

Polinômios e funções polinomiais

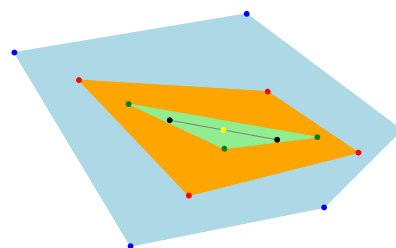
Luis Fernando Mello

Introdução

Este artigo apresenta uma organização dos estudos realizados entre agosto e novembro de 2023 pela turma do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME) da Universidade Federal de Itajubá. As atividades foram realizadas de forma presencial e, para os alunos externos ao campus de Itajubá, transmitidas via Google Meet.

As reuniões ocorreram semanalmente, com uma sessão principal de 60 minutos dedicada à discussão do tema selecionado, além de uma reunião adicional, também semanal, voltada para a discussão de dúvidas e dos exercícios propostos. A escolha dos temas foi orientada pela curiosidade do autor, levando em consideração a maturidade dos alunos do PICME.

Este artigo segue os registros das atividades desenvolvidas durante o período. Cada seção corresponde ao conteúdo estudado em uma reunião semanal. A maioria dos teoremas apresentados conta com demonstrações em um nível elementar. Ao final de cada seção, são propostos alguns exercícios, que são, em alguns casos, retomados em seções subsequentes.



O teorema de Gauss–Lucas.

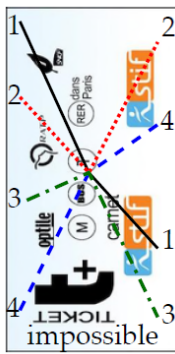
Conteúdo

1 O Teorema de Ghys-Kontsevich	2
2 Polinômio estável	6
3 A regra dos sinais de Descartes, parte 1	12
4 A regra dos sinais de Descartes, parte 2	19
5 Continuidade das raízes, parte 1	23
6 Continuidade das raízes, parte 2	30

7	Coeficientes e raízes de um polinômio	33
8	O Teorema de Siebeck-Marden-Bôcher, parte 1	39
9	O Teorema de Siebeck-Marden-Bôcher, parte 2	46
10	O Teorema de Gauss-Lucas	52
11	O Teorema Fundamental da Álgebra	58
12	Pontos críticos de funções polinomiais	62
13	Problemas em aberto envolvendo polinômios	67

1 O Teorema de Ghys-Kontsevich

Iniciamos esta seção com uma tradução livre de parte do Prefácio do livro de Étienne Ghys [13]:



Em março de 2009, participei de uma reunião administrativa e o colega sentado ao meu lado estava ainda mais entediado do que eu. Obviamente, Maxim Kontsevich tinha outra coisa em mente. De repente, ele me passou um bilhete do metrô parisiense contendo um rabisco e uma única palavra: ‘impossível’. Esse foi o novo teorema que ele queria compartilhar comigo! Levei alguns minutos e alguns sussurros antes que eu pudesse adivinhar a afirmação do teorema e mais alguns minutos para encontrar a prova.

A posição relativa dos gráficos de quatro polinômios reais está sujeita a algumas restrições. Fiquei fascinado: um novo resultado elementar sobre polinômios em 2009!

O objetivo desta seção é estudar o seguinte teorema.

Teorema 1.1 (Ghys-Kontsevich). *Quatro polinômios P_1, P_2, P_3, P_4 de uma variável real x não podem satisfazer as seguintes desigualdades:*

- $P_1(x) > P_2(x) > P_3(x) > P_4(x)$, para $x < 0$ pequeno;
- $P_2(x) > P_4(x) > P_1(x) > P_3(x)$, para $x > 0$ pequeno.

Estamos interessados em estudar os gráficos de funções polinomiais em uma vizinhança do ponto $(0, 0)$, isto é, em uma vizinhança da origem do plano cartesiano. Considere, localmente, a posição do gráfico de um polinômio (função polinomial), $P(x)$, não nulo de uma variável, com $P(0) = 0$, em relação ao eixo x . Há duas possibilidades: ou o gráfico de P cruza o eixo x em $(0, 0)$ ou está em um semiplano fechado com bordo no eixo x . Veja a Figura 1.

Para identificar esses dois casos e saber distingui-los, é apresentada a seguinte definição. Considere

$$P(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

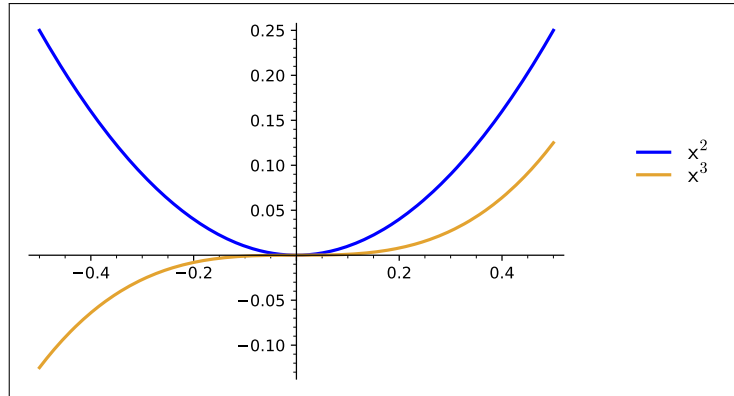


Figura 1: O gráfico de x^3 cruza o eixo x enquanto que o gráfico de x^2 não cruza.

um polinômio não nulo. A *valoração* de P em $x = 0$, denotada por $v(P)$, é o menor inteiro k tal que $a_k \neq 0$. Por convenção, a valoração do polinômio nulo é ∞ .

Da definição acima, segue o seguinte resultado.

Lema 1.1. *O gráfico de P cruza o eixo x em $(0,0)$ se, e somente se, a valoração de P é ímpar.*

Considere dois polinômios distintos P_1 e P_2 . Suponha que $P_1(x) > P_2(x)$ para $x < 0$ pequeno. As possibilidades para $x > 0$ pequeno são as seguintes

$$P_1(x) > P_2(x) \quad \text{ou} \quad P_1(x) < P_2(x)$$

e ambas ocorrem. Veja uma ilustração na Figura 2.

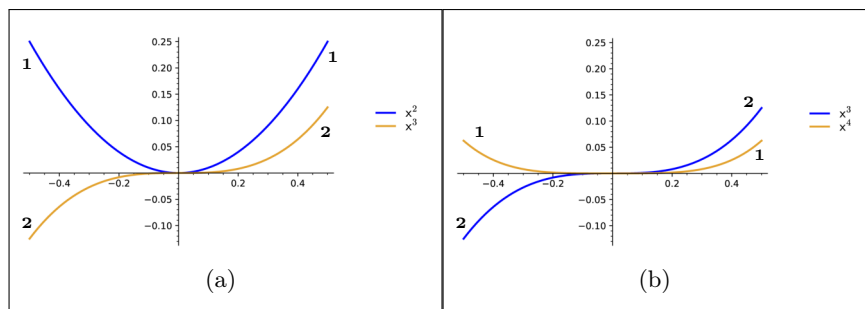


Figura 2: Desigualdades para $x > 0$ pequeno: $P_1(x) > P_2(x)$ (a), $P_1(x) < P_2(x)$ (b).

Agora, são dados três polinômios distintos P_1 , P_2 e P_3 , satisfazendo

$$P_1(x) > P_2(x) > P_3(x), \quad \text{para } x < 0 \text{ pequeno.}$$

Há $3! = 6$ possibilidades para as desigualdades para $x > 0$ pequeno:

$$\begin{array}{ll} P_1(x) > P_2(x) > P_3(x), & P_1(x) > P_3(x) > P_2(x), \\ P_2(x) > P_1(x) > P_3(x), & P_2(x) > P_3(x) > P_1(x), \\ P_3(x) > P_1(x) > P_2(x), & P_3(x) > P_2(x) > P_1(x). \end{array}$$

Todas as 6 possibilidades anteriores ocorrem. Veja a Figura 3 e a Tabela 1.

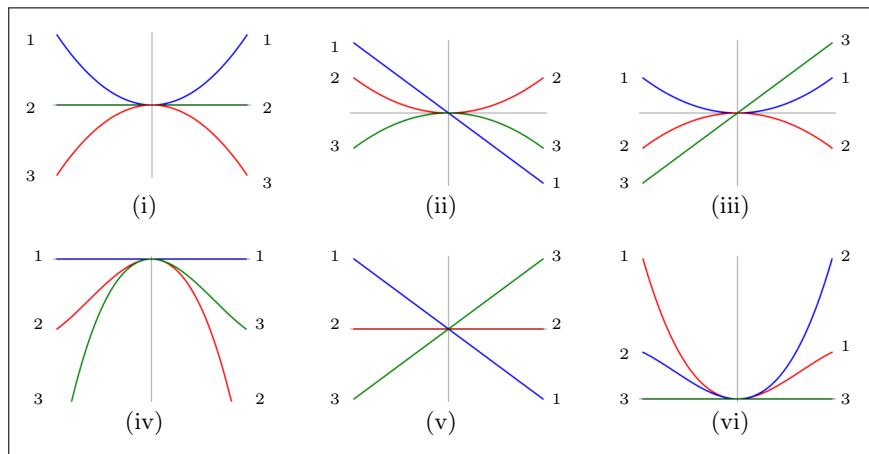


Figura 3: Exemplos das 6 desigualdades para $x > 0$ pequeno. Veja a Tabela 1.

Tabela 1: Modelos para as 6 desigualdades para $x > 0$ pequeno.

Índice	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
(i)	x^2	0	$-x^2$
(ii)	$-x$	x^2	$-x^2$
(iii)	x^2	$-x^2$	x
(iv)	0	$-x^2 - x^3$	$-x^2 + x^3$
(v)	$-x$	0	x
(vi)	$x^2 - x^3$	$x^2 + x^3$	0

Considere 4 polinômios distintos P_1, P_2, P_3 e P_4 , satisfazendo

$$P_1(x) > P_2(x) > P_3(x) > P_4(x),$$

para $x < 0$ pequeno. Agora, temos $4! = 24$ (permutações) possibilidades para as desigualdades desses polinômios, para $x > 0$ pequeno.

O Teorema 1.1 afirma que as desigualdades

$$P_2(x) > P_4(x) > P_1(x) > P_3(x),$$

para $x > 0$ pequeno, não ocorrem.

Prova do Teorema 1.1. Faremos a prova por contradição. Suponha a existência de quatro polinômios P_1, P_2, P_3, P_4 de uma variável real x , com $P_i(0) = 0, i = 1, 2, 3, 4$, e satisfazendo as seguintes desigualdades:

- $P_1(x) > P_2(x) > P_3(x) > P_4(x)$, para $x < 0$ pequeno;
- $P_2(x) > P_4(x) > P_1(x) > P_3(x)$, para $x > 0$ pequeno.

Trocando P_i por $P_i - P_4$, para $i = 1, 2, 3, 4$, podemos assumir que $P_4 = 0$, isto é, P_4 é o polinômio nulo. Veja a Figura 4.

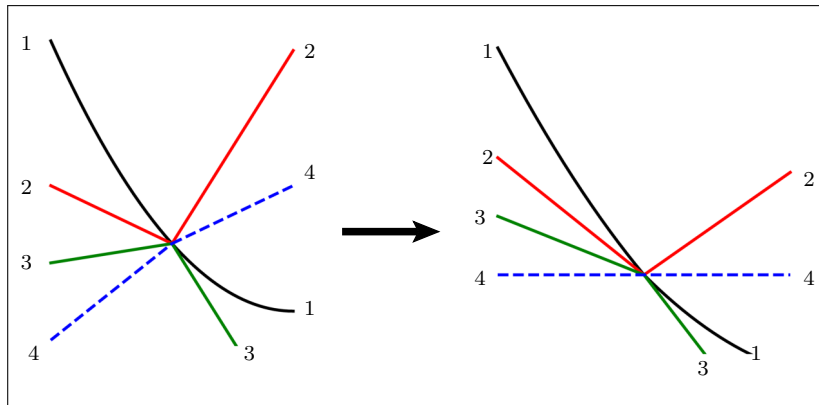


Figura 4: Podemos assumir que $P_4 = 0$.

Uma vez que P_1 e P_3 trocam de sinal em $x = 0$, pelo Lema 1.1, suas valorações são ímpares, isto é, $v(P_1)$ e $v(P_3)$ são ímpares. Por outro lado, como P_2 não troca de sinal em $x = 0$, sua valoração $v(P_2)$ é par. De

$$P_1(x) > P_2(x) > P_3(x),$$

para $x < 0$ pequeno, segue que

$$v(P_3) \geq v(P_2) \geq v(P_1). \quad (1)$$

De modo similar, de

$$|P_1(x)| < |P_3(x)|$$

para $x > 0$ pequeno, segue que

$$v(P_1) \geq v(P_3). \quad (2)$$

De (1) e (2), obtemos

$$v(P_1) = v(P_2) = v(P_3).$$

Ora, mas $v(P_1)$ e $v(P_3)$ são ímpares, enquanto que $v(P_2)$ é par, obtendo, assim, uma contradição. Isto prova o Teorema 1.1. \square

Com os mesmos argumentos apresentados na prova do Teorema 1.1, pode-se mostrar que a permutação

$$(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (3, 1, 4, 2)$$

também não ocorre. Pode-se mostrar que as outras 22 permutações de $(1, 2, 3, 4)$ ocorrem. Os exercícios desta seção tratarão deste estudo. Por outro lado, existem funções f_1, f_2, f_3 e f_4 de classes C^∞ , com $f_i(0) = 0$, para $i = 1, 2, 3, 4$, as quais realizam a permutação

$$(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (2, 4, 1, 3).$$

Exercício 1.1. *Mostre que as permutações abaixo são realizáveis por polinômios P_i , com $P_i(0) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. Dê exemplos explícitos e esboce os seus gráficos em uma vizinhança de $(0, 0)$.*

1. $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (1, 2, 3, 4)$ e $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (3, 2, 1, 4)$.
2. $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (1, 2, 4, 3)$ e $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (3, 2, 4, 1)$.
3. $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (1, 3, 2, 4)$ e $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (3, 4, 1, 2)$.
4. $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (1, 3, 4, 2)$ e $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (3, 4, 2, 1)$.
5. $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (1, 3, 4, 2)$ e $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (4, 1, 2, 3)$.
6. $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (1, 4, 2, 3)$ e $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (4, 1, 3, 2)$.
7. $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (1, 4, 3, 2)$ e $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (4, 2, 1, 3)$.
8. $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (2, 1, 3, 4)$ e $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (4, 2, 3, 1)$.
9. $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (2, 4, 3, 1)$ e $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (4, 3, 1, 2)$.
10. $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (2, 3, 4, 1)$ e $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (4, 3, 2, 1)$.
11. $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (2, 4, 3, 1)$ e $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (4, 2, 1, 3)$.
12. $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (3, 1, 2, 4)$ e $(1, 2, 3, 4) \longrightarrow (4, 3, 2, 1)$.

2 Polinômio estável

Nesta seção, a menos que se explicita o contrário, as matrizes são quadradas $n \times n$ com entradas reais. Uma matriz quadrada A de ordem n é *hiperbólica* se os seus autovalores têm partes reais diferentes de zero. O teorema a seguir é essencial no estudo das equações diferenciais ordinárias lineares. Como motivação da importância do estudo dos polinômios estáveis apresentamos os seguintes dois teoremas cujas provas e mais detalhes podem ser encontrados em [16].

Teorema 2.1. *Considere uma equação diferencial ordinária linear*

$$X' = AX.$$

Suponha que a matriz A é hiperbólica. Denote por $X^ = (0, \dots, 0)$ o seu ponto de equilíbrio. Valem as seguintes afirmações:*

- (a) *Se os autovalores de A têm partes reais negativas, então X^* é assintoticamente estável.*
- (b) *Se A tem um autovalor com parte real positiva, então X^* é instável.*

Considere

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n)),$$

um campo de vetores de classe C^1 . Suponha que X^* é um ponto de equilíbrio da equação diferencial $X' = F(X)$. Dizemos que X^* é *hiperbólico* se a matriz Jacobiana de F em X^* , $DF(X^*)$, é hiperbólica, sendo

$$DF(X^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(X^*) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(X^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(X^*) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(X^*) \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.2 (Hartman-Grobman). *Considere a equação diferencial $X' = F(X)$ definida por um campo de vetores $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Suponha que X^* é um ponto de equilíbrio hiperbólico dessa equação diferencial. Defina a matriz $A = DF(X^*)$. Então, existem vizinhanças $V \subset \mathbb{R}^n$ de X^* , $W \subset \mathbb{R}^n$ de $(0, \dots, 0)$ e uma equivalência topológica $H : V \rightarrow W$ entre as equações diferenciais*

$$X' = F(X) \quad \text{e} \quad X' = AX.$$

Em resumo, se X^* é um ponto de equilíbrio hiperbólico de uma equação diferencial $X' = F(X)$, então sua “estabilidade” está perfeitamente determinada. De fato, basta combinar os Teoremas 2.1 e 2.2.

Uma vez que os autovalores de uma matriz quadrada são as raízes do seu polinômio característico, é de suma importância decidir quando as raízes de um polinômio com coeficientes reais têm (todas elas) partes reais negativas. Veja os Teoremas 2.1 e 2.2.

Dizemos que um polinômio é *estável* se todas as suas raízes têm partes reais negativas. Se uma das raízes de um polinômio tem parte real não negativa, dizemos que o polinômio é *não estável*.

O estudo que apresentaremos a seguir é devido a Routh e Hurwitz. Os assuntos tratados nesta seção podem ser encontrados em [21]. Veja também

[12]. Algumas considerações iniciais são necessárias. Sem perda de generalidade, estudaremos polinômios *mônicos*, isto é, polinômios da forma

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n,$$

com coeficientes a_i , $i = 1, \dots, n$, reais.

Assumiremos que as raízes de um polinômio dependem continuamente dos seus coeficientes. Este resultado será discutido com detalhes nas Seções 5 e 6.

Recorde que o produto das raízes de p é dado por $(-1)^n a_n$. Veja a Seção 7.

Caso trivial 1. Grau de p é igual a 1, ou seja,

$$p(\lambda) = \lambda + a.$$

Este polinômio é estável se, e somente se, $a > 0$.

Caso trivial 2. Grau de p é igual a 2, ou seja,

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b.$$

Este polinômio é estável se, e somente se, seus coeficientes a e b são positivos. A prova desta afirmação segue diretamente da expressão das raízes de p em termos dos seus coeficientes

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Os detalhes são deixados no Exercício 2.1.

Proposição 2.1. *Se um polinômio*

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

com coeficientes reais é estável, então todos os seus coeficientes são positivos.

Demonstração. Fatore o polinômio em fatores de graus 1 e 2, ou seja, em fatores das formas

$$\lambda + c \quad \text{e} \quad \lambda^2 + a\lambda + b, \quad \text{com} \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Como p é estável, cada um dos fatores (polinômios) acima é estável. Dos casos triviais 1 e 2 segue que os coeficientes a , b e c devem ser positivos. Como os coeficientes de p são obtidos por produtos e somas desses coeficientes positivos, segue que eles são positivos, terminando a prova da proposição. \square

Enunciaremos o principal resultado desta seção: o caso cúbico.

Teorema 2.3 (Routh-Hurwitz). *Um polinômio cúbico*

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c \quad (3)$$

com coeficientes reais positivos é estável se, e somente se,

$$ab > c. \quad (4)$$

Utilizaremos a proposição abaixo na prova do Teorema 2.3.

Proposição 2.2. *Um polinômio cúbico*

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$$

com coeficientes reais positivos tem um par de raízes complexas conjugadas com partes reais nulas se, e somente se,

$$ab = c. \quad (5)$$

Demonstração. Primeiramente, notemos que

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = (\lambda + a)(\lambda^2 + b) - ab + c. \quad (6)$$

Parte 1: Suponha que $i\omega$, com $\omega \neq 0$, é raiz de p . Queremos mostrar que $ab = c$.

Afirmção 1: $-\omega^2 + b = 0$. De fato, se $-\omega^2 + b \neq 0$, então, de (6), obtemos

$$0 = p(i\omega) = \underbrace{(i\omega + a)(-\omega^2 + b)}_{\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} - \underbrace{ab + c}_{\in \mathbb{R}} \neq 0,$$

uma contradição.

