queneau (escritor) y François Le Lionnais (ingeniero químico), este colectivo aglutinó (principalmente) a literatos y matemáticos con un doble objetivo: por un lado, el de inventar unos ciertas reglas formales, o *contraintes* (semánticas, fonéticas, algorítmicas...) que estimulasen la producción de obras originales; por otro, el de examinar antiguos textos literarios en busca de inspiración para esto mismo (ellos lo llamaban «plagio por anticipacion»). Marta Macho Stadler lo concreta muy bien en [33]: «La idea central es la *restricción como motor creativo*: al fijar lineamientos previos a la obra, lejos de frenarse, ¡se potencia la creatividad!». O si lo prefieren, en palabras de Marcel Bénabou y Jacques Roubaud, dos de sus miembros: «¿Y qué es un autor *oulipiano*? Es una rata que construye ella misma el laberinto del cual se propone salir. ¿Un laberinto de qué? De palabras, sonidos, frases, párrafos, capítulos, bibliotecas, prosa, poesía y todo eso». Está considerado uno de los grupos literarios más influyentes en la Francia del siglo XX y sigue activo a día de hoy.

Reunión del grupo OuLiPo en el jardín de François Le Lionnais, 23 de septiembre de 1975. Sentados, de izquierda a derecha: Italo Calvino, Harry Mathews, François Le Lionnais, Raymond Queneau, Jean Queval y Claude Berge. De pie, de izquierda a derecha: Paul Fournel, Michèle Métail, Luc Etienne, Georges Perec, Marcel Bénabou, Paul Braffort, Jean Lescure, Jacques Duchateau.

Detallar la prolija producción de este exótico movimiento daría, por sí solo, para un artículo (véase, por ejemplo, [34]), así que nos limitamos a comentar brevemente tres de sus obras más renombradas: *Exercises de style*, de Raymond Queneau [38], *La Vie, mode d'emploi*, de Georges Perec [37], y *Se una notte d'inverno un viaggiatore*, de Italo Calvino [9].

En *Exercices de style*, Queneau relata la misma trivial historia (dos hombres discuten en un autobús; dos horas más tarde, alguien aconseja a uno de ellos añadir un botón a su abrigo) de 99 formas distintas, la «carta oficial» o la «zoológica» entre otras. La variante «conjuntos» reza así:

> Consideremos en el autobús S el conjunto A de los viajeros sentados y el conjunto D de los viajeros de pie. En una parada concreta se encuentra el conjunto P de las personas que esperan. Sea C el conjunto de los viajeros que suben; se trata de un subconjunto de P y representa la unión de C', conjunto de los viajeros que se quedan en la plataforma, y de C'', conjunto de los que van a sentarse. Demostrar que C'' es un conjunto vacío. Si Z es el conjunto de los zopencos, la intersección $\{z\}$ de Z y de C' queda reducida a un solo elemento. Como consecuencia de la sobreyección sobre los pies de z de los de y (elemento cualquiera de C' diferente de z), se origina un conjunto V de vocablos pronunciados por el elemento z. Habiéndose transformado el conjunto C'' en no vacío, demostrar que se compone de un único elemento z. Sean ahora P el conjunto de los peatones que se encuentran delante de la estación de Saint-Lazare, $\{z, z'\}$ la intersección de Z y de P, B el conjunto de los botones del abrigo de z, y B' el conjunto de las posiciones posibles de dichos botones según z'. Demostrar que la inyección de B en B' no es una biyección.

La Vie, mode d'emploi (nominado por *Le Monde* uno de los 100 mejores libros del siglo XX) narra historias que suceden en un edificio de diez pisos con diez habitaciones por piso, a partir de una lista de *contraintes* realmente colosal. Así, la disposición de los relatos sita: «¡Estoy empezando a leer la nueva novede 10×10. Además, se utiliza un cuadrado grecolatino[7] para combinar 21 parejas de listas temáticas (retablos y libros, flores y baratijas...) de 10 palabras, todas distintas: en el capítulo al que el cuadrado asigna los dígitos (n, m), se usan las palabras en el lugar n de las primeras listas de las parejas y en el lugar m de las segundas.

En términos de estricto mérito literario, acaso sea *Se una notte d'inverno un viaggiatore* la más satisfactoria de todas. Empieza de este modo:

[7]Se trata de cuadrado con la propiedad de que, en cada una de sus cien casillas, aparece un par ordenado de dígitos, de acuerdo con las siguientes restricciones: el mismo par no puede aparecer dos veces; y, fijada una fila o columna cualquiera del cuadrado, tanto en la primera coordenada como en la segunda coordenada de sus pares han de figurar todos los dígitos.

> Estás a punto de empezar a leer la nueva novela de Italo Calvino, *Si una noche de invierno un viajero*. Relájate. Recógete. Aleja de ti cualquier otra idea. Deja que el mundo que te rodea se esfume en lo indistinto. La puerta es mejor cerrarla; al otro lado siempre está la televisión encendida. Dilo en seguida, a los demás: «¡No, no quiero ver la televisión!». Alza la voz, si no te oyen: «¡Estoy leyendo! ¡No quiero que me molesten!». Quizá no te han oído, con todo ese estruendo; dilo más fuerte, grita: «¡Estoy empezando a leer la nueva novela de Italo Calvino!». O no lo digas si no quieres; esperemos que te dejen en paz.

Atención: no hablamos de la presentación de la novela, sino de la *misma novela*. En los capítulos impares, narrados en segunda persona, el Lector (acompañado enseguida por Ludmilla, otra lectora) se ve envuelto en una extravagante conspiración internacional. El enredo surge de su mutua obsesión por acabarse *Si una noche de invierno un viajero*, ya que cada copia que consiguen solo incluye las primeras páginas, que encima varían de copia en copia. Son estos inicios interrumpidos, o *íncipits*, los que constituyen los capítulos pares de la obra. Cada íncipit está redactado en el mismo estilo que el impar que le antecede: el «neblinoso», el «corpóreo», el «simbólico-interpretativo» y así sucesivamente, engarzados entre sí por un sutil mecanismo circular.

8. Cómo resolver un crimen usando teoría de grafos

Claude Berge (izquierda) con el legendario Paul Edrős, 1995.

Claude Berge (1926-2002), uno de los miembros fundadores de OuLiPo, carecía del pedigrí literario de Queneau, Perec o Calvino (aunque ayudó al segundo a desarrollar la intricada arquitectura formal de *La Vie, mode d'emploi*); pedigrí matemático, por contra, tenía para regalar [7, 41]. Uno de los padres de la moderna teoría de grafos, su libro *Théorie des graphes et* *ses applications* [4] tuvo mucho que ver con su consolidación como disciplina matemática con entidad propia. Asimismo, hizo contribuciones significativas a la investigación operativa y recibió varios premios, incluyendo la Medalla de Oro de EURO en 1989 y el Premio Euler en 1995. Su aportación científica más memorable fue, desde luego, la noción de grafo perfecto: una conjetura suya sobre cómo caracterizarlos, el ahora llamado «teorema fuerte de los grafos perfectos»,[8] demostrado en 2006 por Chudnovsky, Robertson, Seymour y Thomas [15], fue uno de los grandes caballos de batalla matemáticos de la segunda mitad del siglo XX.

Berge fusionó magistralmente sus dos perfiles, el *oulipiano* y el combinatorio, en su relato *Qui a tué le duc de Densmore?*, donde usa nada menos que el teorema de Lekkerkerker-Boland para desembrollar un misterio detectivesco. La historia describe la investigación del asesinato del duque de Densmore, en una isla privada a la que es imposible acceder sin permiso, descubierto más de un año después de su muerte. El detective Ralston de Scotland Yard reúne los testimonios de las últimas ocho personas (Ann, Betty, Cynthia, Diana, Emily, Felicia, Georgia y Helen) que vieron al duque con vida. Cada una de estas mujeres aporta su perspectiva y vivencias durante su estancia con el duque, pero ninguna puede recordar con precisión las fechas exactas de su visita. A través de sus declaraciones, el detective intenta reconstruir los eventos que llevaron al asesinato del duque. La investigación revela una serie de interacciones y encuentros entre las invitadas, así como detalles sobre sus relaciones con el duque. Al final, mediante el análisis de los testimonios y con la ayuda de un amigo matemático, Ralston descubre a la autora del crimen.

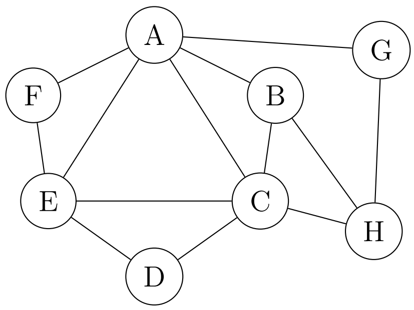
Esta es la lista de encuentros entre las protagonistas de la historia según sus declaraciones al detective:

- Ann se encuentra con Betty, Cynthia, Emily, Felicia y Georgia.
- Betty se encuentra con Ann, Cynthia y Helen.
- Cynthia se encuentra con Ann, Betty, Diana, Emily y Helen.
- Diana se encuentra con Cynthia y Emily.
- Emily se encuentra con Ann, Cynthia, Diana y Felicia.
- Felicia se encuentra con Ann y Emily.
- Georgia se encuentra con Ann y Helen.

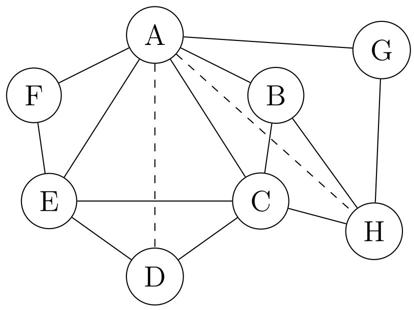
[8] Un grafo perfecto es aquel cuyos subgrafos tienen la siguiente propiedad: el número mínimo de colores que se necesitan para colorear sus vértices (de modo que los extremos de sus aristas tengan colores distintos) coincide con el máximo tamaño de sus maxcliques. El teorema establece que un grafo es perfecto si y solo si ninguno de sus subgrafos de orden impar mayor o igual que 5 puede ser un ciclo ni tener todas las aristas posibles excepto las de un ciclo conectando sus vértices. Uno de los primeros resultados sobre grafos perfectos fue probado por Berge en 1960: todo grafo cordal es perfecto.

- Helen se encuentra con Betty, Cynthia y Georgia.

