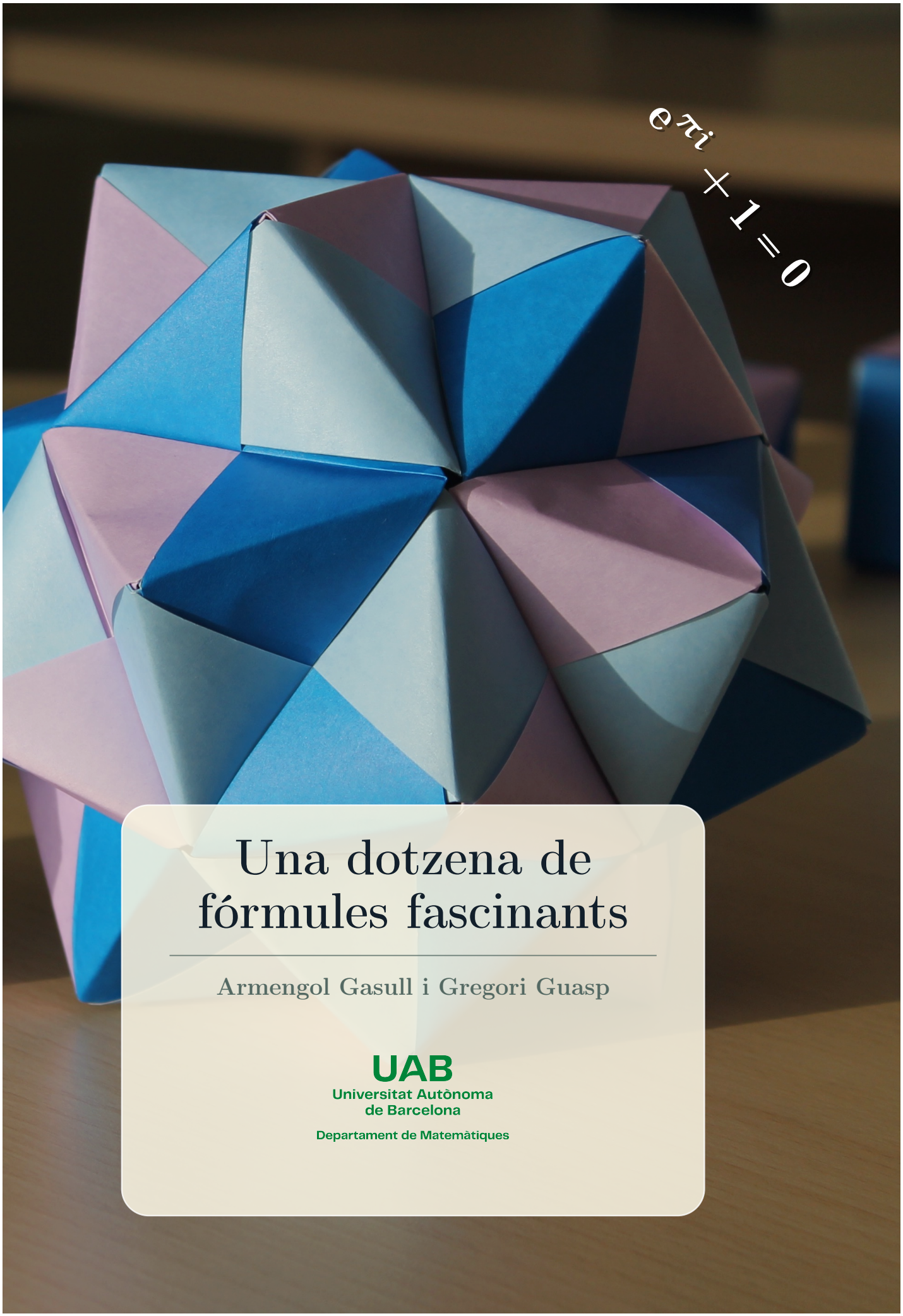
MAT^2
MATerials MATemàtics
Volum 2026, número especial, 100 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/web/matmat

Una dotzena de fórmules fascinants

Armengol Gasull, Gregori Guasp

Amb motiu del vintè aniversari de la revista s'ha publicat aquest llibret que conté demostracions d'algunes de les fórmules més boniques. Hem volgut que aquesta publicació tingui el màxim de difusió possible i per això incloem el text quasi-facsímil, en el que s'han corregit algunes petites errades, com un article més de la revista.



Una dotzena de fórmules fascinants

Armengol Gasull i Gregori Guasp

UAB
Universitat Autònoma de Barcelona
Departament de Matemàtiques

Una dotzena de fórmules fascinants

Una dotzena de fórmules fascinants

Armengol Gasull

Gregori Guasp

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
2026

Edita:
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Primera edició: $2026=[45; 90, 90, 90, \ldots]^2$

© 2026 Armengol Gasull i Gregori Guasp

Aquesta obra està subjecta a una llicència Creative Commons Reconeixement-NoComercial 4.0 Internacional (CC BY-NC 4.0). Es permet copiar, distribuir i adaptar aquesta obra, sempre que se'n reconegui adequadament l'autoria i no se'n faci un ús comercial.

Índex

Pròleg 7

Prefaci 9
Segells, bitllets, monedes... 11
Les dotze fórmules triades 12
Agraïments 12

Fórmula 1. Teorema de Pitàgores i ternes pitagòriques 13
1. Teorema de Pitàgores 13
2. El teorema del cosinus 14
3. Ternes pitagòriques 15
4. Teorema de De Gua (Pitàgores 3D) 18

Fórmula 2. Teorema de Nicòmac 19
1. Prova per inducció 19
2. Prova sense paraules 19
3. Aplicació al càlcul d'una integral definida 20
4. Extensions de la fórmula 20
5. Obtenció per interpolació de la fórmula de Nicòmac 22
6. Fórmules alternades de Faulhaber 23

Fórmula 3. La suma dels angles d'un triangle 25
1. La suma dels angles interiors d'un triangle 25
2. La suma dels angles interns d'un polígon simple 26
3. Triangles en geometries no euclidianes 27
4. Sumes dels angles de les puntes d'una estrella 28

Fórmula 4. La fórmula d'Heró 31
1. Primera demostració 31
2. Segona demostració 32
3. El teorema de Pitàgores a partir de la fórmula d'Heró 33
4. Triangles heronians 33
5. Altres fórmules equivalents 35
6. Arcs capaços 35
7. La fórmula de Brahmagupta 36

Fórmula 5. Característica d'Euler 39
1. Poliedres convexos, homeomorfs a esferes 39
2. Altres tipus de poliedres 40
3. Poliedres regulars convexos, homeomorfs a una esfera 41
4. Una altra aparició de la característica d'Euler 42

Fórmula 6. La raó àuria 43
1. Prova de la fórmula 43
2. Els números de Fibonacci 46

3. Presència de la raó àuria 48
4. Els números de Fibonacci al triangle de Pascal 54

Fórmula 7. El problema de Basilea 55
1. Una primera prova 55
2. Un cas més general 57
3. Variacions del problema de Basilea 57
4. Més variacions: la constant de Catalan 59
5. Un apunt final 60

Fórmula 8. La constant d'Euler–Mascheroni 61
1. Existència de la constant 61
2. Els primers dígits 62
3. La sèrie de Mercator 63
4. Diferents aparicions de la constant γ 63

Fórmula 9. L'exponencial complexa 65
1. La funció exponencial (real) 66
2. La funció exponencial (complexa) 67
3. Algunes relacions trigonomètriques 68
4. Relació amb les funcions hiperbòliques 70

Fórmula 10. La integral gaussiana 71
1. Càlcul de la integral 71
2. Aplicacions 72

Fórmula 11. Teorema fonamental del càlcul 75
1. Un resultat previ 75
2. Prova del teorema 76
3. La regla de Barrow 76
4. Algunes aplicacions 77
5. Extensió a dimensió superior 79

Fórmula 12. La fórmula de Stirling 81
1. Primer pas, prova de De Moivre 81
2. Producte de Wallis 82
3. Pas final: determinació de la constant 83
4. Aplicacions i extensions de la fórmula 84

Apèndix A. Dos punts de llibre 85

Apèndix B. Unes dotzenes més de fórmules candidates 87

Bibliografia 91

Pròleg

«A la Universitat Autònoma, amb Secció de Matemàtiques dins de la Facultat de Ciències, hi ha un planter de joves matemàtics sorgits de la Universitat Central, que són una evident promesa per al futur en estar seriosament dedicats a aprofundir en els seus camps de treball.» Així descrivien el Departament de Matemàtiques de la UAB en el tercer Congrés Interuniversitari Català, cap allà el curs 1978-79. Aquells joves matemàtics entusiastes que van fer pinya per construir un projecte gairebé des de zero són l'origen d'una història de més de cinquanta anys. I el secret d'aquesta història és senzill: no han deixat d'arribar-hi joves amb ganes, cadascú amb la seva il·lusió i el seu camp de treball, sumant-se al que els anteriors havien anat construint, emprenent nous projectes i encoratjant els companys per avançar plegats.



Columnes de la UAB.

I així, el que anomenàvem secció fa quaranta anys va adquirir la condició plena de Departament; amb això va començar també la construcció d'una identitat col·lectiva, de grups de recerca, actualment reconeguts mundialment, en àlgebra, geometria i topologia, anàlisi matemàtica, estadística i probabilitat, i matemàtica aplicada. Fruit d'aquest impuls investigador, s'edita des de fa més de cinquanta anys *Publicacions Matemàtiques*, indexada entre les revistes de recerca matemàtica de referència. També es va impulsar la creació del *Centre de Recerca Matemàtica (CRM)*, que avui és una porta al món de la investigació matemàtica a Catalunya. I havent consolidat aquest reconeixement en recerca, fa més de vint-i-cinc anys es va assumir també el compromís de la transferència de coneixement, creant el *Servei de Consultoria Matemàtica (MCS)* i el *Servei d'Estadística Aplicada (SEA)*, laboratoris que tradueixen el coneixement matemàtic en solucions per a la indústria, la societat i el medi ambient.

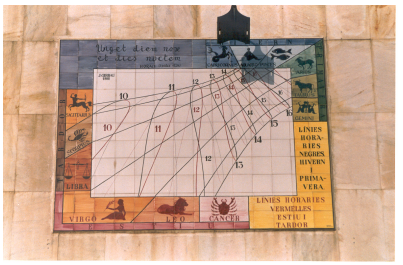
Paral·lelament a la recerca, la voluntat de compartir dels professors del departament ha consolidat una oferta docent àmplia, diversa i de qualitat: el *grau de Matemàtiques*, el *grau d'Estadística Aplicada* i el *grau de Matemàtica Computacional i Analítica de Dades*, a banda de col·laborar i coordinar estudis de màster tant locals com internacionals en matemàtiques per a la modelització, per a fer recerca i per als instruments financers, entre d'altres àmbits on la matemàtica és una eina imprescindible.

El talent que ha nodrit el nostre departament sempre ha compartit aquesta passió per les matemàtiques i per mostrar-ne la bellesa: ho veiem en els punts de llibre que editem regularment, que porten un grapat d'idees, fórmules i problemes bonics a la butxaca de qualsevol.

Amb tot això, arribem a celebrar una de les grans fites: els 20 anys del que un dia els autors d'aquest llibre van posar en marxa amb molta dedicació i que ràpidament

va trobar companys per fer camí, els nostres *Materials Matemàtics (MAT²)*. Aquesta revista digital, lliure i oberta, ha acostat la matemàtica més bella a estudiants, professors i curiosos de tota la comunitat de parla catalana i més enllà.

Per exemple, en aquesta revista hi podem trobar els treballs de la Carme Safont *Quant mesuren les columnes de la UAB?* [45], i el d'en Joan Girbau, *Relojes de sol* [24], dedicat als rellotges de sol, inclòs el rellotge que va dissenyar ell mateix, situat a la façana d'entrada de la Facultat de Ciències i Biociències de la UAB. Ambdós autors van ser professors del Departament de Matemàtiques de la UAB.



Rellotge de sol d'en Joan Girbau, Facultat de Ciències i Biociències de la UAB.

Aquest llibre neix per celebrar aquest vintè aniversari. Les seves dotze fórmules no són trofeus ni exhibicions de tècnica: cadascuna és una finestra. Hi ha la bellesa perfecta de la identitat d'Euler, l'elegància geomètrica de Pitàgores, la inesperada igualtat de Basilea, la profunditat del teorema fonamental del càlcul o la subtilesa de la constant d'Euler–Mascheroni. Llegir-les amb calma, seguir les seves demostracions, deixar-se sorprendre per la seva elegància, és fer matemàtiques. Això és el que han fet els membres de Materials Matemàtics durant vint anys, i és el que esperem que faci també aquest llibre: despertar la curiositat d'aquell qui encara no ens coneix, i avivar-la en aquell qui ja fa temps que camina amb nosaltres.

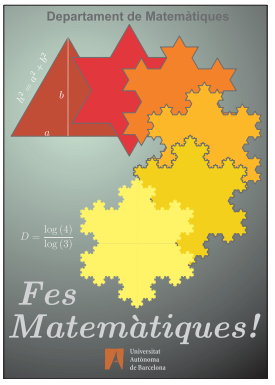
Isabel Serra
Directora del Departament de Matemàtiques de la UAB

Prefaci

A finals de la dècada dels 90 es va notar a totes les universitats del país una pèrdua d'interès per part dels estudiants cap a moltes carreres de ciències i enginyeries. La carrera de *Matemàtiques* no en va ser una excepció. Per aquest motiu, al voltant de l'any 2000, el *Departament de Matemàtiques de la UAB* va decidir posar en marxa tot un seguit d'actuacions encaminades a potenciar la divulgació de les matemàtiques i acostar-les als alumnes de secundària. La cronologia d'aquestes iniciatives es pot resumir en la llista següent:

2001 Publicació del llibre: *Fes Matemàtiques!*
2001 *Trobades Matemàtiques* a la UAB.
2006 Inici dels *Dissabtes de les Matemàtiques* a la UAB (en paral·lel als *Dissabtes de la Física*).
2006 Creació de la revista electrònica de divulgació de les matemàtiques: *Materials Matemàtics.*
2008 Implementació del doble grau de Física + Matemàtiques.
2010 Publicació de sèries anuals de punts de llibre.
2010 Implantació, amb la col·laboració de l'ICE, de les Jornades: *Les matemàtiques entre la secundària i la universitat.*
— Preparació per a les olimpíades i les proves Cangur, xerrades als Instituts, suport per a la realització de Treballs de Recerca (fins i tot, abans de l'existència del programa Argó), ...

Els temes que incloïa el llibre *Fes Matemàtiques!* eren força variats i, per exemple, hi havia capítols amb títols com: *Democràcia: dels vots als escons; El número π. Diferents algorismes de càlcul; La recta de mínims quadrats. Marques d'atletisme; Programació lineal i dietes; El cub de Rubik i la teoria de grups; Codis secrets; Les lleis de Mendel; Matemàtiques i música*; i així fins a un total de 23. Va ser a partir d'aquest recull i amb la intenció d'oferir un ventall ampli de temes engrescadors, que es va plantejar la idea de fer una revista de divulgació de les matemàtiques. Alguns dels articles del primer volum (vol. 2006) són adaptacions dels capítols del llibre.



La revista, que només és electrònica, té dues particularitats remarcables:

- Cada treball té associat un nivell: +, $\sum$ o $\int$ segons vagi dirigit, respectivament, a lectors amb coneixements bàsics de matemàtiques, a estudiants de primers anys de carreres científiques o tècniques, o a graduats en matemàtiques.
- Es publiquen articles en qualsevol de les llengües usades en el nostre entorn. N'hi ha en català, castellà, anglès, francès, portuguès i italià.

Publica una mitjana d'uns 6 articles cada any. Fins ara hi ha un total de 127 articles. Com ja hem comentat, la revista es diu *Materials Matemàtics (MAT^2)*. Tots els treballs són d'accés obert i es poden descarregar de la plana web:

https://mat.uab.cat/matmat/

El motiu d'aquesta publicació és celebrar el vintè aniversari d'aquesta revista electrònica.

Per a l'ocasió hem triat una dotzena de fórmules matemàtiques que pensem que tenen un cert encant: per a nosaltres aquestes són *les 12 fórmules fascinants*. La tria no ha estat fàcil i està basada tant en els gustos i coneixements dels autors, com en una cerca de treballs que fan reculls semblants.

No és gens senzill explicar a què ens referim quan diem que una fórmula és bonica o fascinant. En el treball [44], l'autor reflexiona sobre què vol dir per a ell que un resultat matemàtic sigui maco. De fet, la bellesa d'una fórmula es pot mesurar amb molts barems diferents: el seu significat, la sorpresa que ens provoca que sigui certa, la seva senzillesa, com de bonica és la seva demostració, ... La possibilitat de diferents criteris de valoració fa la tria encara més complexa i interessant.

Un treball que hem tingut en compte per a fer la nostra elecció ha estat [31]. L'autora recull les respostes de molts matemàtics influents que van contestar una carta seva de 2002 en la que, entre d'altres coses, els preguntava: *Per a tu, quines serien les tres fórmules matemàtiques més maques?* Les respostes van ser molt variades. Moltes de les fórmules que proposen surten a la nostra tria.

També hem consultat altres treballs, llibres i planes web, que citem sense més comentaris: [1, 3, 8, 17, 21, 31, 38, 46, 50, 51].

Un treball diferent, per a entendre millor com processa el cervell la bellesa és [52]. En aquest estudi, els autors van fer un experiment amb 15 matemàtics que valoraven fórmules com a belles, neutres o lletges i van estudiar-ne la resposta cerebral mitjançant ressonàncies magnètiques.

En qualsevol cas, com a autors d'aquest text, passem de puntetes per aquesta qüestió i ens limitem a presentar la nostra tria de fórmules.

Un cop fixades les nostres dotze fórmules, hem dedicat un petit capítol a cadascuna d'elles. En cada capítol s'ha pretès fer-ne una demostració, el més autocontiguda possible. S'han completat els capítols amb temes relacionats, comentaris històrics, extensions, generalitzacions i aplicacions de les fórmules. La major part dels resultats i de les demostracions que presentem no són originals.

A l'Apèndix A es reprodueixen el punt de llibre sobre aquest mateix tema que va editar el Departament en la seva sèrie corresponent al curs 2015/16 i un segon punt, publicat el curs següent, recollint algunes de les constants matemàtiques més famoses.

A l'Apèndix B hi ha set dotzenes més de fórmules que de ben segur agradaran a molts dels lectors. Certament, moltes d'elles haurien pogut reemplaçar algunes de la nostra tria.

Estem molt contents d'acabar aquesta introducció assenyalant que la situació preocupant que constatàvem al començament d'aquest escrit sembla que ja ha quedat enrere. Ens agrada pensar que la nostra aportació creant *Materials Matemàtics* ha estat un gra de sorra més que ha contribuït a la situació actual, en què les matemàtiques es veuen com una disciplina moderna, rellevant i imprescindible per a la societat.

Potser al lector li ha vingut una curiositat. Quina és la fórmula considerada per més gent com la més maca? Hi ha un cert consens sobre que és $e^{\pi i} + 1 = 0$, però algunes de les altres seleccionades de ben segur fan dubtar d'aquesta elecció.

Cerdanyola del Vallès, setembre de 2026
Armengol Gasull i Gregori Guasp

Segells, bitllets, monedes...

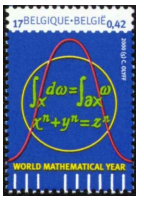
Diferents països han emès segells que contenen fórmules matemàtiques. Una recopilació força exhaustiva de segells matemàtics, així com d'història de les matemàtiques es pot consultar a la molt aconsellable plana web *MacTutor History of Mathematics Archive* [43].

A les figures següents es mostren alguns d'aquests segells de correu, relacionats amb les fórmules de la taula de la següent plana. Altres apareixeran al llarg del text.















El tema matemàtic també interessa a les fàbriques de moneda. En aquesta pàgina s'inclouen també quatre bitllets de banc (anvers i revers) en els que apareixen matemàtics famosos amb algunes fórmules i figures. Estan dedicats a Bošković, Copèrnic, Euler i Newton. Potser el més famós d'aquestes característiques és el bitllet alemany de 10 marcs dedicat a en Gauss que sortirà més endavant.

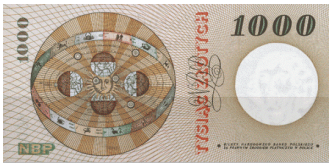
















Per acabar aquesta mostra una moneda commemorativa grega de 6 euros, plena de fórmules. Va ser dissenyada l'any 2018 per a celebrar el centenari de la Societat Matemàtica Hel·lènica.



Les dotze fórmules triades

La taula que presentem a continuació conté les dotze fórmules que s'han triat i que es demostraran i comentaran al llarg d'aquest llibre.

$a^2 + b^2 = c^2$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
$A + B + C = \pi$	$A_T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
$C - A + V = 2$	$\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$	$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n)\right) = \gamma$
$\mathrm{e}^{\pi i} + 1 = 0$	$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x)$	$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$

Agraïments

Agraïm a la Maria Jolis, a en Francesc Mañosas, Luis Fernando Mello, Rafel Prohens, Josep Lluís Solé, Joan Torregrosa i Juan Luis Varona els seus comentaris i suggeriments que han millorat les primeres versions d'aquest llibre.

FÓRMULA 1

Teorema de Pitàgores i ternes pitagòriques

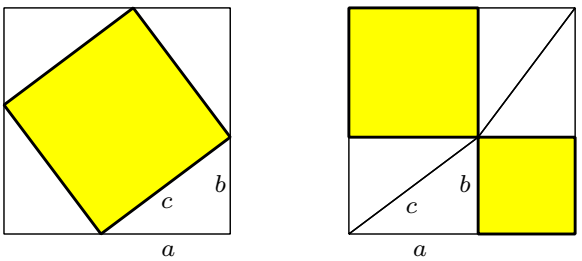
$$a^2 + b^2 = c^2$$

1. Teorema de Pitàgores

Al llarg de la història han aparegut moltíssimes demostracions de l'afirmació *"la suma dels quadrats dels catets d'un triangle rectangle és igual al quadrat de la hipotenusa"*, coneguda com teorema de Pitàgores (encara que tot indica que ja s'havia enunciat molt abans de Pitàgores). La il·lustració que ve a continuació és una de les més conegudes i senzilles, només demana fixar-se en les àrees acolorides i observar que a dreta i esquerra són iguals. Aquí a i b són els catets d'un triangle rectangle, c la hipotenusa corresponent i l'única diferència entre les dues és que els quatre triangles rectangles iguals s'han col·locat dins el mateix quadrat en posicions diferents.



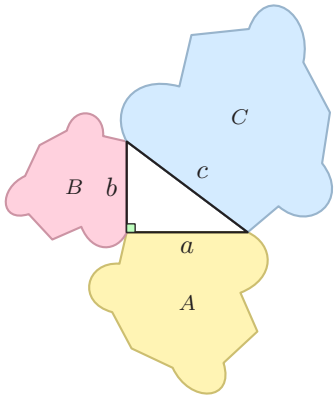
Pitàgores. Detall de *L'Escola d'Atenes* de Rafael.



El punt clau de la prova és usar que la suma dels dos angles aguts d'un triangle rectangle és de 90°, de forma que el quadrilàter inscrit en la figura de l'esquerra és un quadrat i, per tant, l'àrea és c^2. Al costat de la dreta, i pel mateix motiu, els dos triangles iguals ajuntats per l'hipotenusa formen rectangles i les parts ombrejades quadrats. Però això és conseqüència del fet que la suma dels angles d'un triangle és 180° i al capítol 3 en veurem una prova.

Tenint en compte el gran interès que ha tingut, i té encara, el teorema de Pitàgores, no és estrany que també sorgeixin multitud d'extensions del resultat bàsic. Una d'aquestes extensions força elegant és el resultat que queda reflectit en el diagrama de la següent figura i que es pot enunciar amb paraules com:

> *Col·loquem tres figures mesurables A, B i C sobre cada un dels costats d'un triangle rectangle, amb catets a, b i hipotenusa c, de forma que siguin semblants i les raons de proporcionalitat entre elles es corresponguin amb les dels costats del triangle. Aleshores*
>
> $$\text{Àrea}(A) + \text{Àrea}(B) = \text{Àrea}(C).$$



El teorema de Pitàgores correspondrà doncs al cas particular en què les figures siguin quadrats encara que, en realitat, sense tenir-lo present no es podria demostrar aquesta afirmació més general.

