

Representació proporcional i llistes obertes*

Rosa Camps, Xavier Mora, Laia Saumell

Introducció

Considerem un collectiu social més o menys nombrós que vol elegir un determinat nombre de persones per a que formin un òrgan de representació que prengui decisions en nom de tot el collectiu. En una situació d'aquest tipus és natural que cada elector especifiqui una llista de les persones que creu que representarien millor el seu punt de vista. A partir d'aquesta informació, es tracta de determinar quins candidats resulten elegits com a representants.

Idealment, convindria que el conjunt elegit inclogués totes les opinions presents en el collectiu i que, a més, reproduís les proporcions entre elles. Si fos exactament així, llavors les decisions de l'òrgan de representació coincidirien, en principi, amb les que prendria tot el collectiu si se n'ocupés directament. Aquest ideal rep el nom de **representació proporcional**. A la pràctica, serà inevitable prescindir de les opinions molt minoritàries, i les proporcions entre les diferents opinions difícilment podran ser exactament les mateixes que en tot el collectiu, però com més ens hi acostem millor.

La versió més general d'aquest problema no imposa cap restricció sobre les llistes que poden especificar els electors. Simplement han d'estar formades a partir d'un conjunt de candidats prèviament especificat. Aquesta versió és el cas més general de **llistes obertes**. En el cas oposat de **llistes tancades** l'elector només pot triar entre unes quantes llistes concretes diferents les quals han estat proposades pels partits polítics o entitats anàlogues.

*Aquest treball va ser exposat a la lliçó inaugural de curs que es va fer l'11 d'octubre de 2023 al Departament de Matemàtiques de la UAB, amb el títol "Llistes obertes: Els més votats? No, gràcies!"

ELECCIONES A CORTES GENERALES 2023 SENADO (BARCELONA)
ELECCIONS A CORTS GENERALS 2023 SENAT (BARCELONA)

Deixi mi vot a los candidatos señalados con una X. Deixi el meu vot als candidats marcats amb una X.
Recuerde que puede votar a un máximo de 3 candidatos en total. Recordeu que pot votar a un màxim de 3 candidats en total.
(Cualquier abreviación en la papeleta electorales es a sueldo del votant) (Qualsevol abreviació en la papeleta electorales és a sueldo del votant)

1. ESQUERRA REPUBLICANA DE CATALUNYA - ESQUERRES PER LA INDEPENDÈNCIA (ERC) ☐ JOAN GUARDIÀ I JARDÍ (INDEPENDENT) ☐ ERNEST MARÇALL I MIRA ☐ ANA MARIA DURRA I SPICA	2. SUMAR - EN COMÚ PODEM (SUMAR-ECT) ☐ LAURA CAMPOS FERRER ☐ CONCEPCION ABELLÁN CARRETERO ☐ PERE CAMPS CARPOS	3. JUNTS PER CATALUNYA - JUNTS (JUNCAT-JUNTS) ☐ ANTONI CASTELLÀ I CLAVÉ ☐ ROSA HUQUET I SUORANYER ☐ ANTONI MORRAL I BERENQUER	4. PARTELL DELS SOCIALISTES DE CATALUNYA (PSG-PSOE) ☐ MANUEL ORTEZ RODRIGUEZ ☐ ELENA VILA GÓMEZ ☐ GABRIEL COLLME GARCIA
5. VOX (VOX) ☐ DANIEL CAYUCHA NAVARRO ☐ MARIA DEL MAR BUSCA REY ☐ DAVID COSCULLUELA MARTINEZ-GALOFRE	6. RECORTES CERO (RECORTES CERO) ☐ ANTONIO RODRIGUEZ GARCIA ☐ ANTONIO DE LA PUERTA ANDRES ☐ PILAR RUIZ PALACIOS	7. PARTELL DEMOCRÀTICA EUROPEU CATALA - ESPAI CIU (POCATE-CIU) ☐ LORENA GIESBAS TEXEIRO	8. PARTELL POPULAR / PARTELL POPULAR (PP) ☐ JOSE TUTUSIAUS BESANTE ☐ MONICA PARES CENTENO ☐ ALVARO BENJAMIN PERETO
	9. PARTELL ANARQUISTA AMB EL BELL AMBENT (PACMA) ☐ DIMITRI NABES DEFRANC CEBALLOS ☐ LUISA CLAVER ORATE ☐ ALVARO CUESTA HEDALGO	10. PARTELL COMUNISTA DELS TREBALLADORS DE CATALUNYA (PCTC) ☐ FERRAN PERIS SERRANO	

Una butlleta d'elecció mitjançant llistes obertes no ordenades consisteix típicament en un llistat de tots els candidats amb unes caselles on l'elector pot marcar quins d'ells inclou en la seva llista. La figura 1 reproduïx l'exemple que en dona la llei electoral de Gibraltar.

BALLOT PAPER FOR GIBRALTAR PARLIAMENT ELECTIONS.

Form of front of Ballot Paper.

1	BROWN (JOHN Edward Brown of 52, Central Street, Description)	
2	BROWN (THOMAS William Brown of 136 Bristol Street, Description)	
3	JONES (WILLIAM David Jones of 17, Upper Avenue, Description)	
4	MAGRO (WILLIAM David Magro of 10 Tower Road, Description)	
5	MERTON (GEORGE Merton of 65, Lower Road, Description)	
6	SMITH (MARY Smith of 27 High, Street, Description)	
7	WILLIAMS (FRANCIS Williams of 999, Main Street, Description)	

Figura 1: Forma de la butlleta en les eleccions al Parlament de Gibraltar [9]. Les caselles de la dreta serveixen per a que l'elector marqui amb una creu els candidats que aprova.

En altres llocs, és habitual especificar no solament el nom de cada candidat, sinó també si es presenta a títol individual o bé forma part d'una determinada candidatura col·lectiva; en aquest cas també és habitual que els candidats apareguin agrupats segons aquestes filiacions. Tanmateix, l'elector és lliure de combinar, o no, candidats de diferents filiacions, i d'incloure, o no, candidats individuals, tal com és característic de les llistes obertes. En general, el tipus de vot que estem considerant s'anomena **vot d'aprovació**, ja que l'elector està indicant quins candidats aprova per a donar-li representació.

Si a més d'indicar quins candidats aprova, l'elector especifica també un ordre de preferència, llavors es parla de **vot preferencial**, o llistes obertes ordenades. Amb aquesta finalitat es pot usar una butlleta de la mateixa forma que la figura 1 on l'elector utilitzi les caselles de la dreta per a especificar les seves preferències mitjançant uns números d'ordre. Aquest tipus de vot és el punt de partida dels procediments electorals anomenats de **vot únic transferible** [30], els quals es van desenvolupar des de mitjan el segle XIX i encara s'utilitzen avui dia a Austràlia, Irlanda i Malta. Malauradament, tenen el greu inconvenient que en augmentar la preferència a favor d'un candidat pot ser que aquest deixi de ser elegit (*sic!*) [6, 32]. En aquest article ens limitem al cas de llistes obertes no ordenades, que no tenen aquest inconvenient.

A més de Gibraltar, també es permeten llistes obertes en les eleccions parlamentàries de Suïssa, Luxemburg i els Länder alemanys de Bremen i Hamburg. Dit això, aquests països permeten no solament barrejar partits, sinó també acumular més de un vot en un mateix candidat, la qual cosa queda fora d'aquest treball. A Espanya les llistes obertes s'utilitzen en l'elecció del Senat i també en les eleccions consistorials de municipis de menys de 250 residents. D'altra banda, constitueixen el procediment habitual de les universitats catalanes i espanyoles en l'elecció del seu claustre i de les juntes de facultat.

D'alguna manera, les llistes obertes són un mètode de votació més democràtic que les llistes tancades. Perquè l'elector té més opcions i per tant dóna més informació (la qual cosa incentiva, per cert, la participació). Tanmateix, el caràcter més o menys democràtic d'un sistema electoral depèn no solament del format en què s'expressa l'elector, sinó també de l'algorisme que s'usa per a combinar els diferents vots i determinar el resultat.

En el cas de les llistes obertes, el més habitual és simplement comptar els vots que ha obtingut cada candidat i elegir els més votats. D'ara endavant en direm la **regla dels més votats**. Certament és un procediment força natural. Com veurem tot seguit, però, no s'adiu gens a l'ideal de la representació proporcional.

1 La regla dels més votats atempta de ple contra la representació proporcional

L'ideal de la representació proporcional és utòpic, no cal dir-ho. Però és que la regla dels més votats va ben bé en sentit contrari! Suposem, per exemple, que es volen elegir 6 representants i que hi ha 100 electors que voten així:

$$57 \text{ } a b c d e f; \quad 32 \text{ } g h i j k l; \quad 11 \text{ } m n o p q r; \quad (1)$$

on cal entendre que 57 electors aproven exactament els candidats *a b c d e f*, 32 electors aproven els candidats *g h i j k l*, i 11 aproven els candidats *m n o p q r*.

Aquí els electors estan votant ben bé com si es tractés d'unes llistes tancades. Però en principi també podria tractar-se d'una elecció amb llistes obertes on simplement els electors han votat així.

En aquest exemple, els 6 candidats més votats són *a b c d e f*, cadascun d'ells amb 57 vots. Així doncs, aquí la regla dels més votats només dona representació a un 57% de l'electorat.

De seguida es veu que en general passarà el següent: Si els vots tenen la mateixa forma que en el cas de llistes tancades, i cada elector pot votar tants candidats com escons disponibles, llavors el sector més majoritari obté *tots* els escons.