Y ahora veamos cómo podemos usar el teorema de Lekkerkerker-Boland para descifrar el enigma. Para empezar, es razonable suponer que *todas las invitadas dicen la verdad*. En efecto, la culpable no se atrevería a mentir por miedo a contradecir la declaración de alguna de las otras mujeres y despertar sospechas. Por tanto, el grafo que resulta de conectarlas de acuerdo con la información de Ralston, que denotaremos por R (ver la figura 4a), *debería ser* de intervalos: bastaría usar, para representarlo, los periodos de tiempo que las respectivas damas pasaron en la isla. Si no ocurre así es porque algunas aristas del grafo «verdadero» S (correspondiente a una lista de visitas del mayordomo Stewart extraviada durante la investigación; se han señalado con trazo discontinuo en la figura 4b) *han desaparecido*, y el motivo es el siguiente: la asesina, entretenida y a ratos oculta preparando el fatal atentado, no conoció a algunas de las invitadas con las que coincidió temporalmente en la isla. Así pues, en abstracto, el problema se resume en lo siguiente: *hallar qué vértice* X *del grafo* R *tiene la propiedad de que, al conectar (de manera adecuada)* X *con otros vértices de* R*, el nuevo grafo resultante* S *es de intervalos.*



(a) Grafo de Ralston.



(b) Grafo según el cuaderno de Stewart.

Figura 4: Comparación de grafos: Ralston (izquierda) y Stewart (derecha).

En este escenario, ¿cómo podríamos ir descartando sospechosas? Fácil. Sabemos que todo grafo inducido por un grafo de intervalos es también de intervalos. Si retiramos de R uno o varios vértices, y el grafo resultante R' no es de intervalos, este grafo no puede estar inducido por el grafo S, es decir, hay aristas de S cuyos extremos son pares de vértices de R' pero no están en R'. Como todas las aristas de S que no están en R tienen a X como extremo común, X *debe* ser uno de los vértices de R'.

Ahora bien, hay como mínimo tres razones por las que R no es un grafo de intervalos: (i) B, D y F forman un trío asteroidal; (ii) [A,B,H,G,A] es un ciclo de longitud 4 sin cuerdas; (iii) otro tanto ocurre con [A,C,H,G,A]. Consecuentemente, ninguno de los subgrafos de R inducidos por $\{$A,B,C,D,E,F$\}$, $\{$A,B,H,G$\}$ y $\{$A,C,H,G$\}$ es de intervalos, luego X debe pertenecer a los tres conjuntos. Como estos conjuntos se intersectan precisamente en A, concluimos que X = A, es decir, Ann Laybourn cometió el crimen.

Pero aún no está todo dicho. Hemos dado por sentada la hipótesis, nada descabellada, de que la asesina actuó *sola*. Sin dicha hipótesis no es posible, estrictamente hablando, llegar a resultados concluyentes. Por ejemplo, de acuerdo con el cuaderno de Stewart las aristas de S que no están en R son AD y AH: sería también posible que D y H (Diana y Helen), *trabajando en equipo*, fueran las responsables del crimen.

Lo siguiente es más delicado. También hemos aceptado sin parpadear que *toda* desaparición de una arista de S es indicadora de juego sucio, es decir, que uno de los dos vértices ha de señalar por fuerza a la asesina. Esto no está tan claro. Por ejemplo, no es descartable que la reservada Diana, tan amante de la lectura, dejara de conocer a alguna de las invitadas con las que coincidió en el tiempo en la isla.

En particular, el caso contra Ann Laybourn se vendría abajo si el grafo de la figura 5, que es el inducido por todos los vértices menos A, *tampoco* fuese de intervalos. Afortunadamente, sí lo es: basta notar que carece de tríos asteroidales[9] y de ciclos de longitud mayor que 3, y aplicar el teorema de Lekkerkerker-Boland.

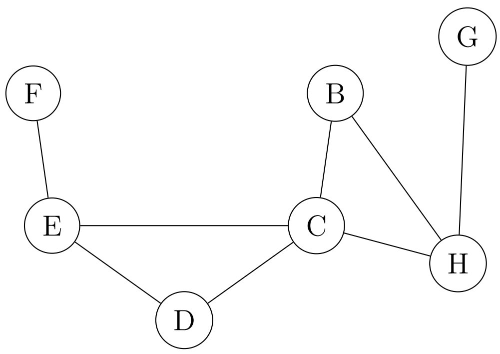


Figura 5: Subgrafo inducido por todos los vértices excepto A.

Apéndice

Para conveniencia (y, confiamos, deleite) del lector se incluye a continuación una traducción del relato de Berge, muy difícil de encontrar y hasta

[9]Si este grafo tuviese un trío asteroidal τ entonces $\mathrm{C} \notin \tau$, pues todos los caminos no triviales del grafo pasan por alguno de sus vértices adyacentes. Como los vértices de τ tienen que ser no adyacentes, y dos de ellos deben quedar o a la izquierda o a la derecha de C, debe ocurrir $\{\mathrm{F}, \mathrm{D}\} \subset \tau$ o $\{\mathrm{B}, \mathrm{G}\} \subset \tau$. Pero esto tampoco es posible, pues todo camino que pasa por F (respectivamente, G) pasa también por E (respectivamente, H), que es adyacente a D (respectivamente, B).

ahora inédito en castellano, acompañada de abundantes notas explicativas de nuestra cosecha. Ha sido autorizada expresamente por los propietarios de los derechos de autor y hemos cotejado, para la misma, el original en francés y la versión inglesa, no coincidentes en algunos detalles. Nos hemos tomado la libertad de reparar varias inconsistencias, alguna que otra de cierta importancia en lo concerniente al problema matemático que nos ocupa. Como colofón hemos ejercido, también nosotros, un poco de detectives, añadiendo una descripción pormenorizada de cómo, conforme a la evidencia, Ann Laybourn pudo haber planeado y ejecutado el crimen.

¿Quién mató al duque de Densmore?[10]

POR CLAUDE BERGE

1. PRÓLOGO

El detective Ralston de Scotland Yard obtuvo los siguientes ocho testimonios, que narran los hechos que precedieron el asesinato del duque de Densmore (descubierto con más de un año de retraso), de las últimas ocho personas que (en diferentes momentos) vieron al duque con vida, a saber:

La señorita FELICIA WYNN, modelo a la que el duque conoció a bordo del Sam Loyd[11] durante un crucero por el Mediterráneo.

Lady CYNTHIA MANSFIELD, jugadora profesional del casino de Montecarlo.

La señora GEORGIA BLAKE, teósofa, vegetariana y médium.

La señorita DIANA MACLEOD, traductora del libro de Georges PEREC[12] *Las cosas*.[13]

La señorita EMILY HEALY, lepidopterista pelirroja.

[10] © OuLiPo.

[11] Samuel Loyd, más conocido como Sam Loyd (1841-1911), estadounidense, fue un famoso inventor de rompecabezas y un más que competente jugador de ajedrez (en su apogeo llegó a ser uno de los mejores de su país). Especialmente memorables son sus problemas de ajedrez; algunos, como el «Excelsior» o el «Gambito Steinitz», de una originalidad y brillantez fuera de lo común.

[12] Al igual que se hace en la versión inglesa del relato, hemos respetado la extravagante costumbre de Berge de usar las mayúsculas para referirse a otros escritores.

[13] *Las cosas* es la primera novela de Perec y obtuvo el premio Renaudot en 1965. Su rasgo más notable es la definición de los personajes a través de la prolija descripción de los objetos que poseen o anhelan.

> La señorita ANN LAYBOURN, jugadora de ajedrez[14] con un *ranking* ELO[15] de 2075.
>
> La señorita BETTY TOWNSEND, pianista.
>
> La señorita HELEN GRIMSHAW, joven actriz que a los trece años hizo el papel de Zazie[16] en Nottingham, y a los dieciséis el de Vittoria en *El diablo blanco* de WEBSTER.

Debido al tiempo transcurrido desde los hechos, ninguna de las ocho personas fue capaz de recordar las fechas exactas de su estancia con el duque, por lo que las historias consignadas a continuación no siguen un orden cronológico.

2. BETTY TOWNSEND

Durante casi dos horas, la señorita Betty Townsend, arrullada por el traqueteo del tren, había visto discurrir el paisaje de la campiña inglesa. Instalada cómodamente en un rincón de su compartimento, reflexionaba sobre lo que estaba por llegar, unas vacaciones en una isla desconocida, tumbada en la arena fina y blanca de una cala paradisiaca. Y una vez más rememoró el rostro de un hombre casi olvidado, que suscitó en ella una mezcla de nostalgia e inquietud.

Betty Townsend sacó de su bolso una carta en papel brístol con el monograma del duque de Densmore. Su contenido era tan sorprendente que se la sabía casi de memoria; sin embargo, la releyó de principió a fin con la misma atención que el primer día:

> Querida Betty:
>
> Tras tantos años de silencio, habrá quedado sin duda muy sorprendida por mi misiva y (le ruego que me perdone) mi invitación a pasar unos días este verano en mi propiedad de la isla de White, frente a la costa de Dorset.[17]
>
> ¿No le agradaría que evocáramos nuestros recuerdos de Malasia y tratásemos de revivir aquella memorable caza de mariposas en los jardines de Penang, cuando despreocupados perseguimos el mismo ejemplar hembra de *Papilio euterpinus*?[18]

---

[14] Philo Vance no habría necesitado teoremas para echarle el guante.

[15] Sistema de puntuación inventado por el profesor Árpád Éloő (1903-1992), físico estadounidense de origen húngaro, utilizado por la Federación Internacional de Ajedrez para elaborar su clasificación de jugadores.

[16] Protagonista de *Zazie en el metro*, obra de Raymond Queneau. La novela fue llevada al cine con bastante éxito por Luois Malle. También apareció una adaptación teatral e incluso una versión en cómic.

[17] En la versión inglesa se traduce incorrectamente «l'île de White» por «the isle of Wight», confundiendo el imaginario islote del relato con la gran isla frente al condado de Hampshire (contiguo al de Dorset), famosa, entre otras cosas, por el multitudinario macroconcierto celebrado allí en 1970. Para más inri, el nombre del traductor es Iain White.

[18] La *Papilio euterpinos* es una rara mariposa de colores negro y naranja característica de Colombia, Ecuador y el norte de Perú. A saber cómo llegaría este ejemplar a Malasia...

A la muerte de mi tío, como sin duda usted sabe, heredé un pequeño castillo bastante deteriorado, la única edificación de un islote muy aislado pero bonito; es un sitio encantador que sin duda le complacerá. Actualmente, vivo como un ermitaño (con la única ayuda de mi mayordomo Stewart, que es también un excelente cocinero), y aquí he estado ocupado en mis investigaciones durante casi dos años, alejado de todo contacto con la vida londinense. Hace poco he habilitado en diversas torres del castillo pequeñas habitaciones independientes, acondicionadas como estudios (con frigoríficos bien provistos), de modo que mis amigos puedan visitarme y disfrutar al mismo tiempo de entera libertad. En todo caso, la configuración del castillo, con sus estrechos laberintos, su empinado foso, sus confortables salitas, es ideal para un retiro consagrado al estudio y el recogimiento, que no puede sino agradar a excéntricos incurables como usted o yo. Cuando lo desee, basta que se lo comunique a Stewart por la mañana con tiempo suficiente, podemos cenar juntos, escuchar en un viejo gramófono la música de «Greensleves»,[19] jugar una partida de ajedrez o hablar de literatura o moda. Por supuesto también hay una pequeña cala de fina arena donde bañarse, y espero a otros huéspedes que estarán encantados de jugar al *Scrabble* con usted. Si este proyecto es de su gusto, le ruego que me haga saber lo antes posible el día y hora de su llegada para que Stewart vaya a recogerla a la estación de Craymouth,[20] toda vez que la lancha a motor del castillo es el único medio de comunicación con la costa de Inglaterra.