Deixem clar en primer lloc què volem dir quan afirmem que dues figures són *semblants*. Una transformació afí del pla $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ és una *semblança* quan s'obté per una composició finita de translacions, girs i una homotècia $h(x, y) = (\lambda\, x, \lambda\, y)$, on $0 < \lambda \in \mathbb{R}$. Així, per a qualsevol subconjunt $D \subset \mathbb{R}^2$ direm que D i $H(D)$ són figures semblants, amb raó de semblança λ. Com que per a cada figura mesurable D, fent un canvi de variable de la forma $(u, v) = h(x, y) = (\lambda\, x, \lambda\, y)$, tindrem

$$\text{Àrea}(h(D)) = \iint_{h(D)} \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = \lambda^2 \iint_D \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \lambda^2\, \text{Àrea}(D),$$

i les translacions i girs conserven les àrees queda clar que les àrees de dues figures semblants D i $H(D)$, amb raó de semblança λ, compleixen

$$\text{Àrea}(H(D)) = \lambda^2\, \text{Àrea}(D).$$

Finalment, quan comparem les figures semblants A, B i C, la raó de semblança d'A respecte C serà a/c i la de B respecte C serà b/c de forma que

$$\begin{aligned}\text{Àrea}(A) + \text{Àrea}(B) &= \left(\frac{a}{c}\right)^2 \text{Àrea}(C) + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \text{Àrea}(C)\\ &= \frac{a^2 + b^2}{c^2}\, \text{Àrea}(C) = \text{Àrea}(C).\end{aligned}$$

2. El teorema del cosinus

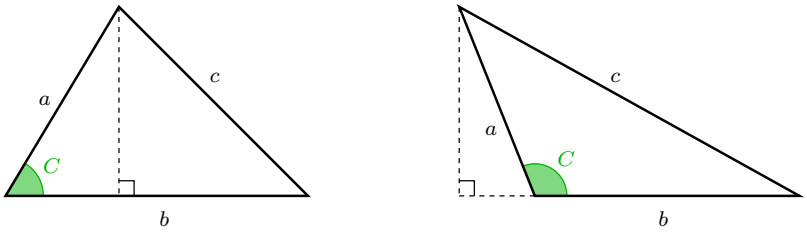
A partir del teorema de Pitàgores es poden obtenir múltiples resultats. Un d'aquests, que no és difícil provar, és el teorema del cosinus. Assegura que *per a qualsevol triangle amb costats a, b i c, considerant que C és l'angle oposat al costat c, es compleix*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\, a\, b \cos C.$$

De fet, al capdavall, es pot veure aquest resultat com una extensió del teorema de Pitàgores, que hi queda inclòs com el cas $C = \pi/2$, ja que $c^2 = a^2 + b^2 - 2\, a\, b \cos(\pi/2) = a^2 + b^2$.

Anem a demostrar-lo. Per a fer-ho, considerem la figura següent que correspon a dos casos: $C < \pi/2$ (imatge de l'esquerra) i $C > \pi/2$ (imatge de la dreta). Com ja hem comentat, el cas $C = \pi/2$ és precisament el cas d'un triangle rectangle i ja no cal estudiar-lo.

A les dues figures la línia discontínua vertical té llargada $a \sin C$, ja que $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$. A més, la base dels triangles rectangles que la tenen com un catet, i tenen



com a hipotenusa c, mesura $b - a\cos C$, degut a que $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$. Noteu que a la figura de l'esquerra, aquest valor és menor que b, mentre que a la de la dreta és més gran (el cosinus d'un angle obtús és negatiu). En les dues situacions, pel teorema de Pitàgores

$$\begin{aligned} c^2 &= (b - a\cos C)^2 + (a\sin C)^2 \\ &= b^2 + a^2(\cos^2 C + \sin^2 C) - 2\,a\,b\cos C = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos C, \end{aligned}$$

tal com volíem demostrar.

3. Ternes pitagòriques



Una pregunta aparentment innocent i molt natural relacionada amb el teorema de Pitàgores consisteix a demanar quins són els triangles rectangles que apareixen quan volem que els costats siguin quantitats enteres. La igualtat següent ens mostra una de les respostes més senzilles d'aquesta qüestió:

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Com veurem tot seguit, la pregunta no és tan innocent com sembla, i requereix una certa feina obtenir una resposta completa.

En aquest context, direm que tres enters positius x, y, z formen una *terna pitagòrica* quan $x^2 + y^2 = z^2$ i obtindrem la manera de generar totes les possibles.

Com que multiplicar els tres elements d'una terna pitagòrica (x, y, z) pel mateix número k produeix una altra terna $(k\,x, k\,y, k\,z)$ de les mateixes característiques, sempre es pot treballar (traient els factors comuns) amb valors que són *primers entre si*. D'aquesta forma ja no cal tenir en compte, en particular, ternes on tots tres són parells. En canvi, si tant x com y fossin senars, la suma x^2+y^2 seria de la forma $4k+2$ per a algun enter k, i no costa gaire veure que així mai s'obté un quadrat. Resulta doncs que, a les *ternes interessants*, x i y tenen paritat diferent (z serà, doncs, senar) i, com que l'ordre de la parella (x, y) és intercanviable, sempre ens podem quedar amb les parelles on y és parell.

Amb tot això present direm que (x, y, z) és una *terna pitagòrica primitiva* quan x, y i z són primers entre si, y és parell i es compleix $x^2 + y^2 = z^2$.

Demostrarem tot seguit que les ternes pitagòriques primitives són les (x, y, z) de la forma

$$\begin{cases} x = m^2 - n^2, \\ y = 2\,m\,n, \\ z = m^2 + n^2, \end{cases}$$

on m i n són enters positius primers entre si, de paritat diferent i amb $m > n$. Cal afegir que cada parell (m, n) d'aquestes característiques genera una terna diferent.

Noteu que la terna pitagòrica primitiva més simple i de la que ja hem parlat,

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$

és la que s'obté prenent $m = 2$ i $n = 1$, i que, a partir de les primitives, s'obtenen *totes les ternes pitagòriques* considerant els seus múltiples i, eventualment, intercanviant els papers de la x i la y.



Euclides. Detall de *l'Escola d'Atenes*.

Aquesta manera de generar les ternes pitagòriques ja apareix als *Elements* d'Euclides i es pot justificar geomètricament amb arguments que es poden estendre a situacions més generals. Notem en primer lloc que cada terna pitagòrica (x, y, z) (i tots els seus múltiples) genera un punt de coordenades racionals $u = x/z$, $v = y/z$ que està sobre la circumferència unitat del pla, ja que $u^2 + v^2 = 1$, i recíprocament cada punt racional (u, v) de la circumferència unitat permet obtenir una terna pitagòrica (x, y, z), on z és el *denominador comú* de u i v, de forma que s'escriu $u = x/z$, $v = y/z$. Aleshores, caracteritzar les ternes pitagòriques és equivalent a determinar els *punts racionals* de la circumferència unitat al primer quadrant.

Ara bé, si es coneix un punt racional P_0 de la circumferència, per exemple $P_0 = (-1, 0)$ encara que es podria utilitzar qualsevol altre punt conegut, es poden caracteritzar tots els altres punts racionals R com aquells per als que el pendent de la recta P_0R és racional (doneu un cop d'ull a la figura 1.1). És clar que, si $R = (u, v)$ és un punt racional, el pendent $r = v/(u + 1)$ de P_0R serà racional i, per tant, només ens cal demostrar que cada recta que passa per P_0 amb pendent racional conté un altre punt racional (únic) de la circumferència.

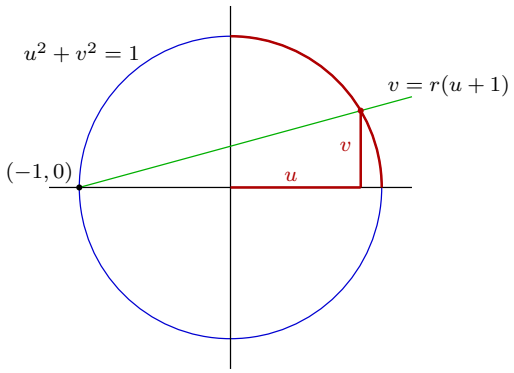


FIGURA 1.1. Parametrització dels punts racionals de la circumferència unitat.

De fet, tenint en compte que una recta qualsevol que passi per P_0 tindrà per equació $v = r(u + 1)$, determinar l'altre punt sobre la circumferència es redueix a solucionar l'equació (figura 1.1)

$$0 = u^2 + r^2(u + 1)^2 - 1 = (1 + r^2)u^2 + 2r^2u + r^2 - 1,$$

però com que ja coneixem que $u = -1$ és una de les dues solucions l'equació es pot descompondre com

$$0 = (1 + r^2)(u + 1)\left(u - \frac{1 - r^2}{1 + r^2}\right),$$

i el punt que s'està cercant és

$$(u, v) = \left(\frac{1 - r^2}{1 + r^2}, \frac{2r}{1 + r^2}\right),$$

que és racional quan r ho és.

Tornant a les ternes pitagòriques, si es considera $r = n/m$, el punt (u, v) del cercle que li correspon ve donat per

$$u = \frac{1 - r^2}{1 + r^2} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2},$$
$$v = \frac{2r}{1 + r^2} = \frac{2\,m\,n}{m^2 + n^2}$$

i es pot associar a la terna

$$\begin{aligned} x &= m^2 - n^2, \\ y &= 2\,m\,n, \\ z &= m^2 + n^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Observem que cada parell (m, n) produeix un resultat diferent ja que si els valors que dona un altre parell (m', n') fossin els mateixos resultaria

$$2m^2 = (m^2 - n^2) + (m^2 + n^2) = ((m')^2 - (n')^2) + ((m')^2 + (n')^2) = 2(m')^2,$$

de forma que només pot ser $m = m'$ i, a partir d'aquí, mirant la segona component, com que $2\,m\,n = 2\,m'\,n'$ arribem a que $n = n'$.

Per acabar veiem la correspondència biunívoca entre els parells (m, n), amb $0 < n < m$, $\mathrm{mcd}(m, n) = 1$ i de paritat diferent, i les ternes pitagòriques primitives. Noteu que les tres condicions són necessàries ja que: (a) la condició $0 < n < m$ és la que assegura que els resultats siguin positius, (b) la condició $\mathrm{mcd}(m, n) = 1$ correspon a l'expressió canònica del pendent racional $r = n/m$ i (c) quan m i n tenen la mateixa paritat els resultats que s'obtenen són parells.

Veiem per començar que les ternes (x, y, z) obtingudes per la fórmula (1) són primitives. De fet, només queda per comprovar que les ternes (x, y, z) obtingudes per la fórmula compleixen $\mathrm{mcd}(x, y, z) = 1$ (els valors de la fórmula són sempre positius, x i z són senars i y parell). Per veure això suposem que un primer p els divideix. Aquest primer no pot ser 2, donat que $x = m^2 - n^2$ és senar en ser m i n de paritat diferent. Aleshores p dividirà $2m^2 = z + x$ i $2n^2 = z - x$, per tant serà un divisor primer de m i n, fet contrari a la suposició que el màxim comú divisor era 1.

Vist això, el que resta és comprovar que *totes* les ternes primitives es poden obtenir a partir de la fórmula. És a dir, donada una terna primitiva (x, y, z) caldrà determinar un parell (m, n) tal, que $x = m^2 - n^2$, $y = 2\,m\,n$ i $z = m^2 + n^2$. Comencem observant que la condició $x^2 + y^2 = z^2$ també es pot escriure com

$$y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x).$$

El fet que x i z siguin senars assegura que hi ha dos enters a, b tals, que

$$z + x = 2a, \;\; z - x = 2b.$$

De forma que

$$\begin{aligned} x &= a - b, \\ y^2 &= 4\,a\,b, \\ z &= a + b. \end{aligned}$$

Noteu que qualsevol divisor comú de a i b també ho serà de x, y, z i, per tant, $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$. Tenint en compte que y és parell, la segona igualtat es pot escriure

com

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = a\,b.$$

I així, com que a i b són primers entre si, cada un d'ells ha de ser un quadrat.

Arribats aquí posem

$$a = m^2,\ b = n^2,$$

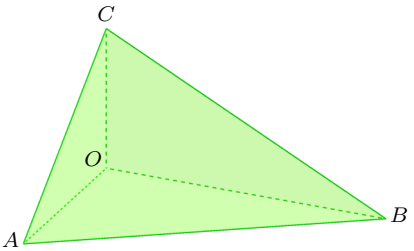
on m i n també seran primers entre si, i obtindrem el resultat que volíem.

4. Teorema de De Gua (Pitàgores 3D)

El matemàtic francès Jean-Paul de Gua de Malves va publicar l'any 1783 un resultat que de vegades també rep el nom de *teorema de Pitàgores 3D*. Sembla ser, que ja era conegut molt abans; per exemple, per René Descartes (1596–1650).

El teorema de De Gua afirma que per un tetraedre com el de la figura, en el que les tres arestes OA, OB i OC són perpendiculars dos a dos, es compleix que

$$\big(\text{Àrea}(ABC)\big)^2 = \big(\text{Àrea}(OAB)\big)^2 + \big(\text{Àrea}(OBC)\big)^2 + \big(\text{Àrea}(OAC)\big)^2.$$



Per demostrar-lo, no és restrictiu prendre un sistema de coordenades tal que

$$O = (0,0,0),\ A = (a,0,0),\ B = (0,b,0),\ C = (0,0,c),$$

amb $a, b, c > 0$. Per al càlcul d'àrees farem servir la propietat del producte vectorial $\times$ a $\mathbb{R}^3$ següent:

$$\|v \times w\| = \text{Àrea}(P),$$

on P és el paral·lelogram generat pels dos vectors v i w.

En el tetraedre de la figura prenem $v = (-a, 0, c)$ (vector que va de A a C) i $w = (-a, b, 0)$ (vector que va de A a B). Si denotem $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$ i $\mathbf{k} = (0,0,1)$ tenim

$$v \times w = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a & 0 & c \\ -a & b & 0 \end{vmatrix} = -b\,c\,\mathbf{i} - a\,c\,\mathbf{j} - a\,b\,\mathbf{k} = (-b\,c, -a\,c, -a\,b),$$

i per tant

$$\text{Àrea}(P) = \sqrt{(a\,b)^2 + (b\,c)^2 + (a\,c)^2} = 2\,\text{Àrea}(ABC).$$

D'altra banda, com que les altres tres cares del tetraedre són triangles rectangles, les seves àrees són $a\,b/2$, $b\,c/2$ i $a\,c/2$. En resum,

$$\begin{aligned}\big(\text{Àrea}(ABC)\big)^2 &= \frac{(a\,b)^2 + (b\,c)^2 + (a\,c)^2}{4} \\ &= \big(\text{Àrea}(OAB)\big)^2 + \big(\text{Àrea}(OBC)\big)^2 + \big(\text{Àrea}(OAC)\big)^2,\end{aligned}$$

tal com volíem demostrar. Per una prova diferent, usant la fórmula de Herò, veure [14].

Un resultat similar també és vàlid en dimensions superiors; vegeu [15].

FÓRMULA 2

Teorema de Nicòmac

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Aquesta identitat que fent referència a Nicòmac de Gèrasa (c. 60 – c. 120 d.C.) sovint es coneix amb el nom de teorema de Nicòmac, es pot demostrar de diverses maneres. Inclourem aquí la demostració típica per inducció i una prova geomètrica sense paraules que no requereix càlculs addicionals. Acabarem el capítol amb aplicacions i diverses extensions de la fórmula, i amb una prova constructiva per a l'expressió original de Nicòmac.

1. Prova per inducció

Per a $n = 1$ el resultat és clarament cert ja que només s'està afirmant que $1^3 = \left(\frac{1\times 2}{2}\right)^2$.

Suposem ara que també ho és per a un cert $n \in \mathbb{N}$, i demostrem-lo per a $m = n+1$. Tenim

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) \\ &= (n+1)^2\left(\frac{(n+2)^2}{4}\right) = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2,\end{aligned}$$

que és precisament el que volíem veure. Per tant, pel principi d'inducció, hem demostrat el resultat per a tot número natural.

De vegades, la igualtat s'escriu com

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \big(1 + 2 + 3 + \cdots + n\big)^2,$$

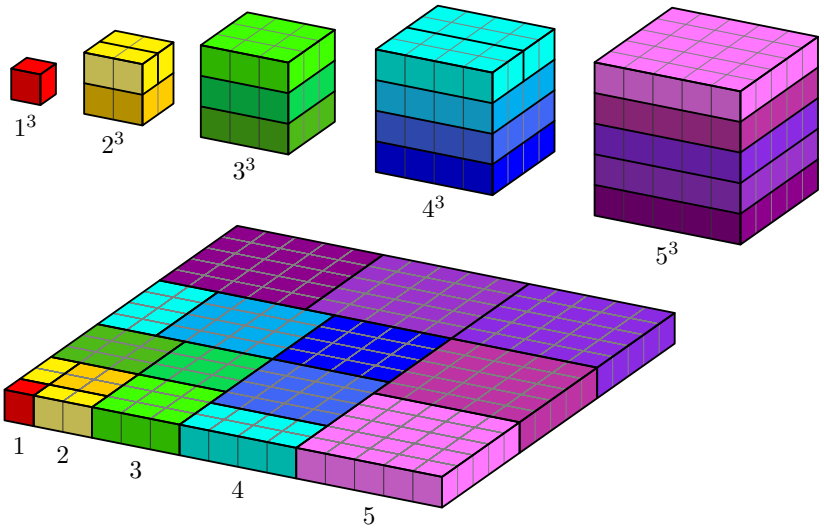
que és conseqüència directa de la fórmula que acabem de establir juntament amb la ben coneguda igualtat

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Prova sense paraules

N'hi ha prou amb observar la figura de la pàgina següent, on es pot apreciar com la suma dels cubs es reconstrueix com el quadrat de costat igual a la suma dels naturals consecutius.

Podeu veure moltes més proves sense paraules a [22] i en les seves referències.



Suma dels cubs dels naturals consecutius.

3. Aplicació al càlcul d'una integral definida

Calcularem la integral $I = \displaystyle\int_0^a x^3\,\mathrm{d}x$ $(a > 0)$, sense utilitzar primitives ni el teorema fonamental del càlcul, basant-nos en les anomenades sumes superiors i inferiors de Riemann, i en la fórmula de Nicòmac.

Per calcular les aproximacions successives dividim $[0, a]$ en m intervals iguals, de longitud a/m. Com que la funció x^3 és creixent, és fàcil veure que

$$\frac{a^4}{m^4}\sum_{k=0}^{m-1} k^3 = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{a}{m}\Big(\frac{ka}{m}\Big)^3 < I < \sum_{k=1}^{m}\frac{a}{m}\Big(\frac{ka}{m}\Big)^3 = \frac{a^4}{m^4}\sum_{k=1}^{m} k^3.$$

Usant la suma de Nicòmac per a $n = m-1$ i $n = m$, obtenim

$$\frac{a^4}{m^4}\left(\frac{(m-1)m}{2}\right)^2 < I < \frac{a^4}{m^4}\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2.$$

Prenent el limit quan m tendeix a infinit s'obté $I = a^4/4$.

4. Extensions de la fórmula

Un dels primers matemàtics que va trobar expressions d'aquest tipus va ser Johann Faulhaber. En un llibre publicat el 1631, mostra fórmules per expressar $1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$, per a $1 \le p \le 17$, en termes de $N = n(n+1)/2$. Per exemple, per a $p = 13$ estableix

$$\sum_{k=1}^{n} k^{13} = \frac{N^2}{105}\left(960N^5 - 2800N^4 + 4592N^3 - 4720N^2 + 2764N - 691\right).$$

Faulhaber ni va explicar com arribar a aquestes expressions, ni va proporcionar cap expressió general vàlida per a tot p, veure [29]. En qualsevol cas, sovint les expressions compactes per a les sumes $1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$ es coneixen com a fórmules de Faulhaber.

A continuació demostrarem una expressió tancada per a aquestes sumes en funció de n, utilitzant els números de Bernoulli.

La forma més habitual per introduir els números de Bernoulli B_k és definir-los mitjançant la funció generatriu

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}=\sum_{k=0}^{\infty}B_k\,\frac{x^k}{k!},\qquad |x|<2\pi. \tag{2}$$

Això significa que els B_k són els coeficients del desenvolupament de Taylor de $x/(\mathrm{e}^x-1)$, al voltant de $x=0$, de l'expressió anterior.

Com que $x/(\mathrm{e}^x-1)+x/2$ és una funció parella (en canviar x per $-x$ torna a sortir el mateix, ja que $\mathrm{e}^{-x}=1/\mathrm{e}^x$) el seu desenvolupament en sèrie de potències tindrà només potències parelles. En conseqüència, $B_1=-1/2$ i $B_{2k+1}=0$ per a qualsevol $k\geq 1$. Els primers números de Bernoulli són:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$

Demostrarem tot seguit la fórmula

$$S_n(p)=\sum_{k=1}^{n}k^p=\frac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j}B_j\,(n+1)^{p+1-j},$$

que és una de les expressions de la fórmula de Faulhaber.

El primer punt clau és observar que

$$G_n(x):=1+\mathrm{e}^x+\cdots+\mathrm{e}^{nx}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(kx)^p}{p!}=n+1+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{S_n(p)}{p!}\,x^p.$$

Per altra banda, com que $G_n(x)$ ve donada per la suma d'una progressió geomètrica amb raó e^x,

$$G_n(x)=\frac{\mathrm{e}^{(n+1)x}-1}{\mathrm{e}^x-1}=\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\,\frac{\mathrm{e}^{(n+1)x}-1}{x}.$$

Ara bé, usant (2) i que

$$\frac{\mathrm{e}^{(n+1)x}-1}{x}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(n+1)^{i+1}}{(i+1)!}\,x^i,\qquad x\in\mathbb{R},$$

podem calcular el terme de x^p en el desenvolupament de $G_n(x)$ multiplicant les dues series corresponents, obtenint per $p\geq 1$,

$$\frac{S_n(p)}{p!}=\sum_{j=0}^{p}\frac{B_j}{j!}\,\frac{(n+1)^{p+1-j}}{(p+1-j)!}.$$

Finalment,

$$S_n(p)=\sum_{j=0}^{p}\frac{B_j(n+1)^{p+1-j}}{p+1}\,\frac{(p+1)!}{(p+1-j)!\,j!}=\frac{1}{p+1}\sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j}B_j(n+1)^{p+1-j},$$

que és el resultat que volíem provar.

Per exemple, per a $p \leq 6$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^1 = \frac{n^2+n}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6},$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30},$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^6 = \frac{6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n}{42}.$$

I si teniu curiositat, les fórmules equivalents en funció de n i N són:

$$\sum_{k=1}^{n} k = N, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n+1}{3}\,N,$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = N^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{2n+1}{15}\,N(6N-1),$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{N^2}{3}\,(4N-1), \qquad \sum_{k=1}^{n} k^6 = \frac{2n+1}{21}\,N(12N^2-6N+1).$$

5. Obtenció per interpolació de la fórmula de Nicòmac

Com hem vist a la secció anterior, la funció $S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p$, és un polinomi de grau $p+1$ respecte la variable n. Tenint en compte només aquest fet i calculant prou valors de S_p (de fet $p+2$), l'expressió de S_p es pot obtenir simplement determinant el polinomi que passa pels punts de la taula corresponent. Des d'aquest punt de vista no necessitem conèixer els números de Bernoulli. Així, si fixem per exemple $p = 3$ tindrem la taula:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$S_3(n)$	1	9	36	100	225	441	784	1296

Observeu que hem posat més punts dels necessaris. Aquests serviran per constatar que S_3 és efectivament de grau 4. Una forma molt usual per obtenir el polinomi interpolador d'una taula és el *mètode de diferències dividides* de Newton, vegeu per exemple [48, cap. 2].

Per aplicar-lo, es construeix la taula de diferències dividides corresponent als punts que tenim. En aquest cas:

n	$S(n)$							
1	1	8	19/2	3	1/4	0	0	0
2	9	27	37/2	4	1/4	0	0	
3	36	64	61/2	5	1/4	0		
4	100	125	91/2	6	1/4			
5	225	216	127/2	7				
6	441	343	169/2					
7	784	512						
8	1296							

Aquesta taula s'obté, quan la variable n pren valors consecutius, seguint el procés següent:

– Primer s'escriuen, en una columna, els valors de la variable. Al costat, en una segona columna, s'escriuen els valors corresponents de la funció.