En l'exemple precedent el sector en qüestió és una majoria absoluta de la població. Tanmateix, el conjunt elegit no manté pas les mateixes proporcions que els vots: aquests estan en la proporció 57:32:11, mentre que els escons corresponents estan en la proporció 100:0:0.

En general, el sector "més majoritari" que s'enduu tots els escons pot ser només una majoria simple, i si hi ha molts sectors diferents això pot correspondre a una veritable minoria en termes absoluts.

Així doncs, *la regla dels més votats no garanteix pas un conjunt realment representatiu!*

En el cas concret de (1), a ull sembla prou representatiu, per exemple, el conjunt *a b c d g h* (en la proporció 4:2:0). Però com podem justificar-ho? I com ho hem de fer per tractar el cas general?

A la pràctica, una situació així o similar pot ser realment problemàtica. Imaginem, per exemple, que els tres sectors de l'electorat que s'evidencien a (1) corresponen a tres entitats que tenen les seves diferències però en un cert moment decideixen ajuntar esforços a través d'un òrgan de representació comú. I que decideixen elegir aquest òrgan mitjançant llistes obertes i la regla dels més votats. És obvi que d'aquesta manera no aconseguiran pas ajuntar esforços. Perquè la regla dels més votats fa que només obtingui representació el primer sector. Si ja es veuen venir uns nombres com aquests, és molt probable que els altres dos sectors s'abstinguin de participar en les eleccions i fins i tot que ja no presentin candidats. Aquests tipus de situacions van ser freqüents a l'Espanya del segle XIX, on aquest

tipus d'abstenció rebia el nom de **retraïment** i va comportar situacions de veritable malestar social.

Les llistes obertes són presentades sovint com un recurs contra l'excessiu protagonisme dels partits. Tanmateix, si s'usa la regla dels més votats, llavors no hi ha res a fer. Al contrari, i tal com va passar de fet en el segle XIX, *la regla dels més votats fa que un sistema de llistes obertes evolucioni cap a un sistema de llistes tancades*. En efecte, si un sector d'electors vol aconseguir més escons, el millor que pot fer no és pas diversificar el conjunt de candidats que aproven els seus electors, ans al contrari, posar-se d'acord en una mateixa llista.

2 Un intent de solució: el vot limitat

Davant d'aquests problemes, en el segle XIX es va introduir l'anomenat **vot limitat**. Aquest consisteix simplement en limitar el nombre màxim de candidats que pot aprovar un elector. El límit es posa en un valor estrictament inferior al nombre de candidats a elegir.

Aquesta manera de fer s'ha usat molt a Espanya des del segle XIX i encara hi és molt habitual. Així, en el cas del Senat espanyol s'elegeixen 4 senadors per província, però els electors només poden indicar 3 candidats. Similarment, en els municipis que tenen entre 101 i 250 residents s'elegeixen 5 regidors, però els electors només poden marcar 4 candidats; si tenen 100 residents o menys, llavors s'elegeixen només 3 regidors i el vot està limitat a 2 candidats. El vot limitat també és força utilitzat en les universitats catalanes i espanyoles, en les seves eleccions al claustre. En aquest cas el nombre màxim de candidats que pot aprovar un elector se sol reduir respecte al nombre de representants a escollir per un factor que val entre $2/3$ i $3/4$. Un altre cas real on s'usa el vot limitat són les eleccions al Parlament de Gibraltar. En elles s'elegeixen habitualment 17 representants i el vot està limitat a marcar un màxim de 10 candidats.

Com afectaria el vot limitat a l'exemple (1)? Suposem que limitem el vot a un màxim de 4 candidats. En aquest cas és raonable imaginar que la votació prengui la forma següent:

$$57 \text{ a b c d}; \quad 32 \text{ g h i j}; \quad 11 \text{ m n o p}. \quad (2)$$

A partir d'aquí, la regla dels més votats dona un resultat de la forma **a b c d g h**, en la proporció 4:2:0, la qual ja hem dit més amunt que sembla prou raonable.

A la pràctica sol passar com en aquest exemple: El sector més majoritari obté tants escons com candidats es poden aprovar, i el segon sector més majoritari n'obté la resta. La terminologia de fa un segle es referia a aquells primers escons com 'escons de majoria' i a la resta com 'escons de minoria' (tot i que de fet anaven a parar al segon sector més majoritari).

Dit això, els 57 electors del primer sector poden optar per posar-se d'acord en reorganitzar els seus vots de la manera següent (que ja no té la forma de llistes tancades):

$$19 \text{ a b c d}; \quad 19 \text{ c d e f}; \quad 19 \text{ e f a b}; \quad 32 \text{ g h i j}; \quad 11 \text{ m n o p}. \quad (3)$$

Com es pot comprovar, d'aquesta manera els 6 candidats del primer sector obtenen tots ells 38 vots, per sobre de qualsevol altre candidat. Per tant, la regla dels més votats torna a donar tots els escons al primer sector (!) fent inútil l'intent de corregir-ho mitjançant el vot limitat.

La possibilitat d'estratègies d'aquest tipus ja va ser assenyalada el 1861 per Catherine Spence [28, p. 23–24].

Catherine Helen Spence (Melrose, Escòcia, 1825 – Norwood, Austràlia Meridional, 1910). Escriptora i activista. Va ser una gran defensora de la representació proporcional (mitjançant els procediments de vot únic transferible) i dels drets polítics de les dones, aconseguint que el seu país d'adopció fes importants progressos en aquests dos fronts.

Tals estratègies no són una mera possibilitat teòrica, sinó que també s'han dut a terme a la pràctica [18, p. 225]. Unes vegades han estat exitoses i altres vegades no, ja que sempre comporten una disminució del nombre de vots —en aquest cas de 57 a 38— i un error en les previsions pot comportar que els candidats en qüestió deixin de ser els més votats.

Veiem doncs que *el vot limitat tampoc aconsegueix un conjunt realment representatiu*.

3 Llistes tancades: Regles de repartiment enter

Gramaticalment, les llistes tancades són el cas contrari a les llistes obertes. Des d'un punt de vista matemàtic, però, en són un cas particular. En efecte, i tal com ja hem dit, si cada elector pot triar els candidats que vulgui, no es pot excloure la possibilitat que tots ells votin com si s'haguessin plantejat unes llistes tancades.

A diferència del cas general, aquest cas particular es presta especialment a pensar en termes de proporcionalitat: Idealment, cada llista hauria de rebre un nombre d'escons proporcional al nombre de vots obtinguts. En general, això no és pot complir exactament, ja que els nombres d'escons han de ser enters i molt més petits que els nombres de vots. Aquest problema ha portat a idear diverses regles, que anomenem de **repartiment enter**, les quals procuren (cadascuna a la seva manera) repartir els escons d'una manera “tan proporcional com es pugui” al nombre de vots.

Convé, doncs, tenir presents aquestes regles per veure si poden ser esteses al cas general de llistes obertes. A continuació en fem un resum, tot referint a [15] per més detalls. En el que segueix v_i i n_i representen respectivament el

nombre de vots obtinguts per la llista i i el nombre d'escons que li assignem; els nombres totals de vots i escons els denotem v_+ i n_+ .

Considerem novament l'exemple (1), on recordem que l'objectiu és elegir 6 representants. Els candidats d'una mateixa llista tenen tots ells els mateixos mèrits. Per tant, només es tracta de decidir quants escons assignem a cada llista. Després ja es veurà si els representants concrets es trien per sorteig o bé segons un ordre de preferència preestablert.

Si els nombres que cerquem no haguessin de ser enters, llavors es podria assolir una proporcionalitat exacta: Com que hi ha un total de $v_+ = 100$ vots i $n_+ = 6$ escons, toca a $n_+/v_+ = 6/100$ escons per vot. Aplicant aquest factor als nombres de vots de cada llista, a saber, 57, 32, 11 vots, obtenim que la proporcionalitat exacta demanaria respectivament 3.42, 1.92, 0.66 escons.

En lloc del quocient n_+/v_+ sovint es considera el seu invers v_+/n_+ , el qual es pot veure som el “preu” en vots que hauria de costar cada escó. Aquest valor rep el nom de **quota** (simple o de Hare).

Geomètricament, la proporcionalitat entre dues variables es realitza mitjançant una recta que passa per l'origen. En el cas que ens ocupa, es tracta de la recta $n = (6/100)v$, on v i n representen respectivament les variables ‘nombre de vots’ i ‘nombre d'escons’, les quals posem respectivament en direcció horitzontal i vertical (figura 2). Els nombres fraccionaris que hem obtingut en el paràgraf precedent són les ordenades dels punts on aquesta **recta de proporcionalitat exacta** talla les rectes verticals $v = 57$, $v = 32$ i $v = 11$.

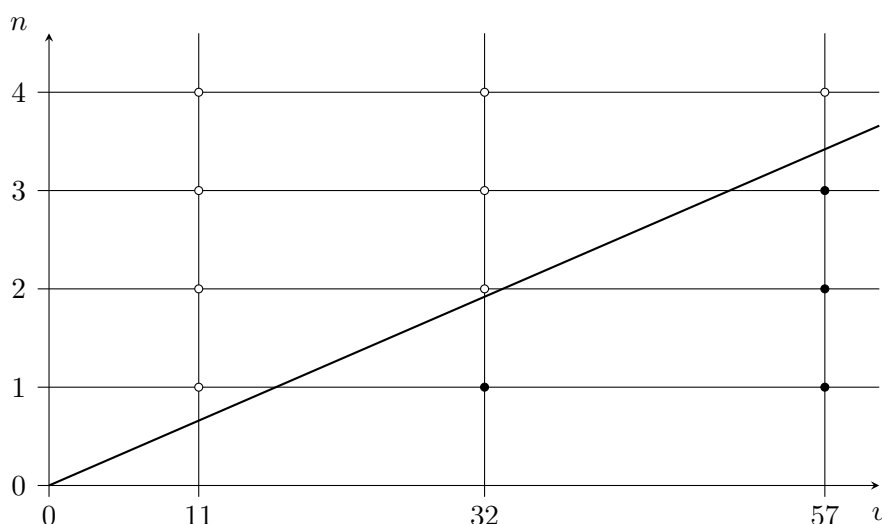


Figura 2: La recta de proporcionalitat exacta $n = n_+v/v_+$

En lloc d'aquests tres punts amb ordenada fraccionària, en voldríem uns altres amb les mateixes abscisses però ordenades enteres, sense oblidar que

aquestes ordenades han de sumar 6; en algun sentit els punts en qüestió haurien de ser tan propers com es pugui a la recta de proporcionalitat exacta.