Reciba el testimonio, querida Betty, de mi más alta consideración.

Su devoto

Jeremy Morse[21]

La carta iba acompañada de un billete de tren de primera clase con fecha abierta hasta la estación de Craymouth.

Betty cerró los ojos y trató de recordar el nombre de ese hotel en Singapur donde había pasado momentos tan deliciosos con el duque. «Raffles»,[22] sí, ese era... Una noche, en el salón bar, que tan agradablemente refrescaban los enormes ventiladores de techo, le preguntaron si deseaba reemplazar a la pianista

[19] Canción tradicional inglesa compuesta, según la leyenda, por Enrique VIII para la que luego sería su amante y esposa, Ana Bolena, a fin de vencer su resistencia a ser seducida.

[20] Naturalmente, este pueblo es tan imaginario como la isla de White.

[21] Berge usó para su duque el nombre de una persona real, y no precisamente una cualquiera. Sir Christopher Jeremy Morse (1928-2016) presidió el Lloyds Bank y fue *chancellor* de la Universidad de Brístol y, en los ratos que le dejaban libres tan importantes ocupaciones, inventor de sofisticados crucigramas y compositor de problemas de ajedrez (su libro *Chess problems: tasks and records* es una de las biblias de la disciplina).

[22] Además del nombre de un célebre hotel de lujo (y más adelante de toda una cadena hotelera), Raffles es el apellido de un personaje de ficción inventado a finales del siglo XIX por E. W. Hornung, cuñado de Arthur Conan Doyle, el creador de Sherlock Holmes. Raffles es una especie de *Doppelgänger* de su legendario pariente literario, algo así como un «caballero ladrón» que delinque más casi por placer que por pura necesidad.

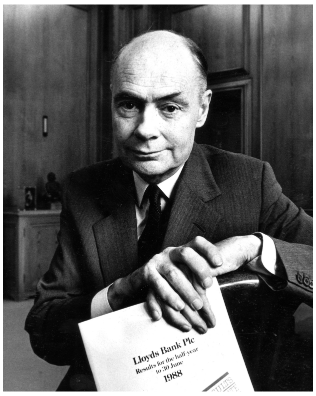
del hotel, que se encontraba indispuesta. Ella aceptó, y durante casi toda la velada Jeremy había permanecido observándola con un vaso de *whisky* en la mano. Sonreía y su mirada viajaba constantemente de sus manos a sus ojos. Estos fueron, sin duda, los momentos más felices de su existencia. Por desgracia, tras unos días idílicos en Singapur y un corto viaje a Malasia, tuvo que regresar precipitadamente a Inglaterra pues su padre había caído gravemente enfermo. Desde entonces, la única vez que volvió a oír hablar del duque fue para saber que la había reemplazado por una tal Georgia, una alta y atolondrada mujer a la que habían conocido por casualidad en el Raffles. ¡Qué remota le parecía ya aquella aventura!

Arrullada por el movimiento del tren, Betty cerró los ojos y se durmió enseguida. Se despertó bruscamente cuando su compañero de coche, un viejo calvo y pálido que había estado leyendo el *Times* desde que salieron de Londres, le dijo con voz débil:

—¡Señorita, creo que ya ha llegado!

En el andén vio a un hombre regordete vestido de negro que mostraba un cartel con su nombre: era sin duda Stewart, el mayordomo del duque, al que saludó con la mano. El hombre de negro se acercó:

—La señorita Townsend, ¿verdad?



Sir Christopher Jeremy Morse, 1988.

Luego, sin esperar respuesta, Stewart se inclinó ceremoniosamente, cogió su maleta de cuero y se dirigió hacia el muelle. Había allí una pequeña lancha a motor con el nombre «Isla de White» escrito en letras de bronce. Era obvio que la embarcación estaba lejos de su primera juventud, si bien la descascarillada pintura dejaba entrever un casco de caoba, muestra de un pasado más glorioso. La cubierta trasera estaba completamente ocupada por una banasta llena de verduras, una caja de *whisky* y un abultado paquete envuelto en tela impermeable marrón. Stewart lanzó sobre ellos la maleta, ayudó a Betty a subir a bordo y arrancó el motor.

El mar, por lo general revuelto en esta época del año, estaba ahora tranquilo y azul; el sol, ya cercano el ocaso, rielaba en las ondas. Betty, con los cabellos al viento, aspiraba con placer el aire marino mientras su piel se empapaba de la espuma que salpicaba en torno a ella. En menos de cuarenta minutos divisaron un islote que la lancha circundó. El castillo, cuyo cuerpo principal remataba un precipicio contra el que el mar se estrellaba con estrépito, se hizo entonces visible. «Qué fantástica residencia», pensó Betty. Le sorprendió, sin embargo, que los derruidos pisos superiores hubieran sido reemplazados por un techo de pizarra verde ligeramente inclinado, probablemente para dar cabida a un ático. El muro exterior estaba flanqueado por cuatro chatas torres a las que desvergonzadamente se habían añadido ventanas de guillotina, que cuando menos había que calificar de anacrónicas.

La lancha atravesó un estrecho canal bordeado por deteriorados rompeolas y se aproximó lentamente a la dársena, una cavidad rectangular excavada en la roca con dinamita, según evidenciaban los fragmentos de piedra dispersos por todo el muelle. Betty comentó algo frustrada que el duque no había acudido al embarcadero a darle la bienvenida. Percibiendo su decepción, el taciturno Stewart intervino y dijo con tono azorado:

—El duque no podrá verla hasta la noche, pero la cena se servirá en el gran salón a las ocho. ¿Le parece conveniente?

Betty asintió calladamente, tratando de reprimir su creciente inquietud ante lo solitario y silencioso del lugar. En el paquete de tela marrón que Stewart había descargado en el embarcadero le pareció ver manchas de sangre...

El criado aseguró las amarras y continuó:

—Señorita, ¿puedo mostrarle su habitación?

Tras un gesto de Betty, tomó la maleta y echaron a andar por un pequeño sendero empedrado que los condujo de inmediato frente al castillo. El puente levadizo que atravesaba el reseco foso parecía demasiado viejo para funcionar, y algunos de sus tablones habían sido reemplazados por planchas de cemento. Una vez cruzado, no se dirigieron al interior del castillo, sino que bordearon los muros del parapeto exterior hasta llegar a un portal habilitado en la primera torre: allí es donde se ubicaba la habitación de Betty.

Fue solo mucho más tarde, de regreso a Londres, cuando Betty comenzó a pensar con horror en el sangriento paquete de tela marrón, y las sorprendentes conductas de las otras tres invitadas con las que se encontró en la isla: la señora Helen Grimshaw, Lady Cynthia Mansfield y Ann Laybourn.

3. DIANA MACLEOD

Diana se había sentido nerviosa toda la mañana. El duque, un hombre alto, ligeramente encorvado, con bigote entrecano, era exactamente como lo imaginaba, pero los piropos tímidos y desmañados con los que la había recibido a su llegada nada tenían que ver con las amables palabras que se esperaba. Un día, a raíz de una columna que había publicado en el *Sunday Times*, un lector desconocido le envió una carta particularmente ingeniosa, a la que respondió de inmediato. Desde entonces, durante casi dos años, se escribieron para intercambiar impresiones sobre libros leídos recientemente, eventos artísticos de los que los periódicos daban cuenta y asuntos varios de la vida londinense. Sin embargo, nada en su relación epistolar, a pesar de todo aún impersonal, casi profesional, hacía presagiar a Diana esta invitación a pasar unos días en la isla de White, ¡con un duque al que nunca había visto!

Tras las formalidades de rigor, Sir Jeremy Morse había insistido en mostrarle su alojamiento, que había habilitado en una de las torres. Era casi un apartamento, pues dentro de esos muros medievales había también espacio para una sala de estar y una pequeña cocina con todas las provisiones necesarias para una estancia de varios días. Desde una estrecha ventana pintada de blanco, y orientada al lado más soleado, podían contemplarse arbustos de laurel y añejos rosales medio enterrados entre el follaje más denso de los rododendros, así como unas hayas retorcidas bordeando un estrecho sendero que descendía en suave pendiente hacia la playa.

Una amplia cama de estilo Chippendale, cubierta con una colcha granate, ocupaba la mayor parte del dormitorio. A la izquierda había dos pequeñas acuarelas del dieciocho firmadas por R. C. Williams,[23] una a cada lado de la

[23] El relato es un juego de espejos en el que a veces resulta difícil distinguir lo real de lo

ventana. La primera mostraba un velero luchando contra la furia desatada de los elementos, la segunda marineros sobre un banco de hielo intentando capturar a una ballena. Más allá, un tocador coronado por un espejo de marco ovalado y un pequeño sillón tapizado en terciopelo pálido asomaban en la penumbra. Sobre una recia mesa de madera tallada reposaba un gran jarrón de porcelana china lleno de rosas. A la derecha de la cama, sobre una mesilla de caoba barnizada, había una estantería giratoria con algunos libros, al parecer olvidados.

Alastair Reid (fotografía de Tina Norris).

Ese día, tras perder la mañana escuchando parlotear a Lady Cynthia sobre sus aventuras en el casino de Montecarlo, Diana decidió refugiarse en su habitación. Agotada, se tumbó en la cama, contempló las paredes recién encaladas y las acuarelas que las decoraban, y eligió un libro al azar del estante sobre la mesilla: *The Best Chess Problems, compiled by B. P. BARNES*.[24] Los tres libros siguientes eran las obras célebres de LEWIS CARROLL, junto a las que se encontraba un pequeño tratado de matemáticas firmado por C. L. DODGSON.[25] Otros volúmenes llevaban los nombres de Paul ARMSTRONG, Jack WHEELFINE, Jack TOY, C. BANK, P. BAKEHOUSE.[26] El último libro del estante, magníficamente encuadernado en tafilete rojo, era una colección de poemas metafísicos de T. S. ELIOT que Diana abrió distraídamente. En la portada, una mano descarada había escrito con tinta púrpura las siguientes palabras: «T. ELIOT, TOP BARD, NOTES

ficticio: R. C. Williams (1924-1983) fue un acuarelista norteamericano que compaginó los pinceles con un negocio de lijado y barnizado de suelos, y al parecer gozaba de un cierto prestigio en su país: la Midwest Watercolor Society concedió en los ochenta un modesto premio de 100 dólares que llevaba su nombre. Dado el artístico temperamento de Berge, no sería de extrañar que se hubiesen conocido.

[24]Suponemos que Berge cita aquí de memoria: el título preciso del libro de Barnes es *Pick of the best chess problems*. Es una colección de problemas del tipo «blancas juegan y dan mate en dos» publicada por primera vez en 1976. Debe de merecer la pena porque se ha reeditado varias veces (la última en 2009) y figura en la lista de libros recomendados por la British Chess Problems Society.