– En una tercera columna s'introdueixen els valors obtinguts restant cada valor de la funció a l'anterior.
– A continuació es fa el mateix amb la quarta columna, restant cada valor de la tercera columna amb l'anterior, però dividint per 2.
– Es continua afegint columnes construïdes de manera similar, però en cada pas el divisor s'incrementa una unitat.
– Quan la funció que estem interpolant és un polinomi, arriba un moment en què les columnes tenen un valor constant i, a continuació, apareixen només zeros. D'aquí en podem obtenir el grau del polinomi.

Finalment, per escriure el polinomi interpolador, s'agafen els valors de la primera fila i es van fent sumes i productes encaixats com es mostra a la fórmula següent. En l'exemple aquest polinomi S_3 serà de grau 4 :

$$\begin{aligned} S_3(n) &= 1 + (n-1)\left(8 + (n-2)\Big(\frac{19}{2} + (n-3)\Big(3 + (n-4)\Big(\frac{1}{4} + 0\Big)\Big)\Big)\right) \\ &= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = N^2. \end{aligned}$$

6. Fórmules alternades de Faulhaber

Considerem la suma alternada

$$A_p(n) := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^p,$$

i vegem com expressar-la en funció de $S_p(n)$.

Si $n = 2m$ és parell, tenim

$$\begin{aligned} A_p(2m) &= -1^p + 2^p - 3^p + 4^p - \cdots + (2m)^p \\ &= \sum_{k=1}^{m} (2k)^p - \sum_{k=1}^{m} (2k-1)^p. \end{aligned}$$

D'altra banda,

$$S_p(2m) = \sum_{k=1}^{m} (2k)^p + \sum_{k=1}^{m} (2k-1)^p.$$

Com que

$$\sum_{k=1}^{m} (2k)^p = 2^p S_p(m),$$

resulta

$$\sum_{k=1}^{m} (2k-1)^p = S_p(2m) - 2^p S_p(m).$$

Per tant,

$$A_p(2m) = 2^{p+1} S_p(m) - S_p(2m).$$

Si $n = 2m + 1$ és senar,

$$A_p(2m+1) = A_p(2m) - (2m+1)^p.$$

Així,

$$\begin{aligned} A_p(2m+1) &= 2^{p+1} S_p(m) - S_p(2m) - (2m+1)^p \\ &= 2^{p+1} S_p(m) - S_p(2m+1). \end{aligned}$$

Per tant,

$$A_p(2m+1) = 2^{p+1} S_p(m) - S_p(2m+1).$$

Les dues fórmules es poden reunir en una expressió unificada:

$$A_p(n) = 2^{p+1} S_p\left(\lfloor n/2 \rfloor\right) - S_p(n),$$

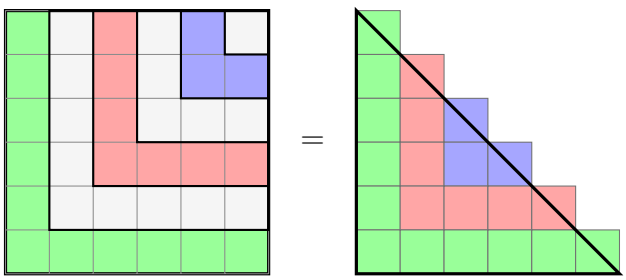
on $\lfloor n/2 \rfloor$ és el major enter menor o igual que $n/2$. A partir d'aquesta podem obtenir fàcilment la fórmula de tipus Faulhaber següent, involucrant també els números de Bernoulli,

$$A_p(n) = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} B_j \left(2^{p+1} \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right)^{p+1-j} - (n+1)^{p+1-j} \right).$$

Aquestes sumes també admeten, en alguns casos, proves visuals. Acabarem doncs aquest capítol amb una prova sense paraules de la igualtat

$$\begin{aligned} A_2(2m) &= \sum_{k=1}^{2m} (-1)^k k^2 = 2^3 S_2(m) - S_2(2m) \\ &= 8\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} - \frac{2m(2m+1)(4m+1)}{6} = m(2m+1). \end{aligned}$$

La il·lustració següent correspon a $m = 3$. En la figura de l'esquerra donem color a les àrees corresponents a $(2k)^2 - (2k-1)^2 = 4k-1$, $k = 1, 2, \ldots, m$. En la de la dreta recol·loquem aquestes figures de manera que sigui clar que la seva àrea és $\big((2m)(2m) + 2m\big)/2 = m(2m+1)$.



De fet, no és difícil veure que, independentment de la paritat de n, es compleix:

$$n^2 - (n-1)^2 + (n-2)^2 - \cdots + (-1)^{n+1} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La fórmula alternada equivalent a la de Nicòmac seria:

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - \cdots + (-1)^{n+1} n^3 = \begin{cases} -m^2(4m+3), & n = 2m, \\ (m+1)^2(4m+1), & n = 2m+1. \end{cases}$$

FÓRMULA 3

La suma dels angles d'un triangle

$$A + B + C = \pi$$

1. La suma dels angles interiors d'un triangle

Si hi ha un resultat que hagi mantingut l'interès dels matemàtics durant molt de temps és el del *postulat de les paral·leles*. Als *Elements* s'estableix en el seu famós *cinquè postulat* que:

> *Si una recta a l'incidir sobre dues rectes fa els angles interns del mateix costat menors que dos angles rectes, les dues rectes perllongades indefinidament es trobaran al costat en el qual estan els menors que dues rectes.*

No és complicat veure que aquesta formulació és equivalent a la més coneguda modernament en la que es considera que:

> *Per un punt exterior a una recta hi passa un única paral·lela.*

Molts matemàtics importants al llarg dels segles han intentat establir aquest resultat com a proposició i no com a postulat independent dels altres axiomes necessaris per a la Geometria. No va ser fins als treballs de Bolyai i Lobatxevski, al segle XIX, que va quedar clar la possibilitat de treballar en una geometria on existeixen múltiples paral·leles a una recta donada passant pel mateix punt.

Entre moltes de les propietats que són equivalents al postulat de les paral·leles està el fet que la suma dels angles interiors d'un triangle qualsevol és igual a *l'angle pla*, o dit d'una altra manera la suma de dos angles rectes. Altres fets equivalents són, per exemple, el teorema de Pitàgores, l'existència de triangles amb els mateixos angles però no iguals, que donats tres punts no alineats hi ha una circumferència que els conté, que els punts equidistants a una recta donen dues rectes (una a cada costat), que la distància entre dues rectes paral·leles és constant, ...

La prova del resultat del requadre es pot il·lustrar amb la figura 3.1 i, en realitat, no necessita massa explicacions.

Tota la justificació està basada en dos fets principals:

(a) Els angles *oposats pel vèrtex* són iguals. Ja que tots dos són el suplementari del mateix angle.
(b) Els angles que formen dues paral·leles amb una secant comú són iguals. Conseqüència directa de la formulació del cinquè postulat als *Elements*.

Amb aquests dos fets al cap ha de quedar clar que els angles dibuixats amb el mateix color són iguals sempre que considerem la paral·lela a un costat que passa pel vèrtex oposat. Per tant, la suma dels tres colors serà igual a dos angles rectes.

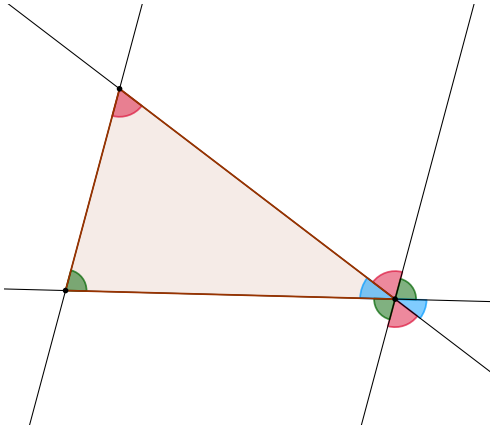


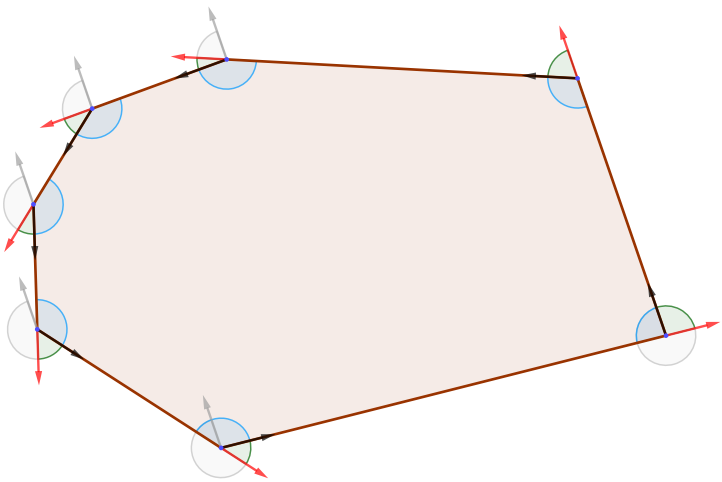
FIGURA 3.1. La suma dels angles d'un triangle.

2. La suma dels angles interns d'un polígon simple

Tot i que la demostració es pot fer directament utilitzant el resultat per als triangles (descomponent el polígon en triangles o per inducció sobre el nombre de costats) se'n pot donar una que és molt visual i necessita poques explicacions.

El resultat que s'obté quan mesurem la suma dels angles interiors d'un polígon simple de n costats és $(n-2)\pi$ radians.

Per fer aquesta prova, suposem que recorrem els costats del polígon simple (és a dir, que no tingui auto-interseccions) fins que tornem a arribar al principi del recorregut com es pot veure en l'esquema següent (a cada punt la fletxa negra indica la direcció en la que ens movem):



Aquest recorregut va passant per cada costat, de manera que quan arribi a un vèrtex la fletxa ha de girar (l'angle verd) per tal d'alinear-se amb el costat següent. Com es pot veure en la figura anterior, l'angle que gira el vector (verd) i l'angle interior del polígon en el vèrtex corresponent (blau) sumen π radians. Noteu que, per tal que la demostració també valgui per a polígons no convexos, s'ha de tenir en compte que, en el cas que algun dels angles interiors sigui més gran que l'angle pla, l'angle de gir de la fletxa és negatiu i així la suma d'aquests dos angles continua sent de π radians.

Quan s'acaba el recorregut i s'ha tornat al punt de partida la fletxa haurà donat una volta sencera sobre si mateixa. És a dir, haurà fet un gir de 2π radians.

Diem I a la suma dels angles interns del polígon i G a la suma dels girs que s'han fet. Per una banda $G = 2\pi$ i per una altra, donat que cada angle intern sumat amb el gir de la fletxa val π i que hi ha n vèrtexs, és clar que $I + G = n\,\pi$. Per tant $I = n\,\pi - 2\,\pi = (n-2)\pi$ i ja tenim el que volíem.

3. Triangles en geometries no euclidianes

Com ja hem mencionat, el fet que la suma dels angles d'un triangle sigui igual a dues rectes és equivalent a l'axioma de les paral·leles. Un model de geometria on aquest postulat no es compleix, però on es poden plantejar les mateixes qüestions que en la geometria euclidiana, consisteix a prendre els punts d'un semiplà i considerar que les rectes són les semicircumferències amb els extrems sobre la línia que limita l'espai i també les semirectes perpendiculars a aquesta línia (que es podrien entendre en aquest context com les semicircumferències de radi infinit). Els angles es mesuraran, seguint les tangents, com en el pla euclidià i per a calcular longituds es pot introduir una *mètrica riemanniana* que té com a geodèsiques les rectes del model. A la figura 3.2 es mostra una recta i algunes de les paral·leles que passen per un punt exterior.

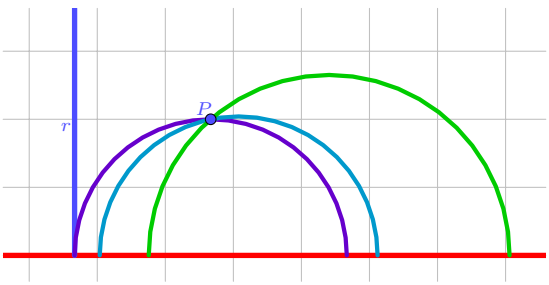


FIGURA 3.2. Per un punt P exterior a la recta r passen moltes línies paral·leles.

Aleshores no és difícil construir triangles amb la suma dels angles estrictament inferior a dos rectes com es pot veure a la figura 3.3.

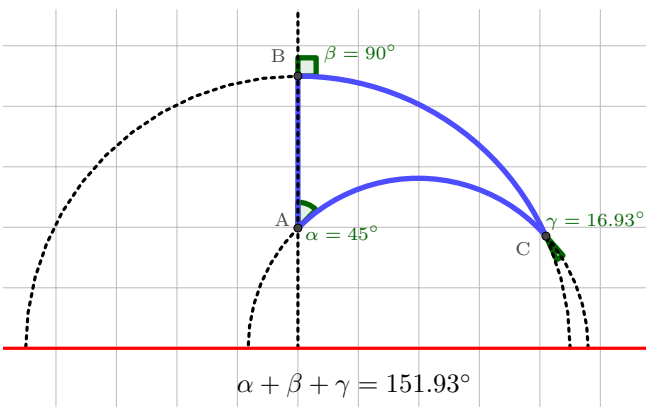


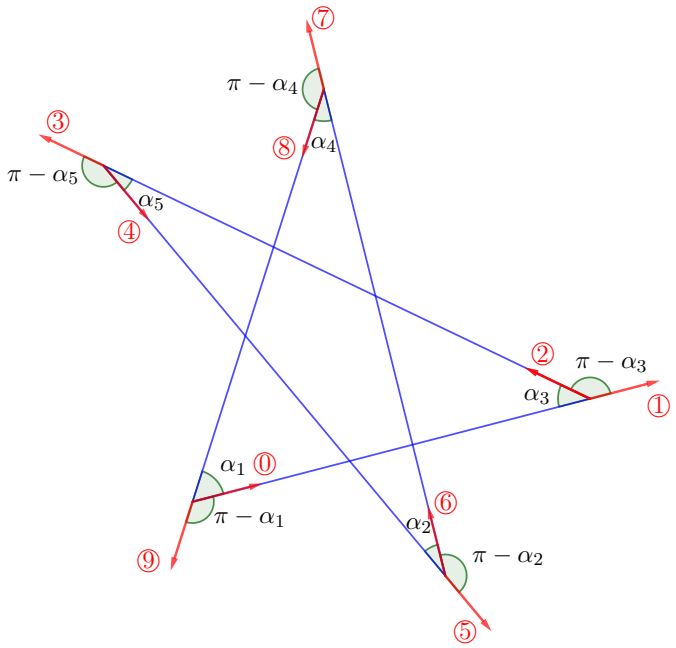
FIGURA 3.3. Un triangle amb la suma d'angles que no arriba a dos rectes.

A la figura 3.3 hi ha els valors dels angles i el resultat de la suma per al cas concret que es representa però, en realitat, es mostra una manera d'obtenir tota una família de triangles amb la suma d'angles inferior a 180°: Partim d'un parell de punts A i B sobre la mateixa semirecta vertical i després construïm la circumferència amb centre a *la base* de la semirecta AB que passa per B (que forma un angle recte amb

la vertical per B) i la que passa per A i forma amb la vertical un angle de 45°. Quan A i B estan a una distància adequada, aquestes dues semicircumferències es tallen en un punt C. En aquest punt formen un angle que s'acostarà a 45° quan A i B es van acostant, i serà arbitràriament petit quan s'allunyen. D'aquesta forma tenim una família de triangles amb suma d'angles entre 135° i 180°.

4. Sumes dels angles de les puntes d'una estrella

Comencem demostrant que Θ, la suma dels angles de les cinc puntes de l'estrella de la figura, és de π radians.



Farem una prova similar a la de la secció 2. Considerem un vector director que recorre l'estrella seguint-ne els segments. Denotem com ⓪ la posició inicial d'aquest vector. El vector apunta sempre en la direcció del moviment.

Quan el vector arriba a una punta d'angle α_i, ha de girar l'angle suplementari de α_i. Per tant, el gir corresponent a aquesta punta és $\pi - \alpha_i$.

Els encreuaments dels segments no produeixen cap gir, ja que en aquests punts fem que el vector continuï avançant en línia recta.

En recórrer una vegada tota l'estrella, fins arribar al vector ⑨ i finalment tornar a ser ⓪, el vector director haurà fet dues voltes completes. En conseqüència, el seu gir total és de $2 \cdot 2\pi = 4\pi$ radians. Per tant, la suma dels cinc girs és

$$(\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + (\pi - \alpha_3) + (\pi - \alpha_4) + (\pi - \alpha_5) = 4\pi.$$

D'aquesta igualtat, obtenim

$$5\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) = 4\pi.$$

Finalment,

$$\Theta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \pi,$$

tal com volíem provar.

A continuació, enunciarem i demostrarem el resultat equivalent per a una estrella qualsevol de n puntes. Per a fer-ho amb precisió començarem definint el que entenem per una (n, k)-*estrella,* E.

Considerem n punts

$$P_1, P_2, \ldots, P_n$$

situats, en aquest ordre i en el sentit de les agulles del rellotge, sobre una corba regular, tancada i simple, tal que el conjunt afitat que envolta sigui convex. L'exemple més senzill és quan la corba és una circumferència i els punts són equiespaiats.

Prenem un k, tal que $0 < k < n$. Aleshores hi ha quatre tipus d'estrelles:

- *Estrelles connexes*: quan $1 < k < n-1$, $k \neq n/2$ i k i n són primers entre si. En aquest cas, començant per P_1 i saltant de k en k, obtenim

  $$P_1,\ P_{1+k},\ P_{1+2k},\ P_{1+3k},\ \ldots$$

  i abans de tornar a P_1 es visiten exactament els n punts. Per tant, la figura està formada per un únic circuit tancat i connex que és l'estrella E.
- *Polígons convexos*: Com al cas anterior, però prenent $k = 1$ o $k = n-1$. El procediment dona lloc a un polígon convex amb n costats.
- *Estrelles no connexes*: quan $k \neq n/2$ i n no són primers entre si, és a dir, $d = \mathrm{mcd}(n,k) > 1$. Escrivim $n = d\,n'$ i $k = d\,k'$ de manera que $\mathrm{mcd}(n',k') = 1$. En aquest cas, saltant de k en k no es visiten tots els n punts en un únic recorregut. La figura es descompon en d circuits tancats disjunts, cadascun dels quals conté $n' = n/d$ puntes. L'estrella E és la unió d'aquestes d figures.
- *Estrelles degenerades*: quan $k = n/2$, seguint el mateix procès que en els casos anteriors l'estrella E es degenera a $n/2$ segments amb les n puntes d'angle 0.

Per a tota (n,k)-estrella demostrarem que la suma dels angles α_i de les seves puntes és

$$\Theta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = |n-2k|\,\pi.$$

Clarament, aquest resultat estén el que havíem presentat anteriorment per als polígons amb n costats, que correspon a $k = 1$ o $k = n-1$, tot i que en aquesta prova només incloem els polígons convexos.

Fem en primer lloc la prova quan $1 \leq k < n/2$ i k i n són primers entre si. En aquesta situació hem de demostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2k)\pi.$$

Com en el cas de l'estrella de 5 puntes, considerem un vector director que recorre els costats de la figura. Quan el vector arriba a la punta P_i, passa d'un costat al següent. Si l'angle de la punta és α_i, el gir del vector és $\pi - \alpha_i$. Per tant, la suma dels girs en totes les puntes és

$$\sum_{i=1}^{n} (\pi - \alpha_i) = n\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Ara cal determinar quin és el gir total del vector. Traçant els segments que van unint consecutivament els punts P_1, P_{1+k}, $P_{1+2k}, \ldots$ anem visitant un cop tots els punts fins tornar a P_1. El recorregut avança k posicions en l'ordre cíclic dels punts a cada pas. Després dels n passos, l'avanç total en aquest ordre és $n\,k$, és a dir, el recorregut ha efectuat k voltes completes al voltant de les direccions possibles.

En conseqüència, el vector director efectua un gir total de $2k\pi$ radians. Així,

$$\sum_{i=1}^{n} (\pi - \alpha_i) = 2k\pi.$$

Per tant,

$$n\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2k\pi \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2k)\pi.$$

Suposem ara que $d = \mathrm{mcd}(n,k) > 1$ i recordem que $n = d\,n'$ i $k = d\,k'$ de manera que $\mathrm{mcd}(n',k') = 1$. En aquest cas, saltant de k en k no es visiten tots els n punts en un únic recorregut i la figura es descompon en d subestrelles connexes, amb conjunts de puntes disjunts, on cadascuna d'elles té $n' = n/d$ puntes. En cadascuna d'aquestes tenim un salt $k' = k/d$, i com que $\mathrm{mcd}(n',k') = 1$, podem aplicar el raonament del cas anterior. El vector director, en cadascun dels d circuits, dona k' voltes completes. Per tant, el gir total en un circuit és $2k'\pi$.

Com que hi ha d circuits, la suma dels girs de tota la figura és

$$d\,2k'\pi = 2k\pi,$$

resultat que coincideix amb el del cas anterior. Per tant, val la mateixa fórmula.

Així tenim una fórmula única que val tant si n i k són primers entre si com si no ho són. La diferència és que, si són primers entre si, la figura es pot fer sense aixecar el llapis del paper, mentre que, si no ho són, es descompon en d figures, on cadascuna d'elles es pot fer, de nou, sense aixecar el llapis del paper.

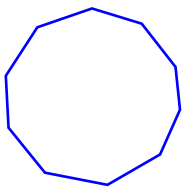
Quan $k = n/2$ ja hem comentat que $\Theta = 0$ i, per tant, la fórmula segueix essent vàlida.

Què passa si $k > n/2$? De fet, no s'obtenen estrelles noves ja que els salts k i $n-k$ determinen les mateixes figures. Senzillament es pot interpretar com que saltar k punts en sentit horari és el mateix que saltar-ne $n-k$ en sentit anti-horari. Quan $k > n/2$ tenim, usant el que hem vist abans, que

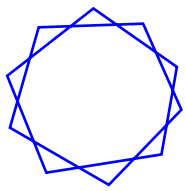
$$\Theta = \big(n - 2(n-k)\big)\pi = (2k-n)\pi = |n-2k|\pi,$$

que és el resultat que volíem demostrar.

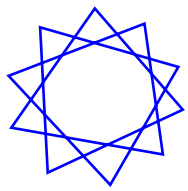
Acabem la secció il·lustrant el casos $n = 10$ amb $k = 1, 2, 3$ i 4; i $n = 11$ amb $k = 2, 3, 4$ i 5. Com que 11 és primer totes les estrelles d'onze puntes es poden fer sense aixecar el llapis del paper. Per $n = 10$ hem posat un decàgon ($k = 1$), dues estrelles no connexes ($k = 2, 4$) i una connexa ($k = 3$).



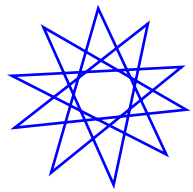
$k = 1$, $\Theta = 8\pi$



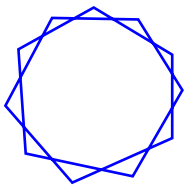
$k = 2$, $\Theta = 6\pi$



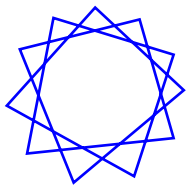
$k = 3$, $\Theta = 4\pi$



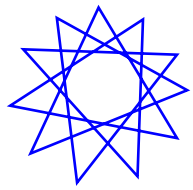
$k = 4$, $\Theta = 2\pi$



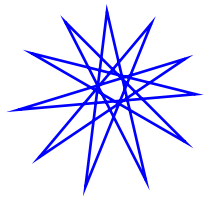
$k = 2$, $\Theta = 7\pi$



$k = 3$, $\Theta = 5\pi$



$k = 4$, $\Theta = 3\pi$



$k = 5$, $\Theta = \pi$

FÓRMULA 4

La fórmula d'Heró

$$A_T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

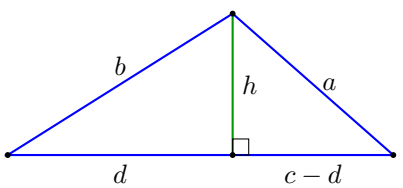
La fórmula que permet calcular l'àrea d'un triangle en funció de les longituds dels seus tres costats s'atribueix habitualment a Heró d'Alexandria, del segle I, tot i que alguns autors consideren que Arquimedes ja podia conèixer-la [13].