3.1 La regla de les restes majors

Segurament la regla de repartiment enter més natural és la de les restes majors. Entre altres autors, és proposada ja per Borély (1870) [1].

Aquesta regla parteix dels nombres fraccionaris obtinguts més amunt (3.42, 1.92, 0.66). D'entrada, cada llista rep tants escons com diu la part entera corresponent. En aquest cas, serien respectivament (3, 1, 0) escons. Fet això, es consideren les parts fraccionàries (que són les *restes* de dividir els nombres de vots per la quota simple $100/6$) i les més grans es converteixen en un escó addicional per a la llista corresponent fins a arribar a repartir tots els escons. En el nostre cas, aquests escons addicionals són 2 i van a parar respectivament a la segona llista, que té una resta de 0.92, i a la tercera, que té una resta de 0.66. El repartiment final és doncs de (3, 2, 1) escons.

Gràficament (figura 3) aquest procediment correspon a prendre la recta de proporcionalitat exacta i desplaçar-la cap amunt —tot mantenint el seu pendent, que val $n_+/v_+ = 6/100$ — fins que les ordenades corresponents als nombres de vots, tinguin unes parts enteres que sumin el nombre d'escons a repartir. Aquestes parts enteres són els nombres d'escons que rep cada llista.

Els nombres d'escons venen donats doncs per una fórmula del tipus

$$n_i = \lfloor n_+ v_i / v_+ + c \rfloor, \quad (4)$$

(on $\lfloor x \rfloor$ designa la part entera d'un nombre real x) amb el paràmetre c ajustat de manera que els nombres d'escons n_i sumin el total donat n_+ .

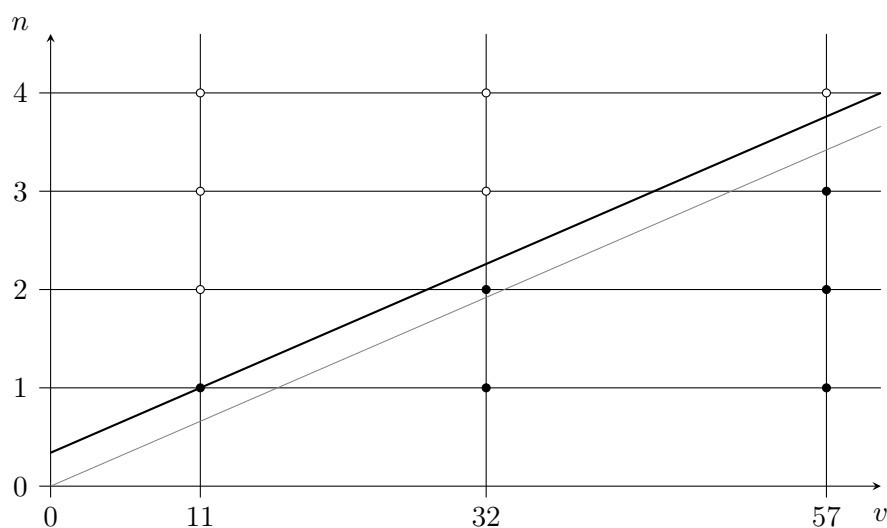


Figura 3: Recta de les restes majors comparada amb la de proporcionalitat exacta

3.2 La regla de D'Hondt

La proposta inicial de Victor D'Hondt per al cas de llistes tancades, formulada en el seu primer llibre, de 1878 [3], no era altra que aplicar la regla de les restes majors. Tanmateix, i segons explica ell mateix en el seu segon llibre, de 1882 [4, p. 14–17], l'advocat Charles DeBrouwer el va convèncer de fer un canvi. En termes geomètrics, els nombres d'escons se segueixen obtenint mitjançant una recta i un arrodoniment per defecte. Però en lloc de considerar una recta del mateix pendent que la recta de proporcionalitat exacta i augmentar l'ordenada de la seva intersecció amb l'eix vertical $v = 0$, ara fixem que la recta passi per l'origen i el que augmentem és el seu pendent. Com abans, aquest augment es limita al que calgui per a repartir tots els escons i no cap més (figura 4).

Denotant per v_i i n_i els nombres de vots i escons de la llista aquesta regla té la forma

$$n_i = \lfloor m v_i \rfloor, \quad (5)$$

on m és superior o igual al pendent n_+/v_+ de la recta de proporcionalitat exacta. En lloc del paràmetre m , sovint es treballa amb el seu invers $D = 1/m$, el qual s'anomena **divisor de D'Hondt**. La fórmula precedent pren llavors la forma $n_i = \lfloor v_i/D \rfloor$, on el divisor D ha de ser ajustat de manera que els nombres n_i sumin el total donat n_+ .

Com a argument per a preferir la nova regla a la de les restes majors, D'Hondt dona un exemple on una llista té una majoria absoluta de vots però la regla de les restes majors no li dona una majoria absoluta d'escons. Amb la regla de D'Hondt això no pot passar, si més no quan el nombre d'escons és senar; quan és parell, llavors només es pot garantir que aquesta llista rebrà almenys la meitat dels escons. Aquests fets es poden demostrar fàcilment com a conseqüència de [15, Prop. 3.1] de manera similar al raonament que farem a § 5.3.2.

Tot sovint, la regla de D'Hondt es formula d'una altra manera aparentment molt diferent: Els nombres de vots de les diferents llistes es divideixen per $k = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$; dels quocients resultants se'n seleccionen els més grans, tants com escons hi ha a repartir, i cada llista rep tants escons com vegades ha entrat en aquest conjunt de quocients més grans.

Malgrat l'aparença tant diferent, aquest algorisme és equivalent a la formulació geomètrica precedent. En efecte, aquesta considera una recta de la forma $n = m v$ seguida d'un arrodoniment per defecte, amb un pendent m que faci que els nombres d'escons sumin n_+ . Tot i que ja sabem que caldrà un pendent superior al de la proporcionalitat exacta, també podem començar a augmentar m des de 0. El nombre escons repartits augmentarà en una unitat cada vegada que la recta de pendent creixent creui un punt de la forma (v_i, k) amb k enter positiu. Això passarà per a $m = k/v_i$, moment en el qual la llista i guanyarà el k -èsim escó. Per tant, el que comptarà seran els n_+ valors més petits d'aquests quocients, o equivalentment, els n_+ valors

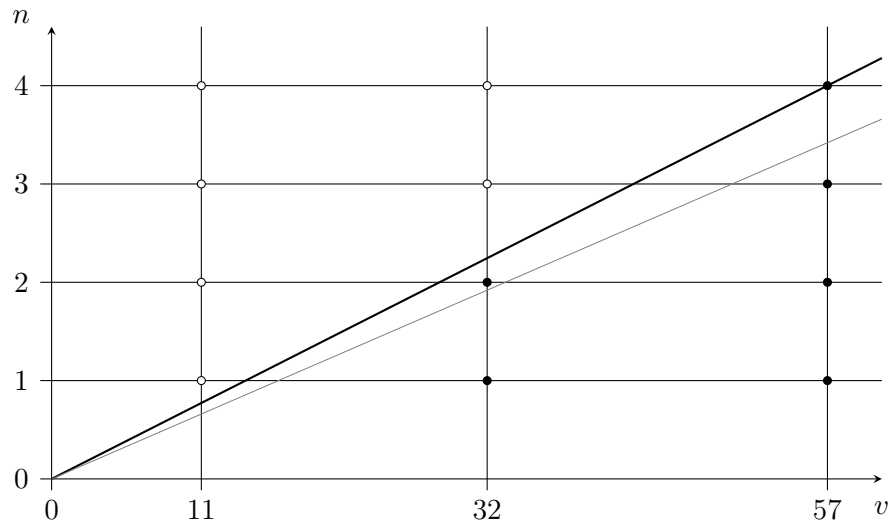


Figura 4: Recta de D'Hondt comparada amb la de proporcionalitat exacta

més grans dels seus inversos. Hem arribat, doncs, a l'algorisme esmentat més amunt.

Dit això, aquest algorisme no és gaire eficient, ja que comença des de $m = 0$ quan sabem que caldrà arribar almenys a n_+/v_+ . De fet, es pot veure que sempre hi ha la possibilitat de prendre com a m un valor superior o igual a $(n_+ + 1)/v_+$ (vegi's l'[apartat 3.4](#)). En general, sobretot quan hi ha molts escons a repartir, la manera més eficient d'aplicar la regla de D'Hondt és utilitzar la fórmula (5) tot ajustant el valor de $m \geq (n_+ + 1)/v_+$ fins que els nombres d'escons resultants sumin el total requerit n_+ . O en termes del divisor D , utilitzar la fórmula $n_i = \lfloor v_i/D \rfloor$ i ajustar el valor de $D \leq v_+/(n_+ + 1)$ fins a assolir el total requerit.