[25]Lewis Carroll es el pseudónimo con el que Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898), diácono, lógico, matemático, fotógrafo y escritor inglés, firmó algunas de sus obras, entre ellas las celebérrimas *Alicia en el país de las maravillas* y su secuela, *Alicia a través del espejo*.

[26]Se trata una pequeña broma de Berge. Los escritores mencionados existen realmente y de hecho son miembros de OuLiPo, pero sus nombres han sido alterados traduciéndolos más o menos literalmente del francés al inglés: Paul Braffort, algo así como «Pablo Brazofuerte», se ha convertido en «Paul Armstrong»; a partir de *roue*, rueda, y *beau*, bello, Jacques Roubaud pasa a ser «Jack Wheelfine» (aquí Berge se despista bastante porque «Jack» es un diminutivo de «John», así que lo pertinente sería usar «James», y «Roubaud» proviene del germánico *Hrodbald*, con «*hrod* = gloria» y «*bald* = audaz»); Jacques Jouet, o «Jacobo Juguete», deviene en «Jack Toy»; «C. Bank», o «C. Ribera», es el mismísimo Claude Berge; finalmente, el patronímico Fournel admitiría «del Horno» como aproximado equivalente en castellano, lo que explica que Paul Fournel se haya transformado en «P. Bakehouse».

PUTRID TANG EMANATING, IS SAD. I'D ASSIGN IT A NAME: GNAT-DIRT UPSET ON DRAB POT-TOILET».[27]

Releyendo las letras en el orden contrario, Diana constató que era un palíndromo, lo que le trajo a la mente pasadas divagaciones sobre lo irritante que resultaba el transcurrir lineal del tiempo («¿Por qué no podemos nunca invertirlo, a la manera de H. G. WELLS o Fredric BROWN?»).[28] Se acordó en concreto de una obra de teatro que empezó a escribir pero nunca terminó, en la que el orden de aparición de los personajes bastaba para determinar completamente la trama, de modo que si se invertía el orden de estas intervenciones se obtenía una nueva obra... en la que la trama era del todo distinta: teatro palindrómico, por así decir. En ese momento el resplandeciente sol de la tarde veraniega la devolvió a la realidad, así que decidió unirse a la joven Emily Healey, que a estas alturas ya estaría bronceándose sobre la arena de la cala al final del sendero...

Durante toda su estancia con el duque, Diana solo conoció a dos invitadas, la señorita Healey y Lady Mansfield.

4. FELICIA WYNN

La señorita Felicia Wynn era una criatura soberbia, con un denso cabello castaño que enmarcaba un rostro particularmente delicioso. El rojo intenso de su boca sensual, la mirada insinuante, sus descocadas maneras, habían hechizado a la mayoría del pasaje masculino del transatlántico Sam Loyd durante un crucero por el Mediterráneo el verano anterior. El duque, también a bordo del Sam Loyd como invitado del capitán, no fue el último en sucumbir a los encantos de una viajera tan distinta a las demás; comenzó cediéndole sus fichas de bingo y acabó por hacerle un suntuoso regalo, una pulsera de brillantes que compró durante una escala en Nápoles. Por ello Felicia no se sorprendió demasiado cuando un día recibió una carta invitándola a pasar con él una temporada en el castillo de White.

—Si no vengo con un anillo en mi dedo, el duque es hombre muerto —le confió a una amiga, modelo como ella.

Cuando la lancha a motor del castillo la dejó en el pontón de la isla, el duque no estaba allí para darle la bienvenida. «Qué extraño», se dijo. Pero al día siguiente, Stewart, que la había alojado en una de las torres, le trajo una nota manuscrita del duque invitándola a tomar el té en el castillo.

[27] Este titánico palíndromo se debe a Alastair Reid, poeta y traductor escocés (1926-2014). En una versión bastante libre, vendría a decir: «T. Eliot, excelso bardo, percibe un olor nauseabundo en el ambiente, qué pena. Yo le pondría este nombre: "porquería de mosquito vomitada en un feo orinal"».

[28] *La máquina del tiempo* de Wells es ciertamente la más famosa novela sobre viajes en el tiempo, aunque no la primera en que se hace uso del artilugio del título: tal honor corresponde a *El anacronópete*, publicada en Barcelona en 1887 por Enrique Gaspar y Rimbau (1842-1902), diplomático y escritor español. Fredric (no «Frédéric», como en el original, ni «Frederic», como en la versión inglesa) Brown (1906-1972), escritor norteamericano de literatura popular, tiene algunos relatos y novelas de ciencia ficción y misterio realmente admirables, pero no nos consta que el viaje en el tiempo sea el tema central de ninguno de ellos. Muy posiblemente Berge se refiere a *Universo de locos*, donde un accidente traslada al editor de un fanzine de ciencia ficción a un extravagante universo paralelo donde las cosas funcionan como en las revistas *pulp* de la época, y en particular son posibles los viajes en el tiempo.

Sir Joshua Reynolds, autorretrato, 1748.

A las cinco en punto, vestida con un ajustado pantalón blanco y un jersey de cuello vuelto que resaltaba sus curvas, franqueó el umbral del castillo, subió los tres escalones y empujó la puerta de roble, que estaba entreabierta. Stewart, siempre vestido de negro, la hizo pasar de inmediato a un vestíbulo cuyas paredes estaban decoradas por retratos al óleo de prestigiosas firmas del dieciocho y el diecinueve: Reynolds, MacDiarmid, George Romney.[29] La puerta del salón se abrió y Sir Jeremy Morse recibió cordialmente a la visitante.

—Felicia, no ha cambiado usted nada... ¿Desea una taza de té?

Jeremy la cogió de la mano y la condujo a una mesa Mackmurdo sobre la que había unas tazas de porcelana de Wedgewood y una bandeja de plata repleta de magdalenas. La jovial expresión de Felicia se tornó rápidamente un mohín cuando advirtió la presencia de otras dos mujeres. La primera, muy elegante en su traje de *shantung* verde, lucía un gran broche de oro de forma estrellada; su aplomo y estudiado refinamiento le desagradaron de inmediato. La segunda, mucho más joven, llevaba un vestido de seda negro de cuello cerrado que resaltaba su tez marfileña y su cabello bermejo. «Esta es a la que pillé anoche colándose de rondón por la puerta de entrada», pensó Felicia, que sin embargo logró dedicarle una encantadora sonrisa.

—¡Oh! —dijo Jeremy—, le presento a la señorita Ann Laybourn, que vino a retarme al ajedrez, y a la señorita Emily Healey, con la que albergo una pasión común...

Luego presentó a Felicia a Ann y Emily en halagadores términos. Tras las frases de cortesía de costumbre, Emily, que como el duque resultó ser una experta en mariposas exóticas, adoptó el papel de anfitriona y sirvió el té con desenvoltura. La conversación se reanudó desenfadadamente.

—Usted nos ha instalado a todas en las torres exteriores —comenzó Emily riéndose—, pero ¿no nos está prohibida una de ellas? De lo contrario, ¿por qué ese cartel «Peligro. Prohibido el paso» que cuelga de su cerradura? ¿No será usted Barba Azul?

[29] Joshua Reynolds (1723-1792) y George Romney (1734-1802) son conocidos retratistas de la época indicada; del tal «MacDiarmid» no hemos conseguido averiguar una palabra, a no ser que estemos hablando de Douglas Kerr MacDiarmid, un renombrado pintor neozelandés que vivió en París gran parte de su vida y falleció, víctima de la pandemia de cóvid, en 2020.

Una sonrisa arrugó los bronceados rasgos del duque.

—No se lo van a creer... bueno, de todos modos es posible que se tropiecen con él un día de estos. Resulta que el estudio está ocupado... por un pequeño cocodrilo, el único superviviente de los cuatro especímenes que compré en Singapur para llenar el foso del castillo...

Los rostros de Ann, Emily y Felicia adoptaron simultáneamente idénticas expresiones de incredulidad.

—Como pueden imaginarse, Stewart y yo tratamos a este último superviviente con el mayor cuidado —dijo el duque con aire divertido—. Lo alimentamos con carne cruda... solamente dos veces por mes, por suerte. Esta variedad de cocodrilo asiático es capaz de estar un mes entero sin comer. En la época en que el foso del castillo está seco, vive en el cuarto de baño de la cuarta torre...

El duque hizo una pausa para observar las reacciones en los rostros a su alrededor, y luego añadió:

—No se preocupen, parece perfectamente feliz en el fondo de una bañera medio llena de agua.

—¿Es cariñoso? —bromeó Ann.

—De momento nos llevamos bien... siempre que no salga de la bañera.

—¿Cómo se llama?

—Lo hemos bautizado Arquímedes, por supuesto.

La conversación se centró luego en los lugares de interés que ofrecía este insólito castillo medieval en medio de un minúsculo islote.

—¿Hay mazmorras? —le preguntó Felicia, interesada de súbito.

El duque carraspeó.

—No, pero hay algo mejor: una red de pasadizos secretos, un auténtico laberinto que se usó en tiempos pasados, por lo visto, para encerrar a los prisioneros. La puerta de entrada (seguramente la habrán visto bajo el puente levadizo) está siempre cerrada porque Stewart guarda todo tipo de herramientas allí. Los pasillos están atestados con multitud de cosas: el generador eléctrico que da servicio al castillo, los interruptores de los estudios individuales, unos sacos de cemento que ya no sirven para nada. Pero todavía quedan corredores por explorar...

—¿No podríamos visitarlos, por curiosidad? —preguntó Emily, sus ojos brillantes por la emoción.

El duque respondió con semblante serio:

—¡Difícil, muy difícil! Stewart tiene la única llave y la guarda celosamente. ¡Los accidentes ocurren tan de improviso!

En ese momento entró el mayordomo y anunció que la cena estaba servida en el comedor. Poco después del último vaso de jerez, Felicia y Emily se retiraron, en tanto que Jeremy y Ann se marcharon solos a la biblioteca a jugar al ajedrez.

Cuando, días más tarde, Felicia abandonó la isla de White para regresar a Londres, Stewart se dio cuenta de que su entusiasmo se había desvanecido. Las ojeras apenas ocultaban su ira. «¿Por qué —se preguntó— me invitó el duque con esa ajedrecista estirada y la pelirroja irlandesa?». Felicia prometió no volver jamás.

5. CYNTHIA MANSFIELD

Cuando la distinguida Lady Cynthia, tocada con un gran sombrero negro ribeteado con flores de color pastel, se alzó con prestancia de la lancha y puso pie en la isla de White, no dedicó la menor atención al agreste paisaje, la algarabía de las gaviotas ni al vetusto castillo que no había visto en su vida: había aceptado la invitación del duque con el solo objeto de jugar a las cartas con él, y sobre todo para recuperar el dinero perdido en una memorable partida de *bridge* en Londres. Aquella noche el duque estaba descaradamente en racha, y desde entonces no pensaba más que en la venganza.