Portanto, usando a Afirmção 1, temos

$$0 = p(i\omega) = (i\omega + a) \underbrace{(-\omega^2 + b)}_{=0} - ab + c = -ab + c,$$

de onde $ab = c$, como queríamos provar.

Parte 2: Suponha que $ab = c$. Queremos mostrar que existem $\pm i\omega$, com $\omega \neq 0$, raízes de p .

De (6), temos

$$p(\lambda) = (\lambda + a)(\lambda^2 + b) \underbrace{- ab + c}_{=0} = (\lambda + a)(\lambda^2 + b),$$

de onde seguem as raízes complexas conjugadas com partes reais nulas

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{b},$$

uma vez que $b > 0$. Terminamos, assim, a prova da proposição. \square

Prova do Teorema 2.3. Sob as hipóteses do teorema, queremos mostrar que

$$p \text{ é estável} \iff ab > c.$$

Parte 1: Faremos a prova de que

$$p \text{ é estável} \implies ab > c$$

pela contrapositiva, ou seja, mostraremos que

$$ab \leq c \implies p \text{ é não estável.}$$

Suponha que $ab \leq c$. Separando em duas partes

$$ab = c \quad \text{ou} \quad ab < c.$$

Se $ab = c$, então p é não estável, de acordo com a Proposição 2.2.

Considere $ab < c$. Variamos continuamente a e b , mantendo-os positivos e sem violar a desigualdade acima, de modo que eles tendam a zero. Durante este processo, a propriedade “ser estável” ou “ser não estável” do polinômio não irá se alterar. Quando $a = b = 0$, o polinômio p terá a forma

$$p(\lambda) = \lambda^3 + c,$$

que tem dentre suas raízes os números complexos com partes reais positivas

$$\lambda_{1,2} = \sqrt[3]{c} \left(\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Como as raízes dependem continuamente dos coeficientes do polinômio, para $a > 0$ e $b > 0$, segue que o polinômio é não estável, como queríamos demonstrar.

Parte 2: Faremos a prova de que

$$ab > c \implies p \text{ é estável.}$$

Variamos continuamente c , mantendo-o positivo e sem violar a desigualdade acima, de modo que ele tenda a zero. Novamente, durante este processo, a propriedade “ser estável” ou “ser não estável” do polinômio não irá se alterar. Quando $c = 0$, o polinômio p terá a forma

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + a\lambda + b),$$

o qual tem uma raiz nula e outras duas raízes com partes reais negativas, visto que a e b são positivos (caso trivial 2). Quando $c > 0$ pequeno (próximo de zero), essas duas raízes com partes reais negativas não irão variar muito, de modo que o seu produto será positivo. Já a raiz nula (quando $c = 0$), irá assumir um pequeno valor (próximo de zero) positivo ou negativo. Como o produto das três raízes é

$$-c < 0,$$

segue que essa raiz próxima de zero deve ser negativa. Como as raízes dependem continuamente dos coeficientes do polinômio, para

$$c > 0,$$

segue que o polinômio é estável, terminando a prova do teorema. \square

Exemplo 2.1. *O polinômio*

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

é estável, uma vez que seus coeficientes são positivos e

$$ab > c.$$

Suas raízes são: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = -1$. Veja a Figura 5.

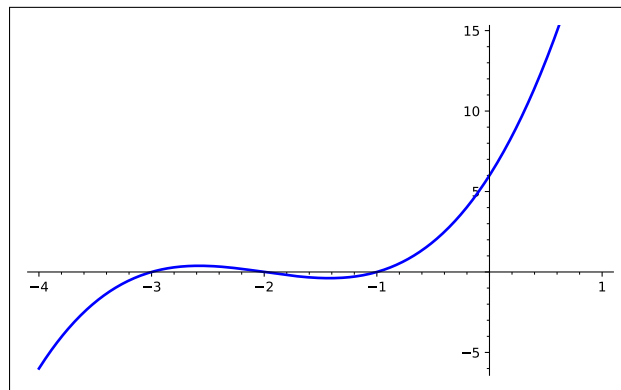


Figura 5: Gráfico do polinômio estável $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$.

Exemplo 2.2. *O polinômio*

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 2$$

é estável, uma vez que seus coeficientes são positivos e

$$ab > c.$$

Suas raízes são: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1 + i$ e $\lambda_3 = -1 - i$. Veja a Figura 6.

Exercício 2.1. *Prove o caso trivial 2 abaixo.*

Caso trivial 2. *Grau de p é igual a 2, ou seja,*

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b.$$

Este polinômio é estável se, e somente se, seus coeficientes a e b são positivos.

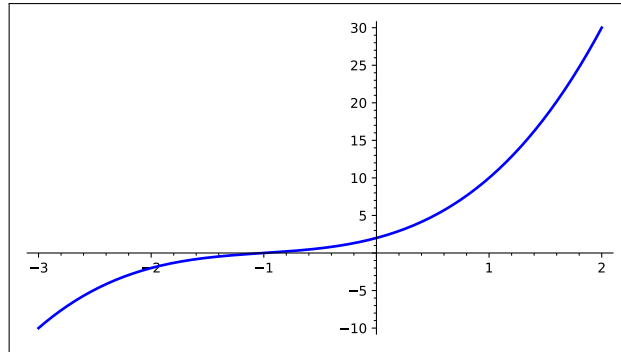


Figura 6: Gráfico do polinômio estável $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 2$.

Exercício 2.2. Utilizando a prova do Teorema de Routh-Hurwitz, prove a sua versão mais geral abaixo.

Teorema 2.4 (Routh-Hurwitz). Um polinômio

$$p(\lambda) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \quad a_3 \neq 0,$$

com coeficientes reais positivos é estável se, e somente se,

$$a_1a_2 > a_0a_3.$$

3 A regra dos sinais de Descartes, parte 1

Nesta seção e na próxima estudaremos a regra dos sinais de Descartes. A principal referência bibliográfica utilizada é [24]. Veja também [12].

Estamos interessados em encontrar os zeros (reais) de uma função polinomial

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0,$$

com coeficientes reais a_i , $i \in \{1, \dots, n\}$. Equivalentemente, queremos encontrar as raízes reais da equação polinomial

$$a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0 = 0.$$

De modo informal, a regra dos sinais de Descartes fornece informações acerca do número de raízes positivas e negativas de uma equação polinomial com coeficientes reais. Pode-se enunciar-la como segue.

Teorema 3.1. Um polinômio com coeficientes reais não pode ter mais raízes positivas (contando as multiplicidades) que o número de variações de sinal dos seus coeficientes.

As “variações de sinal” que aparece na regra são calculadas da maneira mais natural possível.

Exemplo 3.1. Considere o polinômio

$$p(x) = 8x^5 - 2x^3 - 13x^2 + 5x - 4,$$

ordenado de forma decrescente pelos graus dos seus monômios. Note que existem três variações de sinal nos coeficientes. Deste modo, a regra nos diz que não existem mais do que três raízes positivas (contando as multiplicidades) para este polinômio. Veja a Figura 7.

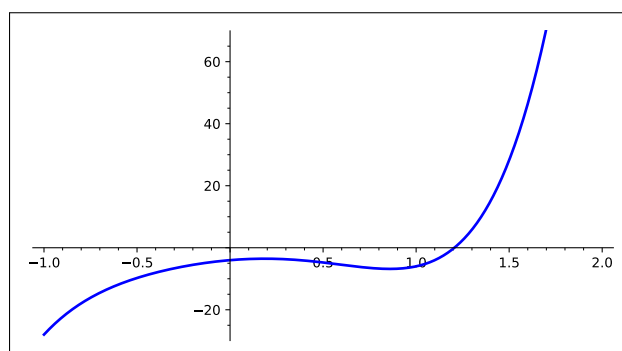


Figura 7: Parte do gráfico do polinômio do Exemplo 3.1.

Pela mudança de variável

$$x \mapsto -x,$$

pode-se afirmar que o número de raízes negativas (contando as multiplicidades) de um polinômio $p(x)$ é menor ou igual ao número de variações no sinal dos coeficientes do polinômio $p(-x)$.

No polinômio do Exemplo 3.1,

$$\begin{aligned} p(-x) &= 8(-x)^5 - 2(-x)^3 - 13(-x)^2 + 5(-x) - 4 \\ &= -8x^5 + 2x^3 - 13x^2 - 5x - 4, \end{aligned}$$

existem duas trocas de sinal nos coeficientes. Deste modo, a regra nos diz que não existem mais do que duas raízes negativas (contando as multiplicidades) para o polinômio $p(x)$.

Pode-se refinar um pouco mais a regra dos sinais de Descartes enunciada no Teorema 3.1.

Teorema 3.2 (Regra dos Sinais de Descartes). *A diferença entre o número de variações de sinal e o número de raízes positivas (contando as multiplicidades) de um polinômio com coeficientes reais $p(x)$ é um inteiro não negativo par.*

Pelo que foi comentado anteriormente, a mesma conclusão vale para o número de raízes negativas de $p(x)$, analisando-se o número de variações de sinal de $p(-x)$.

Assim, pelo Teorema 3.2, o polinômio estudado no Exemplo 3.1,

$$p(x) = 8x^5 - 2x^3 - 13x^2 + 5x - 4,$$

tem:

- uma ou três raízes reais positivas;
- zero ou duas raízes reais negativas,

pois,

$$p(-x) = -8x^5 + 2x^3 - 13x^2 - 5x - 4.$$

Lembrar que nas contagens das raízes deve-se sempre incluir as suas multiplicidades.

A regra dos sinais de Descartes foi enunciada pelo próprio Descartes (1596-1650) [9], mas a prova não foi apresentada por ele. A primeira demonstração que se conhece da regra dos sinais foi dada em 1728 por J.A. Segner. Em 1807, a regra foi generalizada por F.D. Budán, que encontrou uma cota superior para o número de raízes reais em um intervalo qualquer, e em 1829 foi generalizada por Sturm, que encontrou o número exato de raízes reais de um polinômio em um intervalo.

Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 3.2. *Considere o polinômio*

$$p(x) = 3x^4 - 5x^3 - x^2 - 8x + 4.$$

Como o número de variações de sinal é dois, existem zero ou duas raízes reais positivas. Por outro lado, como

$$p(-x) = 3x^4 + 5x^3 - x^2 + 8x + 4,$$

concluimos que também existem duas variações de sinal, e assim, existem zero ou duas raízes reais negativas.

Na Tabela 2 estão sintetizadas as possibilidades para as raízes do polinômio do Exemplo 3.2. Veja a Figura 8.

Exemplo 3.3. *Considere o polinômio*

$$p(x) = x^3 - x^2 + 2x + 1.$$

Como existem duas trocas de sinais nos coeficientes, pode-se ter zero ou duas raízes reais positivas. Multiplicando $p(x)$ por $x + 1$, obtém-se

$$q(x) = p(x)(x + 1) = x^4 + x^2 + 3x + 1,$$

Tabela 2: Possibilidades para as raízes do polinômio do Exemplo 3.2.

# de raízes positivas	# de raízes negativas	# de raízes complexas
0	0	4
2	2	0
0	2	2
2	0	2

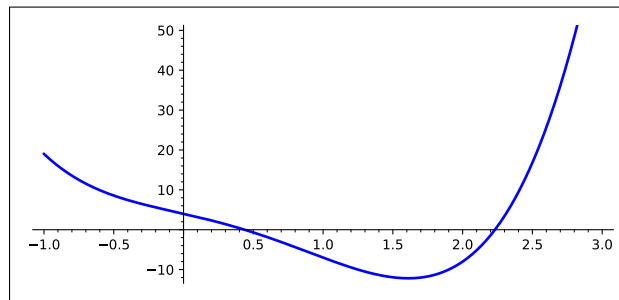


Figura 8: Parte do gráfico do polinômio do Exemplo 3.2.

que não tem troca de sinal nos coeficientes. Concluimos que $q(x)$ não tem raiz real positiva, de onde qualquer fator seu, por exemplo, $p(x)$, também não tem raiz real positiva. Como

$$p(-x) = -x^3 - x^2 - 2x + 1$$

tem uma troca de sinal nos coeficientes, segue que $p(x)$ tem exatamente uma raiz real negativa. Como o número real zero não é raiz de $p(x)$, podemos afirmar que este polinômio tem apenas uma raiz real. Veja a Figura 9.

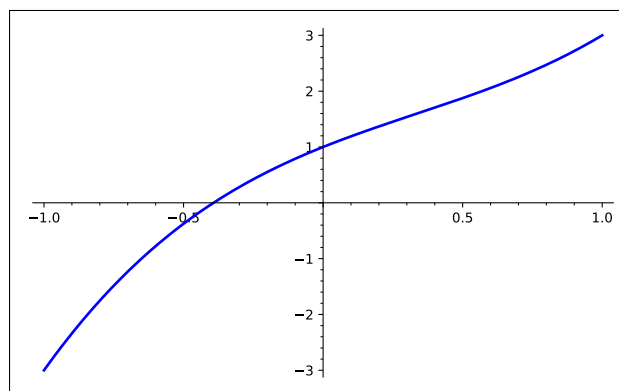


Figura 9: Parte do gráfico do polinômio do Exemplo 3.3.

Prova do Teorema 3.2. Considere

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_lx^{n-l}, \quad \text{com } a_0a_l \neq 0, \quad (7)$$

e $0 \leq l \leq n$. Considere r um número real positivo. Defina o polinômio

$$F(x) = f(x)(x - r) = A_0x^{n+1} + A_1x^n + \cdots + A_{l+1}x^{n-l}, \quad (8)$$

sendo

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0, \\ A_1 &= a_1 - ra_0, \\ A_2 &= a_2 - ra_1, \quad \dots, \\ A_l &= a_l - ra_{l-1}, \\ A_{l+1} &= -ra_l. \end{aligned} \quad (9)$$

No polinômio $f(x)$, defina:

- a_{k_1} como sendo o primeiro coeficiente não nulo de sinal diferente de a_0 .
- a_{k_2} como sendo o primeiro coeficiente não nulo depois de a_{k_1} e com o mesmo sinal de a_0 (portanto, de sinal diferente de a_{k_1}).
- ...
- a_{k_ν} como sendo o último desses coeficientes. Assim, $a_{k_\nu} = a_l$ ou a_{k_ν} possui o sinal de a_l .

Com as definições acima, seguem as seguintes observações:

- A lista dos coeficientes de a_0 a a_{k_1} tem uma variação de sinal.
- A lista dos coeficientes de a_{k_1} a a_{k_2} tem uma variação de sinal.
- ...
- A lista dos coeficientes de a_{k_ν} a a_l não tem variação de sinal.

Note que o número ν mede exatamente a quantidade de variações de sinal nos coeficientes de $f(x)$.

Afirmção 1. Os números

$$A_0, A_{k_1}, \dots, A_{k_\nu}, A_{l+1},$$

são não nulos e têm os mesmos sinais, respectivamente, de

$$a_0, a_{k_1}, \dots, a_{k_\nu}, -a_l.$$

De fato, de (9)

$$A_0 = a_0, \quad A_j = a_j - ra_{j-1} \quad \text{e} \quad A_{l+1} = -ra_l,$$

com $r > 0$, $1 \leq j \leq l$ e $a_0 a_l \neq 0$. Assim, A_0 é não nulo e tem o mesmo sinal de a_0 . De modo análogo, A_{l+1} é não nulo e tem o mesmo sinal de $-a_l$. Agora,

$$A_{k_i} = a_{k_i} - r a_{k_{i-1}},$$

sendo que a_{k_i} e $a_{k_{i-1}}$ têm sinais opostos, por construção. Portanto, A_{k_i} é não nulo e tem o mesmo sinal de a_{k_i} , provando, assim, a Afirmação 1. Recordemos que, por construção, cada um dos números

$$a_0, a_{k_1}, \dots, a_{k_\nu}, -a_l,$$

a partir do primeiro, tem sinal oposto ao de seu predecessor. Portanto, pela Afirmação 1, o mesmo ocorre com a sequência de números

$$A_0, A_{k_1}, \dots, A_{k_\nu}, A_{l+1}.$$

Assim, a sequência acima tem $\nu + 1$ variações de sinal. Concluimos que $F(x)$ tem, pelo menos, uma variação de sinal a mais que $f(x)$. Podemos provar mais.

Afirmação 2. O número de variações de sinal em $F(x)$ é igual ao de $f(x)$ aumentado de algum número inteiro ímpar.

Provaremos a Afirmação 2. Considere a sequência de números

$$A_0 \dots A_{k_1}.$$

Como o primeiro e último termos têm sinais opostos, ela tem um número ímpar de variações de sinal. O mesmo raciocínio vale para as outras ν sequências de números

$$A_{k_1} \dots A_{k_2}, \quad A_{k_2} \dots A_{k_3}, \quad \dots, \quad A_{k_\nu} \dots A_{l+1}.$$

Assim, o número total de variações de sinal em $F(x)$ é igual à soma de $\nu + 1$ números ímpares,

$$v(F(x)) = (2n_1 + 1) + \dots + (2n_{\nu+1} + 1) = (2m + 1) + \nu,$$

ou seja, essa soma é igual a ν somado com um número ímpar, e a Afirmação 2 está provada.

Caso a) Suponha que a equação $f(x) = 0$ não possui raiz real positiva e nem nula, ou seja, nenhuma raiz no intervalo $[0, +\infty)$. Então,

$$f(0) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

têm o mesmo sinal. Assim, o primeiro e o último coeficientes de $f(x)$ têm o mesmo sinal, de onde o primeiro e o último coeficientes de $F(x)$ têm sinais opostos. Logo, pela Afirmação 2, ou $f(x)$ não tem variações de sinal ou as

tem em um número par, de modo que a regra vale neste caso. Em resumo, o Teorema 3.2 está provado para este caso.

Caso b) Suponha que a equação $f(x) = 0$ tenha raízes positivas

$$r_1, r_2, \dots, r_k,$$

com r_i listada quantas vezes for a sua multiplicidade. Assim, uma raiz de multiplicidade m ocorre m vezes nesta lista. Deste modo, podemos escrever

$$f(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_k) g(x),$$

sendo $g(x)$ um polinômio com coeficientes reais tal que $g(x) = 0$ não possui raiz real positiva. Pelo Caso a), ou $g(x)$ não tem variação de sinais ou tem um número par de variações. Pela Afirmção 2, o produto

$$(x - r_i) g(x)$$

tem um número de variações igual ao número de variações de $g(x)$ mais um inteiro positivo ímpar. De modo análogo, isto vai ocorrer cada vez que introduzirmos um fator $(x - r_j)$. Assim, o número de variações de sinal de $f(x)$ é igual ao número de variações de $g(x)$ aumentado de k inteiros positivos ímpares, isto é,

$$\begin{aligned} v(f(x)) &= v(g(x)) + (2m_1 + 1) + \cdots + (2m_k + 1) \\ &= (v(g(x)) + 2m) + k = 2s + k, \end{aligned}$$

visto que $v(g(x)) = 0$ ou é par. Desta última expressão, concluímos que: a diferença entre o número de raízes reais positivas de $f(x)$, denotado por k , e o número de variações nos sinais de $f(x)$ é um número par. A prova do Teorema 3.2 está completa. \square

Observação 3.1. No Teorema 3.2 é essencial que as raízes reais positivas sejam contadas com as suas multiplicidades, conforme o seguinte exemplo

$$p(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2,$$

tem duas variações de sinal e uma raiz positiva de multiplicidade dois.

Exercício 3.1. Quantas soluções reais possui a equação abaixo?

$$x^{17} + x^{13} + x^{11} + x^7 + x^5 + x^3 + 19x^2 = 1.$$

Exercício 3.2. Na demonstração do Teorema 3.2, foi afirmado:

Caso a) Suponha que a equação $f(x) = 0$ não possui raiz real positiva e nem nula, ou seja, nenhuma raiz no intervalo $[0, +\infty)$.

Por que podemos assumir que $f(0) \neq 0$ no estudo de raízes positivas de um polinômio?

4 A regra dos sinais de Descartes, parte 2

Continuaremos o estudo da regra dos sinais de Descartes. As principais referências bibliográficas utilizadas nesta seção são [1] e [14].