Així, per a repartir $n_+ = 6$ escons en l'exemple (1) començaríem per $D = 100/7 = 14.3$. Per a aquest valor, la fórmula dona com a resultat (3, 2, 0) escons. Com que la suma no arriba a 6, cal disminuir D . Si provem amb $D = 14$, llavors obtenim (4, 2, 0) escons, que sí que sumen 6, de manera que ja tenim el resultat.

3.3 La regla de Sainte-Laguë i el punt de vista d'optimització

Tot i que la regla de D'Hondt utilitza una recta que passa per l'origen, després fa una operació d'arrodoniment que fàcilment comportarà una desviació respecte a la proporcionalitat exacta. D'altra banda, el fet que aquest arrodoniment sigui sempre per defecte sembla un tant biaixat. En relació amb això, sembla més equilibrada una fórmula del tipus

$$n_i = \lfloor m v_i \rfloor, \quad (6)$$

on la notació $\lfloor x \rfloor$ —noti's la diferència respecte a (4) o (5)— vol dir l'arrodoniment de x a l'enter més proper; en el cas $x = p + 1/2$ amb p enter —altament improbable a la pràctica en el context de (6)— llavors entendrem que són admissibles els dos valors p i $p + 1$. Similarment a la regla de D'Hondt, es tracta de trobar un valor de m que faci que la suma dels nombres (6) coincideixi amb n_+ .

Aquesta és la **regla de Sainte-Laguë**, anomenada així pel matemàtic francès André Sainte-Laguë, que la va proposar el 1910 [27]. També aquí, en lloc de m s'acostuma a especificar el seu invers $D = 1/m$, el qual s'anomena **divisor de Sainte-Laguë**.

A diferència de la regla de D'Hondt, ara tant pot passar que m hagi de ser superior al valor de la proporcionalitat exacta, com que hagi de ser inferior. D'altra banda, si fem créixer m des de 0 fins a repartir n_+ escons, ara, amb l'arrodoniment a l'enter més proper, el nombre escons repartits augmentarà en una unitat cada vegada que la recta de pendent creixent creui un punt de la forma $(v_i, k - 1/2)$ amb k enter positiu. Això condueix a l'algorisme següent: Els nombres de vots de les diferents llistes es divideixen per $1/2, 3/2, 5/2, 7/2, \dots$; dels quocients resultants se'n seleccionen els més grans, tants com escons hi ha a repartir, i cada llista rep tants escons com vegades ha entrat en aquest conjunt de quocients més grans. Òbviament, en lloc de dividir per $1/2, 3/2, 5/2, 7/2, \dots$ és equivalent dividir per $1, 3, 5, 7, \dots$

També aquí, a la pràctica és més eficient utilitzar la fórmula (6) i ajustar m de manera que els nombres d'escons resultants sumin el total requerit n_+ . Més concretament, es pot començar amb $m = n_+/v_+$ i anar augmentant o disminuint el seu valor segons que el nombre total d'escons sigui respectivament inferior o superior a n_+ .

En el cas de l'exemple (1) ja serveix el valor $m = n_+/v_+ = 6/100$. I el repartiment resultant és (3, 2, 1) (que en aquest cas coincideix amb el de les restes majors).

Notablement, Sainte-Laguë va demostrar que el repartiment que resulta d'aquesta regla té la virtut de minimitzar la següent quantitat, la qual es pot veure com una mesura de la desproporció entre vots obtinguts i escons assignats per a les diferents llistes:

$$B = \frac{v}{n} \left(\sum_i \frac{v_i}{v} \left(\frac{n_i}{v_i} - \frac{n}{v} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Per més detalls referim el lector a [17], on es mostra que les regles de les restes majors i de D'Hondt també tenen la propietat de minimitzar certes mesures alternatives de les desproporcions entre vots i escons.

3.4 La quota de Droop i Hagenbach-Bischoff i la versió corresponent de la regla de les restes majors

Més amunt hem parlat de la proporcionalitat “exacta” $n_i = v_i n_+ / v_+$ i després hem abordat el problema que en realitat volem que els n_i siguin enters. Una altra manera de fer consisteix en tenir en compte des del principi que el que estem repartint no és infinitament divisible, sinó que es tracta de n_+ unitats indivisibles.

Tal com van observar Henry R. Droop (1868) [7] i Eduard Hagenbach-Bischoff (1888) [12], aquest fet porta a revisar el valor de la quota, és a dir, el nombre de vots que dona dret a un escó. Més concretament, en lloc del quocient $q_H = v_+ / n_+$, que té aquest significat en la proporcionalitat exacta, té sentit considerar el quocient més petit $q_D = v_+ / (n_+ + 1)$, que anomenarem **quota de Droop**. En efecte, malgrat ser més petita, *aquesta quota no dona mai més de n_+ escons, llevat de certs casos d’empat altament improbables*.

Perquè donés més de n_+ escons, llavors n’hauria de donar almenys $n_+ + 1$; com que cada candidat requereix almenys $q_D = v_+ / (n_+ + 1)$ vots, aquests $n_+ + 1$ candidats reunirien almenys $(n_+ + 1) q_D = v_+$ vots; però el nombre total de vots és precisament v_+ ; per tant, l’única possibilitat és el cas extremadament singular que q_D sigui enter i que els v_+ vots estiguin repartits a parts exactament iguals entre $n_+ + 1$ candidats, la qual situació es pot entendre simplement com un empat (molt improbable).

Aquesta observació equival a l’afirmació que hem fet a l’apartat 3.2 que el pendent de la recta de D’Hondt es pot prendre sempre per sobre o igual a $1/q_D = (n_+ + 1)/v_+$; o el que és el mateix, que el divisor de D’Hondt es pot prendre sempre per sota o igual a q_D .

Així doncs, tan bon punt un candidat reuneix q_D vots, ja li podem assignar un escó (llevat que no es pot descartar del tot la possibilitat que alguna vegada calgui aplicar una regla de desempat).

Una altra manera d’entendre-ho és que es tracta de definir quants escons corresponen en funció del nombre de vots, és a dir una funció no decreixent $[0, v_+] \ni v \rightarrow n \in \{0, 1, 2, \dots, n_+\}$. Com que hi ha $n_+ + 1$ resultats possibles, s’imposa de dividir l’interval $[0, v_+]$ en $n_+ + 1$ intervals iguals (de mida q_D) i prendre la funció esglaonada que dona a n el valor enter $k \in \{0, 1, 2, \dots, n_+\}$ en cadascun dels intervals $k q_D < v < (k + 1) q_D$.

En relació amb tot això, no deixa de ser interessant el cas extrem d’elegir un sol representant, és a dir $n_+ = 1$, on la quota de Hare $q_H = v_+$ correspon a requerir unanimitat i la quota de Droop $q_D = v_+ / 2$ correspon a requerir només majoria absoluta, d’acord amb la manera de fer habitual.

Si acceptem la quota de Droop com el nombre de vots que dona dret a un escó, llavors és raonable procedir de manera anàloga a la regla de les restes majors: dividim els nombres de vots per la quota de Droop, assignem a cada sector tants escons com digui la part entera, i els possibles escons que manquen per completar el total donat n_+ els assignem d’acord amb les parts

fraccionàries majors.

Aplicat al nostre exemple (1), amb $n_+ = 6$, aquest procediment dona $q_D = v_+/(n_+ + 1) = 100/7$ i els quocients $v_i/q_D = (3.99, 2.24, 0.77)$, de manera que el repartiment final és $(3, 2, 0) + (1, 0, 0) = (4, 2, 0)$ (que en aquest cas coincideix amb el de D'Hondt).

Als efectes de comparació amb les altres regles, en aquest cas la fórmula per als nombres d'escons és

$$n_i = \lfloor (n_+ + 1) v_i / v_+ + c \rfloor, \quad (8)$$

on, una vegada més, el paràmetre c ha de ser ajustat de manera que la suma dels n_i sigui el total donat n_+ . En aquest cas cal prendre $c = 0.01$, de manera que la recta en qüestió no passa per l'origen però s'hi acosta molt (figura 5).

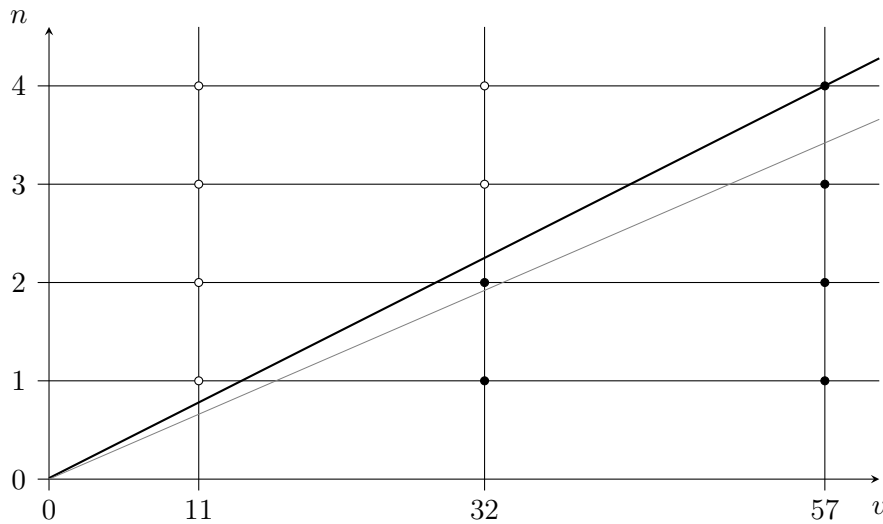


Figura 5: Recta de Droop comparada amb la de proporcionalitat exacta

4 Llistes obertes amb o sense candidatures col·lectives

A la pràctica és relativament freqüent que l'elector tingui llibertat de marcar els candidats que vulgui, però al mateix temps hi hagi unes candidatures col·lectives ben definides. En un escenari d'aquest tipus és natural considerar la proporció en què cada elector està combinant les diferents candidatures col·lectives i utilitzar aquesta informació per a determinar un repartiment entre elles. Fet això, els vots poden ser utilitzats també per a determinar quins candidats concrets són elegits de cada candidatura.