En la isla Cynthia Mansfield no conoció más que a mujeres: aparte de Helen Grimshaw, la chiquilla desvergonzada,[30] estaba Betty Townsend, que dio una noche un recital de piano en el castillo pero ni siquiera sabía jugar al *bridge*; a Ann Laybourn solo le interesaba el ajedrez; Diana Macleod parecía preferir la lectura; ni siquiera Emily Healey, que daba la impresión de ser una chica inteligente, había mostrado más interés que las otras en jugar por dinero.

Como Cynthia era la única huésped que se alojaba en el cuerpo del castillo, que quedaba desierto a las diez, las veladas resultaban largas y aburridas. Una noche en que el sueño se hacía de rogar saltó de la cama, se calzó las zapatillas y bajó a la cocina para prepararse una bebida caliente. Cuando llegó al pie de las escaleras, una silueta agazapada en la oscuridad apareció de repente y la empujó violentamente antes de desaparecer por la puerta principal. Cynthia soltó un grito, perdió el equilibrio y cayo de bruces sobre el suelo embaldosado. Fue necesario que el mayordomo, despierto por el alboroto, le ayudara a volver a su cama. A la mañana siguiente Cynthia decidió no decir nada y nadie hizo mención a este incidente.

Esa tarde Ann había invitado amablemente a Cynthia a asistir al gran acontecimiento de la isla: ¡Sir Jeremy iba a darle al cocodrilo su comida quincenal! Costó que Cynthia, que no estaba al tanto de la existencia de Arquímedes, diera crédito a lo que oía. Finalmente, alrededor de las cuatro, Ann, Cynthia y Betty acompañaron al duque que, solemnemente, abrió la puerta de la cuarta torre, la que tenía el cartel. La habitación parecía vacía, pero al final del pasillo que conducía al cuarto de baño encontraron algunos cubos, cepillos y esponjas. En la penumbra, oculto en el fondo de su bañera, el lagarto dormitaba. El criado llegó con un paquete envuelto en una tela de color marrón y encendió el interruptor. Una luz brillante inundó las dos habitaciones y Betty reconoció de inmediato el paquete ensangrentado que la había intrigado en la lancha. Stewart desató con cuidado los nudos del cordel y allí aparecieron, entremezclados, abundantes despojos (pulmones de cabra y vísceras varias), mientras un olor acre comenzaba a invadir la habitación: el festín de Arquímedes estaba a punto de empezar...

6. ANN LAYBOURN

La señorita Laybourn llegó a la isla de White una mañana neblinosa; sobre su traje de *tweed* verde llevaba una larga estola india que, aunque sacudida por el viento, permanecía sujeta por un gran broche de oro macizo con forma de

[30] En el original la memoria juega una mala pasada a Lady Mansfield, pues olvida su encontronazo con Helen Grimshaw, descrito en el capítulo 9 del relato, por cuenta del modo de vestir de esta. Lo hemos solucionado añadiendo esta despectiva referencia a Helen.

estrella y un diamante en el centro. Desde su primer momento en la isla Ann Laybourn dio muestras de ser una persona muy resuelta, todo lo contrario que Cynthia Mansfield, a quien parecía detestar. Se la vio criticar sin ambages a Betty por su manera de interpretar a Chopin al piano, dar consejos de vestuario a la desgarbada[31] señora Blake y fustigar con autoritarias órdenes a Stewart. Por suerte no se quedaba hasta tarde con las otras invitadas. A veces se citaba frente al tablero con el duque al final de la velada; era, de hecho, una jugadora muy fuerte, y las malas lenguas insinuaban que el auténtico motivo de su visita a la isla era el de afirmar su superioridad en el noble juego sobre Sir Jeremy que, por otra parte, había brillado en el pasado en diferentes torneos.

Un día, sin embargo, contó a Felicia cómo había conocido al duque.

—¿Jeremy? Yo lo conocí antes que todas ustedes... Fue en Singapur, donde había ido sobre todo para enriquecer su colección de mariposas. Una noche en el hotel parecía tan indefenso, solo frente a un vaso de *whisky*, que me sentí obligada de inmediato a tomarlo bajo mi protección.

A la luz del sol poniente, una gaviota pasó chillando sobre sus cabezas.

—¿Qué le pasaba? —preguntó Felicia—. ¿No estaba con sus amigos de costumbre?

—No lo sé, debía de estar enfermo. Es por ello que no me separé de él durante una semana. Fuimos juntos a comprar las crías de cocodrilo a una vieja tienda china en Katog Tanjong Road y me acompañó a varias tiendas de ropa. Bebía mucho en esa época.

Felicia se preguntó dónde quería llegar.

—Una noche —continuó Ann— sucedió un terrible accidente. Iba conduciendo demasiado deprisa por Beach Road, probablemente borracho, y atropelló a un empleado del hotel. Nos fuimos de inmediato a Yakarta y creo que nunca ha vuelto a poner los pies en Singapur...

Recibidor del hotel Borobudur, Yakarta.

En ese momento Emily apareció e invitó a Felicia a tomar una taza de té en su estudio, cosa que esta aceptó con entusiasmo para librarse de los chismorreos de Ann.

[31]En aras de la consistencia nos hemos tomado la licencia de convertir «petite» en «desgarbada», ya que la señora Blake es en realidad una mujer alta, como queda de relieve en las declaraciones de Betty Townsend y la propia Georgia Blake.

Cuando la señorita Laybourn se marchó en la lancha, le comentó a Stewart que no había disfrutado de la compañía de ninguna de las invitadas que había conocido: ni Felicia, ni Emily, ni Cynthia, ni Betty, ni Georgia.[32] La perpetua estola india en torno a su cuello se agitó al viento, y el mayordomo se dio cuenta de que el soberbio broche de oro no estaba allí para sujetarla.

7. LA SEÑORITA EMILY HEALEY

Cuando la señorita Healey desembarcó en la isla de White, sus gastados vaqueros, su bolsa de lona llena de libros y su alborotada melena roja no le daban la apariencia de una dama visitando al duque. De sangre medio irlandesa, había estado en un buen número de universidades británicas y pasado dos años en el estado de Sarawak, entre los *dayaks*,[33] becada por la Universidad de Mánchester para escribir una tesis sobre las mariposas de los bosques de Borneo. Fue allí donde conoció al duque.

Jeremy, junto a un guía chino que había contratado en Kuching, había caminado varias horas por el barro bajo una lluvia tropical, esperando encontrar alguna paz de espíritu entre la población nativa. Acababan de robarle casi todo su equipaje en Yakarta, en el inmenso recibidor del hotel Borobudur, donde algunos indonesios aparentemente desocupados, tumbados junto a la piscina, acechaban a los turistas distraídos. Fueron sin duda su fatiga y aparente pobreza los que atrajeron al principio a Emily.

Los primeros contactos del duque con los famosos «cortadores de cabezas» *dayaks* fueron un cúmulo de sorpresas. Después de trepar no sin dificultades a la enorme casa sobre pilotes, la *longhouse* o casa comunal donde vivía todo el clan, el jefe le recibió con suma cortesía, ofreciéndole cama y comida. Cama, pues quedaba un hueco en la galería exterior donde se le instaló un jergón de ramas para dormir entre perros y ancianos; comida, porque una vieja con los dientes teñidos de rojo por el betel se ofreció a cocinarle arroz mezclado con trozos de carne que probablemente había reblandecido masticándolos con antelación, lo que constituía un selecto banquete. Los dos hijos del jefe, que habían ganado algo de dinero en la ciudad, estaban instalando un generador eléctrico de gasolina con el que producir un poco de luz para cuando cayera la noche. El guía chino comenzó a repartir unas pastas compradas en Kuching; luego le explicó al duque que los *dayaks* estaban dispuestos a organizar una fiesta con música y baile, pero como la noche anterior habían estado de duelo, era necesario pagar una «multa»: es decir... ¡dos dólares! Le dijeron también que la «habitación» más distante había estado ocupada durante varios meses por una joven europea que trabajaba sin descanso en una tesis y aporreaba todo el día su máquina de escribir portátil. Cuando la chica apareció al anochecer quedó deslumbrado, y no tardó en abandonar su jergón de ramas de la galería comunal para compartir el de la bella estudiante pelirroja.

Todavía se mantenía el buen tiempo en la isla de White, de modo que en torno al mediodía, cuando estaba segura de no tropezar con ninguna otra hués-

[32] El original presenta en este punto otra inconsistencia —corregida en la versión inglesa—, ya que incluye a Diana en la lista cuando hemos visto que esta solo se encontró con Emily Healy y Lady Cynthia.

[33] Todos los lugares, incluso hoteles y calles, del sudeste asiático que se mencionan en el relato son reales, así como esta singular etnia.

ped, se iba a menudo a la pequeña y apartada cala. Apenas traía consigo una manta escocesa para echársela encima y una novela policiaca de Agatha Christie, que abandonaba cuando Jeremy se reunía con ella. Y sus abrazos, en el agua o sobre la arena caliente, eran tan apasionados como en el mísero jergón de ramas de la *longhouse*.

Un día en que el sol calentaba con particular fuerza, se llevó a la playa un catalejo que alguien había olvidado en un cajón de su habitación. Mientras se quitaba los vaqueros y la blusa para ponerse un minúsculo bikini, escuchó, muy próximo, el rumor de unas piedras rodando. Intrigada, miró en derredor; al principio no vio nada, pero luego divisó con el catalejo la silueta de una mujer que parecía esconderse tras un arbusto. Cuando la llamó, la silueta desapareció. Ese día el duque no vino a verla.

Hacia el final de su estancia todo se le antojaba diferente a Emily: sin razón aparente, el duque parecía preocupado, incluso distante. Por supuesto, sospechaba de Felicia Wynn, la descarada modelo, o de Cynthia Mansfield, tan aguda y a sus anchas en las charlas de salón, o de Ann Laybourn, que a veces se encerraba con el duque con el pretexto de jugar al ajedrez, o incluso de Diana Macleod, con sus gafas y ese aire de intelectual. En resumen, estaba celosa de todas ellas. Y cuando, decepcionada y preocupada, se había subido de nuevo a la lancha para regresar a la costa, seguía meditando sobre los motivos de semejante cambio... empezando a temerse alguna oscura conspiración.

8. GEORGIA BLAKE

Ese día el buen tiempo comenzó a estropearse, y la lancha motora que había venido a recoger a la señora Blake a Craymouth iba especialmente cargada: sus tres enormes maletas ocupaban por completo la cubierta trasera. Cuando Stewart consiguió aproximar la lancha al portón de la isla, la nueva huésped, una mujer alta y morena vestida con un amplio impermeable, se sacudió el pelo empapado y emprendió resuelta el camino del castillo.

La señora Georgia Blake era miembro de una secta vegetariana originaria de Java, lo que le permitía conseguir una serie de alimentos casi imposibles de encontrar en la costa inglesa; por esta razón nunca viajaba sin una montaña de provisiones.