Novamente, estamos interessados em encontrar os zeros (reais) de uma função polinomial

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

com coeficientes reais $a_i, i \in \{1, \dots, n\}$. Equivalentemente, queremos encontrar as raízes reais da equação polinomial

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

A regra dos sinais de Descartes fornece informações acerca do número de raízes positivas e negativas de uma equação polinomial com coeficientes reais. A regra dos sinais de Descartes foi enunciada e provada no Teorema 3.2.

Recordemos o Exemplo 3.2. Considere o polinômio

$$p(x) = 3x^4 - 5x^3 - x^2 - 8x + 4.$$

Como o número de variações de sinal é dois, existem zero ou duas raízes reais positivas. Por outro lado, como

$$p(-x) = 3x^4 + 5x^3 - x^2 + 8x + 4,$$

concluimos que também existem duas variações de sinal, e assim, existem zero ou duas raízes reais negativas. Observe que

$$p(0) = 4 > 0, \quad p(1) = -7 < 0, \quad p(3) = 79 > 0.$$

Deste modo, pelo Teorema do Valor Intermediário (TVI), existem $x_1 \in (0, 1)$ e $x_2 \in (1, 3)$, tais que

$$p(x_1) = p(x_2) = 0.$$

De fato, o polinômio do Exemplo 3.2 tem duas raízes reais positivas e zero raízes reais negativas.

Considere as seguintes duas perguntas.

Pergunta 4.1. *Dada uma sequência finita*

$$\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n), \quad \sigma_i \in \{-, 0, +\}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

existe um polinômio cujas variações de sinal sejam representadas por σ e que tenha o número máximo de raízes reais positivas e de raízes reais negativas previstas pela Regra dos Sinais de Descartes?

Pergunta 4.2. Dada uma sequência finita

$$\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n), \quad \sigma_i \in \{-, 0, +\}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

existe um polinômio cujas variações de sinal sejam representadas por σ e que tenha o número máximo de raízes reais positivas ou de raízes reais negativas previstas pela Regra dos Sinais de Descartes?

Começemos a nossa análise pela Pergunta 4.2. Considere as variações de sinal

$$\sigma = (+, -, -, -, +). \quad (10)$$

Um polinômio representado por σ tem a seguinte forma

$$p(x) = a_4x^4 - a_3x^3 - a_2x^2 - a_1x + a_0, \quad a_i > 0.$$

Logo,

$$p(-x) = a_4x^4 + a_3x^3 - a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Verificamos que ambos $p(x)$ e $p(-x)$ têm duas variações de sinal. Pela Regra dos Sinais de Descartes, p tem zero ou duas raízes reais positivas e zero ou duas raízes reais negativas. Existe um tal polinômio com duas raízes reais negativas e zero raízes reais positivas? Ou seja, existe um tal polinômio com o número máximo de raízes reais negativas permitido pela Regra dos Sinais de Descartes e nenhuma raiz real positiva? Um tal polinômio pode ser fatorado da seguinte forma

$$\begin{aligned} p(x) &= a(x^2 + bx + c)(x^2 - sx + t), \\ &= a(x^4 + (b-s)x^3 + (t+c-bs)x^2 + (bt-cs)x + ct), \end{aligned} \quad (11)$$

com

$$a, b, c, s, t > 0, \quad b^2 > 4c, \quad s^2 < 4t. \quad (12)$$

Levando em conta a variação de sinais em estudo,

$$\sigma = (+, -, -, -, +),$$

devemos ter, necessariamente,

$$b < s \quad \text{e} \quad bt < cs.$$

Assim,

$$b^2t = b(bt) < s(bt) < s(cs) = cs^2,$$

de onde

$$\frac{b^2}{c} < \frac{s^2}{t}. \quad (13)$$

De (12) e (13), resulta

$$4 < \frac{b^2}{c} < \frac{s^2}{t} < 4,$$

um absurdo. Concluimos que não existe um polinômio com duas raízes reais negativas (número máximo de raízes reais negativas permitido pela Regra dos Sinais de Descartes) e zero raízes reais positivas com seus coeficientes satisfazendo as variações de sinal

$$\sigma = (+, -, -, -, +).$$

O que podemos dizer a respeito da Pergunta 4.1? O seguinte teorema dá informações a respeito desta pergunta.

Teorema 4.1. *Considere*

$$\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n), \quad \sigma_i \in \{-, 0, +\}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Fixe $k > n$. Então, o polinômio

$$p(x) = \sum_{j=0}^n \sigma_j k^{-j^2} x^j \quad (14)$$

tem o número máximo de raízes positivas e o número máximo de raízes negativas permitidos pela Regra dos Sinais de Descartes.

Demonstração. Note que p tem a forma

$$p(x) = \sigma_0 + \sigma_1 k^{-1^2} x + \sigma_2 k^{-2^2} x^2 + \dots + \sigma_j k^{-j^2} x^j + \dots + \sigma_n k^{-n^2} x^n.$$

Assuma que $\sigma_j \neq 0$ e considere $x = k^{2j}$. Assim,

$$p(k^{2j}) = \sigma_0 + \sigma_1 k^{2j-1} + \sigma_2 k^{4j-4} + \dots + \sigma_j k^{2j^2-j^2} + \dots + \sigma_n k^{2nj-n^2}.$$

Afirmção 1. O valor absoluto do termo que contém σ_j é k^{j^2} . A prova da afirmação a seguir ficará como exercício.

Afirmção 2. Os valores absolutos dos outros n termos em $p(k^{2j})$ são, no máximo, k^{j^2-1} . Como, por hipótese, $n < k$, a soma desses valores absolutos dos outros n termos em $p(k^{2j})$ é, no máximo,

$$n k^{j^2-1} < k k^{j^2-1} = k^{j^2}.$$

Concluimos que $p(k^{2j})$ tem o mesmo sinal de σ_j .

Considere $\sigma_i \neq 0$. Suponha que σ_j , $j > i$, é o primeiro coeficiente não nulo com sinal diferente de σ_i . Assim, como $p(k^{2i})$ tem o mesmo sinal de σ_i e $p(k^{2j})$ tem o mesmo sinal de σ_j , segue que $p(k^{2i})$ e $p(k^{2j})$ têm sinais opostos. Pelo Teorema do Valor Intermediário, p tem uma raiz entre

$$x = k^{2i} \quad \text{e} \quad x = k^{2j}.$$

Em resumo, para cada troca de sinal em σ , existe uma raiz real positiva de p . De modo totalmente análogo, se

$$(-1)^i \sigma_i \text{ e } (-1)^j \sigma_j$$

são coeficientes consecutivos de sinais opostos, então

$$p(-k^{2i}) \text{ e } p(-k^{2j})$$

têm sinais opostos. Pelo Teorema do Valor Intermediário, $p(-x)$ tem uma raiz entre

$$x = -k^{2i} \text{ e } x = -k^{2j}.$$

Em resumo, para cada troca de sinal em

$$\tilde{\sigma} = (\sigma_0, -\sigma_1, \sigma_2, \dots, (-1)^i \sigma_i, \dots, (-1)^n \sigma_n),$$

existe uma raiz real negativa de p . O Teorema 4.1 está demonstrado. \square

Exemplo 4.1. Considere as variações de sinal em (10), isto é,

$$\sigma = (+, -, -, -, +).$$

Vimos que, pela a Regra dos Sinais de Descartes, um polinômio com essas variações de sinal pode ter zero ou duas raízes reais positivas e zero ou duas raízes reais negativas. Vimos também que, no entanto, não existe um polinômio com duas raízes reais negativas (número máximo de raízes reais negativas permitido pela Regra dos Sinais de Descartes) e zero raízes reais positivas com seus coeficientes satisfazendo as variações de sinal acima. Como $n = 4$, escolhamos $k = 5$ e escrevemos o polinômio definido em (14) (veja o Teorema 4.1)

$$p(x) = 1 - \frac{x}{5} - \frac{x^2}{625} - \frac{x^3}{1953125} + \frac{x^4}{152587890625}.$$

Avaliando p em $x = k^{2j} = 5^{2j}$, para $j = 0, 1, 4$, obtemos

$$p(5^0) = \frac{121826093751}{152587890625} > 0,$$

$$p(5^2) = -\frac{1956249}{390625} < 0,$$

$$p(5^8) = 121826093751 > 0.$$

Por outro lado, avaliando p em $x = -k^{2j} = -5^{2j}$, para $j = 1, 2, 3$, obtemos

$$p(-5^6) = 1956251 > 0,$$

$$p(-5^4) = -373 < 0,$$

$$p(-5) = \frac{478531251}{244140625} > 0.$$

As duas reais negativas e as duas reais positivas raízes de p estão escritas abaixo com duas casas decimais:

$$x_1 = -2882,88, \quad x_2 = -135,49, \quad x_3 = 4,81, \quad x_4 = 81138,56.$$

Exercício 4.1. Considere a seguinte sequência de variações de sinal

$$\sigma = (+, +, -, +, +).$$

Obtenha um polinômio com essas variações de sinal, com número máximo de raízes reais positivas e com número máximo de raízes reais negativas permitidos pela Regra dos Sinais de Descartes. Dê os valores aproximados das raízes.

Exercício 4.2. Idem ao exercício acima para a sequência de variações de sinal

$$\sigma = (+, 0, -, 0, +).$$

Dê os valores aproximados das raízes.

Exercício 4.3. Considere a e b números reais não nulos. Defina a seguinte função polinomial

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(x) = 1 - ax^2 + bx^3.$$

Estude a existência e a quantidade das raízes reais positivas de p em função dos seus coeficientes a e b . Em particular, p pode ter duas raízes reais positivas?

5 Continuidade das raízes, parte 1

Nesta seção e na próxima estudaremos a continuidade das raízes de um polinômio em função dos seus coeficientes. As principais referências bibliográficas utilizadas nesta seção são [19] e [26].

Estamos interessados em estudar os zeros (raízes) de uma função polinomial

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

com coeficientes reais a_i , $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Em particular, estamos interessados em estudar como variam as raízes em função das variações dos seus coeficientes. Mais precisamente, se os coeficientes de

$$q(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$$

estão “próximos” dos coeficientes de p , o que podemos afirmar a respeito das raízes de p e de q ?

Algumas vezes assumiremos que p é *mônico*, isto é,

$$p(x) = x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Faremos isto sempre que for preciso.

Exemplo 5.1. Considere os polinômios

$$p(x) = x^2 + x - 6 \quad e \quad q(x) = \frac{11}{10}x^2 + \frac{12}{10}x - \frac{55}{10},$$

cujas raízes são, respectivamente,

$$x_1 = -3, x_2 = 2 \quad e \quad x_1^* = -2,84\dots, x_2^* = 1,75\dots$$

Observe que as raízes de p e q estão “próximas” em \mathbb{R} . Veja a Figura 10.

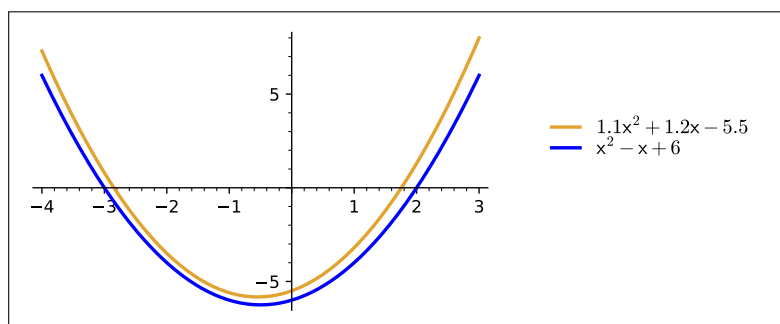


Figura 10: Gráficos de p e de q do Exemplo 5.1.

Exemplo 5.2. Considere os polinômios

$$s(x) = (x^2 + 2x + 1)(x^2 - 4x + 4),$$

$$t(x) = \left(x^2 + 2x + \frac{11}{10}\right) \left(x^2 - 4x + \frac{41}{10}\right).$$

As suas raízes são, respectivamente,

$$x_1 = -1, x_2 = 2 \quad e \quad z_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{\frac{1}{10}}, z_{3,4} = 2 \pm i\sqrt{\frac{1}{10}}.$$

Veja a Figura 11.

Observe que as raízes de s e t estão “próximas” em \mathbb{C} . De fato, considere os discos no plano complexo com centros em -1 e 2 , ambos de raio $1/2$. Segue que as raízes de t pertencem a esses discos. Veja a Figura 12.

Frases do seguinte tipo aparecem com frequência em livros ou artigos de matemática (veja a Figura 13):

As raízes de um polinômio dependem continuamente dos coeficientes desse polinômio.

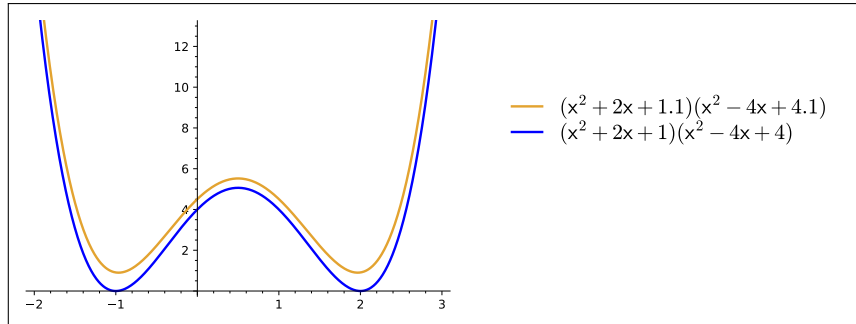


Figura 11: Gráficos de s e de t do Exemplo 5.2.

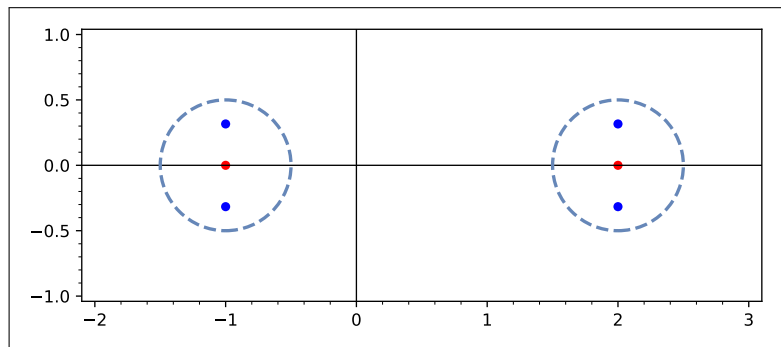


Figura 12: As raízes de t estão em azul e as raízes de s em vermelho.

Existem muitas maneiras de dar um significado preciso à frase citada acima. Uma das maneiras é dada a seguir. Dados $z_0 \in \mathbb{C}$ e um número real $r > 0$, definimos a bola de centro em z_0 e de raio r por

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Considere

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

com raízes

$$z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$$

listadas levando em conta as suas multiplicidades. Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^{n+1} munido da norma euclidiana. Considere $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ o vetor definido pelos coeficientes de p , isto é,

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_n).$$

Com as notações acima, vale o seguinte teorema. Sua prova exige conceitos matemáticos além dos que estamos estudando e pode ser encontrada em [8]. Estudaremos outras versões, menos gerais, que poderão ser demonstradas com matemática elementar.

To prove that \mathcal{M} is open, consider the characteristic polynomial of a matrix $A \in L(\mathbb{R}^n)$. If we vary the entries of A slightly, then the characteristic polynomial's coefficients vary only slightly. Therefore, the roots of this polynomial in \mathbb{C} move only slightly as well. Thus, if we begin with a matrix that has distinct eigenvalues, nearby matrices have this property as well. This proves that \mathcal{M} is open. ■

Figura 13: Parte da página 102 do livro de Hirsch, Smale e Devaney [16].

Teorema 5.1 (Dependência contínua das raízes). *Considere o polinômio p em (15). Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se*

$$q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n, \quad b_i \in \mathbb{R},$$

com

$$b = (b_0, b_1, \dots, b_n) \quad e \quad \|b - a\| < \delta,$$

então as raízes

$$w_1, \dots, w_n$$

de q satisfazem

$$w_i \in \bigcup_{j=1}^n B(z_j, \varepsilon).$$

Considere p como em (15). Dizemos que $x_0 \in \mathbb{R}$ é uma raiz ou um zero de p se $p(x_0) = 0$.

Proposição 5.1. *Se $x_0 \in \mathbb{R}$ é uma raiz de p , então existe um polinômio q tal que*

$$p(x) = (x - x_0) q(x). \tag{16}$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x) - p(x_0) \\ &= (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) - (a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n) \\ &= a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x^n - x_0^n) = (x - x_0) q(x). \end{aligned}$$

□

Dizemos que uma raiz ou um zero $x_0 \in \mathbb{R}$ de p é *simples* se $q(x_0) \neq 0$. Se $q(x_0) = 0$, então, pela Proposição 5.1,

$$q(x) = (x - x_0) r(x),$$

sendo $r(x)$ um polinômio. Assim,

$$p(x) = (x - x_0)^2 r(x).$$

Derivando p dado em (16), obtemos

$$p'(x) = q(x) + (x - x_0) q'(x). \quad (17)$$

Proposição 5.2. *O número $x_0 \in \mathbb{R}$ é uma raiz simples de p se, e somente se,*

$$p'(x_0) \neq 0.$$

Demonstração. De (17),

$$p'(x_0) = q(x_0) + (x_0 - x_0) q'(x_0) = q(x_0).$$

A prova da proposição segue imediatamente. \square

O seguinte teorema nos diz que uma raiz simples de um polinômio é uma função contínua dos seus coeficientes.

Teorema 5.2 (Dependência contínua das raízes). *Considere um polinômio p como em (15). Se x_0 é uma raiz simples de p , então x_0 varia continuamente com os coeficientes de p .*

Na prova do Teorema 5.2 faremos uso de uma versão do Teorema da Função Implícita (TFI) um dos grandes resultados da Análise, veja [23].

Teorema 5.3 (Teorema da Função Implícita). *Considere $f : W \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(y, x) \mapsto f(y, x)$, uma função de classe C^1 . Suponha que $(y_0, x_0) \in W$, que*

$$f(y_0, x_0) = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial x}(y_0, x_0) \neq 0.$$

Então, existem vizinhanças $I \subset \mathbb{R}$ de x_0 , $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de y_0 e uma única função contínua

$$g : V \rightarrow I, \quad y \mapsto x = g(y),$$

com

$$g(y_0) = x_0 \quad e \quad f(y, g(y)) = 0, \quad \forall y \in V. \quad (18)$$

Prova do Teorema 5.2. Defina a função

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(a, x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad (19)$$

sendo $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Como f é uma função polinomial, ela é de classe C^1 . Suponha que x_0 é um zero simples da função polinomial p^0 , correspondente aos coeficientes

$$a^0 = (a_0^0, a_1^0, \dots, a_n^0) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Assim,

$$f(a^0, x_0) = a_0^0 + a_1^0 x_0 + \cdots + a_n^0 x_0^n = p^0(x_0) = 0.$$

Pela Proposição 5.2,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a^0, x_0) = (p^0)'(x_0) \neq 0.$$

Pelo TFI, existem vizinhanças $I \subset \mathbb{R}$ de x_0 , $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de a^0 e uma única função contínua

$$g : V \rightarrow I, \quad x = g(a),$$

com $g(a^0) = x_0$ e

$$f(a, g(a)) = a_0 + a_1 g(a) + \cdots + a_n (g(a))^n = 0, \quad (20)$$

para todo $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in V$. Em resumo, o que está sendo informado em (20) é que a correspondente função polinomial

$$p(x) = f(a, x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

tem um zero em

$$x = g(a),$$

“próximo” de x_0 , para todo

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in V,$$

portanto, “próximo” de a^0 . □

Exemplo 5.3. Considere o polinômio de grau 20

$$p(z) = (z - 1)(z - 2) \cdots (z - 20), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Deseja-se uma perturbação de p da forma

$$q(z) = p(z) + \varepsilon z^{19} = (z - 1)(z - 2) \cdots (z - 20) + \varepsilon z^{19}.$$

Observe que as raízes de p são simples

$$z_i = i, \quad i = 1, 2, \dots, 20.$$

O Teorema 5.2 afirma que as raízes de q estarão “próximas” das raízes de p desde que se tome os coeficientes de q “próximos” dos coeficientes de p , ou seja, desde que ε seja “suficientemente” pequeno. Veja [27]. A primeira análise é feita com $\varepsilon = -2^{-23}$ e quatro casas decimais:

1.0000	10.0952 - 0.6435i
2.0000	10.0952 + 0.6435i
3.0000	11.7936 - 1.6523i
4.0000	11.7936 + 1.6523i
5.0000	13.9924 - 2.5188i
6.0000	13.9924 + 2.5188i
6.9997	16.7307 - 2.8126i
8.0072	16.7307 + 2.8126i
8.9172	19.5024 - 1.9403i
20.8469	19.5024 + 1.9403i

e a segunda é feita com $\varepsilon = -2^{-55}$ e vinte casas decimais

1.00000000000000000000	2.00000000000000000000
3.00000000000000000000	4.00000000000000000006
4.9999999999999998313	6.00000000000000161671
6.99999999999992943323	8.00000000000165688547
8.9999999997670398290	10.0000000021077746302
10.9999999871090421071	12.00000000550956961637
12.99999998319237209708	14.00000003699730702560
14.99999994118412602581	16.00000006682193609884
16.99999994714222105398	18.00000002763308125158
18.9999999142315341462	20.0000000119625986860

Exercício 5.1. Considere o polinômio cúbico

$$f(x) = x^3 + px + q, \quad \text{com } p, q \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

A fórmula de Cardano para uma raiz de f tem a forma

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (22)$$

Se escolhemos

$$p = -1 \quad \text{e} \quad q = 0,$$

o polinômio f tem a forma

$$f(x) = x^3 - x,$$

o qual tem as seguintes raízes

$$x = 0, \quad x = -1, \quad x = 1. \quad (23)$$

Por outro lado, a fórmula de Cardano em (22) fornece a seguinte expressão para uma raiz de f

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}. \quad (24)$$

Concluimos, assim, que cada raiz em (23) pode ser representada da forma em (24). Mostre que isso é possível.