Un procediment d'aquest tipus apareix proposat ja en el treball de Victor D'Hondt de 1878 [3, p. 25–30]. Més concretament, la seva proposta es pot resumir així:

1. Cada butlleta val 1, independentment del nombre de candidats en ella seleccionats.
2. El valor 1 d'una butlleta es divideix a parts iguals entre tots els candidats en ella seleccionats.
3. Aquests valors fraccionaris se sumen per a cada candidatura col·lectiva. A partir dels resultats obtinguts, s'aplica la regla de repartiment enter que s'hagi estipulat, a fi de determinar quants escons són assignats a cada candidatura col·lectiva.
4. Dits valors fraccionaris se sumen també per a cada candidat, la qual informació s'utilitza per a determinar quins candidats concrets són elegits de cada candidatura, a saber, els més votats fins a totalitzar el nombre d'escons assignats a aquella candidatura.
5. Els candidats independents són tractats com si tots ells formessin una candidatura col·lectiva.

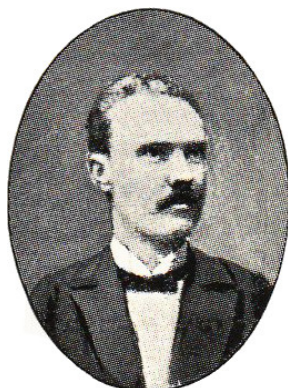
El lector ja haurà apreciat que el punt 4 cau encara en l'error d'utilitzar la regla dels més votats. Aquí potser no és tan greu. Tot depèn de si les candidatures col·lectives són més o menys homogènies. Però si alguna d'elles conté diversos subsectors diferents, llavors estarem donant representació només al més majoritari. Això és especialment rellevant en el cas de la candidatura col·lectiva artificial en què el punt 5 considera agrupats els candidats independents.

Davant d'això, és de notar que *hi ha algorismes que permeten tractar el cas de llistes obertes sense cap necessitat d'una classificació prèvia dels candidats en candidatures col·lectives*. Aquests algorismes es deuen principalment al matemàtic suec Edvard Phragmén, que es va ocupar d'aquest tema a finals del segle XIX i principis del XX.

Els anys 1894–99 aquest autor va desenvolupar un mètode d'aquest tipus que generalitza la regla de D'Hondt. Aquest mètode assigna els escons de manera successiva, elegint cada vegada un candidat que minimitzi les desigualtats en la representació que obtenen els diferents electors: més concretament, elegeix el candidat que fa que la més alta d'aquestes representacions per elector sigui tan baixa com es pugui. Aquest mètode ha estat estudiat a [16], a on remetem per més detalls i per les referències als articles originals.

Tanmateix, el 1906 Phragmén es decantava per un altre mètode, el qual també havia estat proposat més o menys independentment per Gustaf Eneström. Aquest mètode ha estat estudiat a [2], al qual remetem també per les referències als articles i manuscrits originals. La resta del present treball pretén exposar aquest mètode de manera elemental i orientada a la pràctica.

Nota biogràfica

Edvard Phragmén¹

Gustaf Hjalmar Eneström

(Lars) Edvard Phragmén (Örebro, Suècia, 1863 – Estocolm, 1937) va ser un matemàtic suec. El 1883 va ingressar a l'Escola Superior d'Estocolm. Havent estat nomenat secretari de redacció de la revista *Acta Mathematica*, el 1889 va detectar un error important en la memòria “Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique” del prestigiós Henri Poincaré, la qual havia estat guardonada amb un important premi en honor al rei Oskar II de Suècia i Noruega [25].

En el període 1892–95 Phragmén va formar part dels òrgans de govern de l'Escola. Més o menys pel mateix temps es va plantejar el problema de com elegir un òrgan de representació mitjançant llistes obertes. La seva primera proposta que coneixem sobre aquesta qüestió data de març de 1893 i va ser presentada en el marc de l'entitat *Studenter och Arbetare* (Estudiants i Treballadors). Posteriorment va desenvolupar els dos mètodes que hem referit més amunt. Aquí només afegirem que la seva proposta de 1906 responia a una petició del govern de Finlàndia, que llavors estava considerant una reforma del seu sistema electoral.

A partir de 1897 Phragmén es va dedicar també al tema de les assegurances, on va ocupar diversos càrrecs de gestió, tant privats com públics, que el van absorbir cada vegada més, fins al punt que el 1905 va haver de renunciar a la seva plaça de professor a l'Escola Superior.

Gustaf Hjalmar Eneström (Nora, Suècia, 1852 – Estocolm, 1923). Matemàtic i historiador de les matemàtiques. En particular, va catalogar l'obra completa de Leonhard Euler, introduint una numeració que encara s'usa avui dia.

5 El mètode d'Eneström i Phragmén

El mètode d'Eneström i Phragmén és una extensió de la regla de les restes majors al cas de llistes obertes. D'altra banda, es pot veure també com una adaptació del mètode de vot únic transferible al vot d'aprovació (en lloc del vot preferencial).

5.1 Formulació i exemple

Com la regla de les restes majors, el procediment comença per especificar la quota de vots que dona dret a un escó. En relació amb això, nosaltres utilitzarem la quota de Droop $q_D = v_+ / (n_+ + 1)$. A diferència de la quota de Hare, la de Droop té la propietat que si una majoria absoluta d'electors

¹Retrat procedent de l'Institut Mittag-Leffler; fotògraf: Herman Hamnqvist.

aproven un mateix conjunt de candidats, llavors aquest conjunt proporciona una majoria absoluta de representants (vegi's § 5.3.2).

A partir d'aquí, l'elecció dels n_+ candidats que esdevindran representants es fa de manera successiva. En cada pas es procedeix de la manera següent: es designa el candidat que en aquell moment té més vots; aquest és elegit a canvi d'una quota; *aquesta quota es reparteix a parts iguals entre tots els vots que hi ha en aquell moment a favor del candidat en qüestió*; si els vots a favor seu no arriben a una quota, llavors l'elecció es fa a canvi de tots aquests vots.

Suposem, per exemple, que volem elegir $n_+ = 3$ representants d'entre els 9 candidats **a b e f u v x y z** i que els vots són els següents:

$$21 \text{ a b x}; 20 \text{ a b e f}; 19 \text{ e f u v}; 13 \text{ u v}; 10 \text{ x y}; 15 \text{ z}; 2 \text{ a e u}. \quad (9)$$

El nombre total de vots és $v_+ = 100$. La quota de Droop és $q = v_+/(n_++1) = 100/4 = 25$.

Cada candidat i té els vots w_i que s'indiquen tot seguit:

$$\text{a } 43, \text{ b } 41, \text{ e } 41, \text{ f } 39, \text{ u } 34, \text{ v } 32, \text{ x } 31, \text{ y } 10, \text{ z } 15. \quad (10)$$

El que en té més és el candidat **a**, que per tant resulta escollit en primer lloc. Però això es fa a canvi d'una quota, és a dir, 25 vots. Per tant, dels 43 vots que aproven **a** encara en restaran $43/25 = 18$. D'altra banda, tots els vots que aproven **a** han de contribuir per igual a la quota. Per tant, de cadascun d'ells en quedarà la fracció $18/43 = 0.419$. En conseqüència, dels 21 vots **a b x** en quedaran encara $21 \times 18/43 = 8.791$, dels 20 vots **a b e f** en quedaran $20 \times 18/43 = 8.372$, i dels 2 vots **a e u** en quedaran $2 \times 18/43 = 0.837$. Així doncs, resten encara els vots següents:

$$8.791 \text{ a b x}; 8.372 \text{ a b e f}; 19 \text{ e f u v}; 13 \text{ u v}; 10 \text{ x y}; 15 \text{ z}; 0.837 \text{ a e u}. \quad (11)$$

A partir d'aquí es torna a aplicar el mateix procediment: comptar quants vots té cada candidat, elegir el que en té més i descomptar la mateixa fracció en tots els vots que aproven aquest candidat.

No costa gaire de comprovar que tot plegat resulta en l'elecció successiva dels candidats **a u x**. Noti's que aquest conjunt no inclou ni **b** ni **e**, que al principi seguien a **a** com a candidats més votats. L'explicació d'això és que el candidat **b** és aprovat quasibé sempre conjuntament amb **a**. Per tant, si després de **a** elegíssim també **b** estaríem concentrant la representació en un conjunt reduït d'electors. En canvi, el candidat **u** permet donar representació a altres electors que encara no en tenen. Quelcom similar passa després amb el candidat **e**, que sovint acompanya els ja elegits **a** i **u**. En lloc d'ell surt més a compte el candidat **x**.

L'operació de prorratejar la quota entre els vots que inclouen el candidat elegit es troba ja en una proposta feta el 1875 per Luis Vicente Varela, jurista riuplatenc a l'ensens diputat a la província de Buenos Aires [31,

p. 458–460]. A l'any següent aquesta operació va ser incorporada en la llei electoral d'aquesta província [22, vol. 9, p. 151–167, art. 58]. En principi, la llei considerava llistes de partit i aplicava la regla de les restes majors. Tanmateix, les llistes en qüestió també podien incloure candidats independents, els quals, a més, podien aparèixer en diverses llistes diferents. Si els vots a favor d'un d'aquests candidats independents superaven una quota, llavors aquest resultava elegit, i la quota es repartia entre les llistes en qüestió de manera proporcional als vots que tenia cadascuna.