En la fórmula, a, b i c són els costats d'un triangle, $s = (a+b+c)/2$ el seu semiperímetre i A_T la seva àrea.

En donarem dues demostracions, la primera més analítica i la segona més geomètrica.

1. Primera demostració

Presentarem una prova força directa, basada en [40]. Considerem un triangle de costats a, b, c amb $c \geq \max(a,b)$. Tracem l'altura h sobre el costat c, vegeu la figura. Aquesta altura divideix el costat c en dos segments, de longituds d i $c-d$.



Aplicant el teorema de Pitàgores als dos triangles rectangles que s'obtenen, tenim

$$a^2 = h^2 + (c-d)^2 \quad \text{i} \quad b^2 = h^2 + d^2.$$

Restant ambdues igualtats, $a^2 - b^2 = (c-d)^2 - d^2$, i com que $(c-d)^2 - d^2 = c^2 - 2cd$, obtenim $a^2 - b^2 = c^2 - 2cd$ i, per tant,

$$d = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}.$$

Ara substituïm aquest valor de d en la segona igualtat pitagòrica,

$$h^2 = b^2 - d^2 = b^2 - \left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}\right)^2 = \frac{\big(2bc\big)^2 - \big(-a^2+b^2+c^2\big)^2}{4c^2}.$$

Usant repetidament la identitat $u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$, obtenim que

$$\begin{aligned} h^2 &= \frac{\big(2bc - a^2 + b^2 + c^2\big)\big(2bc + a^2 - b^2 - c^2\big)}{4c^2} \\ &= \frac{\big((b+c)^2 - a^2\big)\big(a^2 - (b-c)^2\big)}{4c^2} \\ &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4c^2}. \end{aligned}$$

Com que l'àrea del triangle és $A_T = c\,h/2$, arribem a

$$A_T^2 = \frac{c^2h^2}{4} = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{16},$$

i, com a conseqüència,

$$A_T = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}\,.$$

Finalment, com que $a+b+c = 2s$, aleshores $-a+b+c = 2(s-a)$, $a-b+c = 2(s-b)$ i $a+b-c = 2(s-c)$. Per tant,

$$A_T = \frac{1}{4}\sqrt{16s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,,$$

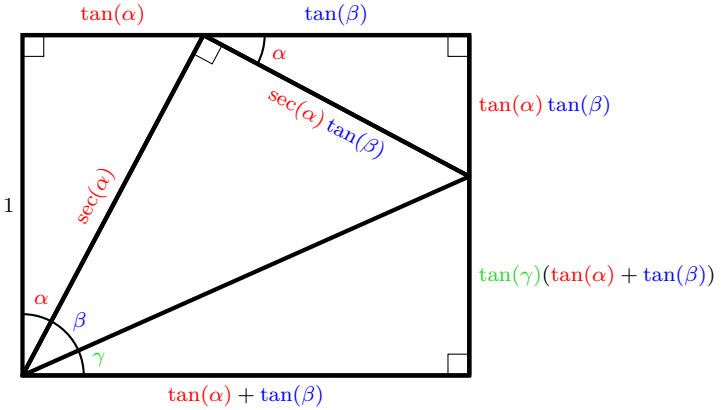
tal com volíem veure.

2. Segona demostració

Desenvolupem a continuació la demostració presentada a [36]. Aquesta utilitza que si α, β i γ són tres angles positius tals que $\alpha+\beta+\gamma = \pi/2$, aleshores

$$\tan(\alpha)\tan(\beta) + \tan(\beta)\tan(\gamma) + \tan(\gamma)\tan(\alpha) = 1. \tag{3}$$

Una prova gràfica d'aquesta relació s'obté en observar el rectangle de costats 1 i $\tan(\alpha)+\tan(\beta)$ de la figura següent.

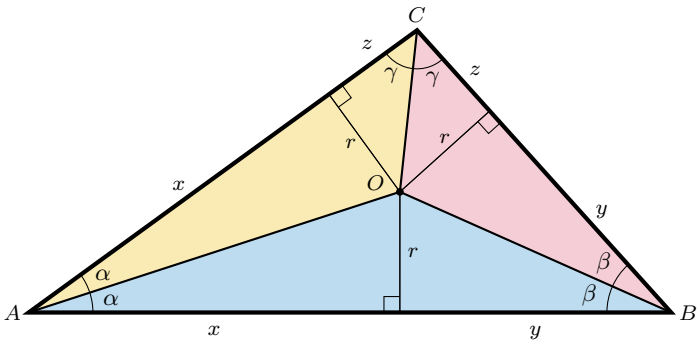


Anomenem A, B i C els vèrtexs del triangle, 2α, 2β i 2γ els angles corresponents (per tal que $\alpha+\beta+\gamma = \pi/2$), i $a = y+z$, $b = x+z$ i $c = x+y$ les longituds dels seus costats oposats, vegeu la figura següent. Aleshores, segons es veu en el dibuix, el punt O és la intersecció de les bisectrius dels angles del triangle i el semiperímetre és

$$s = x+y+z = x+a = y+b = z+c.$$

A més, el triangle ABC queda descompost en tres triangles d'altura r, i per tant

$$\begin{aligned} A_T &= \text{Àrea}(ABC) = \text{Àrea}(OAB) + \text{Àrea}(OBC) + \text{Àrea}(OCA) \\ &= \frac{x+y}{2}\,r + \frac{y+z}{2}\,r + \frac{x+z}{2}\,r = (x+y+z)r = s\,r. \end{aligned}$$



A partir del resultat obtingut, aplicant la identitat (3) als angles α, β i γ de la figura, obtenim

$$\begin{aligned} 1 &= \tan(\alpha)\tan(\beta) + \tan(\beta)\tan(\gamma) + \tan(\gamma)\tan(\alpha) \\ &= \frac{r}{x}\cdot\frac{r}{y} + \frac{r}{y}\cdot\frac{r}{z} + \frac{r}{z}\cdot\frac{r}{x} = \frac{(x+y+z)r^2}{x\,y\,z} \\ &= \frac{s\,r^2}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{A_T^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \end{aligned}$$

i aïllant A_T se segueix la segona prova de la fórmula d'Heró.

3. El teorema de Pitàgores a partir de la fórmula d'Heró

Considerem un triangle rectangle de catets a, b i hipotenusa c. Per una banda, la seva àrea és $A_T = a\,b/2$, i, per l'altra, la fórmula d'Heró afirma que

$$16A_T^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

Per tant,

$$4a^2b^2 = (a+b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a-b+c).$$

Agrupant els factors,

$$\begin{aligned} -4a^2b^2 &= \big((a+b)^2 - c^2\big)\big((a-b)^2 - c^2\big) \\ &= \big(a^2-b^2\big)^2 - c^2\big((a+b)^2 + (a-b)^2\big) + c^4 \\ &= a^4 + b^4 - 2a^2b^2 - 2c^2\big(a^2+b^2\big) + c^4. \end{aligned}$$

D'on obtenim que

$$0 = \big(a^2+b^2\big)^2 - 2c^2\big(a^2+b^2\big) + c^4 = \big(a^2+b^2-c^2\big)^2,$$

es a dir, $a^2+b^2=c^2$. Per tant, el teorema de Pitàgores queda demostrat.

De fet, com que la primera demostració de la fórmula d'Heró que hem presentat utilitzava el teorema de Pitàgores, podem concloure que els dos resultats són equivalents en el marc de la geometria euclidiana.

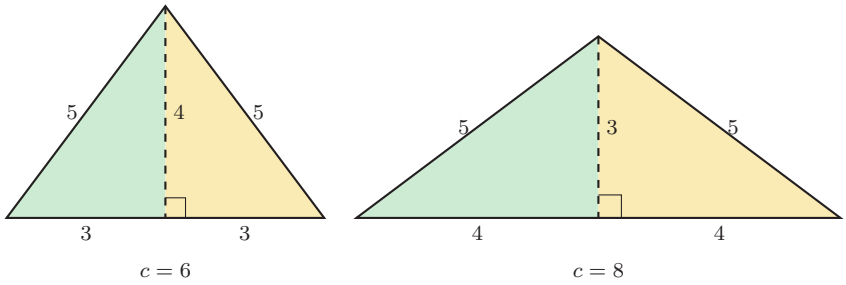
4. Triangles heronians

Els *triangles heronians* són triangles de costats enters a, b, c i d'àrea A_T també entera. Aquesta condició es pot interpretar a partir de la fórmula d'Heró com la cerca de punts amb coordenades enteres positives de l'equació diofàntica

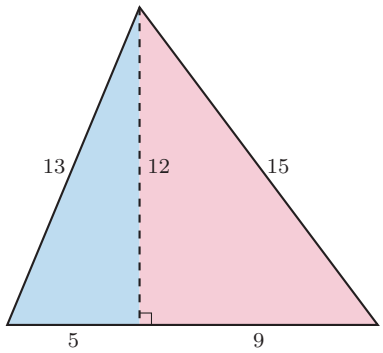
$$16A_T^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

És fàcil trobar triangles heronians obtinguts unint triangles rectangles formats per ternes pitagòriques. Vegeu com exemples els dos triangles heronians isòsceles que

corresponen a $(a, b, c, A_T) \in \{(5, 5, 6, 12), (5, 5, 8, 12)\}$, construïts a partir de la terna pitagòrica $3^2 + 4^2 = 5^2$.



Per a trobar-ne un d'escalè senzillament el que podem fer és ajuntar dos triangles rectangles amb costats donats per ternes pitagòriques, que comparteixin només un catet. Per exemple, a partir de les ternes $5^2 + 12^2 = 13^2$ i $9^2 + 12^2 = 15^2$, obtenim $(a, b, c, A_T) = (13, 14, 15, 84)$, vegeu la figura adjunta.



És evident que si (a, b, c, A_T) correspon a un triangle heronià, aleshores, per a tot $m \in \mathbb{N}$, els valors $(m\,a, m\,b, m\,c, m^2 A_T)$ en donen un altre. De fet es pot demostrar ([**9**, **47**]) que *un triangle és heronià si, i només si, es pot obtenir unint dos triangles rectangles formats per ternes pitagòriques per un costat comú, o bé reduint homotèticament una figura obtinguda d'aquesta manera.*

Per veure un exemple d'aquesta segona situació, considerem les ternes pitagòriques $12^2 + 16^2 = 20^2$ i $16^2 + 63^2 = 65^2$, que donen lloc al triangle heronià $(20, 65, 75, 600)$, reductible homotèticament al triangle $(4, 13, 15, 24)$.

La connexió dels triangles heronians amb l'aritmètica racional també apareix en els angles del triangle. Si A és l'angle oposat al costat a, la fórmula del cosinus dona

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c},$$

que és racional. D'altra banda, $A_T = \frac{1}{2}\,b\,c\,\sin A$, i per tant

$$\sin A = \frac{2A_T}{b\,c},$$

que també és racional.

Així, en qualsevol triangle heronià, $(\cos A, \sin A)$ és un punt racional de la circumferència unitat.

5. Altres fórmules equivalents

Hi ha altres maneres d'expressar l'àrea d'un triangle que són equivalents a la fórmula d'Heró. Una d'elles és mitjançant el determinant

$$16A_T^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

La matriu que apareix en aquest determinant es coneix com a matriu de Cayley–Menger. Hi ha versions en dimensions superiors d'aquesta matriu que permeten calcular volums de símplexs a partir de les seves arestes, vegeu [7].

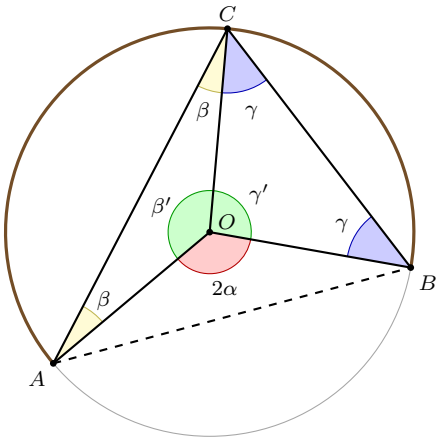
Una altra manera de calcular l'àrea usa les coordenades dels vèrtexs. Si els vèrtexs del triangle són (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$, aleshores

$$4A_T^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2.$$

Conclourem aquest capítol donant diverses extensions de la fórmula d'Heró a quadrilàters. Per provar-les enunciarem i demostrarem un resultat previ sobre *arcs capaços*.

6. Arcs capaços

Siguin A i B dos punts sobre una circumferència de manera que l'arc que determinen té amplitud $2\alpha \in (0, 2\pi)$. Llavors qualsevol punt C de la mateixa circumferència, situat fora d'aquest arc, és tal que l'angle ACB és α.



$\beta' = \pi - 2\beta,\ \gamma' = \pi - 2\gamma.$

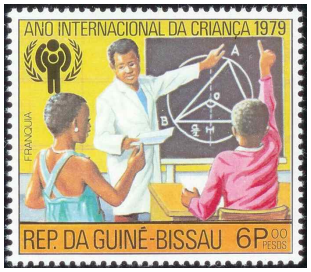
Tal com il·lustra la figura, el que diu l'afirmació anterior és equivalent a provar que $\beta + \gamma = \alpha$. Es diu que tots els punts C, en marró a la figura, formen l'*arc capaç* amb angle α del segment AB. En altres paraules, el segment AB es veu sota un mateix angle α des de tots els punts d'aquest arc capaç.

A més dels punts de l'arc capaç, els seus simètrics respecte de la recta que passa per A i B també compleixen que el segment AB es veu sota aquest mateix angle α.

La demostració del resultat és força simple. Suposarem que el centre de la circumferència és a l'interior del triangle que formen A, B i C; si queda fora es pot tractar de manera anàloga.

Sigui O el centre de la circumferència. Observem en primer lloc que dos costats de cadascun dels dos triangles amb vèrtexs A, O, C i B, O, C són radis de la circumferència. Per tant, aquests dos triangles són isòsceles. Anomenem β i γ els angles iguals que tenen cadascun d'ells.

Així, els angles centrals corresponents són $\beta' = \pi - 2\beta$ i $\gamma' = \pi - 2\gamma$. Com que aquests dos angles centrals, juntament amb l'angle 2α, sumen una volta completa, tenim $2\pi = (\pi - 2\beta) + (\pi - 2\gamma) + 2\alpha$. Per tant, $\alpha = \beta + \gamma$ tal com volíem demostrar.



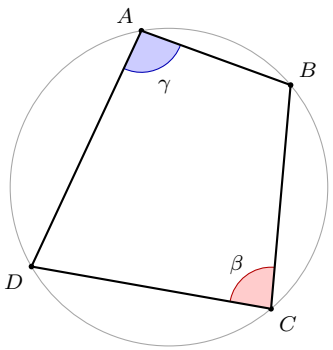
Incloem a continuació un parell de conseqüències directes interessants del que acabem de provar. La primera és un resultat provat per Tales:

Si un triangle està inscrit en una circumferència i un dels seus costats és un diàmetre, aleshores l'angle oposat a aquest diàmetre és recte.

Per a demostrar-lo, siguin A i B els vèrtexs del triangle que donen un diàmetre de la circumferència i, per tant, determinen un arc de $2\alpha = \pi$. Com a conseqüència del resultat sobre arcs capaços, qualsevol triangle amb vèrtexs A, B i un tercer punt C en la mateixa circumferència és rectangle, ja que l'angle en C serà $\alpha = \pi/2$.

Els quadrilàters inscrits en una circumferència s'anomenen *quadrilàters cíclics*. La segona conseqüència és sobre aquests quadrilàters.

En tot quadrilàter cíclic, els angles oposats són suplementaris. És a dir, si A, B, C, D pertanyen a una mateixa circumferència i són els vèrtexs consecutius d'un quadrilàter, aleshores tant la suma dels angles DAB i BCD, com la dels angles ABC i CDA, és π.



$\beta + \gamma = \pi$

La demostració serà com segueix. Sigui $ABCD$ un quadrilàter cíclic com el de la figura. Considerem els angles oposats β i γ, corresponents a DAB i BCD. Pel resultat sobre arcs capaços, els dos arcs que determinen els punts B i D tenen amplituds 2β i 2γ. A més $2\beta + 2\gamma = 2\pi$. Per tant $\beta + \gamma = \pi$ tal com volíem demostrar.

El mateix resultat per als altres dos angles es pot demostrar, o de manera completament anàloga, o bé usant que la suma dels quatre angles interiors és 2π, tal com hem vist en el capítol 3.

7. La fórmula de Brahmagupta

Una fórmula anàloga a la d'Heró per a quadrilàters cíclics va ser provada per Brahmagupta, matemàtic indi del segle VII. Diu que si els costats d'un quadrilàter

cíclic són a, b, c, d i l'àrea A_Q, aleshores

$$A_Q = \frac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}\,.$$

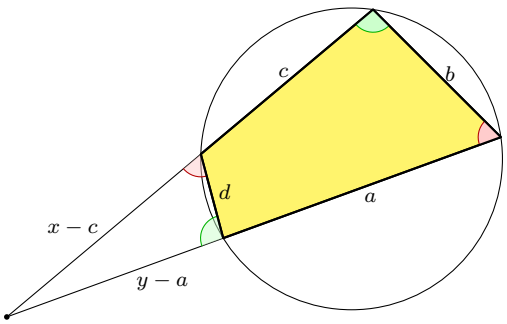
Equivalentment, si $s = (a+b+c+d)/2$, tenim

$$A_Q = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\,.$$

Observem que prenent $d = 0$ apareix la fórmula d'Heró. En concret, si $d = 0$, el quadrilàter degenera en un triangle amb $s = (a+b+c)/2$ i aleshores $A_Q = A_T$.

Basant-nos en [26], seguirem el camí contrari: demostrarem la fórmula de Brahmagupta a partir de la d'Heró.

Considerem un quadrilàter cíclic de costats a, b, c i d. Suposarem que no és un rectangle, ja que en aquest cas la fórmula es comprova directament sense dificultats. Així, en el nostre cas, en prolongar dos costats oposats, obtenim la situació representada en la figura següent, on apareixen els nous segments de longituds $y-a$ i $x-c$, on x i y són els costats del triangle més gran creat amb aquesta construcció (els únics paral·lelograms cíclics són rectangles tal com es dedueix de les observacions anteriors).



Usant el resultat provat a la secció 6, la suma de dos angles interiors i oposats d'un quadrilàter cíclic és π. Per aquesta raó, els angles del mateix color en la figura coincideixen i els dos triangles que apareixen en la mateixa figura són semblants. Si anomenem λ la raó de semblança, obtenim

$$\frac{x-c}{y} = \frac{y-a}{x} = \frac{d}{b} =: \lambda < 1.$$

L'àrea buscada és la diferència entre l'àrea del triangle gran i l'àrea del triangle petit. Denotem aquestes àrees per A_g i A_p, respectivament. Com que els triangles són semblants amb raó λ, les seves àrees estan en raó λ^2, de manera que $A_p = \lambda^2 A_g$. Per tant,

$$A_Q = A_g - A_p = (1-\lambda^2)A_g.$$

Els costats del triangle gran són x, y i b. Aplicant la fórmula d'Heró a aquest triangle, obtenim

$$A_g = \frac{1}{4}\sqrt{F_1F_2F_3F_4}\,,$$

on

$$F_1 = x+y+b,\ F_2 = -x+y+b,\ F_3 = x-y+b \text{ i } F_4 = x+y-b.$$

A partir de les relacions de semblança

$$\lambda\, y = x-c,\ \lambda\, x = y-a,\ \lambda\, b = d,$$

s'obté

$$\begin{aligned}(1-\lambda)F_1 &= (1-\lambda)(x+y+b) = a+b+c-d,\\ (1+\lambda)F_2 &= (1+\lambda)(-x+y+b) = a+b-c+d,\\ (1+\lambda)F_3 &= (1+\lambda)(x-y+b) = -a+b+c+d,\\ (1-\lambda)F_4 &= (1-\lambda)(x+y-b) = a-b+c+d.\end{aligned}$$

Finalment,

$$\begin{aligned}A_Q = (1-\lambda^2)A_g &= \frac{1}{4}\sqrt{(1-\lambda)F_1(1+\lambda)F_2(1+\lambda)F_3(1-\lambda)F_4}\\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}\,,\end{aligned}$$

que és la fórmula de Brahmagupta.

Hi ha extensions d'aquesta fórmula per a polígons inscrits en una circumferència amb més costats, vegeu per exemple [41].

Quadrilàters generals i fórmula de Bretschneider. Per a quadrilàters generals és impossible que existeixi una fórmula per a l'àrea usant només les longituds dels quatre costats. Un quadrilàter amb costats de longituds fixes pot deformar-se sense canviar-les, però canviant la seva àrea fins a fer-la tan petita com es vulgui. Per entendre aquesta afirmació n'hi ha prou d'imaginar-se un quadrilàter articulat fet amb quatre peces rectes de "Meccano".

El 1842, Bretschneider va donar una fórmula per a quadrilàters convexos que inclou, a més dels costats, dos angles oposats, vegeu [20, 39]. Si a, b, c, d són els costats, A_Q és l'àrea, $s = (a+b+c+d)/2$ és el semiperímetre, i si β i γ són dos angles interiors oposats, aleshores

$$A_Q = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - a\,b\,c\,d\cos^2\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}\,.$$

Si prenem els altres dos angles oposats, la seva suma és $2\pi-(\beta+\gamma)$, i el resultat no canvia, perquè

$$\cos^2\left(\frac{2\pi-(\beta+\gamma)}{2}\right) = \cos^2\left(\pi-\frac{\beta+\gamma}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right).$$

En el cas d'un quadrilàter cíclic, $\beta+\gamma=\pi$. Per tant,

$$\cos^2\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

i la fórmula de Bretschneider es redueix exactament a la fórmula de Brahmagupta.

FÓRMULA 5

Característica d'Euler

$$C - A + V = 2$$

1. Poliedres convexos, homeomorfs a esferes

Sigui P un poliedre convex. Denotarem per C el nombre de cares, per A el nombre d'arestes i per V el nombre de vèrtexs. La *característica d'Euler* de P es defineix com

$$\chi(P) = C - A + V.$$

La fórmula de capçalera d'aquest capítol correspon a la propietat següent: Si P és un poliedre convex, amb vora homeomorfa a una esfera S^2, les cares del qual són polígons sense forats i cada aresta pertany exactament a dues cares, aleshores $\chi(S^2) := \chi(P) = 2$. Tot seguit donarem una idea de la demostració d'aquest fet.

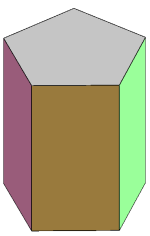


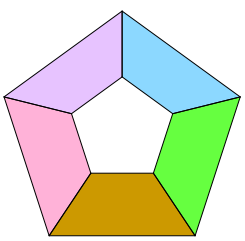
Més específicament, un poliedre P es diu convex, si donats dos punts qualssevol de P, tot el segment que els uneix està contingut a P. Respecte al significat d'*homeomorf a una esfera*, la idea intuïtiva és que si el poliedre tingués les cares de goma, com un globus, en inflar-lo prou acabaria tenint forma esfèrica.

Seguint la idea clàssica de Cauchy, la propietat que usarem d'aquests poliedres és que, un cop treta una cara de la seva vora, aquesta es pot deformar contínuament fins a obtenir una figura plana, mantenint exactament (però deformades) totes les seves altres cares, arestes i vèrtexs.

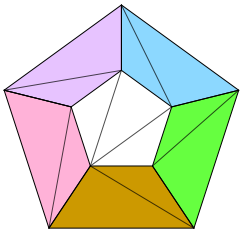
Per visualitzar aquesta idea de la prova considerarem un prisma pentagonal, per al qual és clar que $C - A + V = 7 - 15 + 10 = 2$, i veurem per què la característica d'Euler ha de valer 2, sense necessitat d'usar els valors concrets de C, V i A. Aquesta demostració es basa en els passos següents:

Pas 1: treure una cara. En treure una cara, per exemple la tapa superior, el nombre de cares C disminueix en una unitat. Per tant, si volem demostrar que originalment $C - A + V = 2$, n'hi haurà prou amb provar que el poliedre obert i aplanat de la figura de la dreta compleix $C - A + V = 1$.