Por otra parte, había traído varias libras de dulces de soja como regalo para Sir Jeremy, al que esperaba convertir a la causa. El duque vino a recibirla y, con una cálida sonrisa, le susurró al oído:

—En verdad, Georgia, no la reconozco. ¿Cómo es que no ha traído a alguno de sus gatos favoritos?

Ella balbuceó entre dientes:

—¡Oh, Jeremy, ahora no...! Se lo contaré todo más adelante.

Por la tarde conoció a la señorita Grimshaw, que vagaba por los pasillos del castillo con aspecto confuso. La infelicidad de la chica saltaba a la vista y Georgia se ofreció de inmediato a leerle las líneas de la mano. Con voz misteriosa, le susurró:

—¡Oh! Intuyo influencias nefastas a su alrededor... hombres que quieren hacerle daño. ¡Tenga cuidado!

Helen Grimshaw parecía preocupada:

—Sí, por favor, dígame quiénes son estos hombres... ¿Por qué no viene a mi estudio? Podríamos hablar y he preparado para la cena mi famoso *irish stew*... hay de sobra para las dos.

—Ay, querida, soy vegetariana estricta... Venga a buscarme más tarde, estoy en la torre vecina a la suya.

La estancia de la señora Georgia Blake en el castillo de White fue de corta duración. En su condición de médium organizó algunas sesiones espiritistas a la hora del té que aburrieron a todo el mundo. Predijo a Ann Laybourn un matrimonio feliz con muchos niños y al duque le pronosticó una inminente muerte violenta. Aparte de Helen Grimshaw, a la que había cogido cariño, no se encontró con nadie más en la isla.

Se marchó como había llegado, es decir, en plena tormenta y con mar gruesa.

9. HELEN GRIMSHAW

La joven señorita Grimshaw había aceptado la invitación del duque por una razón muy concreta: la actriz había sido informada por su director de escena de que Sir Jeremy Morse patrocinaba una obra de teatro en Nottingham en la que esperaba interpretar un papel protagonista.

Su juventud, su mirada llena de promesas, su figura esbelta, las piernas largas y bien torneadas tan generosamente mostradas por su minifalda negra, no tuvieron en el duque el efecto que había esperado. Sin embargo no se dio por vencida. Una noche en la que Betty Townsend estaba al piano, Helen le rogó en voz baja que la acompañara, pues deseaba cantar un aria de *Ofelia*. Por desgracia el mayordomo interrumpió el espectáculo pidiendo al duque que viniera urgentemente a revisar un destrozo provocado por el fuerte viento. Helen se quedó pálida de súbito y Betty[34] tuvo que consolar a la pobre niña, ya que su decepción era más que evidente.

En otra ocasión, Helen fue censurada sin contemplaciones por Lady Mansfield que, vestida con un traje de seda negra, juzgó intolerable el atuendo desenfadado de la muchacha. En cuanto al duque, un día le dijo secamente que no tenía ninguna obra de teatro en perspectiva y le recomendó que cambiara de trabajo.

Helen Grimshaw se marchó de la isla de inmediato y con ganas de matar a alguien.

10. EL DETECTIVE RALSTON

Cuando, una fría mañana de diciembre, el detective Ralston y el inspector Vaughan pusieron pie en el pontón de la isla de White, encontraron sobre las rocas una vieja lancha motora desfondada por las tormentas. Un pescador de Craymouth había informado de que nadie había visto a Sir Jeremy Morse y su mayordomo Stewart durante más de un año, y no se creía que hubiesen vuelto a Malasia, así que Scotland Yard había iniciado una investigación.

[34] Tanto en el original como en la versión inglesa es la señorita Blake quien consuela a Helen, pero esto implicaría que Betty y Georgia coincidieron en la isla, lo que contradice las declaraciones de ambas. Lo hemos arreglado recurriendo a la pianista, pues es dudoso que la severa Lady Mansfield hubiera estado por la labor... (Muchas gracias a Ana Belén Hernández García, que nos alertó sobre este punto).

Cuando los dos agentes abrieron la puerta del castillo, que no estaba cerrada con llave, notaron de inmediato un fuerte olor a moho y madera podrida; los cuadros seguían colgados de las paredes y el valioso mobiliario rezumaba humedad.

Entonces descubrieron que una de las torres había sido devastada por una violenta explosión, que no había dejado más que muebles carbonizados y los cadáveres de dos hombres... ¡y el de un cocodrilo!

Un examen más exhaustivo reveló que los cadáveres calcinados eran los del señor del castillo y su criado y que una carga explosiva había sido conectada muy hábilmente a un interruptor situado en los laberintos del sótano. Se accedía a estos laberintos por una pesada puerta de roble bajo el puente levadizo cerrada con un candado muy seguro. En el dormitorio del duque se halló una húmeda agenda con los nombres y direcciones de las últimas personas que se habían alojado en la isla de White (y los pescadores de la costa atestiguaron que, aparte de las ocho mujeres mencionadas en la libreta, no se había visto visitante alguno en el embarcadero). A su regreso a Londres contactaron con ellas y les tomaron declaración: ninguna de las ocho respetables damas fue capaz de precisar las fechas exactas de su visita, pero a todas les resultó sencillo recordar los nombres de aquellas con las que habían coincidido en la isla. Dado que el criado era el único que poseía una llave del subterráneo (y el candado estaba intacto) era obvio que él era el asesino, y que su muerte se había producido accidentalmente. Por lo tanto se cerró el caso.

11. EL PROFESOR TURNER-SMITH

Ralston vivió en su juventud en Oxford, donde conoció a un estudiante especialmente brillante, un tal Cedric Turner-Smith, que un día le ayudó a resolver un rompecabezas policiaco. Más tarde, este último se distinguió por sus investigaciones en matemática discreta y se convirtió en profesor del Merton College. De paso por Oxford, no pudo resistir la tentación de visitar a su amigo y comentarle algunos datos curiosos en relación con el asesinato de Jeremy Morse.

Lo encontró sin problemas en uno de los patios del *college*, pero en lugar de caminar por los jardines decidieron ir a charlar frente a unas cervezas en un *pub* cercano.

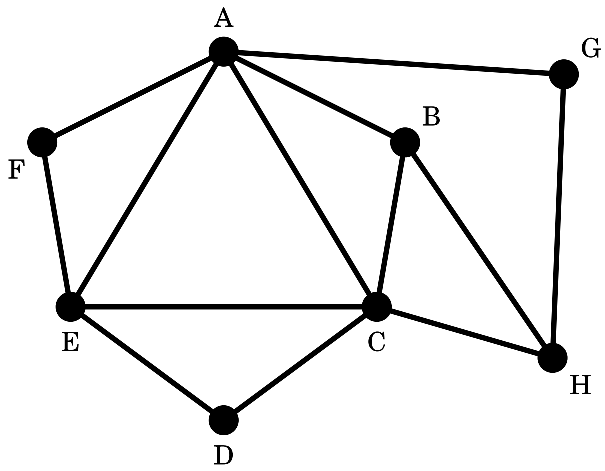
Cuando Ralston comenzó a contar el descubrimiento de los tres cadáveres, dos hombres y un cocodrilo, Turner-Smith se atragantó de la risa. El camarero les interrumpió trayendo un par de jarras de Guinness rebosando espuma marrón.

El detective Ralston prosiguió entonces su relato:

—No sabemos mucho de las muertes del duque de Densmore y su criado, descubiertas, por desgracia, más de un año después de la explosión. Las últimas personas que estuvieron en la isla y lo vieron con vida son ocho mujeres incapaces de acordarse de las fechas de sus respectivas estancias; por contra, todas recuerdan con claridad los nombres de las mujeres que conocieron y sus declaraciones concuerdan a la perfección.

Turner-Smith parecía muy interesado en la historia del detective, y le hizo repetir los nombres de las mujeres que cada una de ellas había conocido; entonces sacó un lápiz y empezó a trazar un curioso dibujito en una página de su libreta.

—En este grafo —explicó el profesor— las ocho mujeres están representadas por puntos (o «vértices» del grafo), y la línea que une dos de estos puntos (o «arista» del grafo) indica que las dos mujeres correspondientes se encontraron durante su estancia. Para simplificar, hemos designado a cada una de ellas por la inicial de su nombre: F de Felicia (la señorita Wynn), C de Cynthia (Lady Mansfield), G de Georgia (la señora Blake), D de Diana (la señorita Macleod) E de Emily (la señorita Healey), A de Ann (la señorita Laybourn), B de Betty (la señorita Townsend), H de Helen (la señorita Grimshaw).[35] Así que, como ve, Cynthia no se ha encontrado más que con Diana, Emily, Ana, Betty y Helen, Felicia tan solo convivió con Emily y Ann, etc... ¿Está seguro de que este esquema está completo?



—Cierto, y cada declaración confirma las otras.

—¿Y está totalmente seguro de que ninguna mujer viajó más de una vez a la isla?

—Esto también fue confirmado por los marineros del puerto.

Turner-Smith miró a su dibujo, y luego exclamó:

—Ah, mi querido amigo, ¿no se da cuenta de que este grafo exculpa por completo al sirvente Stewart, tan precipitadamente acusado por ustedes?

Ralston miró a su amigo absolutamente estupefacto.

—Usted me ha asegurado —prosiguió Turner-Smith— que el crimen fue cuidadosamente preparado por alguien oculto en los pasadizos subterráneos; ahora bien, lo que su grafo muestra de modo irrebatible es que esta persona es ¡una de las ocho invitadas!

El detective todavía parecía no entender nada, así que el profesor continuó:

—Si todo el mundo dijera la pura y simple verdad, el grafo sería del tipo que llamamos, a raíz de un trabajo de 1957 del matemático húngaro Hajós, un «grafo de intervalos». Esto significa que el grafo representa una familia de intervalos (sobre una recta o eje orientados), y cada par de vértices conectados por una arista representa a dos intervalos con una parte común. Porque es obvio que si las invitadas solo hicieron una visita a la isla, el período de esta

[35]Obsérvese que hay una arista entre C y H pero no entre A y D; de ahí lo comentado en las notas 30 y 32.

estancia es un intervalo (sobre el eje del tiempo), y si dos mujeres se encontraron, los intervalos de tiempo de sus estancias respectivas tienen una parte común.

El detective ya empezaba a fruncir el ceño cuando Turner-Smith le arrebató el dibujito:

—Sin embargo, hay un teorema que demuestra inmediatamente que el grafo trazado no es un grafo de intervalos. ¿Por qué? Observe la configuración formada por los seis vértices A, B, C, D, E, F, un triángulo inscrito en un hexágono. Si estos seis vértices representaran seis intervalos sobre un eje, llegaríamos a un contradicción. (La prueba por reducción al absurdo sería la siguiente: por razones de simetría, podemos suponer que los intervalos de B, D, F, que son disjuntos dos a dos, se sitúan sobre el eje en ese orden, pues si no bastaría con cambiar los nombres. Ahora bien, el intervalo A, por tocar a los intervalos B y F, debería recubrir al intervalo D, que está en medio de ambos, lo que es falso porque en el grafo dibujado el vértice marcado con la A no está conectado con el marcado con la D). ¿Me sigue?