Sugestão. Analise cuidadosamente as expressões

$$\sqrt{-\frac{1}{27}} \quad \text{e} \quad -\sqrt{-\frac{1}{27}}$$

que aparecem em (24).

6 Continuidade das raízes, parte 2

Nesta seção continuaremos com o estudo da continuidade das raízes de um polinômio em função dos seus coeficientes. Iniciaremos esta seção com alguns resultados preliminares que, de certa forma, darão cotas para os valores de raízes de um polinômio. Considere um polinômio mônico

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0. \quad (25)$$

Proposição 6.1 (Lagrange). *Considere p um polinômio mônico como em (25). Se x_0 é uma raiz de p , então*

$$|x_0| \leq \max \left\{ 1, \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \right\}. \quad (26)$$

Demonstração. Suponha que x_0 é raiz de p com $|x_0| \geq 1$. Então,

$$0 = p(x_0) = x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1x_0 + a_0,$$

o que implica

$$x_0^n = -a_{n-1}x_0^{n-1} - \cdots - a_1x_0 - a_0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |x_0^n| &= | -a_{n-1}x_0^{n-1} - a_{n-2}x_0^{n-2} - \cdots - a_1x_0 - a_0 | \\ &\leq |a_{n-1}||x_0|^{n-1} + |a_{n-2}||x_0|^{n-2} + \cdots + |a_1||x_0| + |a_0| \\ &= |x_0|^{n-1} \left(|a_{n-1}| + \frac{1}{|x_0|}|a_{n-2}| + \cdots + \frac{1}{|x_0|^{n-2}}|a_1| + \frac{1}{|x_0|^{n-1}}|a_0| \right) \\ &\leq |x_0|^{n-1} (|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_1| + |a_0|). \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros por $|x_0|^{n-1}$, obtemos

$$|x_0| \leq |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_1| + |a_0|,$$

terminando a prova da proposição. \square

Proposição 6.2 (Cauchy). *Considere p um polinômio mônico como em (25). Se x_0 é uma raiz de p , então*

$$|x_0| \leq 1 + \max \{ |a_j|, j = 0, \dots, n-1 \}. \quad (27)$$

Demonstração. Suponha que x_0 é raiz de p com $|x_0| > 1$. Caso contrário, a prova está completa. Denote por $m = \max\{|a_j|, j = 0, \dots, n-1\}$. Fazendo como foi feito na prova da Proposição 6.1, obtemos

$$|x_0|^n \leq m(|x_0|^{n-1} + \dots + |x_0| + 1) = m \frac{|x_0|^n - 1}{|x_0| - 1}.$$

Portanto,

$$|x_0| - 1 \leq m \frac{|x_0|^n - 1}{|x_0|^n} = m \left(1 - \frac{1}{|x_0|^n}\right) \leq m.$$

Assim, $|x_0| - 1 \leq m$, o que implica $|x_0| \leq 1 + m$, terminando a prova da proposição. \square

No estudo a seguir assumiremos:

- O Teorema Fundamental da Álgebra (veja a Seção 11);
- A unicidade da fatoração de um polinômio (decorre diretamente do Teorema Fundamental da Álgebra);
- Teoremas sobre a convergência de seqüências nos espaços euclidianos complexos (veja [23]).

Uma demonstração do Teorema 6.1 pode ser encontrada em [23].

Teorema 6.1. *Considere $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em \mathbb{R}^n ou em \mathbb{C}^n . Se a seqüência $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada, então ela tem uma subseqüência convergente.*

Considere dois polinômios mônicos p e q

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n),$$

$$q(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0 = (x - \mu_1)(x - \mu_2) \cdots (x - \mu_n) \quad (28)$$

com raízes $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}$, listadas com suas multiplicidades.

As seguintes afirmações serão utilizadas mais adiante. Embora sejam intuitivas, elas precisariam ser demonstradas. Aqui, as assumiremos como verdadeiras.

Afirmção 1. Se os coeficientes $a_i \rightarrow b_i$, para todo $i = 1, \dots, n-1$, então $p(x) \rightarrow q(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Afirmção 2. Se as raízes $\lambda_i \rightarrow \mu_i$, para todo $i = 1, \dots, n$, então $p(x) \rightarrow q(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 6.2. *Suponha que $\mu \in \mathbb{C}$ é uma raiz de q de multiplicidade m . Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|a_i - b_i| < \delta$, $i = 1, \dots, n-1$, então p tem exatamente m raízes em $B(\mu, \varepsilon)$.*

Demonstração. A prova será feita por contradição. Existe uma sequência de polinômios $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ que converge para o polinômio q , mas cada polinômio p_k tem menos que m raízes em $B(\mu, \varepsilon)$. Visto que os coeficientes dos polinômios $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergem, eles são limitados. Considere, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$p_k(x) = (x - \alpha_1^{(k)}) \cdots (x - \alpha_n^{(k)}).$$

Pelas Proposições 6.1 e 6.2, a sequência de raízes

$$(\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_n^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$$

é limitada. Portanto, pelo Teorema 6.1, esta sequência tem uma subsequência convergente para algum ponto

$$(\beta_1, \dots, \beta_n)$$

com a propriedade: no máximo $m - 1$ dos β_i são iguais a μ . Denote a correspondente subsequência de polinômios por $(p_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$. Como a sequência de polinômios $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge para o polinômio q , segue, por um lado, que $p_{k_i}(x) \rightarrow q(x)$, para todo x . Por outro lado, pela Afirmação 2,

$$p_{k_i}(x) \rightarrow (x - \beta_1) \cdots (x - \beta_n) \neq q(x),$$

porque no máximo $m - 1$ dos β_i são iguais a μ . Obtemos, assim, uma contradição, terminando a prova do teorema. \square

Alguns comentários sobre outras provas da continuidade das raízes com respeito aos coeficientes do polinômio. A prova mais comum e mais encontrada na literatura utiliza o Teorema de Rouché estudado em Análise Complexa. Uma tal prova pode ser encontrada em [2]. Uma prova utilizando funções simétricas e espaços projetivos pode ser encontrada [8] e uma prova utilizando aspectos topológicos pode ser encontrada em [15].

Exercício 6.1. Considere o polinômio

$$p(x) = x^4 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Três raízes de p são: -3 , 2 e 5 . Determine $a_0 + a_1 + a_2$.

Exercício 6.2. Determine a soma de todas as raízes da equação

$$x^{2001} + \left(\frac{1}{2} - x\right)^{2001} = 0.$$

Exercício 6.3. Considere os polinômios

$$p(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 11 \quad e \quad q(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Suponha que as raízes de p são x_1 , x_2 e x_3 e que as raízes de q são $x_1 + x_2$, $x_1 + x_3$ e $x_2 + x_3$. Determine a_2 e a_0 .

Exercício 6.4. Para algum número inteiro m , os dois polinômios

$$p(x) = 1988x^2 + mx + 8891 \quad e \quad q(x) = 8891x^2 + mx + 1988$$

compartilham uma raiz comum. Determine m .

Exercício 6.5. Considere $p = p(x)$ um polinômio com a seguinte propriedade

$$x^{23} + 23x^{17} - 18x^{16} - 24x^{15} + 108x^{14} = (x^4 - 3x^2 - 2x + 9)p(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule a soma dos coeficientes de p .

Exercício 6.6. Considere os polinômios

$$p(x) = x^4 + x^3 - 1 \quad e \quad q(x) = x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1.$$

Suponha que a e b são raízes de p . Mostre que o produto ab é raiz de q .

Exercício 6.7. Luis escolhe um polinômio p de quarto grau com coeficientes inteiros não negativos e desafia Fernando a descobrir os cinco coeficientes de p . Luis deixa Fernando escolher apenas dois valores de x para ajudá-lo a descobrir os coeficientes. Fernando escolhe $x = 1$ e $x = 10$. Luis diz a ele que $p(1) = 9$ e $p(10) = 32013$. Agora Fernando sabe exatamente quais são os coeficientes de p e, como prova, Fernando diz a Luis o valor exato de $p(3)$. Qual é esse valor?

7 Coeficientes e raízes de um polinômio

Considere um polinômio quadrático mônico com coeficientes reais

$$p(x) = x^2 + a_1x + a_0.$$

Suponha que r_1 e r_2 sejam as raízes de p . Assim,

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2.$$

Comparando os coeficientes de p , obtemos

$$r_1 + r_2 = -a_1 \quad e \quad r_1r_2 = (-1)^2 a_0. \quad (29)$$

Considere agora um polinômio cúbico mônico com coeficientes reais

$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Suponha que r_1 , r_2 e r_3 sejam as raízes de p . Assim,

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \\ &= x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x - r_1r_2r_3. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de p , obtemos

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 &= -a_2, \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 &= a_1, \\ r_1r_2r_3 &= (-1)^3 a_0. \end{aligned} \tag{30}$$

As expressões em (29) e (30) são casos particulares das conhecidas *fórmulas de Viète* ou *fórmulas de Vieta*, veja [18].

Considere um polinômio mônico com coeficientes reais

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0.$$

Suponha que r_1, r_2, \dots, r_n sejam as raízes de p . Pode-se mostrar por indução que

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + \cdots + r_n &= -a_{n-1}, \\ r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n &= a_{n-2}, \\ &\vdots \\ r_1r_2 \cdots r_n &= (-1)^n a_0. \end{aligned} \tag{31}$$

No caso em que o polinômio não é mônico

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

as fórmulas de Viète são escritas como

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + \cdots + r_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ &\vdots \\ r_1r_2 \cdots r_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{aligned} \tag{32}$$

As fórmulas de Viète relacionam as raízes de um polinômio p com seus coeficientes. Notemos que os coeficientes de p são números reais. Logo, mesmo que algumas raízes de p possam ser complexas, as expressões em (31) resultam em números reais.

A seguir, estudaremos alguns polinômios enfatizando as relações entre seus coeficientes e suas raízes. Os estudos desses polinômios foram deixados como exercícios na Seção 6.

Exemplo 7.1. Considere o polinômio

$$p(x) = x^4 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Três raízes de p são: -3 , 2 e 5 . Determinaremos a soma $a_0 + a_1 + a_2$. Denote por

$$r_1 = -3, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 5 \quad \text{e} \quad r_4$$

as raízes de p . Das fórmulas de Viète,

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -a_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_4 = -4.$$

Por um lado,

$$p(1) = 1 + a_2 + a_1 + a_0.$$

Por outro lado, como

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4) = (x + 3)(x - 2)(x - 5)(x + 4),$$

segue que

$$p(1) = (1 + 3)(1 - 2)(1 - 5)(1 + 4) = 80.$$

Logo,

$$1 + a_2 + a_1 + a_0 = p(1) = 80,$$

de onde

$$a_2 + a_1 + a_0 = 79.$$

Exemplo 7.2. Determinaremos a soma de todas as raízes da equação

$$x^{2001} + \left(\frac{1}{2} - x\right)^{2001} = 0.$$

Pode-se utilizar as fórmulas de Viète. Faremos a análise de uma outra maneira. Observe que o polinômio que define a equação acima tem grau 2000. Logo, tal polinômio tem 2000 raízes, contadas com as multiplicidades. Se x_0 é uma dessas raízes, então $y_0 = 1/2 - x_0$ também é uma raiz. Portanto, são 1000 pares de raízes. Em cada par, a soma é $1/2$. Logo, a soma de todas as raízes da equação acima é 500.

Exemplo 7.3. Considere os polinômios

$$p(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 11 \quad \text{e} \quad q(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Suponha que as raízes de p são x_1 , x_2 e x_3 e que as raízes de q são $x_1 + x_2$, $x_1 + x_3$ e $x_2 + x_3$. Determinaremos a_2 e a_0 . Determinação de a_2 . Das fórmulas de Viète,

$$x_1 + x_2 + x_3 = -3,$$

de onde

$$a_2 = -((x_1 + x_2) + (x_1 + x_3) + (x_2 + x_3)) = -2(x_1 + x_2 + x_3) = 6.$$

Determinação de a_0 . Como vimos acima, $x_1 + x_2 + x_3 = -3$, de onde

$$x_1 + x_2 = -3 - x_3, \quad x_1 + x_3 = -3 - x_2, \quad x_2 + x_3 = -3 - x_1.$$

Das fórmulas de Viète,

$$\begin{aligned} a_0 &= (-1)^3(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) \\ &= -(-3 - x_3)(-3 - x_2)(-3 - x_1) = -p(-3). \end{aligned}$$

Assim, por um cálculo simples,

$$a_0 = -p(-3) = 23.$$

Exemplo 7.4. Para algum número inteiro m , os dois polinômios

$$p(x) = 1988x^2 + mx + 8891 \quad e \quad q(x) = 8891x^2 + mx + 1988$$

compartilham uma raiz comum. Determinaremos m . Seja x_0 a raiz comum de p e de q . Calculando

$$p(x_0) - q(x_0) = 0,$$

obtemos

$$x_0 = \pm 1.$$

Assim,

$$p(x_0) = p(\pm 1) = 1988 + m(\pm 1) + 8891 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm 10879.$$

Exemplo 7.5. Considere $p = p(x)$ um polinômio com a seguinte propriedade

$$x^{23} + 23x^{17} - 18x^{16} - 24x^{15} + 108x^{14} = (x^4 - 3x^2 - 2x + 9)p(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcularemos a soma dos coeficientes de p . A soma dos coeficientes de p é obtida calculando $p(1)$. Assim, avaliando a equação dada em $x = 1$, obtemos

$$1 + 23 - 18 - 24 + 108 = (1 - 3 - 2 + 9)p(1),$$

implicando que a soma dos coeficientes de p é

$$p(1) = 18.$$

Exemplo 7.6. *Considere os polinômios*

$$p(x) = x^4 + x^3 - 1 \quad e \quad q(x) = x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1.$$

Suponha que a e b são raízes de p . Mostraremos que o produto ab é raiz de q . Denote por c e d as outras raízes de p . As fórmulas de Viète podem ser escritas como

$$a + b + c + d = -1,$$

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0,$$

$$abc + abd + acd + bcd = 0,$$

$$abcd = (-1)^4(-1) = -1.$$

Definindo

$$\alpha = ab, \quad \beta = cd, \quad s = a + b, \quad t = c + d,$$

as fórmulas de Viète são escritas da forma

$$s + t = -1,$$

$$\alpha + ts + \beta = 0,$$

$$\alpha t + \beta s = 0,$$

$$\alpha\beta = -1.$$

Da primeira e quarta equações acima, obtemos

$$t = -1 - s \quad e \quad \beta = -\frac{1}{\alpha}.$$

Substituindo essas expressões na segunda e terceira fórmulas de Viète, obtemos

$$\alpha - s^2 - s - \frac{1}{\alpha} = 0 \quad e \quad \alpha(-1 - s) - \frac{s}{\alpha} = 0.$$

Resolvendo a última equação para s , isto é,

$$s = -\frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2},$$

e substituindo na primeira equação, resulta em

$$\alpha - \left(\frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \right)^2 + \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} - \frac{1}{\alpha} = 0.$$

Esta última equação é equivalente a

$$\alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^3 - \alpha^2 - 1 = 0.$$

Ora, mas a equação acima é exatamente

$$q(\alpha) = 0, \quad \alpha = ab.$$

Concluimos, assim, que ab é raiz de q , como queríamos mostrar.

Exemplo 7.7. Luis escolhe um polinômio p de grau quatro com coeficientes inteiros não negativos e desafia Fernando a descobrir os cinco coeficientes de p . Luis deixa Fernando escolher apenas dois valores de x para ajudá-lo a descobrir os coeficientes. Fernando escolhe $x = 1$ e $x = 10$. Luis diz a ele que $p(1) = 9$ e $p(10) = 32013$. Agora Fernando sabe exatamente quais são os coeficientes de p e, como prova, Fernando diz a Luis o valor exato de $p(3)$. Qual é esse valor?

Como os coeficientes de p são inteiros não negativos e $p(1) = 9$, segue que a soma dos coeficientes é 9. Assim, os coeficientes têm, cada um deles, um único dígito. Logo,

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

com $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} p(10) &= a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 = 32013 \\ &= 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 3. \end{aligned}$$

Portanto,

$$p(x) = 3x^4 + 2x^3 + x + 3,$$

logo, $p(3) = 303$.

Exercício 7.1. Considere o polinômio

$$p(x) = x^6 + x^5 + 6x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 2. \quad (33)$$

1. Determine a sequência finita σ de variações de sinal de p .
2. Utilizando a Regra de Sinais de Descartes, analise as possibilidades para as raízes de p .
3. Considerando σ , exiba um polinômio com o número máximo de raízes reais positivas e com o número máximo de raízes reais negativas permitidos pela Regra de Sinais de Descartes.
4. Utilizando as proposições de Lagrange e Cauchy, determine cotas para as raízes de p .
5. Utilizando um software, encontre as raízes de p .
6. Plote as raízes de p no plano complexo junto com o disco de menor raio determinado em 4. acima.

7. Considere o polinômio

$$q(x) = p(x) + \frac{1}{10}x.$$

Plote as raízes dos polinômios p e q junto com o disco de menor raio determinado no item 4 acima.

8 O Teorema de Siebeck-Marden-Bôcher, parte 1

Nesta seção e na próxima estudaremos o Teorema de Siebeck-Marden-Bôcher. A principal referência bibliográfica é [17]. O Teorema de Siebeck-Marden-Bôcher, chamado de Teorema de Marden, estabelece uma linda relação entre a geometria de figuras planas e as posições relativas das raízes de um polinômio e de sua derivada. Veja a Figura 14.

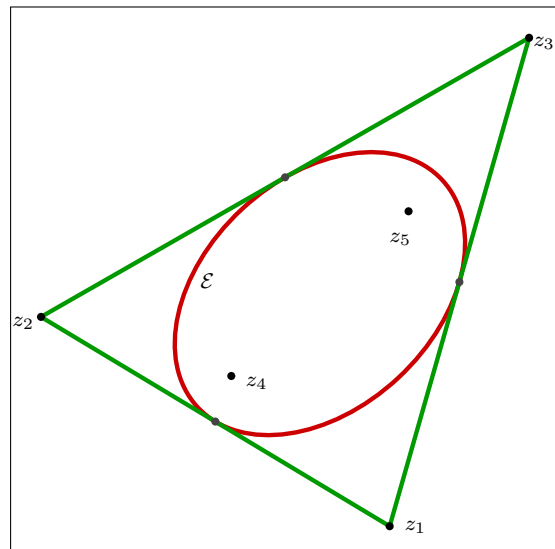


Figura 14: Ilustração do Teorema 8.1: o triângulo T com vértices nas raízes z_1 , z_2 e z_3 de p ; a elipse inscrita em T e tangente aos seus lados nos pontos médios. Os pontos z_4 e z_5 , raízes de p' , são os focos da elipse.