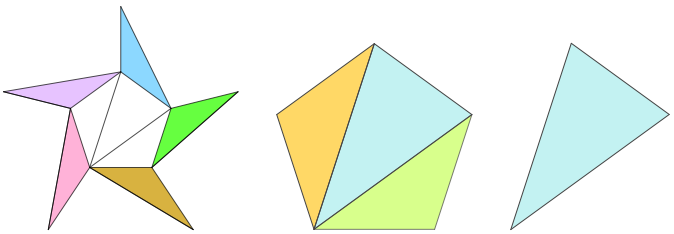


Pas 2: triangular les cares. Triangulem cada cara sense afegir vèrtexs nous. Si una cara té k costats, en triangular-la es converteix en $k - 2$ triangles. Això afegeix $k - 3$ cares i $k - 3$ arestes, però no crea nous vèrtexs. Per tant, el valor de $C - A + V$ no canvia.



Pas 3: eliminar triangles de la frontera. Un cop triangularitzada la figura, eliminem triangles de la frontera. Hi ha dos casos:

- S'elimina un triangle que comparteix una sola aresta amb la resta de la figura. Aleshores desapareixen una cara i una aresta, així $C \to C-1$, $A \to A-1$ i $V \to V$, i per tant, de nou $C-A+V$ roman invariant.
- S'elimina un triangle que toca la frontera per dues arestes. Aleshores desapareixen una cara, dues arestes i un vèrtex, és a dir, $C \to C-1$, $A \to A-2$ i $V \to V-1$, i un cop més $C-A+V$ no canvia de valor.

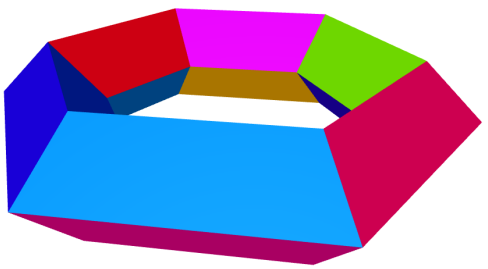


Pas 4: queda un sol triangle. Repetint el pas 3, les vegades que calgui, finalment queda un únic triangle, per al qual $C-A+V=1-3+3=1$.

Com a conseqüència, el resultat queda provat.

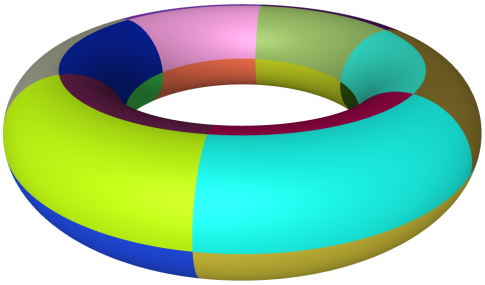
2. Altres tipus de poliedres

La característica d'Euler mesura una propietat topològica dels poliedres, P. Així hem vist que pels poliedres convexos homeomorfs a l'esfera $\chi(P)=2$. Per exemple, per a poliedres P amb un forat, és a dir, amb vora homeomorfa a un tor, T^2, el valor que s'obté és $\chi(T^2) := \chi(P) = 0$. Per posar un exemple, en el poliedre de la figura tenim que $C-A+V=24-48+24=0$.



Poliedre de 24 cares homeomorf a un tor.

A la figura següent presentem un exemple de poliedre inflat, dividit en «rectangles» per al qual també obtenim que la característica d'Euler és 0.



El tor dividit en 24 *rectangles*.

3. Poliedres regulars convexos, homeomorfs a una esfera

Veiem en aquesta secció que només hi ha cinc poliedres regulars convexos homeomorfs a una esfera, també coneguts com a *sòlids platònics*. En aquests sòlids, cada cara és un polígon regular de $p \geq 3$ costats i a cada vèrtex hi concorren exactament $q \geq 3$ cares.

Com que cada cara té p arestes i cada aresta pertany a dues cares, tenim que $pC = 2A$. A més, comptant les incidències entre cares i vèrtexs, tenim $pC = qV$.

Per tant,

$$C = \frac{2A}{p},\ V = \frac{2A}{q}.$$

Substituint a la fórmula de la característica d'Euler, obtenim la relació següent

$$2 = C - A + V = \frac{2A}{p} - A + \frac{2A}{q} = A\left(\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1\right).$$

Com que $A > 0$, cal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2},\ \text{amb } p \geq 3,\ q \geq 3. \tag{4}$$

Si $p = 3$, $1/3 + 1/q > 1/2$ implica que $q < 6$. Si $p = 4$, tenim $1/4 + 1/q > 1/2$ i per tant $q = 3$. De la mateixa manera si $p = 5$ cal que $q = 3$. Finalment, si $p \geq 6$, aleshores, com que $q \geq 3$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2},$$

fet que contradiu la desigualtat (4).

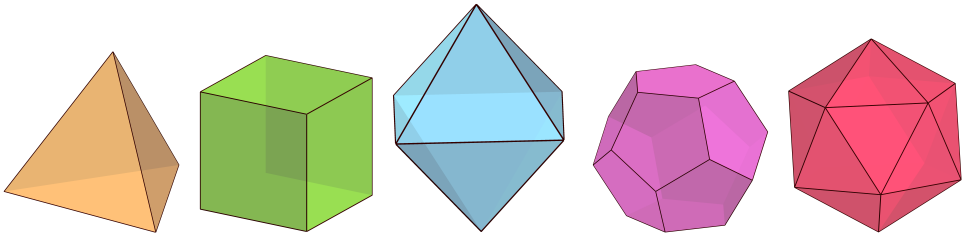
Això vol dir que no hi ha més casos i que les úniques possibilitats són

$$(p, q) \in \{(3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3)\}.$$

Aquestes corresponen als cinc únics poliedres regulars convexos, detallats a la taula següent:

Poliedre	p	q	C	A	V
Tetràedre	3	3	4	6	4
Octàedre	3	4	8	12	6
Icosàedre	3	5	20	30	12
Cub	4	3	6	12	8
Dodecàedre	5	3	12	30	20

Aquests s'il·lustren a continuació.

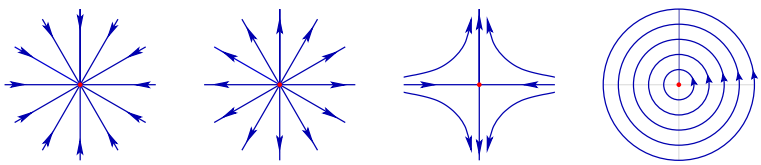


Tetràedre Cub Octàedre Dodecàedre Icosàedre

4. Una altra aparició de la característica d'Euler

El teorema de Poincaré–Hopf estableix que, per a un camp vectorial diferenciable X definit sobre una superfície compacta amb un número finit de punts d'equilibris, la suma dels índexs de tots ells és igual a la característica d'Euler de la superfície.

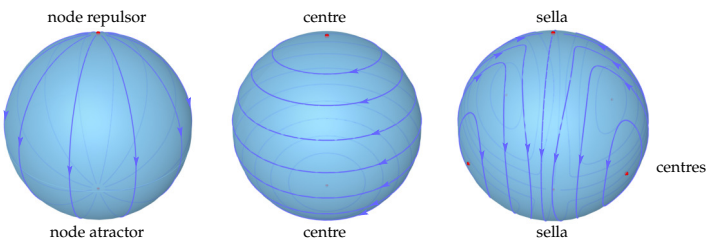
No entrarem ni en la definició, ni en cap detall sobre la interpretació del que és l'índex d'un punt d'equilibri. Ens limitem a dir que els punts d'equilibri, p, més genèrics són els que llistem a la figura següent, conjuntament amb els seus índexs respectius, vegeu [16, cap. 6].



Atractor ind $= +1$ **Repulsor** ind $= +1$ **Sella** ind $= -1$ **Centre** ind $= +1$

Així, en particular, com que per a l'esfera S^2 tenim que $\chi(S^2) = 2$, sabem que si $p_1, \ldots, p_r$ són tots els punts d'equilibri d'un camp sobre una esfera, els seus índexs satisfan $\mathrm{ind}_X(p_1) + \mathrm{ind}_X(p_2) + \cdots + \mathrm{ind}_X(p_r) = 2$.

Per exemple, si el camp només té un punt d'equilibri atractor i un altre repulsor, tots dos tenen índex $+1$, i sabem que la suma dels seus índexs és 2. Si el pol nord i el pol sud són centres, i totes les altres òrbites són periòdiques, passa una cosa semblant, vegeu la figura següent.



Quan apareixen una o més selles, que tenen índex -1, la suma ha de quedar compensada per altres punts d'equilibri d'índex positiu, per mantenir una suma total igual a 2. Així, a l'esfera de la dreta hi ha dues selles i quatre centres.

Aquest resultat indica que una bola peluda no es pot pentinar sense fer remolins. La raó és que no hi ha camps vectorials sobre l'esfera sense punts d'equilibri, ja que si existissin, la suma dels índexs dels seus punts d'equilibri seria 0, ja que no n'hi haurien. Informalment, aquest resultat es coneix com *teorema de la bola peluda.*

De manera semblant, en els fluxos sobre tors la suma dels índexs ha de ser 0, i els tors peluts sí que es podrien pentinar sense crear remolins.

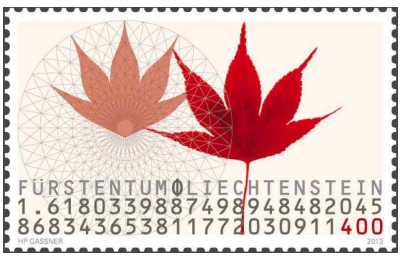
FÓRMULA 6

La raó àuria

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$$

1. Prova de la fórmula

En aquesta secció estudiarem diferents expressions del número $\phi := (1+\sqrt{5})/2$, anomenat *raó àuria*, que és la solució positiva de l'equació polinomial $x^2 - x - 1 = 0$. L'altra arrel és $\psi := -1/\phi = (1-\sqrt{5})/2$.



Deixarem per a les següents seccions la relació de ϕ amb els números de Fibonacci i amb la geometria, l'art i la natura.

La fórmula que presideix aquest capítol apareix observant que, d'acord a com s'ha definit, la constant ϕ compleix $\phi^2 = 1 + \phi$ o, dit d'una altra manera, $\phi = \sqrt{1+\phi}$. Aleshores, iterant aquesta observació

$$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}\,.$$

Provarem la validesa d'aquesta expressió de ϕ com a conseqüència d'un *teorema de punt fix* a $\mathbb{R}$.

Recordem que, donada una funció $g : X \longrightarrow X$, direm que $s \in X$ és un punt fix si $g(s) = s$. Per a començar demostrarem el resultat següent:

Siguin $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *i* $g : [a,b] \to [a,b]$. *Aleshores, si* g *és una contracció, és a dir, per a alguna constant* $0 \leq c < 1$ *i per a tot* $x, y \in [a,b]$,

$$|g(y) - g(x)| \leq c|y - x|,$$

aleshores g *té un únic punt fix* $s \in [a,b]$. *A més, per a tot* $x_0 \in [a,b]$, *la successió definida recurrentment com* $x_{n+1} = g(x_n)$, *per a* $n \geq 0$ *compleix* $\lim_{n\to\infty} x_n = s$.

Usant normes o distàncies en lloc de valors absoluts, el teorema corresponent és igualment cert i té una demostració similar si, en lloc de treballar a $\mathbb{R}$, considerem funcions definides a $\mathbb{C}$, a $\mathbb{R}^n$ o en alguns espais més generals. Aquest resultat és una de les eines més importants per demostrar l'existència de solucions de nombrosos problemes matemàtics.

Va ser el matemàtic polonès Stefan Banach (1892–1945) que el va demostrar l'any 1922 per a espais mètrics complets i és per això que normalment s'en sol fer referència com el *teorema del punt fix de Banach*.

Tot seguit demostrem l'enunciat per a funcions definides en $[a,b]$. Òbviament, el cas interessant és $c>0$, ja que quan $c=0$ no hi ha res a dir. Notem en primer lloc que qualsevol funció contractiva és contínua.

Prenent $x_0\in[a,b]$ qualsevol, tindrem

$$|x_{k+1}-x_k|\leq c|x_k-x_{k-1}|\leq c^2|x_{k-1}-x_{k-2}|\leq\cdots\leq c^k|x_1-x_0|.$$

Per tant, per a qualssevol enters positius diferents m i n (podem suposar $m>n$), utilitzant la desigualtat triangular i la fórmula per a la suma d'una progressió geomètrica, arribem a

$$\begin{aligned}|x_m-x_n|&\leq\sum_{k=n}^{m-1}|x_{k+1}-x_k|\leq\sum_{k=n}^{m-1}c^k|x_1-x_0|=|x_1-x_0|c^n\sum_{k=0}^{m-n-1}c^k\\&\leq|x_1-x_0|c^n\sum_{k=0}^{\infty}c^k=\frac{c^n}{1-c}|x_1-x_0|=:d_n.\end{aligned}$$

Com que $c<1$, per a cada $\varepsilon>0$ que triem existeix un N tal que $d_n<\varepsilon$ quan $n\geq N$. Aleshores $|x_m-x_n|<\varepsilon$ per a $m,n\geq N$ i la successió $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ és de Cauchy, de manera que té límit, $s(x_0):=\lim_{k\to\infty}x_k$. Si g és contínua

$$g(s(x_0))=g\big(\lim_{k\to\infty}x_k\big)=\lim_{k\to\infty}g(x_k)=\lim_{k\to\infty}x_{k+1}=s(x_0)$$

i $s(x_0)$ és un punt fix.

Vegem per acabar que g té un únic punt fix a $[a,b]$. Si s i t fossin dos punts fixos tindríem

$$|s-t|=|g(s)-g(t)|\leq c|s-t|,$$

cosa que és impossible ja que $c<1$. Per tant, el resultat queda provat.

Apliquem a continuació el resultat anterior en dos casos particulars. El primer ens donarà la fórmula que volem demostrar. El segon, mostrarà l'expressió de ϕ en *fracció continua*.

Les fraccions continues ja s'usaven als segles V i VI a l'Índia per Aryabhata i Brahmagupta. A Europa no es van començar a fer servir fins al segle XVI per Bombelli i Cataldi; i al segle XVII per Brouncker i Wallis, qui en va introduir el nom. Huygens en va fer una de les primeres aplicacions pràctiques, emprant-les per calcular aproximacions racionals adequades per als engranatges d'un planetari mecànic. Durant els segles XVIII i XIX, Euler, Lambert i Lagrange en van consolidar la teoria i les van convertir en una eina molt important de l'aproximació diofàntica i de la teoria de nombres, consulteu [34] i les seves referències. En poques paraules, donat $0<x\in\mathbb{R}$, existeixen[1] números naturals $n_0\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, i $n_k\in\mathbb{N}$, per a tots els $k\geq1$, tals que

$$x=n_0+\cfrac{1}{n_1+\cfrac{1}{n_2+\cfrac{1}{n_3+\cdots}}}=:[n_0;n_1,n_2,n_3,\ldots].$$

Aquesta expressió s'anomena la fracció contínua de x. Quan la tallem i considerem $[n_0;n_1,n_2,n_3,\ldots,n_k]=:p_k/q_k\in\mathbb{Q}$ es diu que tenim els *convergents* de x.

[1]De fet, es pot veure que els números n_j són únics si x és irracional, mentre que, si és racional, la fracció contínua és finita i admet exactament dues representacions.

Per a l'expressió inicial es pot demostrar: *La funció* $g(x) = \sqrt{1+x}$ *compleix* $g(I) \subset I$ *per a* $I = [1/2, 2]$, *en aquest interval és contractiva i, per tant, té un únic punt fix* $s = \phi$. *En particular, si* $x_0 = 1$ *i* $x_{n+1} = g(x_n)$ *per a* $n \geq 0$, *es compleix* $\lim_{n\to\infty} x_n = \phi$, *o equivalentment,*

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}} = \phi.$$

Per tal de procedir, comencem observant que $g'(x) = (1+x)^{-1/2}/2 > 0$, quan $x \in I$, de forma que g és creixent a I. Per tant

$$g(I) = [g(1/2), g(2)] = \left[\sqrt{3/2}, \sqrt{3}\right] \subset I.$$

A més, com que $x \geq 1/2$, per a tot $x \in I$ tenim

$$|g'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} < 1.$$

Pel teorema del valor mitjà, per a qualssevol parell $x, y \in I$, es compleix

$$|g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{6}}|x-y|.$$

D'on resulta que g és contractiva en I amb constant de contracció $c = 1/\sqrt{6} < 1$. Aleshores el resultat s'obté aplicant el teorema del punt fix anterior i observant que el punt fix de g, donat per la solució de $\sqrt{1+x} = x$ dins de l'interval I, és $s = \phi$.

Per a l'expressió en fracció contínua tindrem: *La funció* $g(x) = 1 + 1/x$ *compleix* $g(I) \subset I$, *on* $I = [3/2, 2]$, *és contractiva en aquest interval i, per tant, té un únic punt fix* $s = \phi$. *En particular, si* $x_0 = 1$ *i* $x_{n+1} = g(x_n)$ *per a cada* $n \geq 0$, *tindrem* $x_1 = 2 \in I$ *i* $\lim_{n\to\infty} x_n = \phi$ *o, equivalentment,*

$$[1; 1, 1, 1, 1, \ldots] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cdots}}} = \phi.$$

Com en el cas anterior aquesta expressió límit de ϕ també es pot recuperar a partir de la mateixa definició inicial. Si es considera que la condició $\phi^2 = \phi + 1$ també és equivalent a $\phi = 1 + \dfrac{1}{\phi}$, la iteració d'aquesta nova igualtat portarà a la fórmula buscada.

La demostració d'ara segueix els mateixos passos que en la prova anterior. Observem que $x_0 = 1 \notin I$, però $x_1 = 2 \in I$. En aquest cas la funció g és decreixent a I de forma que

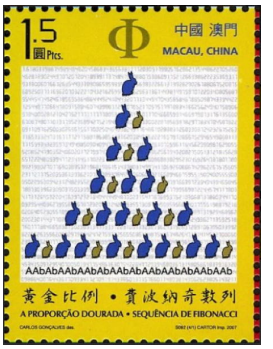
$$g(I) = [g(2), g(3/2)] = [3/2, 5/3] \subset I.$$

A més, per a tot $x \in I$,

$$|g'(x)| = \frac{1}{x^2} \leq \frac{4}{9} < 1.$$

Com a conseqüència, g és contractiva a I amb constant de contracció $c = 4/9$ i podem aplicar de nou el teorema del punt fix de Banach amb llavor 2 per obtenir el resultat desitjat. De nou, $s = \phi$ és el punt fix de g, que serà la solució de $1 + 1/x = x$ dins de l'interval I.

2. Els números de Fibonacci



Els números de Fibonacci F_n, es defineixen inductivament a partir de l'equació en diferències de segon ordre

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \geq 0,$$

amb llavors $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$. Així, els primers són:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

El seu nom ve de Leonardo de Pisa, conegut com a Fibonacci, que en el seu *Liber Abaci* (1202), destinat a difondre els números indoaràbics i el seu ús en el comerç, els va introduir per resoldre un problema formulat en termes de proliferació de conills ([2]). Segurament, es tracta del primer model d'ecologia matemàtica.

En qualsevol cas, volem remarcar que el números de Fibonacci ja eren coneguts a l'Índia segles abans de l'època de Fibonacci.

És sorprenent el nombre de propietats interessants que apareixen quan treballem amb aquests números. Veiem diferents maneres d'obtenir-los:

2.1. La fórmula de Binet. El nom correspon a Jacques Philippe Marie Binet que la va publicar l'any 1843, però De Moivre, Daniel Bernoulli i Euler ja la coneixien al segle XVIII. Es compleix

$$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi - \psi} = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}, \ n \geq 0,$$

on, recordem que ϕ i $\psi = -1/\phi$ són les dues arrels de $x^2 - x - 1 = 0$.

Comencem demostrant per inducció que, si $x \in \{\phi, \psi\}$, aleshores $x^n = F_n x + F_{n-1}$. La fórmula és clarament certa per a $n = 1$. Suposant-la certa per a $n = m$, $x^m = F_m x + F_{m-1}$, tenim que

$$\begin{aligned} x^{m+1} &= F_m x^2 + F_{m-1} x = F_m(x+1) + F_{m-1} x \\ &= (F_m + F_{m-1})\, x + F_m = F_{m+1} x + F_m, \end{aligned}$$

tal com volíem veure. Per tant, $\phi^n = F_n \phi + F_{n-1}$ i $\psi^n = F_n \psi + F_{n-1}$. Restant ambdues equacions obtenim $\phi^n - \psi^n = F_n(\phi - \psi) = F_n\sqrt{5}$, que és la fórmula que volíem provar.

2.2. Els números de Fibonacci i els convergents de ϕ. Provem a continuació que els convergents de ϕ venen donats per quocients de números de Fibonacci, és a dir:

$$[1; \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-1}] = \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

Fem-ho també per inducció. Per a $n = 1$ és clar ja que $[1] = 1 = F_2/F_1$.

Suposem que $[1; \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}] = F_{n+1}/F_n$. Aleshores,

$$[1; \underbrace{1, \ldots, 1}_{n}] = 1 + \frac{1}{[1; \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}]} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}},$$

tal com volíem veure.

A més, usant la fórmula de Binet, com que $|\psi| < 1$, resultarà

$$\lim_{n\to\infty} [1; \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-1}] = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\phi^n - \psi^n} = \phi. \tag{5}$$

Aquest fet ens proporciona una prova alternativa de la igualtat $\phi = [1; 1, 1, 1, \ldots]$.

Aprofitem aquest punt per veure una relació similar per a $1/\phi^2$, que usarem més endavant.

$$[0; 2, 1, 1, 1, \ldots] = \frac{1}{2 + \dfrac{1}{[1; 1, 1, \ldots]}} = \frac{1}{2 + \dfrac{1}{\phi}} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\phi} + 1} = \frac{1}{\phi + 1} = \frac{1}{\phi^2}.$$

Els primers convergents són

$$\frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{2}{5}, \ \frac{3}{8}, \ \frac{5}{13}, \ \frac{8}{21}, \ldots$$

i, en general,

$$[0; 2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}] = \frac{F_n}{F_{n+2}}.$$

2.3. Una funció generatriu. Per a $|x| < 1/\phi = -\psi = (\sqrt{5} - 1)/2$, es compleix

$$f(x) := \frac{x}{1 - x - x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n.$$

Aquesta funció f s'anomena *funció generatriu* de la successió de Fibonacci.

Com ja hem vist a (5),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi.$$

Per tant el radi de convergència de la sèrie de potències considerada és $1/\phi = -\psi$. Només queda veure que la funció definida per $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$, coincideix amb $f(x)$ per a $|x| < -\psi$. Efectivament,

$$\begin{aligned} g(x) &= x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} F_n x^n = x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-2} x^n \\ &= x + x^2 + x \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2} \\ &= x + x^2 + x(g(x) - x) + x^2 g(x) = x + (x + x^2) g(x); \end{aligned}$$

per tant $g(x)(1 - x - x^2) = x$, d'on s'en desprèn que $g = f$ en la regió on ambdues estan definides.

2.4. Números de Fibonacci i matrius. Per començar, observem que es compleix

$$M^n := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 1. \tag{6}$$

Tenint en compte que

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

és immediat provar per inducció la igualtat (6).

Aquesta fórmula serveix per demostrar altres propietats com, per exemple:

- $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$, $F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$.
- $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

La segona fórmula va ser descoberta l'any 1680 pel genovès Giovanni Domenico Cassini, aleshores director de l'Observatori de París. També se'l coneix pel nom francès Jean-Dominique Cassini. L'escocès Robert Simson (1753), de manera independent, també en va fer una demostració.

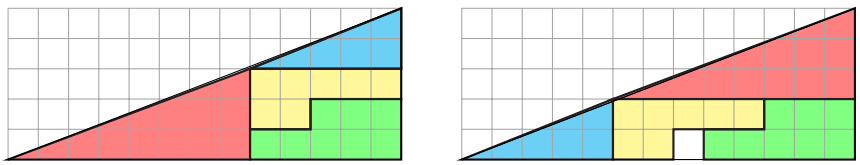
La demostració de les del primer ítem és conseqüència del fet que $M^{2n} = M^n M^n$. En aquesta situació la fórmula és equivalent a

$$\begin{pmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Només cal multiplicar aquestes dues matrius per obtenir el que volem comprovar.