Posteriorment, l'operació de prorratar la quota, o equivalentment els excedents, es va introduir també en el vot únic transferible (amb vots preferencials en lloc de vots d'aprovació). En aquest context, va ser proposada vers 1880 a l'estat australià de Victoria per l'advocat John Burslem Gregory, i de manera independent, vers 1896 a l'estat d'Austràlia Meridional per la mestra Annie Montgomerie Martin. Vegi's [29, p. 19–20].

5.2 Casos especials

5.2.1 Llistes tancades.

Tal com hem vingut dient des del principi, formalment les llistes tancades es poden considerar com un cas particular de les llistes obertes. *En aquest cas, el procediment d'Eneström-Phragmén es redueix a la regla de les restes majors amb la quota de Droop (§ 3.4) [2, Prop. 1.2].*

5.2.2 Vot únic no transferible.

Un altre cas particular és el del vot únic *no* transferible. En principi, aquesta denominació designa el cas extrem de vot limitat en què no es permet a l'elector aprovar més que un sol candidat. En general, però, no es pot descartar la possibilitat que els electors votin així encara que no hi hagi tal limitació. De seguida es veu que *el procediment d'Eneström-Phragmén es redueix llavors a la regla dels més votats*.

Certament, una situació d'aquest tipus no és pas desitjable des del punt de vista de la representació proporcional. Tanmateix, és previsible que a la pràctica els electors tendeixin a aprovar més d'un candidat. En efecte, si pertanyen a un sector minoritari, es veuran conduïts a complementar el seu candidat ideal amb altres alternatives que tinguin més possibilitats. I si pertanyen a un sector majoritari, llavors tendiran a incloure més candidats per tal d'aconseguir més representants.

En general, és preferible no imposar cap limitació al nombre de candidats que pot aprovar un elector. Com més opcions doni un elector, més possibilitats hi ha de donar-li representació.

5.3 Més propietats

5.3.1 Una propietat de proporcionalitat.

A continuació considerem la següent situació, que generalitza el cas de llistes tancades: Uns quants electors aproven exactament el mateix conjunt J de candidats; els altres aproven altres conjunts (no necessàriament disjunts de J). En aquesta situació es compleix la següent propietat de *proporcionalitat entre vots i escons*: Si el nombre d'electors que aproven exactament J supera ℓq , on q és la quota i ℓ un nombre enter, llavors el conjunt J proporciona almenys ℓ representants (sempre que J contingui tal nombre de candidats).

Siguin v_J i n_J respectivament el nombre de vots que aproven exactament el conjunt J i el nombre de membres de J que són elegits representants. El que estem afirmant és que si $v_J > \ell q$, i J conté almenys ℓ elements, llavors $n_J \geq \ell$.

Si tots els escons s'assignen a canvi d'una quota sencera, llavors aquesta afirmació es pot demostrar de la manera següent:

Siguin $\tilde{v}_+$ el nombre de vots que resten després d'haver assignat tots els escons, i $\tilde{v}_J$ el nombre d'ells que aproven exactament el conjunt J . Òbviament, $\tilde{v}_J < \tilde{v}_+$. Com que cada escó s'ha donat a canvi d'una quota sencera, i v_+ és igual a $n_+ + 1$ quotes (de Droop), tenim que $\tilde{v}_+ = q$. D'altra banda, com que els membres de J també poden rebre aprovacions per part d'altres electors a més dels v_J que estem considerant, els $n_J q$ vots que s'han traduït en els n_J escons assignats a J poden provenir en part d'aquests altres electors. Per tant, tenim la desigualtat $\tilde{v}_J \geq v_J - n_J q$. Si afegim la hipòtesi que $v_J > \ell q$, tot plegat tenim que

$$(\ell - n_J)q < v_J - n_J q \leq \tilde{v}_J \leq \tilde{v}_+ = q, \quad (12)$$

d'on es dedueix que $n_J > \ell - 1$, és a dir $n_J \geq \ell$.

En el cas que no tots els escons s'assignin a canvi de quotes senceres, encara es pot demostrar que J en rep almenys ℓ a canvi de quotes senceres. [2, Teorema 2.1].

5.3.2 Conservació de la majoria absoluta.

De la propietat precedent se'n dedueix la següent: *Si una majoria absoluta d'electors aprova exactament el conjunt J , i n_+ és senar, llavors els representants procedents de J són també una majoria absoluta.*

En efecte, estem suposant que $v_J > v_+/2 = q(n_+ + 1)/2$, d'on el resultat precedent amb $\ell = (n_+ + 1)/2$ garanteix que $n_J \geq (n_+ + 1)/2 > n_+/2$.

Similarment, podem veure que si n_+ és parell i almenys la meitat dels electors aprova exactament el conjunt J , llavors els representants procedents de J són també almenys la meitat.

En efecte, ara podem partir de la hipòtesi que $v_J \geq v_+/2 = q(n_+ + 1)/2 > q n_+/2$, d'on el resultat precedent amb $\ell = n_+/2$ garanteix que $n_J \geq n_+/2$.

És de notar que aquestes propietats no estan garantides si s'usa la quota de Hare en lloc de la de Droop.

5.3.3 Efecte d'un suport augmentat.

Suposem que algun elector repensa el seu vot en el sentit següent: inicialment no aprovava el candidat x , però ara sí. No costa gaire de veure que si no hi ha cap altre canvi i inicialment el candidat x resultava elegit, llavors també resultarà elegit després d'aquesta variació.

El que no es pot assegurar, però, és que els altres candidats elegits siguin els mateixos. Perquè en el moment que s'elegeix x ara sobra un vot més que abans, la qual cosa beneficia els candidats que acompanyen x , fent que ara pugui obtenir un escó un candidat que abans no hi arribava.

5.4 També a tenir en compte

5.4.1 Rebaixes.

De la mateixa manera que passa amb la regla de les restes majors, els darrers escons poden ser assignats a canvi d'un nombre de vots inferior a una quota. Això pot passar des del principi si hi ha un nombre molt elevat de candidats. Una altra possible causa és que els electors aprovin pocs candidats, la qual cosa pot comportar que després d'assignar uns pocs escons els excedents ja no continguin cap candidat.

En relació amb això, Phragmén proposava fixar una quantitat mínima de vots, per exemple mitja quota, com a requisit per a rebre un escó. Si es fa així, llavors el procediment pot finalitzar sense haver assignat tots els escons.

Noti's que aquesta possibilitat és del tot inevitable si entre tots els vots no s'arriben a esmentar n_+ candidats; en particular, cal que hi hagi almenys aquest nombre de candidats.

5.4.2 Provisió de substituïts.

Suposem que un cert candidat x és elegit, però al cap d'un temps deixa d'estar disponible. Quin altre candidat y cal posar en el seu lloc? Per mantenir la representativitat del conjunt elegit caldria que y donés representació als mateixos electors que x .

En el cas de llistes tancades, la solució és òbvia: elegir un altre candidat de la mateixa llista que x , o bé fer ús dels suplents que sovint s'especifiquen com a tals quan s'inscriu la candidatura.

En el cas que ens ocupa de llistes obertes en general no és tan fàcil. Tanmateix, amb el mètode d'Eneström-Phragmén resulta natural començar per reintegrar els vots que es van utilitzar per a elegir x i fet això tornar a aplicar el procediment per a elegir un nou representant. Els càlculs no són

complicats però requereixen haver guardat les dades dels vots inicials (i de les possibles anteriors provisions de substituïts).

Aquesta idea ja va ser proposada el 1881 per Droop en el context del vot únic transferible [8, p. 194]

6 Un experiment amb dades reals

El mètode d'Eneström-Phragmén ha estat assajat amb les dades de les eleccions al claustre de la Universitat Autònoma de Barcelona que es van celebrar el 17 i 18 de març de 2021. Òbviament, per a poder fer tal assaig no n'hi ha prou amb saber els nombres de vots obtinguts per cada candidat, sinó que cal conèixer el contingut complet dels vots. Aquestes dades ens han estat facilitades per la Secretaria General de la Universitat Autònoma de Barcelona, i per la seva Oficina de Coordinació Institucional, a les quals agraïm la seva col·laboració.

Tal com resumeix la taula 1, en general el conjunt de representants elegits varia relativament poc respecte a la regla vigent dels més votats. Tanmateix en alguns casos hi ha una variació més significativa, en aquest conjunt i per tant en la seva representativitat.

Taula 1

<i>Canvis</i>	<i>En quantes circumscripcions es produeixen tants canvis</i>
–	19 (circumscripcions on els representants elegits no depenen del mètode utilitzat, ja que el nombre de candidats era inferior o igual al nombre d'escons)
0	12 (circumscripcions on no es produeix cap canvi, tot i que el nombre de candidats era superior al nombre d'escons; tenen 1–8 escons)
1	6 (tenen 5–7 escons)
2	4 (tenen 6–12 escons)
3	1 (té 14 escons)
6	1 (té 16 escons)

A continuació examinem de més a prop la circumscripció de 16 escons on es produeixen 6 canvis. En la taula 2 apareixen tots els candidats ordenats segons el nombre de vots obtinguts, així com aquest nombre de vots, l'assignació successiva d'escons segons el mètode vigent (regla dels més votats) i l'assignació successiva d'escons segons el mètode d'Eneström i Phragmén.

Cada candidat té un codi diferent. L'últim caràcter d'aquest codi és algun dels següents: 0, 1, 2, 5, A. El codi 0 indica que el candidat en qüestió es presentava a títol individual. Els altres quatre codis corresponen a quatre

candidatures collectives.