Teorema 8.1 (Siebeck-Marden-Bôcher). Considere p um polinômio de grau três com coeficientes complexos, cujas raízes z_1 , z_2 e z_3 são pontos não colineares no plano complexo. Seja T o triângulo com vértices em z_1 , z_2 e z_3 . Existe uma única elipse \mathcal{E} inscrita em T e tangente aos seus lados em seus pontos médios. Os focos de \mathcal{E} são as raízes de p' .

Observação 8.1. No caso em que T é um triângulo equilátero, a elipse é um círculo e os focos colapsam no centro do círculo.

Exemplo 8.1. Considere o polinômio

$$p(z) = z^3 - (11 + i 13)z^2 - (16 - i 98)z + (138 - i 134),$$

isto é,

$$p(z) = z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

com coeficientes complexos

$$a_2 = -(11 + i 13), \quad a_1 = -(16 - i 98), \quad a_0 = 138 - i 134.$$

Derivando, obtemos

$$p'(z) = 3z^2 - (22 + i 26)z - (16 - i 98).$$

As raízes de p são

$$z_1 = 1 + i 7, \quad z_2 = 7 + i 5, \quad z_3 = 3 + i.$$

Já as raízes de p' são

$$z_4 = 3 + i 5, \quad z_5 = \frac{13}{3} + i \frac{11}{3}.$$

Considere o triângulo T cujos vértices são as raízes de p . Pelo Teorema 8.1, existe uma única elipse \mathcal{E} tangente aos lados de T nos seus pontos médios e tendo como focos as raízes de p' . Veja a Figura 15.

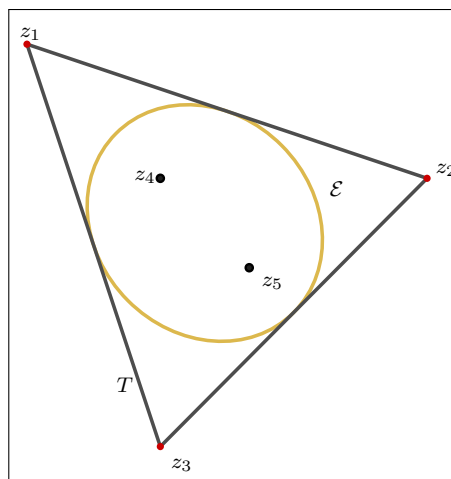


Figura 15: Ilustração do Exemplo 8.1: o triângulo T com vértices nas raízes z_1 , z_2 e z_3 de p ; a elipse \mathcal{E} inscrita em T , tangente aos lados de T nos seus pontos médios. Os focos da elipse são os pontos z_4 e z_5 , raízes de p' .

Precisamos fazer uma digressão para estudarmos algumas propriedades envolvendo elipses. Considere uma reta L no plano, A e B pontos em um mesmo semiplano determinado por L . Tome C um ponto sobre a reta L . Deseja-se determinar a posição do ponto $C \in L$ de modo que a soma das distâncias

$$d(A, C) + d(C, B)$$

seja mínima. Veja a Figura 16.

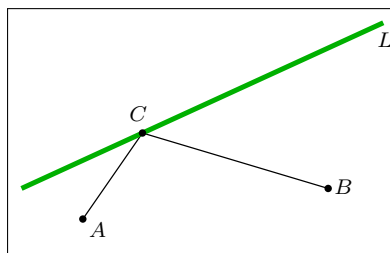


Figura 16: Deseja-se minimizar $d(A, C) + d(C, B)$ com $C \in L$.

Proposição 8.1. *Nas condições anteriores, $C \in L$ minimiza a soma das distâncias $d(A, C) + d(C, B)$ se, e somente se, os ângulos que os segmentos AC e BC fazem com L são iguais. Veja a Figura 17.*

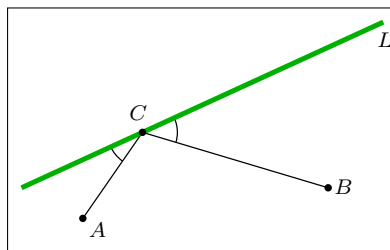


Figura 17: Os ângulos que AC e BC fazem com L são iguais.

Demonstração. Considere o ponto A_1 obtido pela reflexão do ponto A em relação à reta L . Veja a Figura 18.

Note que

$$d(A_1, L) = d(A, L).$$

Considere o segmento de reta BA_1 e C o ponto de interseção desse segmento com a reta L . Veja a Figura 19.

Construa o segmento AC e note que o triângulo $\triangle ACA_1$ é isósceles, uma vez que

$$d(A, C) = d(A_1, C).$$

Veja a Figura 20.

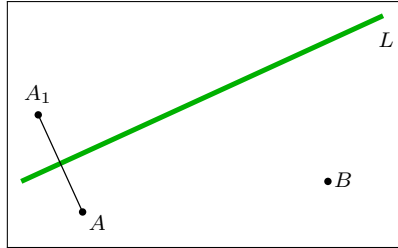


Figura 18: A_1 é obtido de A pela reflexão em relação à reta L .

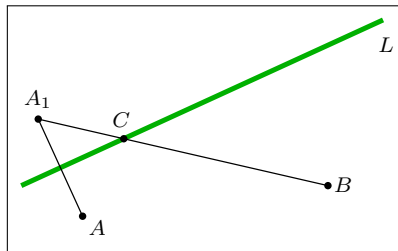


Figura 19: Segmento de reta BA_1 e $C \in L$.

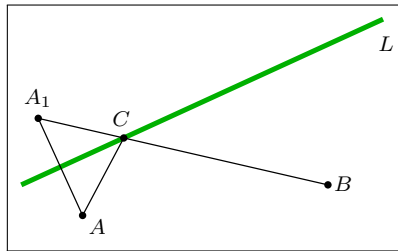


Figura 20: O triângulo $\triangle ACA_1$ é isósceles.

Concluimos que a soma das distância $d(A, C) + d(C, B)$ é mínima se, e somente se, a soma das distâncias $d(A_1, C) + d(C, B)$ é mínima, isto é, se, e somente se, $C \in L$ está no segmento BA_1 . Como o triângulo $\triangle ACA_1$ é isósceles, são iguais os ângulos que os segmentos A_1C e AC fazem com L . Veja a Figura 21.

Por outro lado, os ângulos que os segmentos A_1C e BC fazem com L também são iguais. Veja a Figura 22.

Em resumo, $C \in L$ minimiza a soma das distâncias se, e somente se, os segmentos AC e BC fazem ângulos iguais com L . Veja a Figura 23.

□

Proposição 8.2 (Propriedade refletora da elipse). *Considere uma elipse \mathcal{E} com focos F_1 e F_2 . Seja $C \in \mathcal{E}$. Então, os segmentos F_1C e F_2C fazem ângulos iguais com a reta tangente a \mathcal{E} no ponto C . Veja a Figura 24.*

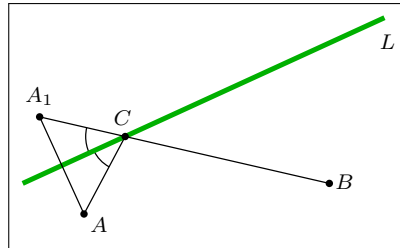


Figura 21: Os ângulos que A_1C e AC fazem com L são iguais.

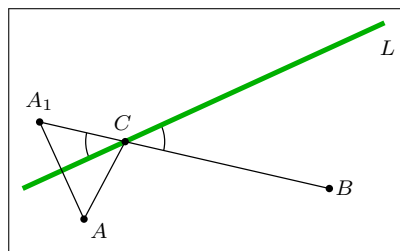


Figura 22: Os ângulos que A_1C e BC fazem com L são iguais.

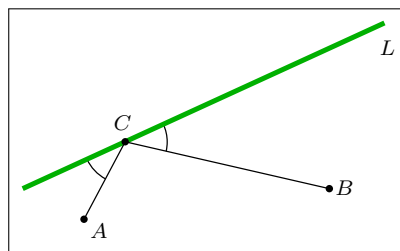


Figura 23: Os ângulos que AC e BC fazem com L são iguais.

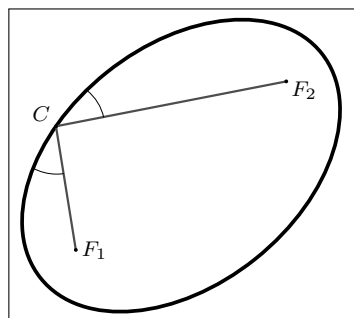


Figura 24: Os ângulos que F_1C e F_2C fazem com \mathcal{E} são iguais.

Demonstração. Considere L a reta tangente a \mathcal{E} no ponto C . Pela Proposição 8.1 é suficiente provar que $C \in L$ minimiza a soma das distâncias

$$d(F_1, A) + d(F_2, A), \quad \forall A \in L.$$

Veja a Figura 25.

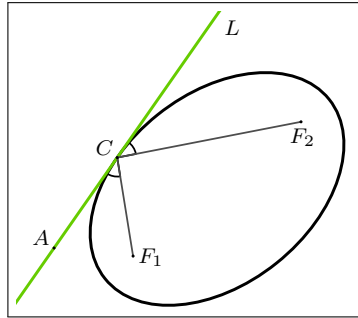


Figura 25: L é reta tangente a \mathcal{E} em C e $A \in L$.

Considere $A \in L$ e os segmentos F_1A e F_2A . Veja a Figura 26.

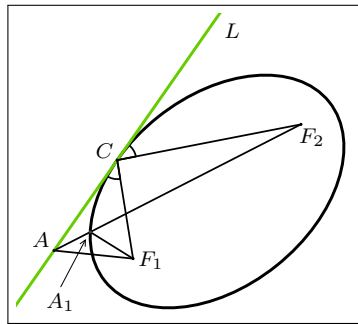


Figura 26: L é reta tangente a \mathcal{E} em C e $A \in L$.

Denote por A_1 o ponto de interseção do segmento F_2A com \mathcal{E} . Utilizando a fato de que as somas das distâncias de quaisquer pontos da elipse aos focos é constante, obtemos

$$\begin{aligned} d(F_1, C) + d(F_2, C) &= d(F_1, A_1) + d(F_2, A_1) \\ &\leq d(F_1, A) + d(A, A_1) + d(F_2, A_1) \\ &= d(F_1, A) + d(F_2, A). \end{aligned}$$

Em resumo,

$$d(F_1, C) + d(F_2, C) \leq d(F_1, A) + d(F_2, A), \quad \forall A \in L.$$

A proposição está demonstrada. \square

Proposição 8.3. *Considere uma elipse \mathcal{E} com focos F_1 e F_2 . Seja A um ponto na região exterior à elipse. Considere as duas semirretas que contém A e são tangentes a \mathcal{E} . Denote por G_1 e G_2 esses pontos de tangência. Então, os ângulos $\widehat{F_1AG_1}$ e $\widehat{F_2AG_2}$ são iguais. Veja a Figura 27.*

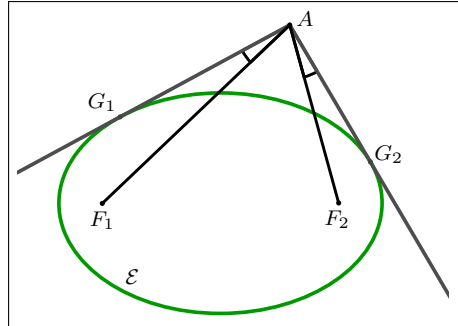


Figura 27: A elipse \mathcal{E} , o ponto A e os pontos G_1 e G_2 .

Demonstração. Como na prova da Proposição 8.1, considere os pontos H_1 e H_2 obtidos pelas reflexões dos pontos F_1 e F_2 em relação às semirretas AG_1 e AG_2 , respectivamente. Veja a Figura 28.

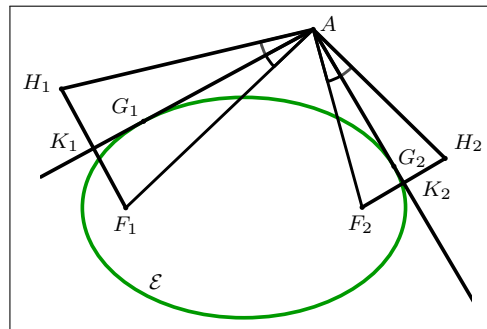


Figura 28: A elipse \mathcal{E} , o ponto A e os pontos H_1 e H_2 .

Segue que os triângulos $\triangle AF_1H_1$ e $\triangle AF_2H_2$ são isósceles. Com isto, é suficiente mostrarmos que os ângulos $\widehat{F_1AH_1}$ e $\widehat{F_2AH_2}$ são iguais. Considere os segmentos F_1H_2 e F_2H_1 . Como vimos na prova da Proposição 8.1, esses segmentos intersectam a elipse \mathcal{E} nos pontos G_1 e G_2 . Veja a Figura 29.

Mostraremos que os triângulos $\triangle AH_1F_2$ e $\triangle AH_2F_1$ são congruentes. Observe que $d(A, H_1) = d(A, F_1)$ e $d(A, F_2) = d(A, H_2)$. Falta mostrarmos que $d(F_1, H_2) = d(F_2, H_1)$. Utilizando a fato de que as somas das distâncias de quaisquer pontos da elipse aos focos é constante, obtemos

$$\begin{aligned} d(F_2, H_1) &= d(F_1, G_1) + d(G_1, F_2) \\ &= d(F_1, G_2) + d(G_2, F_2) = d(F_1, H_2). \end{aligned}$$

Assim, os triângulos $\triangle AH_1F_2$ e $\triangle AH_2F_1$ são congruentes. Isto implica que os ângulos $\widehat{H_1AF_2}$ e $\widehat{F_1AH_2}$ são iguais. Mas,

$$\widehat{H_1AF_2} = \widehat{H_1AF_1} + \widehat{F_1AF_2}$$

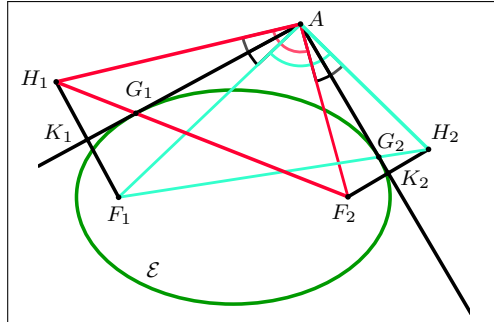


Figura 29: Os triângulos $\triangle AH_1F_2$ (vermelho) e $\triangle AH_2F_1$ (azul).

e

$$\widehat{F_1AH_2} = \widehat{F_1AF_2} + \widehat{F_2AH_2}.$$

Logo,

$$\widehat{H_1AF_1} = \widehat{F_2AH_2},$$

como queríamos mostrar. Em resumo, a proposição está demonstrada. \square

Na próxima seção utilizaremos os resultados aqui estudados, principalmente a Proposição 8.3, para demonstrarmos o Teorema 8.1.

Exercício 8.1. Considere a reta

$$L = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{2}x \right\}. \quad (34)$$

Fixe os pontos $A = (0, 1)$ e $B = (3, 4)$.

- (a) Mostre que A e B estão em um mesmo semiplano determinado por L .
 (b) Determine explicitamente as coordenadas do ponto $C \in L$ que minimiza

$$d(A, P) + d(P, B), \quad \forall P \in L.$$

Faça um esboço (desenho) ilustrando as suas análises.

9 O Teorema de Siebeck-Marden-Bôcher, parte 2

Nesta seção será feita a prova do Teorema 8.1. Faremos alguns preparativos. Primeiramente, note que podemos escalonar, rodar e transladar o triângulo T de qualquer maneira conveniente. Todas as curvas e pontos envolvidos manterão as suas posições relativas.

No plano complexo essas operações (escalonar, rodar e transladar) são conseguidas através de uma função afim

$$M : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad M(z) = \alpha z + \beta,$$

sendo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ constantes, com $\alpha \neq 0$. De fato, multiplicar z por $\alpha = r e^{i\theta}$ produz um escalonamento por r e uma rotação por θ , enquanto somar β produz uma translação.

Olhando para a função afim M geometricamente, observamos que escalar, rodar e transladar a Figura 14 preserva todos os ingredientes envolvidos. Assim, a imagem do triângulo T é um triângulo semelhante, a imagem da elipse inscrita a T ainda é uma elipse inscrita tangente ao novo triângulo nos pontos médios dos seus lados.

Falta mostrar apenas que as imagens dos focos da elipse original são os focos da elipse transformada. Considere o polinômio (mônico) original

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$$

e o polinômio transformado

$$p_M(z) = (z - M(z_1))(z - M(z_2))(z - M(z_3)).$$

Deste modo,

$$p_M(M(z)) = (M(z) - M(z_1))(M(z) - M(z_2))(M(z) - M(z_3)). \quad (35)$$

Note que

$$M(z) - M(z_j) = \alpha(z - z_j), \quad j = 1, 2, 3.$$

Assim, a equação (35) pode ser escrita da forma

$$p_M(M(z)) = \alpha^3(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = \alpha^3 p(z).$$

Derivando ambos os membros da equação acima, resulta

$$\alpha^3 p'(z) = p'_M(M(z)) M'(z) = p'_M(M(z)) \alpha,$$

o que implica em

$$p'_M(M(z)) = \alpha^2 p'(z).$$

Da última equação concluímos: z é uma raiz de p' se, e somente se, $M(z)$ é uma raiz de p'_M . Isto é o que queríamos mostrar.

Na Seção 8 fizemos uma digressão para estudarmos algumas propriedades envolvendo elipses. Em particular, foram estudadas três proposições. Utilizaremos esses resultados na prova do Teorema 8.1.

Lema 9.1 (Marden). *Considere p um polinômio cúbico com raízes $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, vértices do triângulo T , como no enunciado do Teorema 8.1. Então, a elipse com focos nas raízes de p' e passando pelo ponto médio de um lado do triângulo T é, de fato, tangente a esse lado de T .*

Demonstração. Conforme observado acima, sem perda de generalidade, podemos rodar, transladar e escalonar o triângulo da maneira que escolhermos. Organizaremos a prova da seguinte maneira: um lado do triângulo estará ao longo do eixo x (eixo real) centrado na origem e de comprimento 2, enquanto o vértice oposto estará no semiplano superior. Com essas escolhas, os vértices de T (as raízes de p) estão em

$$z_1 = -1, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = a + ib, \quad b > 0.$$

Estudaremos a elipse \mathcal{E} passando pela origem, que é o ponto médio do lado de T que está no eixo x . Para mostrar que a elipse \mathcal{E} é tangente a este lado, mostraremos que as retas que vão da origem até cada foco de \mathcal{E} fazem ângulos iguais com o eixo x . Veja a Proposição 8.2. Com as escolhas acima,

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 - z_3 z^2 - z + z_3.$$

Derivando, obtemos

$$p'(z) = 3z^2 - 2z_3 z - 1 = 3 \left(z^2 - \frac{2z_3}{3} z - \frac{1}{3} \right).$$

Denote as raízes de p' por

$$z_4 = r_4 e^{i\theta_4} \quad \text{e} \quad z_5 = r_5 e^{i\theta_5}, \quad 0 \leq \theta_4, \theta_5 < 2\pi.$$

Das fórmulas de Viète,

$$z_4 + z_5 = \frac{2z_3}{3} \quad \text{e} \quad z_4 z_5 = -\frac{1}{3}.$$

Da primeira equação acima concluímos que pelo menos uma das raízes de p' está no semiplano superior, pois, $b > 0$. Já a segunda equação nos informa que $\theta_4 + \theta_5 = \pi$. Combinando as duas afirmações, concluímos que ambas as raízes de p' estão no semiplano superior. Considere os segmentos de retas unindo essas raízes à origem. Os ângulos que esses segmentos fazem com o eixo x positivo são suplementares. Assim, ou ambas as raízes estão no eixo y (eixo imaginário), ou uma raiz forma um ângulo agudo com o eixo x positivo e a outra raiz forma um ângulo igual com o eixo x negativo. Em ambos os casos, isto mostra que os segmentos de retas dos focos até a origem formam ângulos iguais com o eixo x , que é, portanto, a reta tangente da elipse na origem. \square

Lema 9.2 (Bôcher). *Considere p um polinômio cúbico com raízes $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, vértices do triângulo T , como no enunciado do Teorema 8.1. Considere a elipse com focos nas raízes de p' a qual é tangente a um lado do triângulo T no seu ponto médio (veja Lema 9.1). Então, esta elipse é tangente aos outros dois lados de T .*

Assumiremos, por um momento, que o Lema 9.2 está demonstrado. Utilizaremos os Lemas 9.1 e 9.2 para demonstrarmos o Teorema 8.1. Depois, faremos a prova do Lema 9.2.