Ralston, pensativo, murmuró:

—Lo que dice está claro. ¡Pero eso todavía no revela quién es la culpable!

—¡Al contrario —replicó sonriendo Turner-Smith—, porque este grafo tiene una propiedad asombrosa, una propiedad inesperada, que identifica de manera inapelable a la única asesina posible!

El profesor se tomó su tiempo para acabarse la cerveza y colocó con cuidado la jarra sobre el posavasos:

—No se lo he contado todo. El enunciado del teorema de Hajós[36] es en realidad más preciso: un gráfico de intervalos no puede contener un triángulo inscrito en un hexágono ni un ciclo sin cuerdas de longitud por lo menos cuatro. ¡Observe! El grafo que he dibujado tiene exactamente tres configuraciones prohibidas por este teorema: el conjunto ABCDEF (el triángulo inscrito en un hexágono); el conjunto ACHG (el ciclo de longitud cuatro) y el conjunto ABHG (otro ciclo de longitud cuatro). Solo tienen un vértice en común... el vértice A. Como la eliminación de este vértice, y solo él, transforma el grafo en un grafo de intervalos, la homicida, la que tuvo que esconderse en los subterráneos, es la persona que corresponde al punto A, es decir, ¡Ann Laybourn!

György Hajós (1912-1972).

Ralston, encendido de emoción, exclamó:

—¡Fantástico! ¡Asombra que las matemáticas modernas puedan mostrar a la asesina de inmediato! Pero dígame, ¿no podrían también indicar en qué orden llegaron las ocho personas a la isla?

—Imposible solo con el grafo —respondió Turner-Smith con sequedad—. Para ello, le sugiero que vaya enseguida a casa de la señorita Laybourn, que sin duda podrá darle más información...

12. EPÍLOGO

Cuando el detective Ralston y el sargento Hurley llegaron al 23 de Hilton Road

[36] No se trata de enmendar la plana a un experto en teoría de grafos del calibre de Berge, pero lo cierto es que las diversas fuentes bibliográficas que hemos consultado siempre se refieren a este teorema como de Lekkerkerker-Boland, los matemáticos holandeses que lo demostraron en 1962. El triple «ker» del primer autor es bastante «oulipiano», por cierto.

con la sirena a toda potencia, era ya demasiado tarde. La señorita Ann Laybourn se había suicidado con gas y los bomberos ya se habían llevado el cuerpo. Todo en el reducido y sombrío apartamento daba muestras de extrema privación; las paredes conservaban todavía las huellas de cuadros, que debían de haber sido vendidos. ¿Remordimientos? ¿Miseria? La respuesta estaba en un cuadernillo negro que había sobre la mesilla. En las tres primeras páginas, repletas de la estilizada y enérgica caligrafía de Ann Laybourn, podía leerse lo siguiente:

«Cuando recibí la carta de Jeremy, mi más generoso amante, mi intención no era librarme de él, todo lo contrario. Me había cubierto de joyas en Singapur, Kuala Lumpur, Yakarta. Sin embargo, desde hace dos años, me he visto obligada a venderlas, una por una, hasta sumirme en la pobreza, y su invitación llegaba justo a tiempo para volver a flote.

»Mi estratagema, por otra parte, era excelente. Un día, al anochecer, de regreso al hotel Raffles de Singapur al volante de un coche de alquiler, atropelló a un peatón. Estaba tan asustado y borracho, e incapaz de moverse, que no hacía otra cosa que llorar en mi hombro. Me brindé a ir yo sola a ocuparme de la víctima. Se trataba de un pequeño limpiabotas chino, que estaba sentado tras el coche ligeramente conmocionado. Le ofrecí cien dólares singapurenses con la única condición de que se hiciera el muerto unos pocos minutos. Naturalmente, aceptó. Induje a Jeremy a creer que lo habíamos matado y que teníamos que irnos del país en el primer avión.

»No tuve dificultad en conseguir que Jeremy me comprara en Yakarta un broche que había visto en las vitrinas del hotel Borobudur, una especie de estrella de oro macizo con un diamante en su centro. ¡Por supuesto, medio en serio, medio en broma, le di a entender que era poca cosa como pago de mi silencio!

»Tan pronto como llegué a la isla de White intenté en vano hablar con Jeremy cara a cara; pero debido a la presencia de una modelo, Felicia Wynn, y una estudiante irlandesa, Emily Healey, hube de esperar a la noche para librarme de ellas, con el conveniente pretexto de jugar a solas una partida de ajedrez en la biblioteca. Entonces le pedí al duque una renta de mil libras al mes como garantía de mi silencio. Jeremy palideció y murmuró que tenía que pensarlo. La segunda entrevista cara a cara fue mucho menos agradable. Jeremy había tenido tiempo de telefonear al portero del Raffles, a quien conocía bien, y se enteró de que el limpiabotas del hotel no había sufrido atropello alguno y se encontraba perfectamente. Me arrebató el broche de inmediato y me exigió la devolución de todos sus regalos; de lo contrario me denunciaría a la policía. Ya había vendido el resto de las joyas, así que no tenía más opción que eliminarlo.

»Mi oportunidad se presentó un día en que el taciturno Stewart se había ido de la isla en la lancha y al duque le apeteció ir con Emily en la playa. De este modo pude registrar la cocina, donde logre encontrar enseguida el manojo de llaves del mayordomo. Tomé prestada la única llave grande que parecía adecuada para abrir la puerta del laberinto, cogí una de las linternas del armario y algunas provisiones, y me marché a explorar los pasadizos subterráneos. Allí localicé de inmediato el almacén con los explosivos sobrantes de los usados para excavar la roca y permitir el atraque de la lancha. Era sencillo, pues, conectar un detonador a uno de los interruptores, lo que mataría al imprudente que encendiera la luz arriba. Estuve allí de forma casi continuada durante varios días, para ubicar con precisión las habitaciones superiores y proveerme de unas cuantas herramientas y cable eléctrico. Cuando salía lo hacía al amanecer, suficientemente temprano para devolver la llave sin que Stewart me viera.

»Unos días más tarde, mi plan estaba listo; el estudio bajo el que coloqué los explosivos era el que ocupaba el cocodrilo, y el duque solo lo visitaba de quince en quince días. Gracias al cuaderno donde Stewart llevaba cuenta de los días de entrada y salida de las visitantes, sabía que no habría nadie en la isla en ese momento. Decidí entonces volver a coger la llave a medianoche, cuando el duque dormía, pero por poco se echa todo a perder por culpa de Lady Mansfield; esta detestable persona, que se alojaba excepcionalmente en una de las habitaciones del interior del castillo, tuvo la ocurrencia de ir en ese mismo momento a la cocina. La empujé en la oscuridad, pero estoy segura de que no tuvo tiempo de identificarme. La primera parte de mi plan se había, pues, ejecutado conforme a lo previsto, solo había que esperar el jaque mate. La señora Blake y yo fuimos las últimas invitadas en abandonar la isla, cosa —tengo que decir— que hice con cierto alivio.

«N. B.[37] Mis problemas financieros siguen sin resolverse, y si no se presenta alguna oportunidad los próximos días, será mi final».

Bajo el cuaderno de Ann Laybourn había un trozo de papel roto en el que podían leerse algunas palabras con la meticulosa letra del mayordomo:

Estancias de las invitadas:

Srta. Felicia Wynn	*Del 20 al 25 de junio*	*Estudio 1.º*
Lady Cynthia Mansfield	*Del 29 de junio al 2 de agosto*	*Sala Azul del castillo*
Sra. Georgia Blake	*Del 3 al 7 de agosto*	*Estudio 1.º*
Srta. Diana Macleod	*Del 28 de junio al 4 de julio*	*Estudio 1.º*
Srta. Emily Healey	*Del 15 de junio al 4 de julio*	*Estudio 2.º*
Srta. Ann Laybourn	*Del 21 de junio al 7 de agosto*	*Estudio 3.º*
Srta. Betty Townsend	*Del 9 al 30 de julio*	*Estudio 1.º*
Srta. Helen Grimshaw	*Del 18 de julio al 4 de agosto*	*Estudio 2.º*

Así concluye este singularísimo relato de Claude Berge. Resulta muy ilustrativo hacer un análisis *post mortem*, por así decir, de la historia, y precisar las idas y venidas de la señorita Laybourn con la ayuda del cuadro de visitas.

Es claro que el primer encuentro confidencial entre el duque y Ann, por cuenta de una presunta partida de ajedrez, sucedió la noche del 21 de junio. La segunda (y seguramente última) cita nocturna entre ambos debió de tener lugar unos pocos días después, pongamos el 24 o 25. El robo de la llave tuvo que producirse antes de la llegada de Diana, probablemente el mismo 28 de junio, cuando Stewart se marcha a Craymouth a recogerla y el duque, recuperada la presencia de ánimo tras unos días difíciles, siente de nuevo el

[37] Abreviatura de la locución latina *note bene*, literalmente «nota bien» o, simplemente, «Nota».

deseo de verse en la playa con Emily. No obstante, el enojoso episodio hubo de dejar huella en el aristócrata, cuyo humor, como Emily no pudo dejar de notar, distaba mucho del de los primeros días, cuando solos en la isla ambos retozaban con plena libertad. Podemos intuir ahora lo que sucedió el día 28: Ann aprovecha su oportunidad para hacerse con la llave y echar un primer vistazo a los sótanos, donde enseguida localiza los explosivos. Luego, la reintegra antes de que Stewart la eche en falta y se retira a su estudio a meditar sus planes inmediatos, lo que impide que se encuentre con Diana. A partir de entonces, cuando tenga que explorar el laberinto, el *modus operandi* será siempre el mismo: coge la llave a medianoche —no es preciso siquiera encender la luz pues ya sabe dónde se guarda— y la devuelve de madrugada, antes de que Stewart comience sus faenas cotidianas. Desde luego, no hay que interpretar literalmente a Ann cuando escribe «Estuve allí de forma casi continuada durante varios días para ubicar con precisión las habitaciones superiores», pues sería una temeridad (y bastante absurdo, por cierto) pasar varios días bajo tierra, expuesta a que en cualquier momento Stewart echara de menos la llave, que además destacaba por su tamaño entre las otras. En realidad, la ausencia de encuentros entre Ann y Diana la semana del 28 de junio al 4 de julio, que es el periodo de tiempo que la segunda permanece en el islote, admite una explicación bastante prosaica: agotada por sus correrías nocturnas, la primera dedica la mayor parte del día a descansar; recordemos, por otro lado, que Diana es poco sociable y pasa mucho tiempo encerrada en su cuarto leyendo.