La igualtat de Cassini s'obté directament prenent determinants en la igualtat de matrius (6). També s'en pot fer una demostració directa per inducció, veure per exemple [30, Sec. 1.2.8].

Aquesta identitat és la clau d'una il·lusió òptica famosa. Es coneix com *la paradoxa del quadrat perdut* i es pot veure en la figura següent, on es mostren dos triangles formats per les mateixes peces, però distribuïdes de manera diferent. Els triangles sembla que tenen les mateixes dimensions, 13 de base i 5 d'alçada, però en un d'ells hi ha un quadrat buit.



Què és el que passa? En realitat, els triangles vermell i blau no tenen el mateix pendent. El del vermell és $3/8 = 0.375$, i el del blau és $2/5 = 0.4$. De fet, ni la figura de la dreta ni la de l'esquerra són triangles (la suposada hipotenusa està formada per dos segments no alineats), encara que la vista no aconsegueix apreciar-ho. En la de l'esquerra, el punt $(8, 3)$ en què s'uneixen els triangles vermell i blau està lleugerament més avall que la recta que uneix els punts $(0, 0)$ i $(13, 5)$; en la de la dreta, el punt $(5, 2)$ està lleugerament més amunt. I això fa que la composició de la dreta tingui una àrea una mica més gran, exactament de la mida d'un quadradet.

La paradoxa es construeix usant tres números consecutius de la successió de Fibonacci: $F_5 = 5$, $F_6 = 8$ i $F_7 = 13$. L'àrea del rectangle de costats 13 i 5 és 65, i la del quadrat de costat 8 és 64 (la dels triangles corresponents seria $65/2 = 32.5$ i $64/2 = 32$). Aquí es posa de manifest el que diu la identitat de Cassini, $13 \cdot 5 = 8^2 + 1$, i per això l'ús dels números de Fibonacci 5 i 13 permet aconseguir la il·lusió visual amb números enters i només un quadradet sobrant.

3. Presència de la raó àuria

La raó àuria ϕ ja apareix en els textos clàssics de geometria. Es diu que un segment està dividit en una proporció àuria quan la raó entre el segment total i la part més gran és igual a la proporció entre la part gran i la petita. Això també es pot formular dient que ϕ és la proporció entre els costats d'un rectangle tal, que en treure el quadrat corresponent al costat petit apareix un rectangle amb les mateixes proporcions. Noteu que, si $a < b$ són els costats d'aquest rectangle, la condició que s'està demanant a $\phi = b/a$ serà

$$\phi = \frac{b}{a} = \frac{a}{b-a} = \frac{1}{(b/a)-1} = \frac{1}{\phi - 1},$$

com queda representat a l'esquema de la figura 6.1 i és, exactament, la mateixa propietat que s'ha donat com a definició al principi d'aquesta secció.

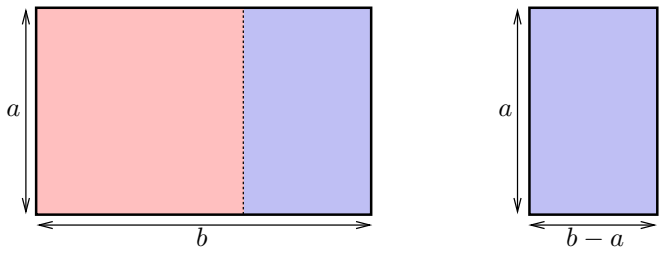


FIGURA 6.1. Esquema d'un rectangle auri.

Una de les maneres més conegudes per obtenir un rectangle de proporcions àuries és la que es representa a l'esquema de la figura 6.2.

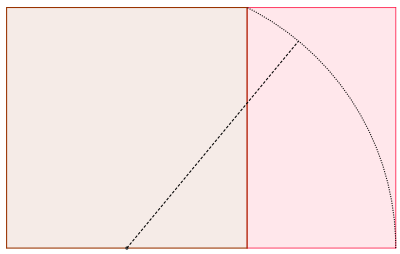


FIGURA 6.2. Construcció geomètrica de la raó àuria.

L'arc de circumferència té el centre en el punt mig del costat del quadrat i el radi està determinat pel vèrtex del costat oposat. El punt que marca la proporció àuria amb el costat del quadrat és la intersecció de la circumferència amb la prolongació del costat on s'ha marcat el centre.

Si es vol demostrar que aquesta construcció porta a l'objectiu correcte només cal observar que els triangles rectangles PQR i QSR de la figura 6.3 són semblants. Això permet afirmar que $b/a = a/(b-a)$ i, per tant, que el rectangle és auri.

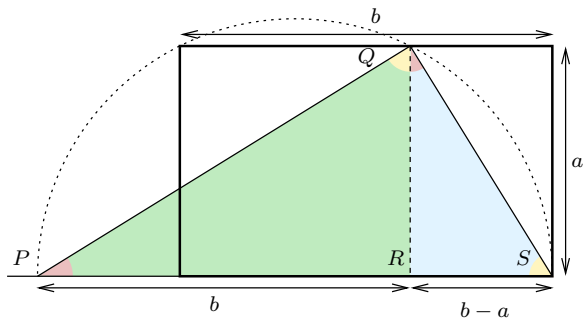
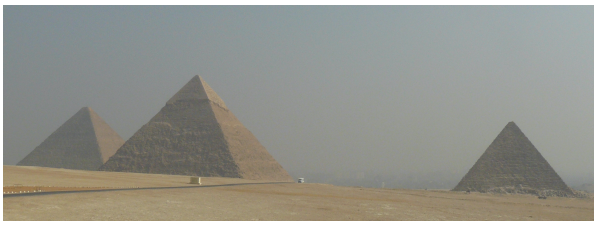


FIGURA 6.3. Demostració del rectangle auri.

Per acabar, doncs, només cal veure la igualtat dels angles d'aquests dos triangles. Això serà conseqüència immediata del fet que l'angle PQS és recte, ja que el seu arc capaç (capítol 4, secció 6) correspon a un diàmetre de la circumferència PQS, i per tant els angles en Q dels triangles seran complementaris.

3.1. La raó àuria i l'estètica. No està clar des de quin moment de la història s'ha fet servir la raó àuria com a patró estètic. S'han pogut mesurar proporcions molt

properes a les piràmides de Guiza tot i que no queda clar si apareixen de forma intencionada, com a resultat d'una intenció estètica concreta, o són meres coincidències.



A l'època de la Grècia antiga, els pitagòrics ja en tenien coneixement, sobretot per les múltiples aparicions dins del pentàgon regular, un dels símbols importants d'aquesta escola. També s'han comprovat aparicions d'aquesta proporció en edificis remarcables com el Partenò d'Atenes. Tampoc sense constància explícita que sigui per raons estètiques o simbòliques.



Més modernament, al Renaixement, es pot apreciar l'ús de la raó àuria en les obres de molts pintors i escultors.

Fora de l'àmbit de les arts plàstiques o l'arquitectura també hi ha hagut compositors que han utilitzat la raó àuria (o els números de Fibonacci) com a patró per a la durada de les notes, per a l'organització de les parts d'una obra o, fins i tot, com a base per a l'escala de tonalitats fora de les escales ordinàries.

I, per descomptat, les targetes de crèdit o les acreditacions del club, que tots portem a la cartera, es fabriquen utilitzant una proporció bastant pròxima al número d'or.



3.2. La raó àuria a la natura. Presentarem dos exemples: La fil·lotaxi i el nombre d'avantpassats d'un abellot.

La fil·lotaxi. La fil·lotaxi és l'estudi de la disposició de les fulles i altres òrgans vegetals al voltant de la tija o d'un centre. Un antecedent fonamental d'aquesta disciplina és l'obra del botànic i naturalista suís Charles Bonnet, publicada el 1754. Bonnet hi descriu diverses disposicions regulars de les fulles i presta especial atenció a les configuracions espirals. Més endavant, Schimper, Braun i els germans Bravais en desenvoluparen la formulació geomètrica i matemàtica ([27]).

Hi ha una relació entre la raó àuria, els números de Fibonacci i el nombre de pètals d'algunes flors, vegeu la figura. Prové de la manera com les plantes distribueixen els pètals per aprofitar millor l'espai i la llum. També es pot observar una propietat similar amb les fulles, o les llavors de les plantes.



Flors amb un nombre de pètals donat per un número de Fibonacci 5, 13 i 21.

Resulta que, en moltes flors, cada nou pètal apareix girat respecte de l'anterior segons un angle proper a l'anomenat *angle auri*:

$$\theta := \frac{360^\circ}{\phi^2} = 360^\circ \left(1 - \frac{1}{\phi}\right) \approx 137.5^\circ.$$

El motiu és que aquest angle és especialment eficient perquè és una fracció molt irracional d'una volta completa. Això evita que els elements nous quedin exactament alineats amb els anteriors i permet una distribució més uniforme. Evolutivament, sembla que aquesta és l'estratègia triada per moltes flors per rebre el màxim de llum. Amb l'angle auri, cada element nou ocupa el buit més gran disponible.

De totes maneres, hi ha moltes flors amb una quantitat de pètals que no és un número de Fibonacci, tot i que sovint es pot trobar alguna relació amb aquests números. Per exemple, a la figura següent tenim una bonica flor de la passió amb 10 pètals, però 5 pistils. A la dreta es mostra una flor amb més de 50 pètals que sembla que hagi volgut aconseguir el número de Fibonacci 55.



En aquesta història el punt més delicat de l'afirmació anterior és: «és una fracció molt irracional d'una volta completa». Què vol dir exactament aquesta frase? No són igual d'irracionals tots els nombres irracionals?

Informalment se sol dir que la raó àuria ϕ és "el número més irracional" perquè és, en un sentit que precisarem tot seguit, un dels números reals més difícils d'aproximar mitjançant fraccions. Com ja hem vist, la seva fracció contínua és $\phi = [1; 1, 1, 1, \ldots]$ i aquest fet serà bàsic en el que explicarem.

De fet, en una fracció contínua, com més grans són els números que hi apareixen, millors aproximacions racionals es poden obtenir. Per exemple, se sap que

$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, \ldots]$, és a dir,

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}}.$$

Els primers convergents de π són doncs

$$3,\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \frac{104348}{33215}.$$

En particular

$$\left|\pi - \frac{355}{113}\right| < 2.7 \times 10^{-7}.$$

Com es veu, aquesta fracció és una aproximació molt bona de π, amb un denominador prou petit. El motiu per al qual s'ha aconseguit això és que hem aproximat π per $[3; 7, 15, 1]$, tallant precisament abans de 292, número força gran en aquest context.

En general, si $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$, els convergents $p_n/q_n = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$ es calculen mitjançant recurrències del tipus

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \qquad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2},$$

amb certes condicions inicials. En el cas de $x = \phi$, tots els coeficients són iguals a 1, el valor enter positiu més petit possible. Per això les seves aproximacions racionals milloren el més lentament possible.

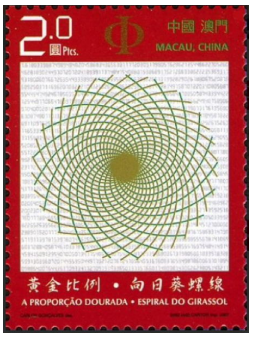
Si volem ser una mica més precisos, el teorema de Hurwitz afirma que, per a qualsevol número irracional x, existeixen infinites fraccions p/q tals que

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, q^2}$$

i, a més, que la constant $1/\sqrt{5}$ no es pot millorar simultàniament per a tots els irracionals. De fet, pels convergents de la raó àuria es pot demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} F_n^2 \left|\phi - \frac{F_{n+1}}{F_n}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Com que els convergents de les fraccions continues de $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ són el racionals que millor s'aproximen a x, això ens diu que les aproximacions racionals de ϕ donades per F_{n+1}/F_n són, asimptòticament, tan dolentes com permet el teorema.

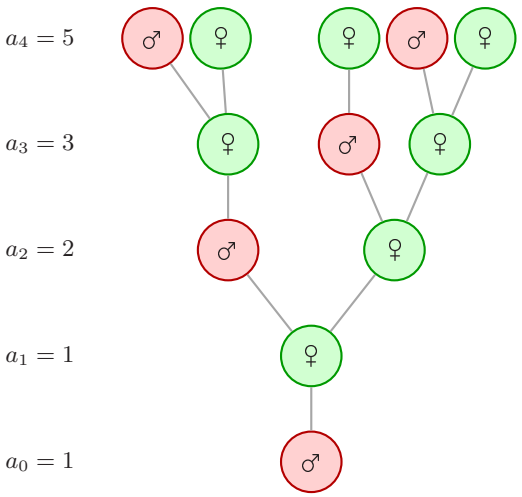


El mateix succeeix amb tots el números irracionals que tenen una fracció contínua acabada en infinits 1's. Com ja hem vist, $1/\phi^2$, que és la quantitat que dona lloc a l'angle auri, és un número amb aquesta propietat. I recordeu que els seus convergents contenen els números de Fibonacci.

Una situació semblant apareix quan observem una pinya o un gira-sol, sovint s'hi poden observar espirals en dues direccions. El nombre d'espirals en un sentit i en l'altre sol ser una parella de números de Fibonacci, com ara 21 i 34, o 34 i 55. De nou, això passa perquè les millors aproximacions racionals de la raó àuria són precisament els quocients de números consecutius de Fibonacci, $\phi \approx F_{n+1}/F_n$. Per tant, després de F_n voltes la disposició d'una llavor queda gairebé alineada amb una posició anterior, i això genera visualment famílies d'espirals amb F_n o F_{n+1} braços.

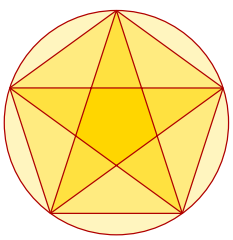
Els avantpassats d'un abellot. Un altre exemple de l'aparició dels números de Fibonacci a la natura es troba en la genealogia de les abelles. Un *abellot* (mascle) neix d'un ou no fecundat i, per tant, té només mare. En canvi, una abella femella neix d'un ou fecundat i té pare i mare.

Si a_n és el nombre d'avantpassats d'un abellot en la generació n, obtenim el diagrama:



Per tant, clarament $a_n = F_{n+1}$ per a tot $n \geq 0$.

3.3. El pentàgon regular i la raó àuria. La figura del pentàgon regular i de l'estrella de cinc puntes, que com s'ha comentat abans són un dels símbols de l'escola pitagòrica, contenen la raó àuria de moltes maneres diferents.



Per mostrar-ne una que conté tots els ingredients bàsics de la situació, tot seguit demostrarem que la proporció entre les *diagonals* del pentàgon i els costats és àuria.

Considerem per començar el triangle format per dues diagonals concurrents en un vèrtex i el costat oposat representat a la figura 6.4 (a). Els angles d'aquest triangle isòsceles (b) seran de 36° (verd, en el vèrtex) i 72° (blaus clar, a la base) ja que l'angle al vèrtex (c) ha de ser la meitat de l'arc determinat pel costat del pentàgon (de $360°/5 = 72°$) que és el seu *arc capaç* (secció 6 del capítol 4). Ara bé, un triangle d'aquestes característiques (d) tindrà els costats en proporció àuria ja que s'ha de complir $b/a = a/(b-a)$ i tornem a tenir la condició del número d'or.

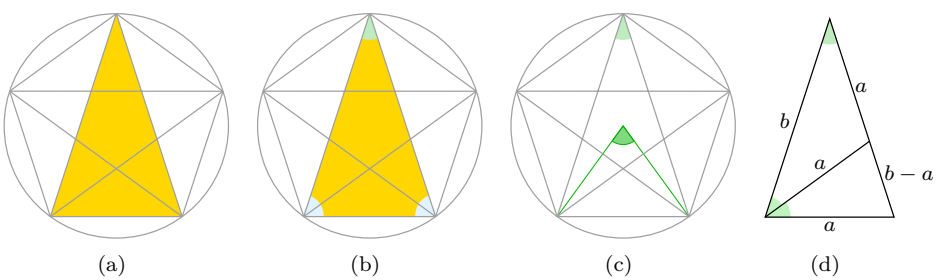


FIGURA 6.4. Detalls del pentàgon i la seva estrella associada.

4. Els números de Fibonacci al triangle de Pascal

El que avui dia, a Occident, s'anomena *triangle de Pascal o de Tartaglia* està format per una disposició triangular dels coeficients binomials $\binom{n}{k}$. Cada número interior és la suma dels dos que té immediatament al damunt com a conseqüència de la igualtat

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Malgrat el seu nom, el triangle era conegut molts segles abans de Blaise Pascal. Apareix, entre altres llocs, en la tradició matemàtica índia i també fou estudiat a Pèrsia i a Xina. Pascal en va fer un estudi sistemàtic al segle XVII.





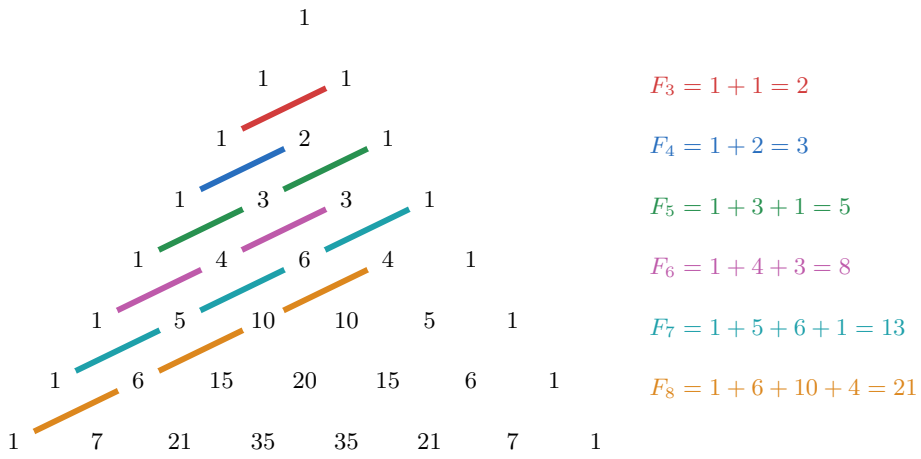
Els números combinatoris que el formen apareixen al binomi de Newton,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Amagades dins del triangle hi apareixen diferents successions conegudes de números. Per exemple, aplicant la fórmula anterior quan $a = b = 1$, obtenim que les sumes de les seves files és 2^n, és a dir,

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Una propietat no tan coneguda és que, sumant els números sobre certes diagonals obliqües, apareixen els números de Fibonacci:



En general, es pot demostrar que

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k},$$

on $\lfloor m \rfloor$ és l'enter més gran que és menor o igual que m.

FÓRMULA 7

El problema de Basilea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

1. Una primera prova

Cap al 1650, Pietro Mengoli va provar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Ho va fer desenvolupant la suma com a sèrie telescòpica, un procediment ideat per ell mateix:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)\right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{m} + \frac{1}{m}\right) - \frac{1}{m+1}\right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Així mateix, Mengoli es va plantejar el càlcul de $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, però sense aconseguir sumar aquesta sèrie. Més endavant, Jacob Bernoulli es va interessar per aquest problema, i d'aquí prové el seu nom de *problema de Basilea*, ja que aquesta ciutat era la residència de Bernoulli. De fet, en Jacob Bernoulli, mort el 1705, va escriure un llibre sobre sèries, "Tractatus de seriebus infinitis", a finals del XVII, on hi presenta la suma de moltes sèries, però la dels recíprocs dels quadrats se li va resistir. Qui va ser capaç de sumar-la per primera vegada va ser Euler, l'any 1734.



"Utinam frater superstes esset" (Tant de bo el meu germà encara fos viu!), és el que digué en Johann Bernoulli quan va conèixer el resultat d'Euler sobre el problema de Basilea.

Presentem en primer lloc la demostració donada a [37], basada en la també interessant relació trigonomètrica

$$\sum_{k=1}^{m} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) = \frac{m(2m-1)}{3},$$

que serà el primer que demostrarem.

Per començar, observem que

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = \mathrm{e}^{in\theta} = \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n \\ = \sin^n(\theta)\,(\cot\theta + i)^n = \sin^n(\theta)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} i^k \cot^{n-k}(\theta).\end{aligned}$$

Prenent $n = 2m+1$ i igualant les parts imaginàries de la relació anterior, s'obté

$$\begin{aligned}\sin\big((2m+1)\theta\big) &= \sin^{2m+1}(\theta)\sum_{j=0}^{m}\binom{2m+1}{2j+1}(-1)^j\cot^{2(m-j)}(\theta) \\ &= \sin^{2m+1}(\theta)P_m(\cot^2(\theta)),\end{aligned}$$

on P_m és el polinomi, de grau m,

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^{m}\binom{2m+1}{2j+1}(-1)^j x^{m-j}.$$

Per la seva definició, les m arrels de P_m són $x_k = \cot^2\big(k\pi/(2m+1)\big)$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Ara bé, si les arrels d'un polinomi $Q(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0$, amb $a_m \neq 0$, són $y_1, y_2, \ldots, y_m$, expandint

$$a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0 = a_m(x-y_1)(x-y_2)\cdots(x-y_m)$$

i igualant el coeficient de x^{m-1}, s'obté que $y_1 + y_2 + \cdots + y_m = -a_{m-1}/a_m$. Per tant,

$$\sum_{k=1}^{m}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) = \sum_{k=1}^{m} x_k = -\frac{-\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{m(2m-1)}{3},$$

tal com volíem veure.

Per a tot $0 < x < \pi/2$ es compleix que $\sin x < x < \tan x$; per tant, prenent recíprocs i elevant al quadrat,

$$\cot^2(x) < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \cot^2(x).$$

Substituint $x = k\pi/(2m+1)$, amb $k, m \in \mathbb{N}$ complint $1 \leq k \leq m$, i sumant, s'obté

$$\sum_{k=1}^{m}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} < m + \sum_{k=1}^{m}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right).$$

Multiplicant les desigualtats per $\pi^2/(2m+1)^2$ i usant el valor de la suma trigonomètrica anterior, s'arriba a

$$\frac{m(2m-1)}{3(2m+1)^2}\,\pi^2 < \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} < \left(m + \frac{m(2m-1)}{3}\right)\frac{\pi^2}{(2m+1)^2} = \frac{2m(m+1)}{3(2m+1)^2}\,\pi^2.$$

Fent tendir m a infinit s'obté la suma desitjada, ja que les fraccions de l'esquerra i de la dreta tendeixen a $\pi^2/6$.

2. Un cas més general

Poc després, el 1740, Euler va generalitzar el problema, i va aconseguir sumar la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{2k}$, per a qualsevol enter positiu k, en termes dels números de Bernoulli, que ja han aparegut al capítol 2.

El resultat que va provar Euler és: *Per a cada enter positiu k es té*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k},$$

on els B_{2k} són els números de Bernoulli d'índex parell. Així, per exemple,

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}.$$

Aprofitem aquest punt per comentar que, en honor de Bernhard Riemann, s'anomena zeta de Riemann a la funció

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1,$$

així que, el que apareix és el valor de $\zeta(2k)$. Tot i que això ja queda fora del nostre objectiu comentarem que, aproximadament el 1859, Riemann va utilitzar la funció $\zeta(s)$, en realitat no l'expressió anterior sinó la seva extensió analítica al pla complex, per mostrar la seva sorprenent relació amb la distribució dels números primers.

Actualment hi ha molts procediments per calcular $\zeta(2k)$; en canvi, no hi ha fórmules tancades per a cap $\zeta(2k+1)$. Per exemple, el mètode que s'usa a [11] també utilitza una sèrie telescòpica. En les referències d'aquest article es citen nombroses demostracions alternatives.

3. Variacions del problema de Basilea

El mateix Euler també va demostrar que per a $0 \neq x \in \mathbb{R}$, es compleix

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} = \frac{\pi x \coth(\pi x) - 1}{2x^2}.$$

Si substituïm a $x = 1$ obtenim un resultat semblant a la suma del requadre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{\pi \coth(\pi) - 1}{2} = \frac{1}{2}\left(\pi \frac{\mathrm{e}^{2\pi} + 1}{\mathrm{e}^{2\pi} - 1} - 1\right).$$

A més, com que en un entorn de $u = 0$,

$$\coth(u) = \frac{1}{u} + \frac{u}{3} + O(u^3),$$

prenent $u = \pi x$ obtenim

$$\pi x \coth(\pi x) = 1 + \frac{\pi^2 x^2}{3} + O(x^4).$$

Per tant,

$$\frac{\pi x \coth(\pi x) - 1}{2x^2} = \frac{\pi^2}{6} + O(x^2),$$

i així

$$\lim_{x \to 0} \frac{\pi x \coth(\pi x) - 1}{2x^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

recuperant la suma de Basilea.