Prova do Teorema 8.1. Suponha que o polinômio p , suas raízes z_j e o triângulo T são como no enunciado do Teorema 8.1. Usando as raízes de p' como focos, desenhe uma elipse \mathcal{E} que passe pelo ponto médio de um lado do triângulo T . Pelo Lema 9.1, \mathcal{E} é na verdade tangente a esse lado de T . Pelo Lema 9.2, \mathcal{E} também é tangente aos outros dois lados de T . Afirmamos que os pontos de tangência com esses outros dois lados de T devem ser os pontos médios.

Caso contrário, repita a construção acima com um novo lado, produzindo uma elipse \mathcal{E}' . Como \mathcal{E} e \mathcal{E}' têm os mesmos focos e são ambas tangentes à mesma reta (na verdade, a três retas), eles devem, na verdade, coincidir. Mas, isto mostra que ambas \mathcal{E} e \mathcal{E}' intersectam o novo lado no mesmo ponto, nomeadamente, o ponto médio. Por simetria, a mesma conclusão vale para o lado restante do triângulo. Assim, a elipse original \mathcal{E} é tangente a todos os três lados nos seus pontos médios. A prova do Teorema 8.1 está completa. \square

Prova do Lema 9.2. Como antes, estamos livres para posicionar o triângulo T da maneira que desejarmos. A elipse \mathcal{E} é tangente a um lado do triângulo T e novamente colocamos esse lado ao longo do eixo x (eixo real). Porém, desta vez colocamos um vértice na origem e o outro em 1, isto é, $z_1 = 0$ e $z_2 = 1$. O outro vértice está em

$$z_3 = a + ib, \quad b > 0.$$

Assim,

$$p(z) = z(z-1)(z-z_3) = z^3 - (1+z_3)z^2 + z_3z.$$

Derivando, obtemos

$$p'(z) = 3z^2 - 2(1+z_3)z + z_3.$$

De uma fórmula de Viète,

$$z_4 + z_5 = \frac{2}{3}(1+z_3),$$

implicando que, pelo menos, uma das raízes está no semiplano superior. Sabemos que essas raízes são os focos de uma elipse \mathcal{E} tangente ao eixo x . Portanto, ambas as raízes estão no semiplano superior, permitindo-nos expressá-las da forma

$$z_4 = r_4 e^{i\theta_4} \quad \text{e} \quad z_5 = r_5 e^{i\theta_5}, \quad 0 < \theta_4 \leq \theta_5 < 2\pi.$$

Da outra fórmula de Viète,

$$z_4 z_5 = \frac{z_3}{3}.$$

Isto implica que $\theta_4 + \theta_5$ é igual ao ângulo que o segmento $0z_3$ faz com o eixo positivo x . Assim, o ângulo entre os segmentos $0z_5$ e $0z_3$ é igual a θ_4 . Veja a Figura 30.

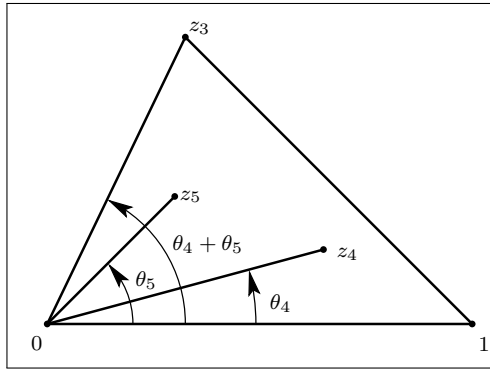


Figura 30: O ângulo entre $0z_5$ e $0z_3$ é igual a θ_4 .

Aplicaremos a Proposição 8.3 com a origem no papel do ponto A , exterior à elipse \mathcal{E} . Que a origem é exterior à elipse \mathcal{E} é imediato, visto que o eixo x é, por construção, tangente à elipse \mathcal{E} no ponto $x = 1/2$. Considere as duas semirretas que partem da origem e que são tangentes à elipse \mathcal{E} . Uma delas é, por construção, o eixo x positivo e a outra será denotada por L . Denote por β o ângulo entre o segmento $0z_5$ e L . Pela Proposição 8.3, o ângulo entre o segmento $0z_5$ e L é igual ao ângulo entre o segmento $0z_4$ e o eixo x . Em outras palavras, $\beta = \theta_4$. Veja a Figura 31.

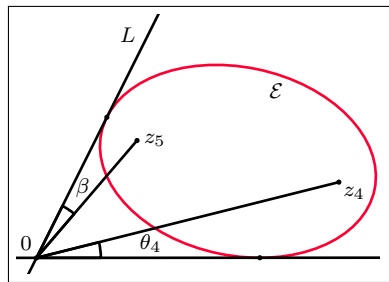


Figura 31: \mathcal{E} é tangente a $0z_3$ porque $\beta = \theta_4$.

Isto mostra que o lado $0z_3$ de T está contido em L e, portanto, o lado $0z_3$ é tangente à elipse \mathcal{E} . Resta mostrar que o lado $1z_3$ também é tangente à elipse \mathcal{E} . Isto é feito de forma análoga, com o triângulo transladado de modo que os vértices de T estejam em -1 e 0 , em vez de 0 e 1 . Veja a Figura 32. A prova do lema está completa. \square

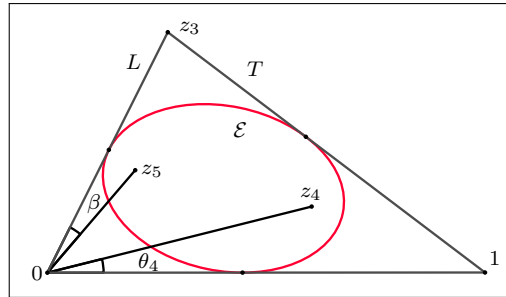


Figura 32: \mathcal{E} é tangente a $0z_3$ e também tangente a $1z_3$.

Encerraremos nosso estudo com algumas considerações gerais a respeito da elipse \mathcal{E} que é citada no Teorema 8.1 (veja a Figura 33):

- O centro de \mathcal{E} é o baricentro de T .
- Existe uma única elipse \mathcal{E}' com centro no baricentro de T e que contém os vértices de T (elipse circunscrita). As elipses \mathcal{E} e \mathcal{E}' estão relacionadas por um fator $1/2$. Elas têm a mesma excentricidade e são similares.
- A área de \mathcal{E} é $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ vezes a área de T .
- A elipse \mathcal{E} é a elipse de maior área dentre todas as elipses inscritas em T .

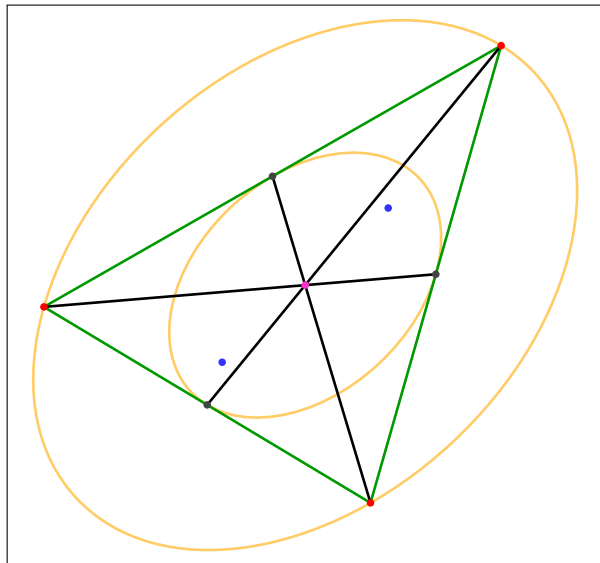


Figura 33: O triângulo T , as elipses \mathcal{E} e \mathcal{E}' .

Exercício 9.1. Considere o polinômio complexo

$$p(z) = z^3 - 1. \quad (36)$$

Pede-se:

1. Encontre as raízes de p .
2. Determine e esboce o triângulo T cujos vértices são as raízes de p .
3. Encontre o polinômio p' , derivada de p .
4. Encontre as raízes de p' .
5. Encontre os pontos médios dos lados de T .
6. Determine e esboce a elipse \mathcal{E} tangente aos lados de T nos seus pontos médios.

10 O Teorema de Gauss-Lucas

Nesta seção estudaremos o Teorema de Gauss-Lucas. Este teorema não aparece na maioria dos livros didáticos de graduação em análise complexa.

Considere o polinômio de grau 5

$$p(x) = (x + 2)(x - 1)^2(x - 3)(x - 5).$$

Os gráficos de p e da sua derivada p' estão na Figura 34.

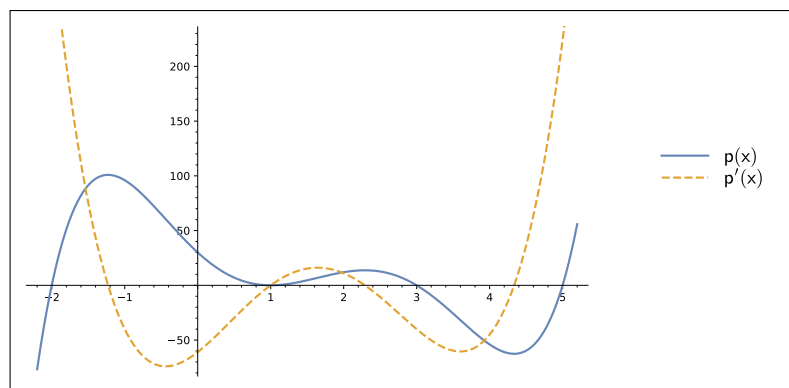


Figura 34: Gráficos de p e da sua derivada p' .

Como as raízes de p' são os pontos críticos de p , parece razoável que elas estejam entre as raízes de p . De fato, isso pode ser visto na Figura 35, onde \bullet representam as raízes de p e \star as raízes de p' no plano complexo.

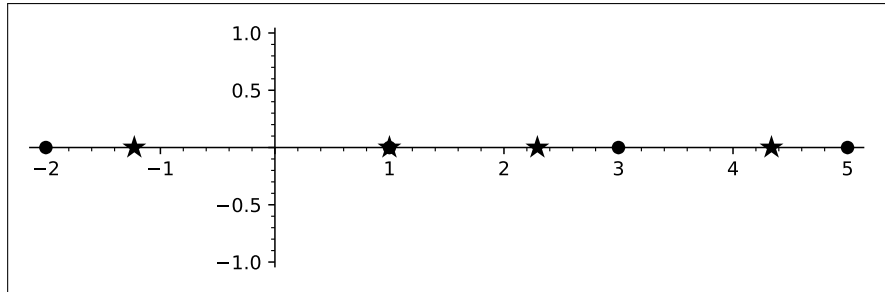


Figura 35: As raízes de p estão representadas por \bullet e as de p' por \star .

Ora, mas deslocamentos verticais no gráfico de p não alteram os seus pontos críticos (as raízes de p'), mas alteram as suas raízes. Por exemplo, considere

$$r(x) = p(x) + 80 = (x + 2)(x - 1)^2(x - 3)(x - 5) + 80.$$

As raízes de r não coincidem com as raízes de p , mas as raízes de r' são exatamente as mesmas de p' . Veja a Figura 36. O polinômio r tem uma raiz real e quatro raízes complexas. Como os coeficientes de r são reais, as raízes complexas aparecem aos pares: $a \pm ib$, com $b \neq 0$.

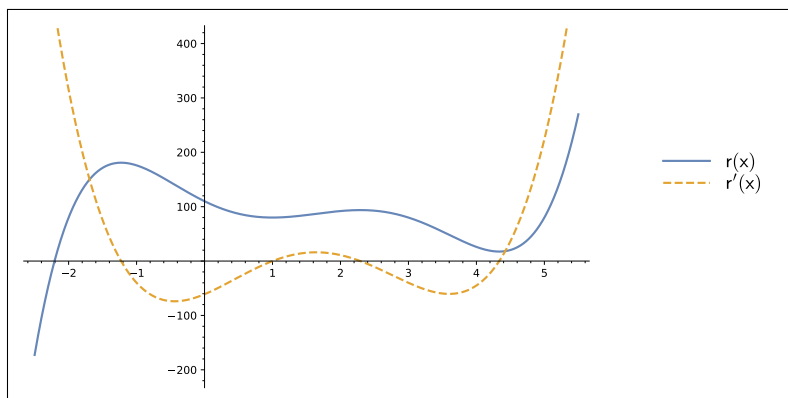


Figura 36: Gráficos de r e da sua derivada $r' = p'$.

As quatro raízes de $r' = p'$ são reais. É razoável que elas estejam “entre” as raízes de r ? Como? A Figura 37 dá alguma esperança de que as raízes de r' estejam, de fato, “entre” as raízes de r .

Observe a simetria das raízes devido ao fato de que os coeficientes de r são números reais. Vejamos um exemplo em que alguns dos coeficientes do polinômio são números complexos não reais. Considere

$$q(z) = z^6 - (2 - i)z^5 - 5z^4 - 3iz^2 + 2z + 2.$$

Na Figura 38 estão representadas as raízes de q e de q' .

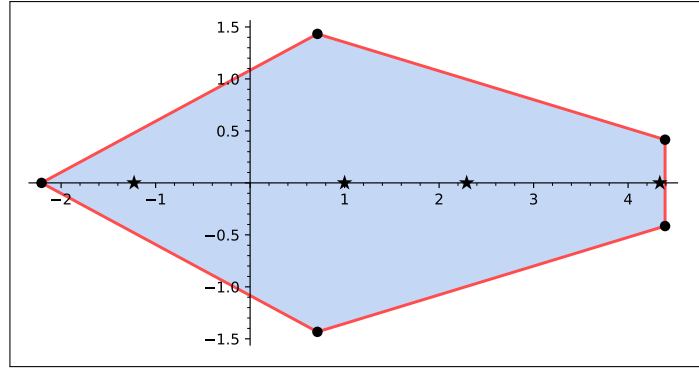


Figura 37: As raízes de r estão representadas por \bullet e as de r' por \star .

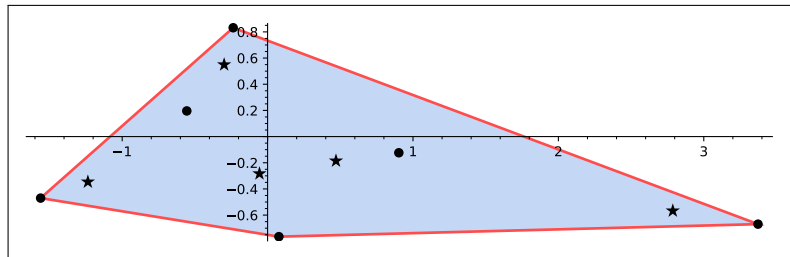


Figura 38: As raízes de q estão representadas por \bullet e as de q' por \star .

Embora não existam simetrias das raízes, parece, novamente, que as raízes de q' estão “entre” as raízes de q . Das figuras anteriores, observe que as raízes (nem todas) dos polinômios são utilizadas nas construções dos “perímetros” dos conjuntos que contêm as raízes das derivadas desses polinômios.

Um conjunto $A \subset \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ é *convexo* se para cada par de pontos em A , o segmento de reta que une os pontos está inteiramente contido em A .

Dado um conjunto de pontos no plano, existe um conjunto convexo mínimo que contêm esses pontos. Esse conjunto mínimo é chamado de fecho convexo. Mais precisamente, considere a seguinte definição.

Considere

$$S = \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subset \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2,$$

um conjunto de pontos no plano (complexo). O *fecho convexo* de S é o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j w_j,$$

satisfazendo as seguintes duas condições:

1. $\alpha_j \geq 0$, para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$;
2. $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$.

Decorre da definição acima que fecho convexo de S é a intersecção de todos os conjuntos convexos contendo os pontos de S .

A seguir enunciaremos o principal teorema desta seção. Veja [3], [12] e [22].

Teorema 10.1 (Teorema de Gauss-Lucas). *Considere um polinômio com coeficientes complexos*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0. \quad (37)$$

Então, as raízes de p' estão contidas no fecho convexo H das raízes de p . Além do mais, se as raízes de p não são colineares e têm todas multiplicidade um, então nenhuma das raízes de p' ocorre no bordo do fecho convexo H .

Demonstração. Faremos a prova do Teorema 10.1 para o caso em que p tem n raízes distintas e nem todas colineares. Os outros casos ficarão como exercícios.

Suponha que w_1, w_2, \dots, w_n são as raízes distintas de p , de modo que

$$p(z) = (z - w_1)(z - w_2) \cdots (z - w_n),$$

e que H é o fecho convexo dessas raízes. Mostraremos, por indução no grau de p , que

$$g(z) = \frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{1}{z - w_1} + \frac{1}{z - w_2} + \cdots + \frac{1}{z - w_n} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - w_j}. \quad (38)$$

Considere $n = 1$, isto é, $p(z) = z - w_1$. Assim, $p'(z) = 1$ e (38) é trivial. Considere $n = 2$. Assim, $p(z) = (z - w_1)(z - w_2)$. Segue que

$$p'(z) = z - w_2 + z - w_1,$$

de onde

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{z - w_2 + z - w_1}{(z - w_1)(z - w_2)} \\ &= \frac{z - w_2}{(z - w_1)(z - w_2)} + \frac{z - w_1}{(z - w_1)(z - w_2)} \\ &= \frac{1}{z - w_1} + \frac{1}{z - w_2}, \end{aligned}$$

implicando em (38).

Hipótese de indução (H.I.): Suponha que (38) é válida para polinômios de grau $k > 2$, isto é, se

$$p_k(z) = (z - w_1)(z - w_2) \cdots (z - w_k),$$

então

$$g_k(z) = \frac{p'_k(z)}{p_k(z)} = \frac{1}{z - w_1} + \frac{1}{z - w_2} + \dots + \frac{1}{z - w_k}.$$

Queremos mostrar que (38) é válida para polinômios de grau $k + 1$. Considere um polinômio de grau $k + 1$, isto é,

$$p_{k+1}(z) = (z - w_1)(z - w_2) \cdots (z - w_k)(z - w_{k+1}) = p_k(z)(z - w_{k+1}).$$

Derivando com relação à variável z , obtemos

$$p'_{k+1}(z) = p'_k(z)(z - w_{k+1}) + p_k(z).$$

Logo,

$$\begin{aligned} g_{k+1}(z) &= \frac{p'_{k+1}(z)}{p_{k+1}(z)} = \frac{p'_k(z)(z - w_{k+1}) + p_k(z)}{p_k(z)(z - w_{k+1})} \\ &= \frac{p'_k(z)(z - w_{k+1})}{p_k(z)(z - w_{k+1})} + \frac{p_k(z)}{p_k(z)(z - w_{k+1})} \\ &= \frac{p'_k(z)}{p_k(z)} + \frac{1}{z - w_{k+1}} \\ &\stackrel{H.I.}{=} \left(\frac{1}{z - w_1} + \frac{1}{z - w_2} + \dots + \frac{1}{z - w_k} \right) + \frac{1}{z - w_{k+1}}. \end{aligned}$$

Na última igualdade foi utilizada a Hipótese de Indução. Portanto,

$$g_{k+1}(z) = \frac{p'_{k+1}(z)}{p_{k+1}(z)} = \frac{1}{z - w_1} + \dots + \frac{1}{z - w_k} + \frac{1}{z - w_{k+1}}.$$

Segue que (38) é satisfeita, terminando a prova por indução.