En las dos semanas que van del 4 al 18 de julio se produce, por lo visto, un *impasse*. A Ann le interesa dejarse ver y además debe estar al tanto del momento en que Arquímedes dé cuenta de su festín quincenal. Esto último por una doble razón: la primera y fundamental es que, obviamente, las cargas explosivas no pueden conectarse antes de ese día. Por otro lado es la ocasión perfecta para conocer con detalle la distribución interior de la cuarta torre y así poder ubicar los explosivos con el máximo efecto.

Ha de suponerse, por tanto, que Ann hace vida normal en ese tiempo, y es así como conoce a Cynthia y Betty. Un detalle importante, que el detective Ralston pasó por alto: de acuerdo con la declaración de Cynthia, Ann la invita «amablemente» al espectáculo del cocodrilo, cuando sabemos, por su confesión pero también por su declaración previa, que Ann «detesta» a Cynthia. Esto parece extraño, pero a la luz de lo que sabemos no lo es tanto: es comprensible que Ann quisiera pasar lo más desapercibida posible (de hecho, solo la exquisita educación británica de Sir Jeremy justifica que a estas alturas se le siga permitiendo vivir en la isla), para lo que era muy conveniente la compañía de Cynthia y Betty, que posiblemente supo también por Ann de la existencia del reptil.

La fecha exacta de la comilona es un pequeño enigma. Stewart trajo a Betty y la casquería en el mismo viaje, el 9 de julio, pero entre esa fecha y la del 7 de agosto, momento de la partida de Ann y Georgia, solo tenemos constancia de que se haya alimentado al cocodrilo en público una vez. Esto debió de ocurrir poco antes de la marcha de Betty, pongamos la tarde del 28 o 29 de julio. Según colegimos de la confesión de Ann y la declaración de Lady Cynthia, fue precisamente esa noche cuando la primera hizo su visita final a los laberintos para activar la trampa, tropezándose con la segunda en la escalera. Dado que Cynthia estaba a punto de marcharse, bastante hastiada, de la isla, es lógico que prefiriera no dar más trascendencia al incidente.

Ya tenemos encajadas casi todas las piezas del puzle. No es extraño que Ann y Helen no coincidieran los pocos días de agosto que la última permaneció en la isla: la muchacha, desmoralizada, evitaría sin duda las zonas comunes del castillo, sobre todo por no tropezarse con Lady Cynthia, con la que que ya había tenido sus más y sus menos. Más difícil nos resulta entender el largo ayuno al que el entrañable Arquímedes fue sometido. Quizás Stewart, en solitario, le dio parte de la comida el 10 o 12 de julio y guardó el resto para más adelante. En todo caso, tenemos constancia de que el cocodrilo era capaz de resistir un mes sin alimentarse, máxime si se considera el poco ejercicio que hizo esas semanas...

Agradecimientos

Los autores agradecen al revisor o revisora del trabajo su concienzuda lectura del mismo y sus muy pertinentes sugerencias para mejorarlo.

Referencias

[1] E. A. Abbott, *Flatland: a romance of many dimensions*, Seeley & Co., Londres, 1884. Trad. al castellano de J. Villa: *Planilandia*, Guadarrama, Barcelona, 1975.

[2] S. Benzer, «On the topology of the genetic fine structure», Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **45** (1959), 1607–1620.

[3] S. Benzer, «The fine structure of the gene», Sci. Amer. **206** (1962), 70–84.

[4] C. Berge, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, París, 1958.

[5] C. Berge, *Qui a tué le duc de Densmore?*, La Bibliothèque Oulipienne **67**, OuLiPo, París, 1994. Trad. al inglés de I. White: «Who killed the Duke of Densmore?», en: *Oulipo laboratory: texts from the Bibliothèque Oulipienne*, Atlas Press, Londres, 1995.

[6] J. L. Borges, *Ficciones*, Sur, Buenos Aires, 1944.

[7] D. Bouyssou, O. Hudry y D. de Werra, «Claude Berge and the "Oulipo"», EURO Newsletter #**6**, 2006. https://www.lamsade.dauphine.fr/~bouyssou/Berge.pdf

[8] P. Buneman, «A characterization of rigid circuit graphs», Discrete Math. **9** (1974), 205–212.

[9] I. Calvino, *Se una notte d'inverno un viaggiatore*, Einaudi, Turín, 1979. Trad. al castellano de E. Benítez: *Si una noche de invierno un viajero*, Bruguera, Barcelona, 1980.

[10] K. Cameron, C. T. Hoàng y B. Lévêque, *Asteroids in rooted and directed path graphs*, Wilfrid Laurier University, 2008. https://arxiv.org/pdf/0812.2734.pdf

[11] K. Cameron, C. T. Hoàng y B. Lévêque, «Asteroids in rooted and directed path graphs», Electron. Notes Discrete Math. **32** (2009), 67–74.

[12] K. Cameron, C. T. Hoàng y B. Lévêque, «Characterizing directed path graphs by forbidden asteroids», J. Graph Theory **68** (2011), 103–112.

[13] G. Chartrand, L. Lesniak y P. Zhang, *Graphs & digraphs. Sixth edition*, CRC Press, Boca Ratón, 2016.

[14] T. Chiang, «Division by zero», en: *Stories of your life and others*, Tor Books, Nueva York, 2002, pp. 93–116. Trad. al castellano de L. G. Prado: «Dividido entre cero», en: *La historia de tu vida*, Bibliópolis, Madrid, 2004, pp. 69–68.

[15] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour y R. Thomas, «The strong perfect graph theorem», Annals of Math. (2) **164** (2006), 51–229.

[16] G. A. Dirac, «On rigid circuit graphs», Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **25** (1961), 71–76.

[17] M. Flores Fernández, *El teorema de Lekkerkerker-Boland, o cómo resolver un crimen usando teoría de grafos*, trabajo fin de grado, Universidad de Murcia, 2024.

[18] D. R. Fulkerson y O. A. Gross, «Incidence matrices and interval graphs», Pacific J. Math. **15** (1965), 835–855.

[19] N. Gaiman, «Other people», en: *Fragile things*, Headline Review, Londres, 2006, pp. 123–126. Trad. al castellano de M. Faerna: «Los otros», en: *Objetos frágiles*, Roca Editorial, Barcelona, 2008, pp. 157–160.

[20] M. Gardner, «The no-sided professor», en: *Fantasia mathematica*, Clifton Fadiman (ed.), Simon & Schuster, Nueva York, 1958, pp. 99–109.

Trad. al castellano (no consta el traductor): «El profesor no-lateral», en: *El anticipador y otros cuentos de mente*, Zugarto Ediciones, Madrid, 1993, pp. 61–76.

[21] F. Gavril, «The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs», J. Combinatorial Theory Ser. B **16** (1974), 47–56.

[22] J. R. Gilbert, D. J. Rose y A. Edenbrandt, «A separator theorem for chordal graphs», SIAM J. Algebraic Discrete Methods **5** (1984), 306–313.

[23] P. C. Gilmore y A. J Hoffman, «A characterization of comparability graphs and of interval graphs», Canad. J. Math. **16** (1964), 539–548.

[24] M. C. Golumbic, *Algorithmic graph theory and perfect graphs. Second edition*, Annals of Discrete Mathematics **57**, Elsevier Science B.V., Ámsterdam, 2004.

[25] M. Haddon, *The curious incident of the dog in the night-time*, Jonathan Cape, Londres, 2003. Trad. al castellano de P. Antón de Vez: *El curioso incidente del perro a medianoche*, Salamandra, Barcelona, 2005.

[26] A. Hajnal and J. Surányi, «Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teilgraphen», Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös, Sect. Math. **1** (1958), 113–121.

[27] G. Hajós, «Über eine Art von Graphen», Intern. Math. Nachr. **11** (1957), problema 65.

[28] R. Halin, «Some remarks on interval graphs», Combinatorica **2** (1982), 297–304.

[29] C.-W. Ho y R. C. T. Lee, «Counting clique trees and computing perfect elimination schemes in parallel», Inform. Process. Lett. **31** (1989), 61–68.

[30] E. Jardiel Poncela, *El libro del convaleciente*, Hispania, Zaragoza, 1938.

[31] A. Kasman, *Mathematical Fiction*, College of Charleston, 2000. https://kasmana.people.charleston.edu/MATHFICT/

[32] C. G. Lekkerkerker y J. Ch. Boland, «Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line», Fund. Math. **51** (1962/1963), 45–64.

[33] M. Macho Stadler, *OuLiPo: juegos matemáticos en la literatura*, Universidad del País Vasco, 2012. https://www.ehu.eus/~mtwmastm/OuLiPo_Bak2012.pdf

[34] M. Macho Stadler, «OuLiPo: un viaje desde las matemáticas a la literatura», Tropelías **25** (2016), 129–146.

[35] T. A. McKee y F. R. McMorris, *Topics in intersection graph theory*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, SIAM, Filadelfia, 1999. Hay una lista de correcciones y actualizaciones disponible *online*: http://f5webserv.wright.edu/~terry.mckee/Button_441_AddCorrect.html

[36] F. O'Brien, *The third policeman*, MacGibbon & Kee, Londres, 1967. Trad. al castellano de J. Fibla: *El tercer policía*, Montesinos Editor, Barcelona, 1987.

[37] G. Perec, *La Vie, mode d?emploi*, Hachette, París, 1978. Trad. al castellano de J. Escué: *La vida instrucciones de uso*, Anagrama, Barcelona, 1988.

[38] R. Queneau, *Exercices de style*, Gallimard, París, 1947. Trad. al castellano de A. Fernández Ferrer: *Ejercicios de estilo*, Cátedra, Madrid, 1989.

[39] F. S. Roberts, *Discrete mathematical models, with applications to social, biological and environmental problems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.

[40] D. J. Rose, «A graph-theoretic study of the numerical solution of sparse positive definite systems of linear equations», en: *Graph theory and computing* (R. C. Read, ed.), Academic Press, Nueva York-Londres, 1972, pp. 183–217.

[41] B. Toft, «Claude Berge — sculptor of graph theory», en: *Graph theory in Paris* (A. Bondy, J. Fonlupt, J.-L. Fouquet, J.-C. Fournier y J. L. Ramírez Alfonsín, eds.), Birkäuser Verlag, Basilea, 2007, pp. 1–9.

[42] C. Sagan, *Contact*, Simon & Schuster, Nueva York, 1985. Trad. al castellano de R. Albornoz: *Contacto*, Plaza & Janés, Barcelona, 1987.

[43] M. de Unamuno, *Niebla*, Renacimiento, Madrid, 1914.

[44] S. S. Van Dine, *The bishop murder case*, Scribners Press, Nueva York, 1929. Trad. al castellano de I. Miller: *Los crímenes del «Obispo»*, Edicomunicación, Santa Perpetua de Moguda, 1997.

[45] J. R. Walter, *Representations of rigid cycle graphs*, tesis doctoral, Wayne State University, 1972.

Mercedes Flores Fernández
Facultad de Matemáticas
Universidad de Murcia
merce.flofer@gmail.com

Víctor Jiménez López
Departamento de Matemáticas
Universidad de Murcia
vjimenez@um.es

Publicat el 10 de març de 2025