Euler va obtenir la suma a partir de l'avui en dia anomenat producte d'Euler–Weierstrass

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

La suma buscada es pot obtenir també usant la teoria de sèries de Fourier. Si introduïm la funció

$$f(t) = \cosh(xt), \qquad -\pi \le t \le \pi,$$

amb càlculs que no detallem, s'obtindrà

$$\cosh(xt) = \frac{\sinh(\pi x)}{\pi x} + \frac{2x\sinh(\pi x)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nt)}{n^2 + x^2}.$$

Substituint a $t = \pi$ arribem un cop més a la suma buscada.

Anem a veure també, que si separem a l'expressió de F el termes amb n senar, obtenim

$$F_s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 + x^2} = \frac{\pi}{4x} \tanh\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Efectivament, la suma sobre els enters parells és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2 + x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + x^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (x/2)^2} = \frac{1}{4} F\left(\frac{x}{2}\right).$$

Així

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 + x^2} &= F(x) - \frac{1}{4} F\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= \left(\frac{\pi}{2x} \coth(\pi x) - \frac{1}{2x^2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{x} \coth\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{2}{x^2}\right) \\
&= \frac{\pi}{4x}\left(2\coth(\pi x) - \coth\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{4x} \tanh\left(\frac{\pi x}{2}\right),
\end{aligned}$$

on al darrer pas s'utilitza, per a $u = (\pi x)/2$, la identitat

$$2\coth(2u) - \coth u = \tanh u,$$

que és conseqüència de la cadena d'igualtats

$$\begin{aligned}
2\coth(2u) - \coth u &= 2\,\frac{\cosh(2u)}{\sinh(2u)} - \frac{\cosh u}{\sinh u} = \frac{\cosh^2 u + \sinh^2 u}{\sinh u \cosh u} - \frac{\cosh u}{\sinh u} \\
&= \frac{\sinh^2 u}{\sinh u \cosh u} = \frac{\sinh u}{\cosh u} = \tanh u.
\end{aligned}$$

Per acabar aquesta secció, vegem com utilitzar l'expressió de F_s per a demostrar una nova variació de la fórmula de Basilea,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \tanh\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{e}^{\pi\sqrt{3}} - 1}{\mathrm{e}^{\pi\sqrt{3}} + 1}.$$

En efecte, com que

$$n^2 + n + 1 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\left((2n+1)^2 + 3\right),$$

tenim

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2 + (\sqrt{3})^2} = F_s(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \tanh\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\right),$$

tal com volíem provar.

4. Més variacions: la constant de Catalan



La *constant de Catalan*, G, es defineix mitjançant la sèrie alternada, convergent i absolutament convergent,

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Rep el seu nom en honor del matemàtic belga Eugène Charles Catalan (1814–1894), que la va introduir en els seus estudis sobre sèries. La lletra G prové del matemàtic anglès James Whitbread Lee Glaisher (1848–1928), que en va donar l'aproximació amb 32 xifres decimals. El seu valor aproximat és $G \approx 0.915965594$ i ni tan sols se sap si és un número racional.

Veiem com, a partir de G i de la suma de Basilea es poden calcular les sumes següents

$$S_1 = \frac{\pi^2}{16} + \frac{G}{2}, \quad S_2 = \frac{\pi^2}{32}, \quad S_3 = \frac{\pi^2}{16} - \frac{G}{2}, \quad S_4 = \frac{\pi^2}{96},$$

on

$$S_j = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+j)^2}.$$

El càlcul de S_4 és directe a partir del resultat d'Euler:

$$S_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n)^2} = \frac{1}{16} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{96}.$$

Calculem a continuació S_1 i S_3. Com que els números senars positius són o bé de la forma $4n+1$, o bé de la forma $4n+3$, tenim que

$$S_1 + S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8},$$

on hem utilitzat de nou la suma d'Euler.

D'altra banda, a partir de la constant de Catalan,

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)^2} = S_1 - S_3,$$

on hem fet servir que la primera sèrie, pel fet de ser absolutament convergent, es pot reordenar. De fet, hem pres primer els termes amb n parell i després els de n senar.

Resolent el sistema donat per les dues equacions obtenim les expressions corresponents a S_1 i S_3. Finalment, S_2 s'obté de la relació

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{\pi^2}{6},$$

o, directament, observant que $S_2 = (S_1 + S_3)/4$.

Per acabar aquesta secció veurem que la constant de Catalan es pot obtenir també mitjançant una integral. Més concretament provarem que

$$G = -\int_0^1 \frac{\log(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Per demostrar-ho farem servir diverses vegades que, per a $a > -1$,

$$\int_0^1 (-\log(x))x^a\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty t\mathrm{e}^{-(a+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(a+1)^2}, \tag{7}$$

on, en el primer pas, hem utilitzat el canvi de variable $x = \mathrm{e}^{-t}$ i la segona integral s'ha obtingut integrant per parts.

Per a $0 \leq x < 1$ i $N \in \mathbb{N}$ fix, sabem que

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \quad \text{i} \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (-x^2)^n = \frac{1-(-x^2)^{N+1}}{1+x^2}.$$

Per tant,

$$\frac{1}{1+x^2} - S_N(x) = \frac{(-x^2)^{N+1}}{1+x^2}.$$

Per a $x \in (0,1)$, multiplicant per $-\log(x)$, obtenim

$$-\frac{\log(x)}{1+x^2} - (-\log(x))S_N(x) = (-\log(x))\frac{(-x^2)^{N+1}}{1+x^2}.$$

Com a conseqüència,

$$\begin{aligned}\left| -\int_0^1 \frac{\log(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 (-\log(x))S_N(x)\,\mathrm{d}x \right| &\leq \int_0^1 \left| -\frac{\log(x)}{1+x^2} - (-\log(x))S_N(x) \right| \mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^1 (-\log(x))\frac{x^{2N+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^1 (-\log(x))x^{2N+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2N+3)^2},\end{aligned}$$

on, en l'últim pas, hem utilitzat (7) amb $a = 2N+2$. Així,

$$\begin{aligned}-\int_0^1 \frac{\log(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{N\to\infty} \int_0^1 (-\log(x))S_N(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{N\to\infty} \int_0^1 (-\log(x)) \sum_{n=0}^{N} (-x^2)^n\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 (-\log(x))x^{2n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2},\end{aligned}$$

on hem fet servir de nou (7), ara amb $a = 2n$. Aquesta igualtat conclou la demostració.

Mitjançant canvis de variable, es pot demostrar que altres expressions integrals per a G són:

$$G = \int_1^{\infty} \frac{\log(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \log(\cot x)\,\mathrm{d}x.$$

5. Un apunt final

La probabilitat que dos enters positius escollits a l'atzar siguin *coprimers*, és a dir, que el seu màxim comú divisor sigui 1, és $6/\pi^2$. Aquesta probabilitat s'ha d'entendre en el sentit de densitat asimptòtica. Més precisament,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \operatorname{Card}\big\{(m,n) \in \{1,\ldots,N\}^2 : \operatorname{mcd}(m,n) = 1\big\} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Aquest resultat, conegut sovint com el *teorema de Cesàro*, fou estudiat per Ernesto Cesàro a finals del segle XIX. La prova, com el lector segurament sospita, usa el valor de la suma de Basilea [25].

FÓRMULA 8

La constant d'Euler–Mascheroni

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n)\Big)=\gamma=0.577215\ldots$$

1. Existència de la constant

Euler, el 1731, va provar l'existència de γ i en va obtenir els primers dígits. Mascheroni la va calcular el 1790 amb dinou xifres decimals correctes i Gauss el 1812 amb quaranta. Avui dia encara no se sap si γ és racional o irracional. Aquesta constant apareix en moltes fórmules. Per exemple, altres expressions de γ gens evidents són

$$\gamma=-\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\log(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{\log(x)}\right)\mathrm{d}x.$$

Sens dubte γ, juntament amb π i e, és al pòdium de les constants matemàtiques més famoses.

Una manera força elegant d'expressar γ és

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\int_1^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\Big).$$

Comencem demostrant l'existència del límit. Denotem les sumes parcials de la suma involucrada per $H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$; aquests són els anomenats números harmònics. Provarem a continuació que la successió $\{\gamma_n\}_n$, on $\gamma_n:=H_n-\log(n)$, és decreixent i acotada. Així,

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1}-\gamma_n&=H_{n+1}-H_n-\log(n+1)+\log(n)=\frac{1}{n+1}+\log\left(\frac{n}{n+1}\right)\\&=\frac{1}{n+1}+\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)<0,\end{aligned}$$

on en l'últim pas s'ha usat que, per a $x\in(0,1)$, $\varphi(x):=x+\log(1-x)<0$. Aquesta desigualtat es compleix perquè $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$ mentre que $\varphi''(x)=-(1-x)^{-2}<0$. Per tant, $\gamma_{n+1}<\gamma_n$, tal com volíem provar.

Vegem ara que la successió és acotada. Per fer-ho, comencem observant que, per a $k>1$,

$$\frac{1}{k}<\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t}<\frac{1}{k-1}.$$

Aleshores, sumant les desigualtats anteriors per a $k=2,3,\ldots,n$, resulta

$$H_n-1<\int_1^2\frac{\mathrm{d}t}{t}+\int_2^3\frac{\mathrm{d}t}{t}+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int_1^n\frac{\mathrm{d}t}{t}=\log(n)<H_{n-1}.$$

En resum, $H_n-1<\log(n)<H_{n-1}$, o, equivalentment, $H_n-1<\log(n)<H_n-1/n$. D'aquí, restant $\log(n)$, deduïm que $\gamma_n-1<0<\gamma_n-1/n$, és a dir, $1/n<\gamma_n<1$, i ja hem demostrat l'acotació.

Per tant, com que $\{\gamma_n\}_n$ és decreixent i acotada, el seu límit γ existeix. I a més, es compleix

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma < 1.$$

2. Els primers dígits

Per tal de calcular els primers dígits de γ introduïm una segona successió auxiliar, $\beta_n = H_n - \log(n+1)$ i demostrarem que

- $\{\beta_n\}_n$ és una successió creixent,
- $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \gamma$.

A partir d'aquest resultat obtindrem que, per a tot $n \in \mathbb{N}$,

$$\beta_n = H_n - \log(n+1) < \gamma < H_n - \log(n) = \gamma_n. \tag{8}$$

Demostrem les propietats d'aquesta nova successió:

$$\begin{aligned}\beta_{n+1} - \beta_n &= (H_{n+1} - \log(n+2)) - (H_n - \log(n+1)) \\ &= \frac{1}{n+1} - \log\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \int_{n+1}^{n+2} \frac{\mathrm{d}x}{x} > 0,\end{aligned}$$

ja que

$$\int_{n+1}^{n+2} \frac{\mathrm{d}x}{x} < \frac{1}{n+1},$$

i, per tant, β_n és creixent. A més,

$$\beta_n = H_n - \log(n+1) = H_n - \log(n) - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \gamma_n - \log\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

d'on

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty} \gamma_n - \lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \gamma - 0 = \gamma.$$

Prenent $n = 10$ a (8), s'obté $H_{10} = \frac{7381}{2520}$, de forma que

$$0.531 < \frac{7381}{2520} - \log(11) < \gamma < \frac{7381}{2520} - \log(10) < 0.627.$$

Càlculs similars per a $n = 100$ donen:

$$0.572 < H_{100} - \log(101) < \gamma < H_{100} - \log(100) < 0.583.$$

Aquest mètode de càlcul de γ és molt lent ja que $|\gamma_n - \beta_n| = \log(1 + 1/n)$. Hi ha maneres molt més ràpides. Per exemple aplicant la fórmula d'Euler–Maclaurin a la funció $1/x$ es pot demostrar que

$$\left|\gamma - \left(H_n - \log(n) - \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{B_{2k}}{2k\, n^{2k}}\right)\right| \leq \frac{|B_{2m}|}{2m\, n^{2m}},$$

on B_{2k} són els números de Bernoulli parells, que ja han aparegut al capítol 2.

Per exemple, si tallem després del terme n^{-8}, obtenim que $\gamma = 0.577215664901\ldots$

3. La sèrie de Mercator

Demostrem com a conseqüència de les seccions anteriors el següent resultat, publicat per Nicolaus Mercator a 1668,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log(2).$$

Sembla ser que William Brouncker o Isaac Newton també l'havien estudiat abans. Si anomenem S_n a les sumes parcials d'aquesta sèrie, aleshores

$$S_{2n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right),$$
$$H_{2n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right).$$

Per tant, $S_{2n} = H_{2n} - H_n$. Conseqüentment,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_{2n} &= \lim_{n\to\infty} \big(H_{2n} - H_n\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big(\big(\gamma_{2n} + \log(2n)\big) - \big(\gamma_n + \log(n)\big)\Big) = \log(2).\end{aligned}$$

A més

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(S_{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) = \log(2).$$

En conseqüència, el resultat queda demostrat.

4. Diferents aparicions de la constant γ

Recollim en aquesta secció problemes d'indole ben diferent on apareix de manera natural la constant d'Euler–Mascheroni. Per una revisió més exhaustiva sobre la seva aparició, consulteu l'article de revisió de Lagarias [32].

Rècords en una successió de dades. Una situació en què les sumes harmòniques, i com a conseqüència γ, apareixen de manera natural és l'estudi dels *rècords* en una successió de dades. Aquest problema és clàssic en probabilitat i es pot aplicar en molts contextos: sèries meteorològiques, marques esportives, cotitzacions, ...

Per tal de formalitzar la situació, considerem una successió de variables aleatòries $X_1, X_2, \ldots, X_N$, independents i idènticament distribuïdes, i suposem que la seva distribució és contínua. Aquesta darrera hipòtesi garanteix que, amb probabilitat 1, no hi ha empats entre les observacions.

Direm que l'observació X_k constitueix un *rècord superior* o senzillament un *rècord* si supera totes les observacions anteriors, és a dir, si $X_k > \max\{X_1, \ldots, X_{k-1}\}$. Òbviament, X_1 sempre és un rècord, ja que cap observació anterior la supera.

La pregunta que ens interessa és la següent: *Quants rècords esperem observar entre les primeres N dades?*

Sorprenentment, la resposta no depèn de la distribució concreta de les variables X_k, sempre que siguin independents, tinguin la mateixa distribució i aquesta sigui contínua.

Per a respondre aquesta pregunta començarem demostrant que

$$\mathbb{P}(X_k \text{ és un rècord}) = \frac{1}{k}. \tag{9}$$

Les k observacions poden aparèixer en $k!$ ordres relatius diferents, tots equiprobables. Si exigim que X_k sigui la més gran, queden $(k-1)!$ possibles ordenacions de les altres variables. Per tant,

$$\mathbb{P}(X_k \text{ és un rècord}) = \frac{(k-1)!}{k!} = \frac{1}{k},$$

tal com volíem veure. És justament aquí on comença a aparèixer la sèrie harmònica.

Calculem a continuació el nombre esperat de rècords amb N observacions. Introduïm, per a cada k, la nova variable aleatòria

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{si } X_k \text{ és un rècord,} \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

El nombre total de rècords R_N entre les primeres N observacions és aleshores $R_N = I_1 + I_2 + \cdots + I_N$. A partir de (9), $\mathbb{E}(I_k) = \mathbb{P}(I_k = 1) = 1/k$, i per linealitat de l'esperança,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R_N) &= \mathbb{E}(I_1) + \mathbb{E}(I_2) + \cdots + \mathbb{E}(I_N) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} \\ &= H_N = \log(N) + \gamma + B(N), \end{aligned}$$

on $\lim_{N\to\infty} B(N) = 0$. De fet, com ja hem comentat, $B(N) \sim 1/(2N)$. Per tant, per a N prou gran la quantitat esperada de rècords es pot aproximar per $\log(N) + \gamma$ o, en altres paraules, γ pot interpretar-se en aquest context com la correcció asimptòtica additiva entre $\log(N)$ i el nombre esperat de rècords.

Un exemple clàssic i especialment il·lustratiu és l'estudi del nombre anual de tornados a Illinois durant un període de 49 anys, entre 1956 i 2004 ([28]). En aquesta sèrie es van observar 5 rècords. El model teòric prediu $\mathbb{E}(R_{49}) = H_{49} \approx 4.479$ i $\log(49) + \gamma \approx 4.469$, és un valor ben proper al nombre efectivament observat. Podeu consultar més exemples d'aplicació a [5].

Aquest exemple s'ha d'interpretar amb una certa precaució. El nombre de tornados és una variable discreta i, per tant, és possible que dos anys presentin exactament el mateix valor. En aquest cas ja no es compleix la hipòtesi de distribució contínua i caldria especificar com es tracten els empats. Quan el nombre de valors possibles és prou gran, però, el model continu pot continuar oferint una aproximació raonable.

El problema dels divisors de Dirichlet. Denotem per $d(n)$ el nombre de divisors positius d'un enter positiu n. Per exemple, $d(12) = 6$, ja que els divisors positius de 12 són $1, 2, 3, 4, 6, 12$. Considerem, per a $x > 0$, la funció

$$D(x) = \sum_{0<n\leq x} d(n),$$

que compta el nombre total de divisors positius de tots els enters positius fins a x. Dirichlet, el 1849, va demostrar que

$$D(x) = x\log(x) + (2\gamma - 1)x + \Delta(x),$$

amb $\Delta(x) = O(\sqrt{x}\,)$, vegeu, per exemple [35] i les seves referencies. És un problema obert d'interès actual trobar la millor fita asimptòtica possible per a $\Delta(x)$. Aquesta fórmula mostra una interessant aparició no trivial de la constant d'Euler–Mascheroni en un problema de teoria de nombres. Donarem una segona aparició en la següent subsecció.

Un teorema de Mertens. Aquest resultat clàssic, de vegades conegut com *tercer teorema de Mertens*, va ser demostrat pel matemàtic germanopolonès Mertens el 1874. Afirma que

$$\lim_{x\to\infty} \log(x) \left(\prod_{\substack{p\leq x \\ p \text{ primer}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \right) = \mathrm{e}^{-\gamma}.$$

Per una demostració vegeu, per exemple, [25, §22.8].

FÓRMULA 9

L'exponencial complexa

$$\mathrm{e}^{\pi i} + 1 = 0$$

Tot comença amb l'expressió

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

encara que en els cursos de càlcul elemental la definició del número e que apareix en primera instància és

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Calen uns quants càlculs per veure que les dues expressions coincideixen. Veiem com fer-ho, donant per conegut tant que la sèrie convergeix com que el límit existeix.

Comencem provant que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \mathrm{e}.$$

Fixem $m \in \mathbb{N}$. Per a $n \geq m$, usant la fórmula del binomi de Newton, tenim que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \geq \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Ara bé, per a cada $k \leq n$, fix,

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\, n^k} \\ &= \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{0}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \end{aligned}$$

i d'aquesta cadena d'igualtats obtenim dos resultats:

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}$,

(ii) $\displaystyle\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$.

Per tant, usant (i),

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{m} \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}.$$

Com que el resultat val per a tot m, tenim

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

Demostrem per acabar la desigualtat contrària. Usant (ii),

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

Prenent límit quan n tendeix a infinit obtenim el resultat desitjat,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}.$$

Ara bé, d'on surt aquesta expressió d'e com suma d'una sèrie? Com és que també es poden fer potències d'exponent complex? Com s'arriba a la fórmula de la capçalera d'aquest capítol?

1. La funció exponencial (real)

Per tal d'introduir la funció exponencial, i poder parlar d'exponents que no es limitin als números enters o racionals, una de les formes més elegants consisteix a pensar en la funció que és solució de l'equació diferencial

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f(x), \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

Com que les equacions diferencials regulars amb condició inicial admeten solució única, podem designar per $\exp(x)$ aquesta solució i comprovar que s'adapta perfectament a l'objectiu plantejat.

Aquesta forma d'introduir la funció exponencial dona de forma immediata dues propietats fonamentals:

— La funció $\exp(x)$ admet un desenvolupament en sèrie de potències de la forma

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k,$$

ja que, tal com s'ha definit, $1 = f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots$. De fet, si pensem des del principi en quina funció definida per una sèrie de potencies pot ser solució de l'equació diferencial que hem utilitzat per definir l'exponencial apareixerà exactament aquesta expressió.

Com es pot comprovar sense dificultats, aquesta sèrie de potències és *absolutament convergent* per a qualsevol valor de x i, per tant, dona una definició més explícita (i computable) d'aquesta funció.

— Si x, y són dos valors qualssevol, es pot demostrar, utilitzant la unicitat de les solucions de l'equació diferencial, que

$$\exp(x+y) = \exp(x)\,\exp(y).$$

Per tant, la funció $\exp(x)$ compleix la propietat bàsica dels exponents: *si els exponents se sumen, els valors es multipliquen.*

Només amb aquests dos fets al cap ja es pot donar per bona la definició del número e:

$$\mathrm{e} = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

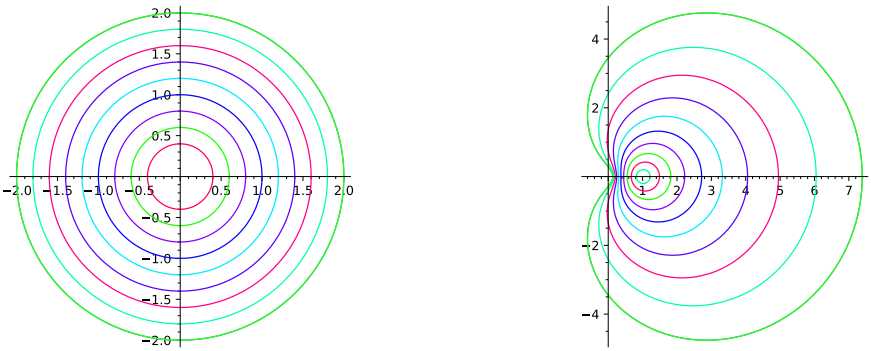
i, a més, definir $\mathrm{e}^x = \exp(x)$.

2. La funció exponencial (complexa)

Quan es treballa amb números complexos també es poden sumar, restar, multiplicar i dividir i, a més, també hi ha una noció de distància. Per tant és possible treballar amb sèries de potències. Tenint en compte el que s'ha dit per l'exponencial real, es pot introduir anàlogament l'exponencial complexa com la funció determinada per la mateixa sèrie de potències

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k.$$

Aquesta funció, per a z real coincideix amb la que ja havíem considerat, és absolutament convergent per a tot complex z i defineix una funció (holomorfa) a tot el pla.



Cercles i les seves imatges per l'exponencial.

Les sèries de potències, en el domini on són absolutament convergents, tenen molt *bones* propietats. En particular, donats $z, w \in \mathbb{C}$, es pot fer l'exercici de reordenació

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} z^r \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} w^s = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{r!s!} z^r\, w^s$$

(prenent $k = r + s$ i agrupant els termes en funció de k)

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{(k-s)!s!} z^{k-s}\, w^s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{s=0}^{k} \frac{k!}{(k-s)!s!} z^{k-s}\, w^s \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} z^{k-s}\, w^s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (z+w)^k \\ &= \exp(z+w). \end{aligned}$$

Demostrant que l'exponencial complexa també *es comporta bé respecte els exponents* fent que $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$.

La fórmula que presideix aquest capítol és una conseqüència immediata de la coneguda com fórmula d'Euler on s'estableix que, per a qualsevol número real x, es té la igualtat

$$\mathrm{e}^{i\,x} = \cos(x) + i\, \sin(x). \tag{10}$$

Quan es pren $x = \pi$ resulta

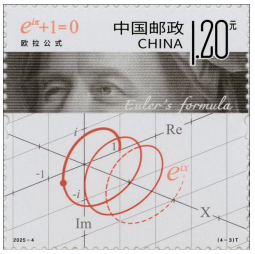
$$\mathrm{e}^{i\,\pi} = \cos(\pi) + i\, \sin(\pi) = -1 + i\, 0 = -1,$$

que es pot reescriure com

$$\mathrm{e}^{i\,\pi} + 1 = 0,$$

i apareix la fórmula màgica que conté les cinc constants més importants de les matemàtiques: 0, 1, e, π i la unitat imaginària i.