De (38), $z_0 \in \mathbb{C}$ é uma raiz de p' se, e somente se, $g(z_0) = 0$. Lembremos que, neste caso, $p(z_0) \neq 0$. Para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\frac{1}{z - w_j} = \frac{1}{z - w_j} \frac{\bar{z} - \bar{w}_j}{\bar{z} - \bar{w}_j} = \frac{\bar{z} - \bar{w}_j}{|z - w_j|^2}.$$

Assim, g em (38) pode ser escrita da forma

$$g(z) = \frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{\bar{z} - \bar{w}_j}{|z - w_j|^2}. \quad (39)$$

Considere $z_0 \in \mathbb{C}$ uma raiz de p' . Assim, $g(z_0) = 0$. De (39), temos

$$0 = g(z_0) = \sum_{j=1}^n \frac{\bar{z}_0 - \bar{w}_j}{|z_0 - w_j|^2} = \sum_{j=1}^n \frac{\bar{z}_0}{|z_0 - w_j|^2} - \sum_{j=1}^n \frac{\bar{w}_j}{|z_0 - w_j|^2}.$$

Portanto, $g(z_0) = 0$ se, e somente se,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\bar{z}_0}{|z_0 - w_j|^2} = \sum_{j=1}^n \frac{\bar{w}_j}{|z_0 - w_j|^2}.$$

Mudando o índice do somatório do membro da esquerda e tomando a conjugação complexa em ambos os membros, resulta

$$\sum_{l=1}^n \frac{z_0}{|z_0 - w_l|^2} = \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{|z_0 - w_j|^2},$$

a qual pode ser escrita da forma

$$z_0 \sum_{l=1}^n |z_0 - w_l|^{-2} = \sum_{j=1}^n |z_0 - w_j|^{-2} w_j.$$

Dividindo ambos os membros pelo somatório que aparece no membro da esquerda, segue que

$$z_0 = \sum_{j=1}^n \frac{|z_0 - w_j|^{-2}}{\sum_{l=1}^n |z_0 - w_l|^{-2}} w_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j,$$

sendo

$$\alpha_j = \frac{|z_0 - w_j|^{-2}}{\sum_{l=1}^n |z_0 - w_l|^{-2}}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Decorre, imediatamente, da definição de α_j que:

1. $\alpha_j \geq 0$, para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$;
2. $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$.

Concluimos, assim, que $z_0 \in H$, ou seja, z_0 pertence ao fecho convexo das raízes de p , terminando a prova do teorema. \square

Alguns comentários a respeito do Teorema 10.1. Gauss escreveu o resultado pela primeira vez entre 1836 e 1846, ligando-o a uma interpretação física de um campo de força no plano. Félix Lucas, que aparentemente desconhecera o resultado de Gauss, provou o mesmo teorema em 1870 e traçou a ligação entre os pontos de equilíbrio de um campo de força no plano e os pontos críticos de um polinômio.

Existem outras provas do Teorema 10.1. Uma delas utiliza belos argumentos geométricos. Outra prova utiliza argumentos de física elementar e campos de vetores no plano. Em resumo, o Teorema de Gauss-Lucas é um belo resultado: ele trata da restrição das localizações dos pontos críticos de um polinômio no plano complexo.

Exercício 10.1. Considere um polinômio p de grau $n \geq 2$ em \mathbb{C} . Mostre que, para cada $k \in \{1, \dots, n-1\}$, as raízes do polinômio $p_k = p^{(k)}$, derivada de ordem k de p , estão no fecho convexo H das raízes de p .

Exercício 10.2. Considere o polinômio complexo

$$p(z) = z^7 - \frac{1}{2}z^6 - \frac{1}{4}z^5 - \frac{53}{8}z^4 + \frac{19}{8}z^3 - \frac{23}{8}z^2 + \frac{29}{8}z + \frac{13}{4}. \quad (40)$$

Pede-se:

1. Encontre as raízes de p .
2. Encontre os polinômios

$$p_1 = p', \quad p_2 = p'', \quad p_3 = p''', \quad p_4 = p^{(iv)}, \quad p_5 = p^{(iv)}, \quad p_6 = p^{(vi)},$$

obtidos pelas derivadas sucessivas de p .

3. Encontre as raízes de p_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, mesmo numericamente, utilizando um software.
4. Esboce, no plano complexo, as raízes de p , as raízes de p_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ e o fecho convexo determinado pelas raízes de p .

11 O Teorema Fundamental da Álgebra

O Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) afirma que todo polinômio (complexo) não constante possui uma raiz. Este teorema foi utilizado de forma direta ou indireta em várias seções ao longo destas notas. Nesta seção, ele será enunciado de forma precisa e será apresentada uma demonstração. As principais referências bibliográficas utilizadas são [11], [12] e [28].

Teorema 11.1 (Teorema Fundamental da Álgebra). *Se p é um polinômio (com coeficientes complexos) não constante, então existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$.*

A afirmação do Teorema 11.1 é notável. Nenhum resultado análogo é válido para garantir que existe uma raiz real para um polinômio cujos coeficientes são números reais. Por exemplo, não existe um número real que seja raiz do polinômio $q(x) = x^2 + 1$. Da mesma forma, a consideração de polinômios com coeficientes inteiros (resp. racionais) rapidamente nos força a considerar raízes que não podem ser números inteiros (resp. números racionais). Assim, os números complexos são especiais neste aspecto.

A primeira prova amplamente aceita do Teorema Fundamental da Álgebra foi publicada por Gauss em 1799 na sua tese doutorado, embora pelos padrões atuais essa prova tenha lacunas. Gauss tinha 22 anos quando apresentou essa prova. Em 1814, Argand deu uma nova prova, também com

pequenas lacunas, baseada em uma prova, também com lacunas, devida a d'Alembert e apresentada em 1746.

As provas do TFA podem ser divididas grosseiramente em três categorias:

- Provas topológicas,
- **Provas analíticas,**
- Provas algébricas.

Antes de apresentarmos a prova do Teorema 11.1, precisamos de alguns preliminares. Considere $z \in \mathbb{C}$ não nulo. Dado um inteiro $n \geq 2$, existem exatamente n raízes n -ésimas de z , isto é, n números complexos w_j tais que $(w_j)^n = z$. De fato, escreva z na forma polar, isto é, $z = r e^{i\theta}$ e tome

$$w_j = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2j\pi}{n}}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (41)$$

uma vez que

$$(w_j)^n = \left(r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2j\pi}{n}} \right)^n = r e^{i(\theta+2j\pi)} = r e^{i\theta} = z.$$

Essencialmente, a prova do Teorema 11.1 será dividida em duas partes:

- Existe um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que

$$|p(z_0)| \leq |p(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

- Se z_0 é o ponto de mínimo global determinado na primeira parte, então $p(z_0) = 0$.

Omitiremos a prova da próxima proposição. Ela pode ser encontrada em [23].

Proposição 11.1 (Weierstrass). *Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e D é um compacto, então f possui um valor mínimo e um valor máximo em D .*

Lema 11.1. *Se p é um polinômio de grau maior ou igual a 1, então dado $M > 0$, existe $R > 0$ tal que se $|z| > R$, então $|p(z)| \geq M$.*

Demonstração. A prova é feita por indução no grau de p , $\deg(p)$. Considere $\deg(p) = 1$. Assim, $p(z) = a + bz$, $b \neq 0$. Logo,

$$|p(z)| = |a + bz| \geq |bz| - |a| = |b||z| - |a|.$$

Dado $M > 0$, escolha

$$R = \frac{M + |a|}{|b|}.$$

Assim,

$$|p(z)| \geq |b| \left(\frac{M + |a|}{|b|} \right) - |a| = M,$$

ou seja, $|p(z)| \geq M$.

Hipótese de Indução: o lema é verdadeiro para polinômios de grau $d - 1$.

Queremos mostrar que o lema é verdadeiro para polinômios de grau d . Considere p um polinômio de grau d . Podemos escrever p da forma

$$p(z) = a + zp_1(z),$$

sendo $\deg(p_1) = d - 1$. Pela Hipótese de Indução, dado $M > 0$, escolha $R \geq 1$ tal que, se $|z| > R$, então

$$|p_1(z)| > M + |a|.$$

Então, para $|z| > R$, temos

$$\begin{aligned} |p(z)| &= |a + zp_1(z)| \geq |zp_1(z)| - |a| \\ &= |z||p_1(z)| - |a| \geq |p_1(z)| - |a| \\ &\geq M + |a| - |a| = M, \end{aligned}$$

ou seja, $|p(z)| \geq M$, provando assim o lema. \square

Lema 11.2. *Considere um polinômio p não constante. Então, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que*

$$|p(z_0)| \leq |p(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Demonstração. Considere o polinômio

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Pelo Lema 11.1, existe $R > 0$ tal que, se $|z| > R$, então

$$|p(z)| > 1 + |a_0|.$$

Defina

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}.$$

Como D é compacto, pela Proposição 11.1, existe $z_0 \in D$ tal que

$$|p(z_0)| \leq |p(z)|, \quad \forall z \in D.$$

Mostraremos que $|p(z_0)| \leq |p(z)|$, para todo $z \in \mathbb{C}$. De fato, pois se $z \notin D$, então $|z| > R$ e, assim,

$$|p(z)| \geq 1 + |a_0| > |p(0)|.$$

Como $0 \in D$, $|p(0)| \geq |p(z_0)|$ e, deste modo,

$$|p(z_0)| \leq |p(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

□

Lema 11.3. *Considere um polinômio p não constante. Se $p(z_0) \neq 0$, então $|p(z_0)|$ não é valor mínimo de $|p(z)|$.*

Demonstração. Seja p um polinômio complexo não constante e suponha que z_0 seja um ponto tal que $p(z_0) \neq 0$. Fazendo a mudança de variável $z + z_0$ para z , podemos assumir que $p(0) \neq 0$. Como $p(0) \neq 0$, se multiplicarmos p por $p(0)^{-1}$, então $p(0) = 1$. Em outras palavras, podemos assumir que $z_0 = 0$ e que

$$p(z_0) = p(0) = 1.$$

Deste modo, mostraremos que 1 não é o valor mínimo de $|p(z)|$. Seja k a menor potência de z em p . Assim, p tem a forma

$$p(z) = 1 + a z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots + a_n z^n, \quad a \neq 0.$$

Por (41), tome α a k -ésima raiz de $-a^{-1}$. Fazendo a mudança de variável αz para z , p passa a ter a forma

$$p(z) = 1 - z^k + z^{k+1} g(z),$$

para algum polinômio g . Assuma, agora, z real, positivo e pequeno, muito menor do que 1. Em particular, $|z|^k = z^k < 1$. Assim,

$$|p(z)| \leq |1 - z^k| + z^{k+1} |g(z)| = 1 - z^k (1 - z |g(z)|).$$

Para z pequeno, temos que $z |g(z)|$ também é pequeno. Então, podemos escolher z_* com as exigências acima tal que

$$z_* |g(z_*)| < 1.$$

Com essa escolha, segue que

$$z_*^k (1 - z_* |g(z_*)|) > 0.$$

Logo, $|p(z_*)| < 1 = |p(0)|$, como queríamos mostrar. □

Prova do Teorema 11.1. Considere p um polinômio não constante. Pelo Lema 11.2, $|p(z)|$ admite um valor mínimo global em algum ponto $z_0 \in \mathbb{C}$. Pela contrapositiva do Lema 11.3, $p(z_0) = 0$, ou seja, z_0 é uma raiz de p , terminando a prova do teorema. □

Temos o seguinte corolário.

Corolário 11.1. *Um polinômio complexo p não constante é fatorado completamente em fatores lineares.*

Demonstração. Indução no grau de p . Se $\deg(p) = 1$, o resultado é imediato. Hipótese de Indução. O resultado é verdadeiro se $\deg(p) = k$. Considere um polinômio p de grau $\deg(p) = k + 1$. Pelo Teorema 11.1, p possui uma raiz z_0 . Assim,

$$p(z) = (z - z_0)q(z),$$

sendo q um polinômio de grau k . De fato, se

$$p(z) = a_{k+1}z^{k+1} + \dots + a_1z + a_0,$$

então

$$\begin{aligned} p(z) &= p(z) - p(z_0) \\ &= (a_{k+1}z^{k+1} + \dots + a_1z + a_0) - (a_{k+1}z_0^{k+1} + \dots + a_1z_0 + a_0) \\ &= a_{k+1}(z^{k+1} - z_0^{k+1}) + \dots + a_1(z - z_0) = (z - z_0)q(z). \end{aligned}$$

Pela Hipótese de Indução, o polinômio q é fatorado completamente em fatores lineares. Assim, o polinômio p é fatorado completamente em fatores lineares. \square

O Corolário 11.1 pode ser reescrito da seguinte forma.

Corolário 11.2. *Se p é um polinômio complexo não constante, então p pode ser escrito da forma*

$$p(z) = a(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n),$$

com $a \neq 0$, z_1, \dots, z_n as raízes de p e $n = \deg(p)$.

12 Pontos críticos de funções polinomiais

Diz-se que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possui um *ponto de máximo local* no ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies f(x) \leq f(x_0).$$

De maneira análoga é definido um *ponto de mínimo local*.

Diz-se que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possui um *ponto de máximo global* no ponto x_0 se

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

De maneira análoga é definido um *ponto de mínimo global*.

Considere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função a valores reais. Diz-se que f possui um *ponto de máximo local* no ponto X_0 se existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^n$ de X_0 tal que

$$f(X) \leq f(X_0), \quad \forall X \in V.$$

De maneira análoga é definido um *ponto de mínimo local*. Diz-se que f possui um *ponto de máximo global* no ponto X_0 se

$$f(X) \leq f(X_0), \quad \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

De maneira análoga é definido um *ponto de mínimo global*.

Nesta seção, as funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ serão polinomiais ou de classe C^∞ e destacaremos os casos $n = 1$ e $n = 2$. Assim, os pontos de máximos ou mínimos locais ou globais serão *pontos críticos* das funções, ou seja, pontos nos quais o gradiente da função é nulo. A principal referência bibliográfica utilizada nesta seção é [5].

Faremos uso dos resultados estudados em cursos de cálculo para a classificação dos pontos críticos. Por exemplo, se $X_0 \in \mathbb{R}^2$ é um ponto crítico de f e a matriz Hessiana de f em X_0 tem autovalores negativos (positivos), então X_0 é ponto de máximo (mínimo) local. Veja [23].

Exemplo 12.1. Considere a função

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2.$$

O pontos críticos de f são os pontos que anulam o gradiente de f , sendo

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (2x, 2y).$$

Portanto, o único ponto crítico de f é $X_0 = (0, 0)$. A matriz Hessiana de f em X_0 tem a forma

$$\text{Hess } f(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como os autovalores de $\text{Hess } f(0, 0)$ são $\lambda_1 = \lambda_2 = 2 > 0$, segue que o ponto crítico $X_0 = (0, 0)$ é ponto de mínimo local. De fato, o ponto crítico $X_0 = (0, 0)$ é ponto de mínimo global, como se vê facilmente.

Para funções de uma variável temos o seguinte teorema.

Teorema 12.1. *Considere $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ . Se h tem um ponto de máximo (ou mínimo) local $x_0 \in \mathbb{R}$ e nenhum outro ponto crítico, então x_0 é ponto de máximo (ou mínimo) global de h .*

Demonstração. Como h tem somente um ponto crítico e x_0 é ponto de máximo local, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies f(x) < f(x_0).$$

Suponha que x_0 não é ponto de máximo global de h , isto é, existe $x_1 \neq x_0$ tal que $f(x_1) \geq f(x_0)$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $x_1 > x_0$. Se $f(x_1) = f(x_0)$, então, pelo Teorema de Rolle, existe $x_2 \in (x_0, x_1)$ tal que

$$f'(x_2) = 0.$$

Mas, isto é um absurdo, visto que, neste caso, x_2 é um outro ponto crítico de h . Se $f(x_1) > f(x_0)$, então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x_3 \in (x_0, x_1)$ tal que

$$f(x_3) = f(x_0).$$

Aplicando o raciocínio anterior, temos novamente um absurdo. \square

O Teorema 12.1 pode ser generalizado para dimensões maiores do que 1? Mais precisamente, considere o problema a seguir.

Problema 12.1. *Se uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 2$, tem um ponto máximo (ou mínimo) local e nenhum outro ponto crítico, então esse ponto de máximo (ou mínimo) local é ponto de máximo (ou mínimo) global?*

O Problema 12.1 tem uma resposta negativa, conforme o exemplo a seguir.

Exemplo 12.2. *A seguinte função polinomial*

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = x^2(1+y)^3 + y^2,$$

tem um único ponto crítico $X_0 = (0, 0)$, o qual é um ponto de mínimo local. Este ponto de mínimo local não é ponto de mínimo global. De fato, os pontos críticos de g são soluções de

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x(1+y)^3 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y + 3x^2(1+y)^2 = 0.$$

É simples verificar que $X_0 = (0, 0)$ é a única solução do sistema acima, de onde g tem um único ponto crítico. Agora, por um cálculo simples, obtemos

$$\text{Hess } g(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Decorre que os autovalores de $\text{Hess } g(0, 0)$ são positivos, implicando que X_0 é ponto de mínimo local de g . No entanto, X_0 não é um ponto de mínimo global. De fato, tomando, por exemplo, $(x, y) = (-3, -2)$, temos

$$g(-3, -2) = -5 < 0 = g(0, 0).$$

Observe que, no Exemplo 12.2, o grau de g é 5. Isto não é irrelevante, de acordo com o seguinte teorema.

Teorema 12.2. *Fixe um número inteiro $p \geq 5$. Então, existe uma função polinomial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de grau p com um único ponto crítico $X_0 = (0, 0)$, o qual é um ponto de mínimo local, mas não é um ponto de mínimo global.*

Na prova do Teorema 12.2 utilizaremos o seguinte lema, cuja prova ficará como exercício.

Lema 12.1. *Considere uma função polinomial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de grau ímpar. Então, f não tem máximo nem mínimo globais.*

Prova do Teorema 12.2. Defina a função polinomial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^{2m}(1 + y)^3 + y^{2n},$$

com $m, n \geq 1$ e $\max(2m + 3, 2n) = p$. Com esta definição, o grau de f é $p \geq 5$, conforme enunciado no teorema. Os pontos críticos de f são obtidos de

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2mx^{2m-1}(1 + y)^3 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^{2m}(1 + y)^2 + 2ny^{2n-1} = 0. \end{cases}$$

Note que $X_0 = (0, 0)$ é ponto crítico da função f . De fato, é o único ponto crítico. Uma outra possibilidade para as coordenadas de um ponto crítico de f é que $y = -1$ na primeira equação. Mas, neste caso, a segunda equação não é satisfeita.

Afirmção. $X_0 = (0, 0)$ é um ponto de mínimo local de f .

De fato, para (x, y) suficientemente próximo de $(0, 0)$, temos que

$$(1 + y)^3 > \frac{1}{2}$$

e

$$f(x, y) = x^{2m}(1 + y)^3 + y^{2n} \geq \frac{x^{2m}}{2} + y^{2n} > 0, \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

Portanto, $(x_0, y_0) = (0, 0)$ é um ponto mínimo local de f . Se $2m + 3 > 2n$, defina

$$f_1(x) = f(x, x) = x^{2m}(1 + x)^3 + x^{2n},$$

a qual tem grau $2m + 3$. Se $2m + 3 < 2n$, defina

$$f_2(x) = f(x^{2n}, x) = x^{4mn}(1+x)^3 + x^{2n},$$

a qual tem grau $4mn + 3$. Em resumo, tanto f_1 quanto f_2 são funções polinomiais de uma variável, ambas de grau ímpar. Pelo Lema 12.1, o ponto $X_0 = (0, 0)$ não é um ponto de mínimo global de f . \square

A seguinte frase é uma tradução livre de um trecho do livro [7].

Suponha que f tem máximos locais em v_1 e v_2 . Então, f deve ter outro ponto crítico, v_3 , porque é impossível ter duas montanhas sem algum tipo de vale entre elas. O outro ponto crítico pode ser um ponto de sela (uma passagem entre as montanhas) ou um mínimo local (um verdadeiro vale).

Destacamos que a frase acima está errada. Considere o exemplo.