Taula 2

<i>Candidat</i>	<i>Vots</i>	<i>Vigent</i>	<i>E-Ph</i>
aa2	226	1	1
n2	222	2	2
e2	172	3	4
u2	170	4	6
x2	167	5	8
af2	163	6	11
i2	160	7	14
y2	159	8	
ac2	159	9	
o2	157	10	
s1	153	11	3
h1	148	12	5
ah1	147	13	7
b2	144	14	
c2	144	15	
ae2	138	16	
f2	134		
j2	134		
p2	134		
z1	116		12
ad1	115		
d1	114		
l1	113		
m1	113		15
k5	109		10
aA	100		9
rA	90		13
qA	81		
w5	77		
abA	64		16
vA	58		
t0	55		
gA	55		
ag0	47		

Com es pot veure, el mètode vigent va elegir 13 membres de la candidatura 2 i 3 de la candidatura 1. En canvi, el mètode d'Eneström-Phragmén

hauria elegit 7 membres de la candidatura 2, 5 de la candidatura 1, 3 de la candidatura A, i 1 de la candidatura 5.

Aquests últims resultats respecten més les proporcions entre candidatures que deixen entreveure els nombres de vots. Per exemple, la mitjana de vots obtinguts pels membres de la candidatura 2 és 161.4, mentre que en la candidatura 1 és 127.4; la raó entre aquests dos nombres de vots és $127.4/161.4 = 0.79$; amb el mètode vigent la raó entre els corresponents nombres d'escons és $3/13 = 0.23$; en canvi, amb el mètode d'Eneström-Phragmén és $5/7 = 0.71$, molt més propera a la raó de vots.

Similarment, la raó entre les mitjanes de vots obtinguts per les candidatures A i 2 és $74.7/161.4 = 0.46$, la qual s'assembla molt més a la corresponent raó d'escons $3/7 = 0.43$ del mètode d'Eneström-Phragmén que als $0/13 = 0.00$ del mètode vigent.

Així doncs, el mètode d'Eneström-Phragmén sembla efectivament molt més proporcional que la regla vigent dels més votats.

També és interessant observar l'ordre en què el mètode d'Eneström-Phragmén va assignant els escons, que ve a ser una mena de cremallera per anar atenent les diferents candidatures col·lectives.

Notablement, el mètode d'Eneström-Phragmén fa tot això *sense conèixer en cap manera l'agrupació dels candidats en candidatures col·lectives* (la qual informació nosaltres sí que estem utilitzant en l'anàlisi precedent).

7 Des del punt de vista de l'anàlisi de dades

Segons les dades de la taula 2, els diversos membres d'una mateixa candidatura no tenen el mateix nombre de vots. Per tant, els electors no estan votant exactament en el format de llistes tancades. De fet, si examinem els vots reals, com en la taula 3, que en mostra uns quants seleccionats a l'atzar, veiem que algun elector sí que aprova exactament tots els membres d'una mateixa candidatura, però la major part d'ells barregen diverses candidatures diferents.

Encara que no existeixi, o no es conegui, una agrupació dels candidats en candidatures col·lectives, *els vots permeten detectar i quantificar les similituds entre candidats*. Per exemple, donats dos candidats, podem mirar amb quina freqüència l'aprovació d'un d'ells comporta l'aprovació de l'altre; aquesta freqüència ve donada pel quocient del nombre d'electors que aproven tots dos candidats dividit pel nombre d'electors que n'aproven almenys un d'ells. Aquesta fracció es pot prendre de manera natural com una mesura de la similitud entre els dos candidats.

Fent això en l'elecció que estem considerant, on hi va haver 465 vots, obtenim, per exemple, que els candidats c2 i p2 s'assemblen un 75.6%, i els candidats d1 i l1 un 71.2%. En canvi, p2 i l1 només s'assemblen un 2.1%.

Taula 3: Uns quants vots

n2 rA u2 x2 k5
h1 n2
k5 w5 af2 ad1 u2 s1 n2 h1 z1 ah1 ag0
f2 n2 qA aa2
u2 s1
gA h1 n2 qA rA af2 ah1
ah1 t0 s1
d1 h1 l1 m1 s1 z1 ad1 ah1
n2 rA s1 t0 u2 aa2 abA af2 ah1 ae2 m1
f2 x2 af2 ah1 b2 t0 k5
b2 c2 e2 f2 i2 j2 n2 o2 p2 u2 x2 y2 aa2 ac2 af2 ae2
aA gA p2 qA rA vA abA ag0 n2 x2 y2 aa2 b2 c2 e2 f2
d1 k5 m1 qA s1 t0 ad1 ag0 ah1
aA b2 h1 n2 o2
gA m1 s1 aa2 h1 d1 l1 z1 ad1 ah1
b2 e2 i2 s1 w5 ag0 ah1 c2 d1 ad1 ae2 af2 ac2 abA z1 x2
b2 c2 e2 f2 i2 j2 n2 o2 p2 u2 x2 y2 aa2 ac2 ae2 af2
b2 ac2 ae2
qA t0 aA gA
h1 k5 qA rA vA w5 y2
k5 w5 u2
b2 c2 e2 f2 i2 j2 n2 o2 p2 u2 x2 y2 s1 aa2 ae2 ah1
aA o2 qA vA rA
aA rA n2
d1 h1 l1 m1 s1 ah1 ad1 z1
d1 h1 l1 m1 s1 w5 ad1 ah1 z1 k5
aA e2 gA i2 n2 o2 aa2 abA ac2 ag0
aA f2 gA h1 l1 n2 qA rA t0 w5 aa2 ac2 ah1 m1 s1 ag0

Si fem el mateix amb totes les parelles possibles de candidats obtenim una taula de similituds que pot ser tractada mitjançant les tècniques de la **taxonomia numèrica**, també anomenada anàlisi de clústers. Aquestes tècniques revisen els valors dels graus de similitud o dissimilitud, per tal que siguin coherents, i donen com a resultat una **classificació jeràrquica** de tots els candidats, és a dir una classificació més o menys fina segons el grau de similitud on posem el límit entre una mateixa classe i dues classes diferents. Tal classificació se sol representar gràficament mitjançant un **dendrograma**, com el de la figura 6, que correspon al cas que estem considerant.

Donats dos candidats, el grau (revisat) de dissimilitud entre ells el dona el nivell al qual cal arribar per a connectar aquests dos candidats mitjançant un camí sobre l'“arbre” (invertit) de línies negres. El nivell en qüestió es pot llegir a l'escala de l'esquerra. Així, per exemple, la dissimilitud (revisada) entre c2 i p2 seria aproximadament 0.18, entre d1 i l1 0.25, i entre p2 i l1 1.00.

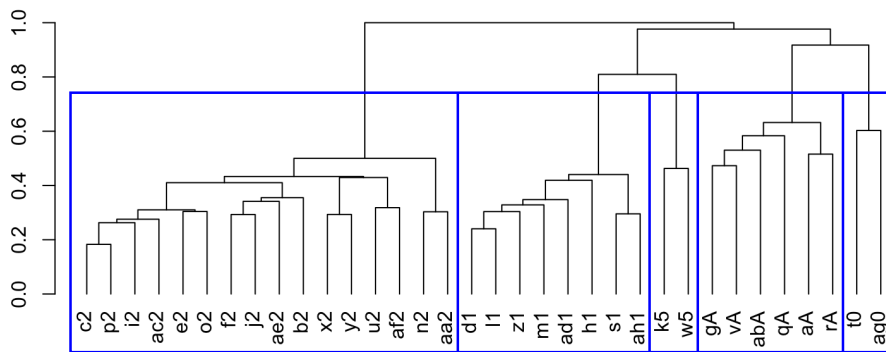


Figura 6: Classificació jeràrquica dels candidats segons la informació proporcionada pels vots. Obtinguda mitjançant R [24] (versió 4.4.3) i la seva funció `dist` amb l'opció `method="binary"` seguida de `hclust` amb l'opció `method="complete"` i finalment la funció `dendsort::dendsort` de [26].

Com es pot veure en la figura 6, si ens situem al nivell 0.73, i considerem que dos candidats pertanyen a la mateixa classe si i només si la seva dissimilitud és inferior a aquest valor, llavors les classes que obtenim són exactament les quatre candidatures col·lectives existents més una classe addicional formada pels dos candidats individuals.

Així doncs, encara que ometem la informació sobre l'agrupació dels candidats en candidatures col·lectives, *el contingut dels vots encara permet agrupar els candidats segons la similitud entre ells* (possiblement recuperant la informació omesa).

El procediment d'Eneström-Phragmén utilitza aquest tipus d'informació quan redueix el valor dels vots que s'han utilitzat per elegir un candidat, ja que això afecta negativament als candidats que l'acompanyen més sovint, és a dir, als candidats més similars a ell.

De la mateixa manera que permeten detectar similituds entre candidats pel fet de compartir més o menys electors, *els vots també permeten detectar similituds entre electors* pel fet de compartir més o menys candidats en els seus vots.

Segons hem vist, les classes de similitud de candidats estan determinades cadascuna pel fet que els seus membres comparteixen en certa mesura els mateixos electors. Per tant, per a cada classe de candidats podem parlar, en certa mesura, del conjunt dels *seus* electors. I segons el que hem dit, aquests electors acostumen a tenir en comú que aproven els candidats de la classe en qüestió. Per tant, si aquesta classe és prou nombrosa, els seus electors fàcilment seran classificats com a similars.

O sigui, que els vots permeten classificar tant candidats com electors, i ambdues classificacions estan relacionades entre si. En relació amb això sovint s'utilitza el terme **biclassificació**. Aquest aspecte és il·lustrat en la figura 7, on està representada una matriu de 34 columnes (els candidats) i 465 files (els electors, que no estan retolats tots). Cada casella està emplenada de color fosc si aquell elector aprova aquell candidat; en cas contrari, està de color clar. A dalt es mostra el dendrograma de classificació dels candidats i a l'esquerra el dels electors.