Exemplo 12.3. *A seguinte função polinomial*

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = -(x^2y - x - 1)^2 - (x^2 - 1)^2,$$

tem exatamente dois pontos críticos, ambos pontos de máximo locais. Os pontos críticos de f são obtidos nos pontos onde o vetor gradiente é nulo, ou seja,

$$\begin{cases} -4x(-1 + x^2) - 2(-1 + 2xy)(-1 - x + x^2y) = 0, \\ -2x^2(-1 - x + x^2y) = 0. \end{cases}$$

As soluções do sistema acima, ou seja, os pontos críticos de f são

$$X_0 = (-1, 0) \quad e \quad X_1 = (1, 2).$$

A matriz Hessiana de f avaliada em X_0 tem a forma

$$\text{Hess } f(-1, 0) = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores desta matriz são

$$\lambda_1 = 2(-3 - \sqrt{5}) < 0 \quad e \quad \lambda_2 = 2(-3 + \sqrt{5}) < 0.$$

Assim, $X_0 = (-1, 0)$ é um ponto de máximo local. De forma análoga, matriz Hessiana de f avaliada em X_1 tem a forma

$$\text{Hess } f(1, 2) = \begin{pmatrix} -26 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix},$$

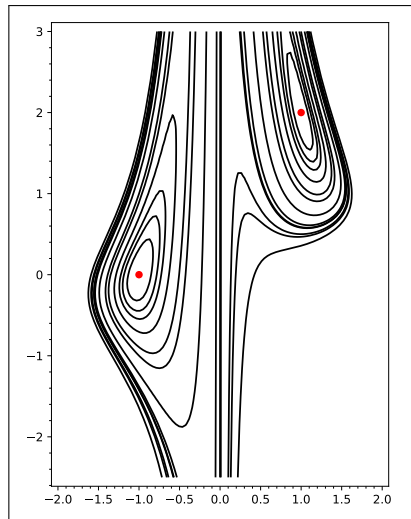


Figura 39: Curvas de nível da função f do Exemplo 12.3.

a qual tem autovalores

$$\lambda_1 = 2(-7 - 3\sqrt{5}) < 0 \quad e \quad \lambda_2 = 2(-7 + 3\sqrt{5}) < 0.$$

Deste modo, $X_1 = (1, 2)$ também é um ponto de máximo local. Na Figura 39 são apresentadas algumas curvas de nível da função f .

Exercício 12.1. Prove o Lema 12.1.

Exercício 12.2. Considere a seguinte função polinomial $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$p(x, y) = \frac{x^6}{6} - 3x^5 + \frac{85x^4}{4} - 75x^3 + 137x^2 + ((x-4)^2(x-2)^2y - 2x-1)^2 - 120x.$$

Pede-se:

1. Determine o grau de p .
2. Encontre os três pontos críticos de p .
3. Mostre que cada um desses pontos críticos é um ponto de mínimo local de p .

13 Problemas em aberto envolvendo polinômios

Nesta seção analisaremos os seguintes assuntos:

1. Pontos críticos de polinômios.
2. Pontos críticos da curvatura de gráficos polinomiais.

As principais referências bibliográficas utilizadas nesta seção são [10] e [20].

1. Pontos críticos de polinômios. Considere um polinômio com coeficientes complexos

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0, \quad n \geq 2.$$

Suponha que todos os seus zeros estão no disco unitário fechado, isto é,

$$p(z_k) = 0 \implies z_k \in D[0, 1] = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}.$$

Como vimos, pelo Teorema de Gauss-Lucas, todos os pontos críticos de p estão no fecho convexo dos seus zeros e, portanto, também estão no disco unitário fechado, isto é,

$$p'(w_l) = 0 \implies w_l \in D[0, 1].$$

Agora, em vez de considerar as posições relativas de todos os zeros e de todos os pontos críticos de p , escolha e fixe um zero, z_0 , qualquer de p . Colocamos a seguinte pergunta.

Pergunta 13.1. *No máximo, a que distância de z_0 está o ponto crítico mais próximo?*

Uma possível resposta a esta pergunta é dada pela seguinte conjectura.

Conjectura 13.1. *Se p é um polinômio de grau $n \geq 2$ tendo todos os seus zeros no disco fechado unitário $D[0, 1]$ e se z_0 é qualquer um desses zeros, então pelo menos um ponto crítico de p está no disco*

$$D[z_0, 1] = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq 1\}.$$

A Conjectura 13.1 é conhecida como Conjectura de Sendov, em homenagem ao matemático búlgaro Blagovest Sendov que a estudou no início dos anos 1960. Após a publicação da Conjectura 13.1, vários matemáticos muito competentes iniciaram esforços para testar a sua validade. Muitos artigos foram publicados sobre a Conjectura 13.1. Alguns desses artigos tratam de casos especiais.

Exemplo 13.1. *A Conjectura 13.1 é verdadeira para o polinômio*

$$p(z) = z^n - 1.$$

De fato, os zeros de p são as n raízes da unidade. Logo, por um lado, os zeros de p estão sobre a circunferência de centro na origem e de raio 1, ou seja, no bordo de $D[0, 1]$. Por outro lado, p só tem o ponto crítico $w = 0$. Portanto, fixado um zero z_0 de p , a sua distância até $w = 0$, ponto crítico de p , é exatamente 1, isto é,

$$w \in D[z_0, 1].$$

Note que este exemplo fornece o caso extremo.

A Conjectura 13.1 seria trivialmente falsa se fosse exigido que

$$p(z_0) = 0 \implies \exists w_l \text{ tal que } p'(w_l) = 0 \text{ e } w_l \in D[z_0, r], \quad 0 < r < 1.$$

Exemplo 13.2. Considere um polinômio nas hipóteses da Conjectura 13.1 da seguinte forma

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_2 z^2 + a_0, \quad a_0 a_n \neq 0, \quad n \geq 2.$$

É imediato que

$$p'(z) = n a_n z^{n-1} + \cdots + 2 a_2 z.$$

Assim, $w = 0$ é ponto crítico de p e o argumento utilizado no Exemplo 13.1 se aplica ao polinômio p deste exemplo.

Baseados nos Exemplos 13.1 e 13.2, a Conjectura 13.1 é verdadeira para todo polinômio p que tem o ponto crítico $w = 0$.

Denote o fecho convexo dos zeros de p por $H(p)$. Como, por hipótese, os zeros de p estão em $D[0, 1]$, então

$$H(p) \subset D[0, 1].$$

Pode-se mostrar que a Conjectura 13.1 é verdadeira se os vértices de $H(p)$ estão no bordo de $D[0, 1]$, como ilustrado no Exemplo 13.1.

A Conjectura 13.1 é também verdadeira para todo polinômio p de grau menor ou igual a oito. Veja a referência [4].

Mais recentemente, o que se sabe sobre a Conjectura 13.1? Veja a Figura 40 e a referência [25].

Teorema 13.1. A conjectura de Sendov é verdadeira para todo n suficientemente grande. Ou seja, existe uma constante absoluta n_0 tal que a conjectura de Sendov vale para todo $n \geq n_0$.

348

T. TAO

THEOREM 1.2. (Sendov's conjecture for sufficiently-high-degree polynomials)
Sendov's conjecture is true for all sufficiently large n . That is, there exists an absolute constant n_0 such that Sendov's conjecture holds for $n \geq n_0$.

Figura 40: Teorema 13.1, veja [25].

2. Pontos críticos da curvatura de gráficos polinomiais. Considere f um polinômio de grau $n \geq 2$ com coeficientes reais

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

A *curvatura* da curva C definida pelo gráfico de f no ponto x é dada por (veja [6])

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}. \quad (42)$$

Observe que a curvatura pode assumir valores positivos ou negativos dependendo da concavidade de C .

A curvatura fornece uma medida da não linearidade da curva C : ela é próxima de zero quando C é razoavelmente reta e tem uma magnitude grande quando C gira rapidamente.

Determinar o número máximo de zeros (reais) da curvatura de C é fácil: como os zeros (reais) de κ são exatamente os zeros (reais) de f'' , segue que o número máximo de zeros da curvatura é $n - 2$.

Um *vértice* de C é um ponto crítico da curvatura κ . Um problema muito mais intrigante é determinar o número máximo de vértices de C .

Conjectura 13.2. *Considere f um polinômio real de grau $n \geq 2$ e C o seu gráfico. Então, C tem no máximo $n - 1$ vértices.*

Apesar de uma boa quantidade de evidências, a Conjectura 13.2 permanece uma questão em aberto.

Exemplo 13.3. *Considere f um polinômio de grau $n = 2$. Uma vez o gráfico de f , isto é, a curva C , é uma parábola, intuitivamente, ela tem máximo da curvatura κ , ou seja, um vértice, localizado no seu vértice. Derivando a curvatura κ com relação à x , obtemos*

$$\kappa'(x) = \frac{(1 + (f'(x))^2)f'''(x) - 3f'(x)(f''(x))^2}{(1 + (f'(x))^2)^{5/2}}. \quad (43)$$

Como o número de vértices de C é o número de zeros de κ' , segue de (43) que o número máximo de vértices de C é o número máximo de zeros reais da função polinomial

$$N(x) = 3f'(x)(f''(x))^2 - (1 + (f'(x))^2)f'''(x). \quad (44)$$

Uma vez que o grau de N é $3n - 5$, segue que N tem, no máximo, $3n - 5$ zeros reais, um número muito maior que $n - 1$ da Conjectura 13.2.

A Conjectura 13.2 afirma, portanto, que a maioria das raízes de N são não reais. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 13.4. *Continuaremos estudando o Exemplo 13.3. Considere o polinômio quadrático*

$$f(x) = ax^2, \quad a \neq 0.$$

Neste caso,

$$N(x) = 24a^3x.$$

Portanto, $N(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$. O ponto correspondente de C tem um vértice, o qual é o vértice da parábola C .

Exemplo 13.5. Considere o polinômio de grau $n \geq 4$

$$f(x) = a x^n.$$

Neste caso,

$$N(x) = a(n-1)n x^{n-3} (a^2 n^2 (2n-1) x^{2n-2} - (n-2))$$

tem três raízes distintas, sendo $x = 0$ de multiplicidade $n - 3$. Veja as Figuras 41(a) e 41(b).

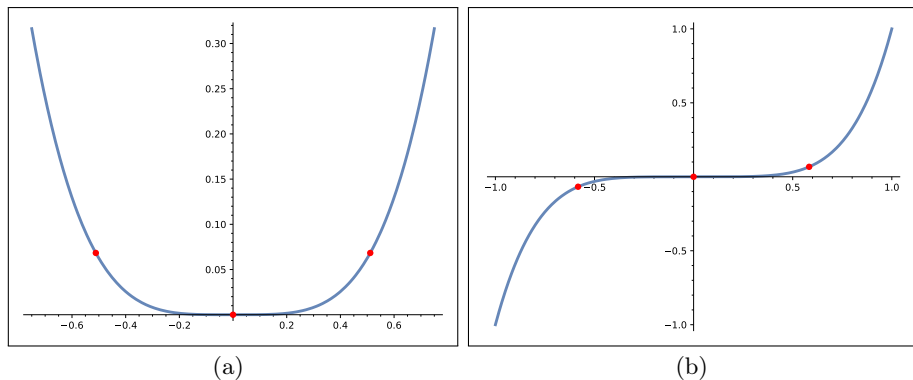


Figura 41: (a) Gráfico de $f(x) = x^4$ e (b) de $f(x) = x^5$, com os 3 vértices (pontos vermelhos).

Exemplo 13.6. Considere o polinômio de grau $n = 3$

$$f(x) = a x^3 + b x, \quad a \neq 0.$$

Com um cálculo simples, obtemos

$$N(x) = 6a(45a^2 x^4 + 12abx^2 - (b^2 + 1)).$$

Note que o polinômio entre parênteses é quadrático em x^2 . Ele tem duas raízes reais, sendo uma negativa e a outra positiva. Portanto, N tem exatamente duas raízes reais e, assim, C tem dois vértices, verificando afirmativamente a Conjectura 13.2.

Como a curvatura é invariante sob translação e como todo polinômio cúbico pode ser colocado na forma do Exemplo 13.6 por meio de translações horizontal e vertical, mostramos assim que o gráfico de todo polinômio cúbico tem exatamente dois vértices. Veja as Figuras 42(a) e 42(b).

Um comentário final: vale mencionar que a curvatura correspondente ao polinômio $g = af$, onde a é uma constante positiva, difere tanto quantitativa quanto qualitativamente da curvatura correspondente ao polinômio f . O

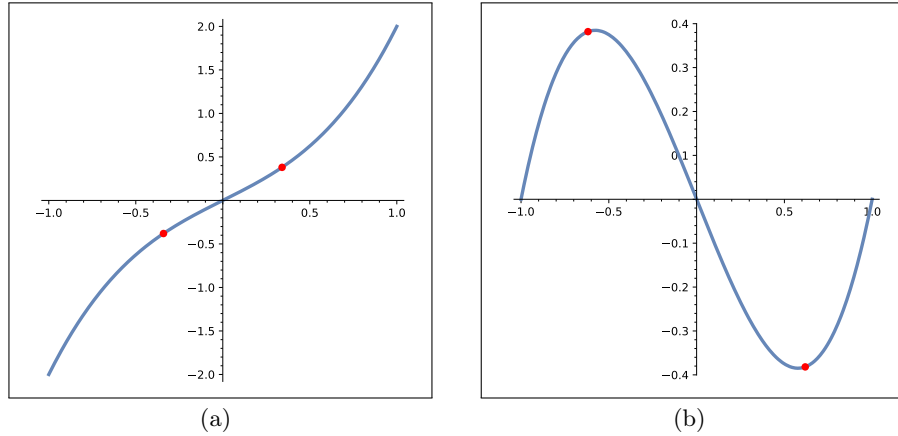


Figura 42: (a) Gráfico de $f(x) = x^3 + x$ e (b) de $f(x) = x^3 - x$, com 2 vértices. Em (b) os vértices não são os pontos extremos de f , mas muito perto deles.

parâmetro a representa um escalonamento na direção do eixo y , de modo que o gráfico é esticado ou comprimido na direção vertical. Considere, por exemplo, os polinômios

$$f(x) = 4x^6 + x^4 + x^2 \quad \text{e} \quad f_{1.05}(x) = 1.05 f(x),$$

onde foi escolhido $a = 1.05$. Veja as Figuras 43 e 44.

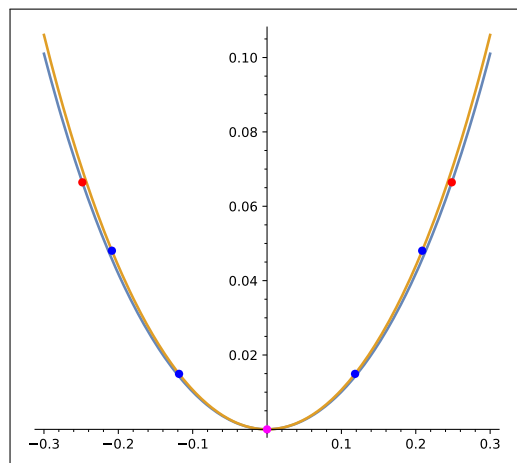
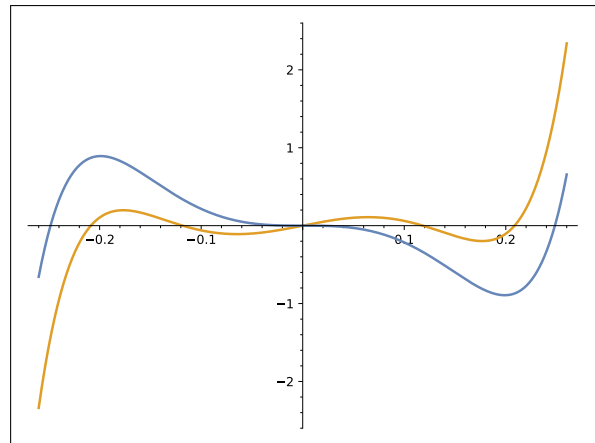


Figura 43: Gráficos de $f(x) = 4x^6 + x^4 + x^2$ e de $f_{1.05}(x) = 1.05 f(x)$. O gráfico de f tem 3 vértices (2 pontos vermelhos e 1 magenta). O gráfico de $f_{1.05}$ tem 5 vértices (4 pontos azuis e 1 magenta).

Figura 44: Gráficos de N e de $N_{1,05}$.

Agradecimentos

Este artigo é dedicado a quatro pessoas fundamentais na vida do autor: Hécio, Dicéa, Rogério e Márcia. O autor foi parcialmente apoiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (projetos números APQ-02153-23, RED-00133-21 e APQ-05207-23). O autor agradece a calorosa hospitalidade da Universitat Autònoma de Barcelona durante a redação deste artigo.

Referências

- [1] B. ANDERSON, J. JACKSON, M. SITHARAM, *Descartes' rule of signs revisited*, The American Mathematical Monthly, **105** (1998), 447-451.
- [2] R. BHATIA, *Matrix Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1997.
- [3] M.A. BRILLESLYPER, B. SCHAUBROECK, *Explorations of the Gauss-Lucas Theorem*, PRIMUS, **27** (2017), 766-777.
- [4] J.E. BROWN, G. XIANG, *Proof of the Sendov conjecture for polynomials of degree at most eight*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **232** (1999), 272-292.
- [5] B. CALVERT, M.K. VAMANAMURTHY, *Local and global extrema for functions of several variables*, Journal of the Australian Mathematical Society, **29** (1980), 362-368.
- [6] M.P. DO CARMO, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, 6ª edição, Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

- [7] L.J. CORWIN, R.H. SZCZARBA, *Calculus in vector spaces*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 52. Marcel Dekker, Inc., New York, 1979.
- [8] F. CUCKER, A.G. CORBALAN, *An alternate proof of the continuity of the roots of a polynomial*, The American Mathematical Monthly, **96** (1989), 342-345.
- [9] R. DESCARTES, *The Geometry of René Descartes with a Facsimile of the First Edition*. New York, Dover, 1954.
- [10] S. EDWARDS, R.A. GORDON, *Extreme curvature of polynomials*, The American Mathematical Monthly, **111** (2004), 890-899.
- [11] B. FINE, G. ROSENBERGER, *The Fundamental Theorem of Algebra*, Springer-Verlag, 1997.
- [12] A. GASULL, *Gemmes matemàtiques*, MATerials MATemàtics, **2019** (2019), núm. 2, 88 pp.
- [13] É. GHYS, *A Singular Mathematical Promenade*, Ens/Inrp Lyon, 2017.
- [14] D.J. GRABINER, *Descartes' rule of signs: another construction*, The American Mathematical Monthly, **106** (1999), 854-856.
- [15] G. HARRIS, C. MARTIN, *The roots of a polynomial vary continuously as a function of the coefficients*, Proceedings of the American Mathematical Society, **100** (1987), 390-392.
- [16] M. HIRSCH, S. SMALE, R. DEVANEY, *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*, 2nd edition, Elsevier Academic Press, 2004.
- [17] D. KALMAN, *An elementary proof of Marden's Theorem*, The American Mathematical Monthly, **115** (2008), 330-338.
- [18] M. LAVROV, *Polynomials and Vieta's Formulas*, ARML Practice 2/9/2014.
- [19] G. LOZADA-CRUZ, *A simple application of the implicit function theorem*, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, **19** (2012), 71-76.
- [20] M. MARDEN, *Conjectures on the critical points of a polynomial*, The American Mathematical Monthly, **90** (1983), 267-276.
- [21] L.S. PONTRYAGIN, *Ordinary Differential Equations*, Addison-Wesley Publishing Company, 1962.
- [22] V.V. PRASOLOV, *Polynomials*, Springer-Verlag, 2010.

- [23] W. RUDIN, *Principles of Mathematical Analysis*, third edition, McGraw-Hill Inc., 1976.
- [24] E.G. SANTOS, *A regra dos sinais de Descartes*, *Revista do Professor de Matemática*, **83** (2013), pp 3.
- [25] T. TAO, *Sendov's conjecture for sufficiently-high-degree polynomials*, *Acta Mathematica*, **229** (2022), 347-392.
- [26] D.J. UHERKA, A.M. SERGOTT, *On the continuous dependence of the roots of a polynomial on its coefficients*, *The American Mathematical Monthly*, **84** (1977), 368-370.
- [27] J.H. WILKINSON, *Rounding Errors in Algebraic Processes*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1963.
- [28] M.C. ZANARDO, *Teorema Fundamental da Álgebra e Resolução de Equações Algébricas por Radicais*, *Iniciação Científica*, UNIFEI, 2010.



Instituto de Matemática e Computação
Universidade Federal de Itajubá
lfmelo@unifei.edu.br

Publicat el 13 de maig de 2026