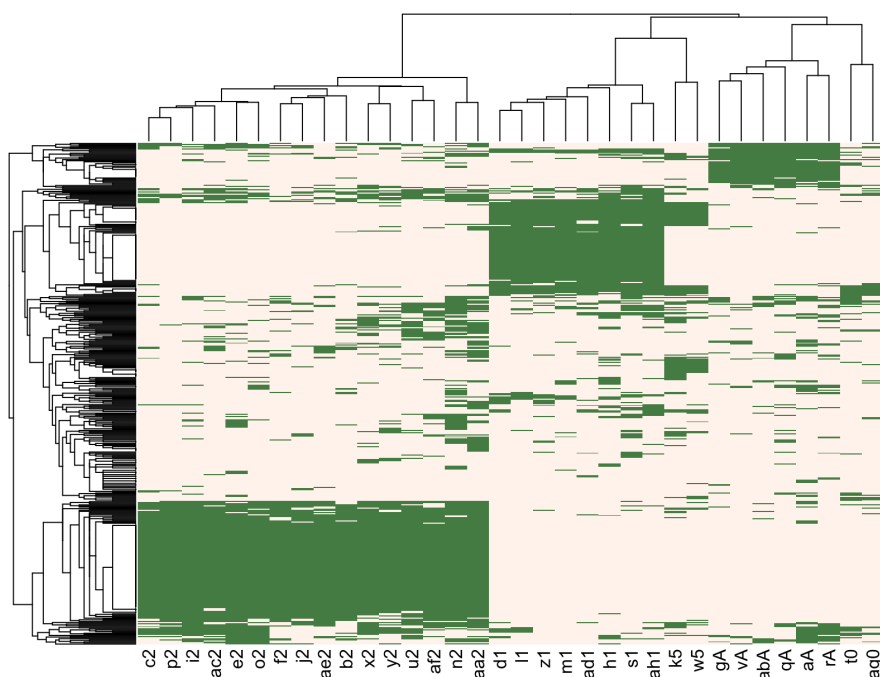


Figura 7: Biclassificació de candidats i electors segons la informació proporcionada pels vots. Obtinguda mitjançant R [24] (versió 4.4.3) i el paquet `ComplexHeatmap::Heatmap` de [10].

Les ordenacions adoptades en ambdós dendrogrames posen de manifest

els conjunts (aproximat) d'electors corresponents a les diferents candidatures. El cas més clar és el de la candidatura 2. El cas de la candidatura A no és tan clar, ja que uns quants dels “seus” electors no aproven tots els components de la candidatura. El cas de les candidatures 1 i 5 té la particularitat que els electors de 5 també són electors de 1.

En el cas de llistes tancades no es pot donar aquesta última possibilitat. Convenientment reordenada, la matriu està formada llavors per blocs que són o bé enterament foscos o bé enterament clars, i de blocs foscos n'hi hauria només un en cada fila i només un en cada columna.

8 Conclusió

Les llistes obertes no ordenades constitueixen una forma de vot molt natural i adient quan els electors coneixen de prop els candidats. Tanmateix, per a formar un òrgan de representació no és gens adient combinar-ho amb l'elecció dels més votats. En lloc d'això cal un algorisme de representació proporcional, com ara el d'Eneström i Phragmén que s'ha exposat en aquest treball.

Referències

- [1] Jules Borély, 1870. *Représentation Proportionnelle de la Majorité et des Minorités: Nouveau Système Électoral*. Paris: Germer Baillière.
- [2] Rosa Camps, Xavier Mora, Laia Saumell, 2024. El mètode d'Eneström i Phragmén per a eleccions parlamentàries mitjançant el vot d'aprovació. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 38: 113–142.
- [3] Victor D'Hondt, 1878. *La Représentation Proportionnelle des Partis, par un électeur*. Bruxelles: Bruylant-Christophe.
- [4] Victor D'Hondt, 1882. *Système Pratique et Raisonné de Représentation Proportionnelle*. Bruxelles: C. Muquardt.
- [5] Victor D'Hondt, 1883. Formule du minimum dans la représentation proportionnelle; Moyen facile de trouver le diviseur. *La Représentation Proportionnelle, Revue Mensuelle*, 2: 117–128; 129–130.
- [6] Gideon Doron, Richard Kronick, 1977. Single Transferrable Vote: An example of a perverse social choice function. *American Journal of Political Science*, 21: 303–311.
- [7] Henry R. Droop, 1868. *On Methods of Electing Representatives*. London: Macmillan.
- [8] Henry R. Droop, 1881. On methods of electing representatives. *Journal of the Statistical Society of London*, 44, n. 2: 141–202. / $\equiv$ *Voting Matters*, 24: 7–46 (2007).
- [9] Gibraltar Government, 1950, rev. 2023. *Gibraltar Election Rules*.
- [10] Zuguang Gu, 2022. Complex heatmap visualization. *iMeta*, vol. 1, issue 3, e43.

- [11] Eduard Hagenbach-Bischoff, 1886. Proportionale Vertheilung · Démonstration géométrique. *Bulletin de la Société Suisse pour la Représentation Proportionnelle · Bulletin des Schweizerischen Wahlreform-Vereins für Proportionale Volksvertretung*, 3: 143–144.
- [12] Eduard Hagenbach-Bischoff, 1888. Manière de trouver le chiffre répartiteur · Bestimmung der Vertheilungszahl. *Bulletin de la Société Suisse pour la Représentation Proportionnelle · Bulletin des Schweizerischen Wahlreform-Vereins für Proportionale Volksvertretung*, 5: 235–241 · 242–243. / $\equiv$ *La Représentation Proportionnelle, Revue Mensuelle*, 7: 266–272.
- [13] Eduard Hagenbach-Bischoff, 1890. La solution du problème de la répartition proportionnelle. *La Représentation Proportionnelle, Revue Mensuelle*, 9: 159–171.
- [14] Clarence Gilbert Hoag, George Hervey Hallett Jr, 1926. *Proportional Representation*. New York: Macmillan.
- [15] Xavier Mora, 2013. La regla de Jefferson-D'Hondt i les seves alternatives *Materials Matemàtics*, 2013, n. 4.
- [16] Xavier Mora, Maria Oliver, 2015. Eleccions mitjançant el vot d'aprovació: El mètode de Phragmén i algunes variants. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 30: 57–101.
- [17] Xavier Mora, Maria Reig, 2023. Desproporcions electorals. Com quantificar-les i analitzar les seves causes. *Materials Matemàtics*, 2023, n. 1.
- [18] Mario Navarro Amandi, 1885. *Estudios sobre Procedimiento Electoral*. Madrid: Imprenta de la Revista de Legislación.
- [19] Pólya György, 1918. Über die Verteilungssysteme der Proportionalwahl. *Zeitschrift für schweizerische Statistik und Volkswirtschaft*, 54: 363–387.
- [20] Pólya György, 1919. Proportionalwahl und Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft*, 74: 297–322.
- [21] Pólya György, 1919. Sur la représentation proportionnelle en matière électorale. *L'Enseignement Mathématique*, 20: 355–379. / $\equiv$ *Collected Works*, vol. 4 (ed. G. C. Rota, MIT 1984), p. 32–56.
- [22] Aurelio Prado y Rojas (ed.), 1876–1879. *Leyes y Decretos Promulgados en la Provincia de Buenos Aires desde 1810 a 1876* (9 volums). Buenos Aires, Imprenta del Mercurio.
- [23] Friedrich Pukelsheim, 2017. *Proportional Representation* (2nd ed.). Springer.
- [24] R Core Team, 2025. *R: A language and environment for statistical computing*, version 4.4.3. R Foundation for Statistical Computing, Viena, Àustria.
- [25] Mikael Rågstædt, 2017. *From Order to Chaos: The Prize Competition in Honour of King Oskar II*. Institut Mittag-Leffler, Suècia.
- [26] Ryo Sakai, Raf Winand, Toni Verbeiren, Andrew Vande Moere, Jan Aerts, 2014. *dendsort*: modular leaf ordering methods for dendrogram representations in R. *F1000Research* 2014, 3:177.
- [27] André Sainte Laguë, 1910. La représentation proportionnelle et la méthode des moindres carrés. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* (3), 27: 529–542.

- [28] Catherine H. Spence, 1861. *A Plea for Pure Democracy*. Adelaide: W. C. Rigby; Melbourne: George Robertson. / $\equiv$ Reedició: Electoral Reform Society of South Australia, 1986.
- [29] Catherine H. Spence, 1898. *Effective Voting: Australia's Opportunity. An Explanation of the Hare System of Representation*. Adelaide: Shawyer & Co.
- [30] Nicolaus Tideman, 1995. The single transferable vote. *The Journal of Economic Perspectives*, 9: 27–38.
- [31] Luis V. Varela, 1876. *Democracia Práctica. Estudio sobre todos los Sistemas Electorales propuestos para dar Representación Proporcional a las Mayorías y Minorías*. Paris i Méjico: A. Bouret.
- [32] Douglas R. Woodall, 1982. An impossibility theorem for electoral systems *Discrete Mathematics*, 66: 209–211.



Rosa Camps
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Rosa.Camps@uab.cat



Xavier Mora
Professor jubilat del
Departament de Matemàtiques de la UAB
Xavier.Mora@uab.cat



Laia Saumell
Professora jubilada del
Departament de Matemàtiques de la UAB
laiasaumell@gmail.com

Publicat el 17 de novembre de 2025