Donar una justificació d'aquesta fórmula és, en aquest punt de la història, un altre exercici de reordenació de sèries absolutament convergents. Quan es desenvolupa el valor de $\exp(i\,x)$ per la sèrie que el defineix tenim

$$\begin{aligned}\exp(i\,x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(i\,x)^k = 1 + i\,x + \frac{1}{2}i^2\,x^2 + \frac{1}{6}i^3\,x^3 + \frac{1}{24}i^4\,x^4 \cdots \\ &= 1 + i\,x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}i\,x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots\end{aligned}$$

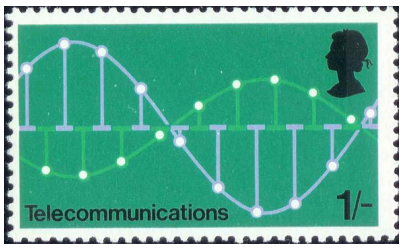
(reordenant els termes)

$$= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots\right) + i\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots\right).$$

I com tothom que ha passat un primer curs de càlcul infinitesimal sap

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots, \\ \sin(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots,\end{aligned}$$

(amb les igualtats vàlides per a qualsevol valor de x).



Finalment, prenent $y \in \mathbb{R}$ i multiplicant la igualtat (10) per e^y obtenim

$$\mathrm{e}^{y+i\,x} = \mathrm{e}^y\big(\cos(x) + i\,\sin(x)\big).$$

3. Algunes relacions trigonomètriques

En aquesta secció presentem tres resultats diferents que aprofiten les propietats de la funció exponencial per a mostrar igualtats trigonomètriques. En particular, donem les fórmules de De Moivre.

Fórmules de De Moivre. Si apliquem la fórmula d'Euler a una expressió de la forma $\exp(inx)$, on n és un enter, i es té en compte que les sumes als exponents són productes als valors, s'obtenen les igualtats

$$\cos(nx) + i\,\sin(nx) = \exp(inx) = (\exp(ix))^n = (\cos x + i\,\sin x)^n\,.$$

És a dir, tenim

$$(\cos x + i\,\sin x)^n = \cos(nx) + i\,\sin(nx),$$

que es coneix com fórmula de De Moivre.

Aquesta igualtat permet entre altres coses, desenvolupant la potència i prenent la part real o la part imaginària del resultat, obtenir fórmules explícites per a $\cos(nx)$ i $\sin(nx)$ en funció de $\cos(x)$ i $\sin(x)$. A la subsecció següent donem una via alternativa per fer-ho, basada en el polinomis de Txebixev.

Fórmules tancades per a $\sin(n\,x)$ *i* $\cos(n\,x)$*.* Els primers polinomis de Txebixev de primera espècie són

$$\begin{aligned} T_0(t) &= 1, & T_1(t) &= t,\\ T_2(t) &= 2t^2 - 1, & T_3(t) &= 4t^3 - 3t, \end{aligned}$$

i venen definits per la recurrència

$$T_{n+1}(t) = 2\,t\,T_n(t) - T_{n-1}(t).$$

De manera anàloga, els polinomis de Txebixev de segona espècie comencen per

$$\begin{aligned} U_0(t) &= 1, & U_1(t) &= 2t,\\ U_2(t) &= 4t^2 - 1, & U_3(t) &= 8t^3 - 4t, \end{aligned}$$

i satisfan la mateixa recurrència,

$$U_{n+1}(t) = 2\,t\,U_n(t) - U_{n-1}(t).$$

A partir de les relacions trigonomètriques

$$\begin{aligned} \cos((n+1)x) &= 2\cos(x)\cos(nx) - \cos((n-1)x),\\ \sin((n+1)x) &= 2\cos(x)\sin(nx) - \sin((n-1)x), \end{aligned}$$

que són precisament les mateixes recurrències que defineixen els polinomis T_n i U_n, obtenim les boniques fórmules

$$\cos(nx) = T_n(\cos x) \quad \text{i} \quad \sin(nx) = \sin(x)\,U_{n-1}(\cos x).$$

Així, per exemple,

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x) = T_3(\cos x),\\ \sin(3x) &= \sin(x)\left(4\cos^2(x) - 1\right) = \sin(x)\,U_2(\cos x). \end{aligned}$$

Els polinomis T_n també compleixen l'interessant propietat $T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x)$.

Dues regles per recordar igualtats trigonomètriques. Presentem en aquesta subsecció un parell de regles per a recordar algunes igualtats que apareixen sovint a trigonometria.

La primera, es basa en les propietats de l'exponencial complexa per a obtenir les fórmules del sinus i el cosinus de la suma de dos angles.

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + i\,\sin(x+y) &= \mathrm{e}^{i\,(x+y)} = \mathrm{e}^{i\,x}\mathrm{e}^{i\,y}\\ &= \big(\cos x + i\,\sin x\big)\big(\cos y + i\,\sin y\big)\\ &= \big(\cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y\big) + i\,\big(\sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y\big). \end{aligned}$$

Igualant parts real i imaginària, obtenim les ben conegudes igualtats,

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y, \quad \cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y.$$

La segona és una regla mnemotècnica. Serveix per a «recordar» les funcions trigonomètriques en els angles més usats: $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ i $\pi/2$. La taula adjunta no necessita més explicacions que comentar que el $4/0$ corresponent a $\tan(\pi/2)$ s'ha d'entendre com una notació per a representar infinit.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\tan x$	$\sqrt{\frac{0}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{1}}$	$\sqrt{\frac{4}{0}}$

Mirant aquesta taula sembla natural proposar-se calcular els mateixos valors quan $x = \pi/5$. Resulta que

$$\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\,, \quad \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad \tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}\,.$$

4. Relació amb les funcions hiperbòliques

Les funcions hiperbòliques van aparèixer al segle XVIII com a anàlogues de les funcions trigonomètriques. Uns dels primers matemàtics que les van estudiar sistemàticament foren els italians Riccati i Saladini. Són

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

i compleixen moltes propietats semblants a les funcions trigonomètriques:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\sinh x\big) = \cosh x, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\cosh x\big) = \sinh x,$$
$$\cosh x + \sinh x = \mathrm{e}^x, \qquad \sinh(iy) = i\sin y, \qquad \cosh(iy) = \cos y.$$

La primera és d'on surt el nom d'hiperbòliques, ja que parametritzen la hipèrbola $X^2 - Y^2 = 1$. Les fórmules d'addició són també molt semblants a les trigonomètriques:

$$\cosh(x+y) = \cosh x\,\cosh y + \sinh x\,\sinh y,$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x\,\cosh y + \cosh x\,\sinh y.$$

A més, compleixen

$$\mathrm{e}^{y+ix} = \mathrm{e}^y\big(\cos x + i\sin x\big) = \mathrm{e}^y\big(\cosh(ix) + \sinh(ix)\big).$$

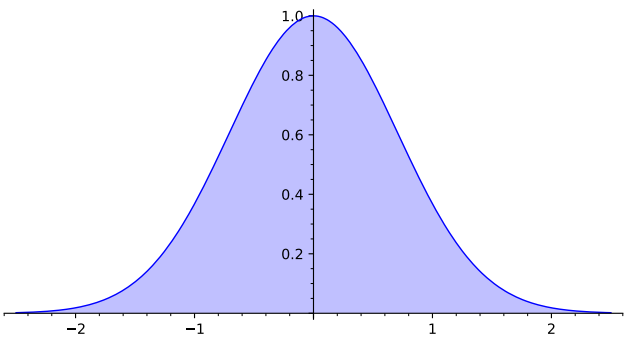
També són interessants les relacions que les barregen amb les trigonomètriques

$$\cos(x+iy) = \cos x\,\cosh y - i\sin x\,\sinh y,$$
$$\sin(x+iy) = \sin x\,\cosh y + i\cos x\,\sinh y.$$

FÓRMULA 10

La integral gaussiana

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$



Gràfic de la funció $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ i l'àrea sota la corba.

1. Càlcul de la integral

A [12] es calcula d'onze maneres diferents l'àrea sota la campana de Gauss. El primer cop que es veu un d'aquests càlculs no deixa de sorprendre com es pot obtenir una àrea sense usar la primitiva de la funció involucrada. I encara resulta més sorprenent descobrir que la primitiva de la funció a integrar no admet cap expressió finita en termes de *funcions elementals*. Anem a provar la fórmula del requadre amb dues de les demostracions més senzilles, degudes a Poisson i a Laplace. El que es fa en totes dues és relacionar-la amb una integral doble. La diferència principal és que Poisson la calcula fent un canvi a coordenades polars, mentre que en la prova de Laplace el canvi de variables que s'usa és per a integrals d'una variable.

Comencem amb la potser més famosa, la deguda a Poisson. Pel teorema de Fubini,

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Fem ara el canvi de variable a les coordenades polars (r,θ), és a dir, $x = r\cos\theta$ i $y = r\sin\theta$ i, per tant, $x^2 + y^2 = r^2$, amb $0 \le r < \infty$ i $0 \le \theta \le 2\pi$. La matriu jacobiana del canvi de variable és

$$\mathrm{Jac} := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix},$$

així que $\det(\mathrm{Jac}) = r$, la qual cosa equival a dir, informalment, que $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$. Aleshores,

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right)\Big|_0^{\infty} = 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \pi, \end{aligned}$$

i, per tant, $I = \sqrt{\pi}$.

Vegem ara la prova de Laplace. Comencem introduint

$$J = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{I}{2}.$$

Tenim que

$$\begin{aligned} J^2 &= \left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right) = \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &\overset{(\star)}{=} \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} y\,\mathrm{e}^{-y^2(t^2+1)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y = \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} y\,\mathrm{e}^{-y^2(t^2+1)}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

A $(\star)$ hem fet el canvi de variable $x = yt$ en la integral entre parèntesi i a l'última igualtat hem canviat l'ordre d'integració gràcies al teorema de Fubini. Finalment, com que per a $a > 0$,

$$\int_0^{\infty} y\mathrm{e}^{-ay^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2a}\mathrm{e}^{-ay^2}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2a},$$

obtenim

$$J^2 = \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} y\,\mathrm{e}^{-y^2(t^2+1)}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\frac{1}{2(t^2+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\arctan(t)\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Per tant $I = 2J = 2\sqrt{\pi/4} = \sqrt{\pi}$, com volíem demostrar.

2. Aplicacions

La fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

té aplicacions importants en probabilitat, anàlisi, geometria i física, entre d'altres àrees.

Normalització de la distribució normal. La densitat de la variable aleatòria normal estàndard $N(0,1)$ és

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Amb el canvi de variable $x = \sqrt{2}\,u$, obtenim

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}\,,$$

i per tant, com que $f > 0$, és una funció de densitat, ja que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 1.$$



Gauss i la seva campana al bitllet de 10 marcs alemanys.

Relació amb la funció gamma. Possiblement els primers que van buscar una funció que servís per definir el factorial de números no enters van ser Daniel Bernoulli i Christian Goldbach al voltant de 1720. Les seves definicions són equivalents a les de la funció Gamma que presentem a continuació, mitjançant una integral i deguda a Euler, qui, a més, va trobar moltes propietats útils.

Per a $s > 0$, definim la funció Gamma com

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

El nom de funció Gamma i la notació $\Gamma(s)$ els va donar Adrien-Marie Legendre al voltant de 1811. També Weierstrass i Gauss van jugar un paper important en l'estudi d'aquesta funció, ja que la van estendre al camp complex. Per a veure més propietats podeu consultar, per exemple, [4].

Demostrarem a continuació unes quantes propietats de Γ:

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad \Gamma(n) = (n-1)!, \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi},$$

per a $s > 0$ i qualsevol enter positiu n. És a la prova de la darrera igualtat on usarem la integral gaussiana.

Per a $n = 1$, és clar que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^\infty = 1.$$

D'altra banda, integrant per parts tenim que

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty t^s\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = (-t^s\mathrm{e}^{-t})\Big|_0^\infty + \int_0^\infty st^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Per a $s > 0$, i també per a $\mathrm{Re}(s) > 0$ si permetem $s \in \mathbb{C}$, es compleix que $-t^s\mathrm{e}^{-t} \to 0$ quan $t \to 0$ i quan $t \to \infty$, amb la qual cosa

$$\Gamma(s+1) = s\int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = s\Gamma(s).$$

D'aquí és immediat, per inducció, que $\Gamma(n) = (n-1)!$ per a qualsevol enter positiu n.

Prenent $s = 1/2$ i fent el canvi de variable $t = x^2$, obtenim

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1/2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

A més,

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Volum de la bola unitat en dimensió n. Usant el teorema de Fubini,

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x_j^2}\,\mathrm{d}x_j = \pi^{n/2}.$$

D'altra banda, usant coordenades esfèriques en $\mathbb{R}^n$, tenim $\mathrm{d}x = r^{n-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\sigma$, on $\mathrm{d}\sigma$ és l'element d'àrea sobre l'esfera unitat $\mathbb{S}^{n-1}$ dins de $\mathbb{R}^n$. Per tant,

$$I_n = \int_{S^{n-1}} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2} r^{n-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\sigma = A_{n-1}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2} r^{n-1}\,\mathrm{d}r,$$

on A_{n-1} denota l'àrea de S^{n-1}. Amb el canvi de variable $t = r^2$,

$$I_n = A_{n-1}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2} r^{n-1}\,\mathrm{d}r = \frac{A_{n-1}}{2}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{\frac{n}{2}-1}\,\mathrm{d}t = \frac{A_{n-1}}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Ara bé, el volum de la bola de radi unitat és

$$V_n = \int_0^1 A_{n-1} r^{n-1}\,\mathrm{d}r = \frac{A_{n-1}}{n}.$$

En resum,

$$I_n = \pi^{n/2} \quad \text{i} \quad I_n = \frac{nV_n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Per tant,

$$V_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!},$$

on hem usat la notació $(n/2)! := \Gamma(n/2+1)$.

Una integral a $\mathbb{R}^n$. Sigui A una matriu real simètrica definida positiva de mida $n \times n$. Aleshores

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-x^T Ax}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}},$$

resultat molt útil quan s'estudien les distribucions normals multidimensionals.

Anem a demostrar-ho. Com que A és real i simètrica, pel teorema espectral existeix una matriu ortogonal Q i nombres reals positius $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tals que

$$A = Q^T D Q, \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

on D és una matriu diagonal.

Si fem el canvi de variables $y = Qx$, tenim que $x = Q^T y$. A més, com que Q és ortogonal, $|\det Q| = 1$. Per tant, $\det A = \det D = \prod_{j=1}^n \lambda_j$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ i, a més,

$$x^T Ax = x^T Q^T DQx = (Qx)^T D(Qx) = y^T Dy = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2.$$

Així,

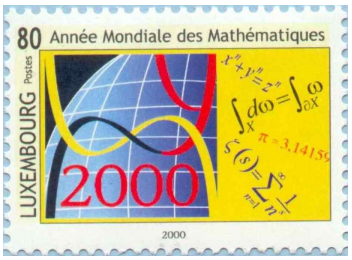
$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-x^T Ax}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2}\,\mathrm{d}y = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\lambda_j y_j^2}\,\mathrm{d}y_j = \prod_{j=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_j}} = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}.$$

FÓRMULA 11

Teorema fonamental del càlcul

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x)$$

Aquest important resultat va començar a gestar-se en els treballs de James Gregory i va continuar amb els d'Isaac Barrow, a la secció 3 trobareu el resultat que es coneix com *Regla de Barrow*. Va ser millorat pel seu cèlebre estudiant, Isaac Newton, així com per Gottfried Leibniz.



1. Un resultat previ

Abans de desenvolupar la demostració, provarem un resultat previ que necessitarem, el teorema del valor mitjà per a integrals, que diu així: *Siguin* $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dues funcions,* f *integrable i* g *contínua. Si* f *no canvia de signe, existeix* $\xi \in [a, b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(\xi)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Comencem aclarint que, quan en l'enunciat al·ludim al fet que f sigui una funció integrable, ens referim al fet que sigui integrable de Riemann. Per això, la funció ha de ser acotada, ja que aquesta propietat és part de la definició d'integral de Riemann. És fàcil veure que les funcions contínues, excepte en un nombre finit de punts, i acotades, així com les funcions monòtones, són integrables.

Canviant f per $-f$ si cal, podem suposar sense pèrdua de generalitat que $f \geq 0$. Com que g és contínua en l'interval ha d'assolir un valor màxim i un mínim, i per tant existeixen

$$m = \min\{g(x) : x \in [a, b]\} \quad \text{i} \quad M = \max\{g(x) : x \in [a, b]\},$$

on $m = g(p)$ i $M = g(q)$ per a certs $p, q \in [a, b]$. Com que $mf(x) \leq g(x)f(x) \leq Mf(x)$, integrant entre a i b s'obté

$$m\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, el resultat és obvi qualsevol que sigui el ξ que prenguem, ja que es redueix a $0 = 0$. En qualsevol altre cas, és a dir, si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$, la desigualtat anterior es pot escriure com

$$g(p) = m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} \leq M = g(q).$$

Pel teorema dels valors intermedis de les funcions contínues, existeix un $\xi \in [a, b]$ tal que $g(\xi)$ coincideix amb el quocient d'integrals, tal com volíem demostrar.

És clar que la hipòtesi que f no canviï de signe és essencial. Per exemple, si prenem $[a, b] = [-1, 1]$ i $f(x) = g(x) = x$, la integral de l'esquerra és positiva, mentre que l'expressió de la dreta és idènticament 0.

2. Prova del teorema

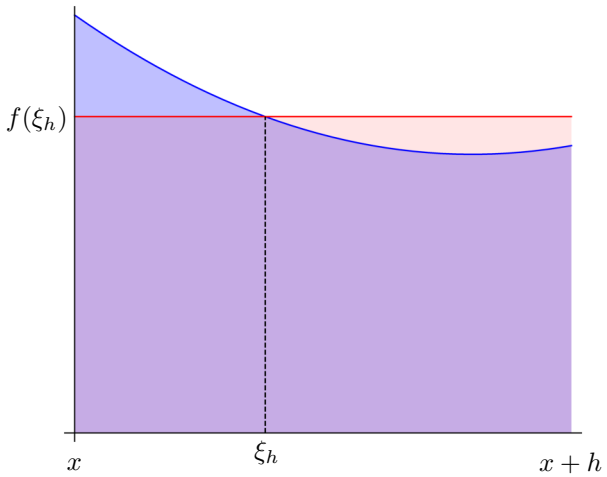
Vist el resultat previ, es pot passar a demostrar la fórmula enunciada. En primer lloc observem que, com que f és contínua, pel teorema del valor mitjà per a integrals que acabem de provar, existeix un ξ_h, en l'interval més petit que conté x i $x + h$, tal que

$$\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi_h)h.$$

Ara bé, si definim $F(u) := \int_x^u f(t)\mathrm{d}t$, tenim que

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi_h).$$

En conseqüència, com que $\lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f(x)$, F és derivable en x i $F'(x) = f(x)$, tal com volíem veure.



L'àrea sota el gràfic de f i el rectangle amb la mateixa àrea.

3. La regla de Barrow

El resultat conegut com regla de Barrow és el següent: *Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funció contínua. Si F és una funció contínua en $[a, b]$, derivable en (a, b) i tal que $F'(x) = f(x)$, és a dir, una primitiva de f, aleshores*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Considerem $G(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Pel teorema fonamental del càlcul, que acabem de provar, $G'(x) = f(x) = F'(x)$ per a tot $x \in (a,b)$. En conseqüència, $H := F - G$ és contínua en $[a,b]$, derivable en (a,b) i $H' = 0$. Sota aquestes hipòtesis es pot afirmar que H és una funció constant. Usant aquest fet la regla de Barrow queda demostrada ja que $H(x) = c$ per a tot $x \in [a,b]$ implica que $G(x) = F(x) + c$. Avaluant les funcions en $x = a$, $G(a) = 0 = F(a) + c$. Així, $G(x) = F(x) - F(a)$, i finalment

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) = F(b) - F(a),$$

com volíem demostrar.

Per completar la demostració només faltarà demostrar l'afirmació anterior. N'hi ha prou amb provar-la a (a,b), ja que la continuïtat de H estendrà el resultat a $[a,b]$. Prenem dos punts qualssevol $c < d \in (a,b)$. Pel teorema del valor mitjà de les derivades existeix $s \in (c,d)$ tal que $H'(s) = (H(d) - H(c))/(d-c)$. Com que suposem $H'(s) = 0$, d'aquí es desprèn que $H(c) = H(d)$ i, per tant, H és constant tal com volíem veure.

4. Algunes aplicacions

Les *equacions diferencials ordinàries (EDOs),* $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x,y)$, són una de les eines més importants per a modelitzar el món, intentar entendre'l i fer prediccions de futur. Les EDOs més senzilles són les anomenades *de variables separables,* i dins d'aquestes, les que són autònomes del tipus

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y),$$

encara ho són una mica més. Si busquem la solució $y = y(x)$ que, a més, satisfaci l'anomenada *condició inicial* $y(x_0) = y_0$, el teorema fonamental del càlcul, juntament amb la regla de la cadena donarà la seva expressió implícita

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}s}{f(s)} = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = x - x_0,$$

ja que

$$\frac{1}{f(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{f(y(x))}y'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}s}{f(s)}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x - x_0) = 1.$$

Com veurem a continuació, tot i ser tant senzilles, aquest tipus d'EDO serveixen per a fer models de dinàmica de poblacions. Així, per exemple, usarem el model de Verhulst de 1838 per a estudiar l'evolució de la població del món en aquests darrers anys, vegeu [23] per a més detalls i referències.

Pierre François Verhulst (1804–1849) va ser un matemàtic belga, especialista en teoria de nombres, però més conegut precisament per introduir el model que rep el seu nom, també conegut com a *model logístic.*

L'equació diferencial de Verhulst s'escriu com

$$P' = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

on $P(t)$ indica la població P a l'instant t i els paràmetres positius r i K són, respectivament, la *taxa intrínseca de creixement* i el *límit o capacitat de càrrega del model.*

Com que és de la forma que hem explicat, la manera de resoldre-la consisteix a calcular

$$\int \frac{\mathrm{d}P}{P(1 - P/K)} = r\int \mathrm{d}t.$$

Tenint en compte que

$$\frac{1}{P(1-P/K)} = \frac{K}{P(K-P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K-P},$$

l'expressió es pot posar com

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K-P}\right) \mathrm{d}P = r \int \mathrm{d}t.$$

Per tant,

$$\log\left(\frac{P}{K-P}\right) = rt + C.$$

Aplicant exponencials, s'obtenen les solucions implícites de l'EDO quan $0 < P < K$,

$$\frac{P}{K-P} = A\mathrm{e}^{rt}, \qquad A > 0.$$

Finalment, operant podem aïllar P i s'obté

$$P(t) = \frac{K}{1 + B\mathrm{e}^{-rt}},$$

on $B = 1/A$ és una constant positiva que es determina imposant $P(t_0) = P_0$.

Per tal d'aplicar aquesta expressió a l'estudi de l'evolució de la població del món, anem a veure com obtenir els valors r, K i B.

Denotem per $P(t)$ la població mundial l'any t, mesurada en milers de milions de persones. La taula següent conté els valors de cinc en cinc anys, des de 1950 fins a 2025, que corresponen a estimacions històriques (arrodonides a quatre dígits) de la població mundial ([49]).

Any	$P(t)$	Any	$P(t)$
1950	2.493	1990	5.328
1955	2.740	1995	5.759
1960	3.015	2000	6.172
1965	3.335	2005	6.587
1970	3.695	2010	7.022
1975	4.071	2015	7.470
1980	4.448	2020	7.887
1985	4.869	2025	8.232

Seguint el mateix procediment que a [23], aproximem la taxa relativa de creixement en cada interval quinquennal, P'/P, per

$$g_i = \frac{P(t_{i+1}) - P(t_i)}{5P(t_i)} \approx \frac{P'(t_i)}{P(t_i)}, \qquad t_i = 1950 + 5i, \quad i = 0, \ldots, 14.$$

Suposant ara que la població segueix la llei de Verhulst:

$$g_i \approx r - (r/K)P(t_i),$$

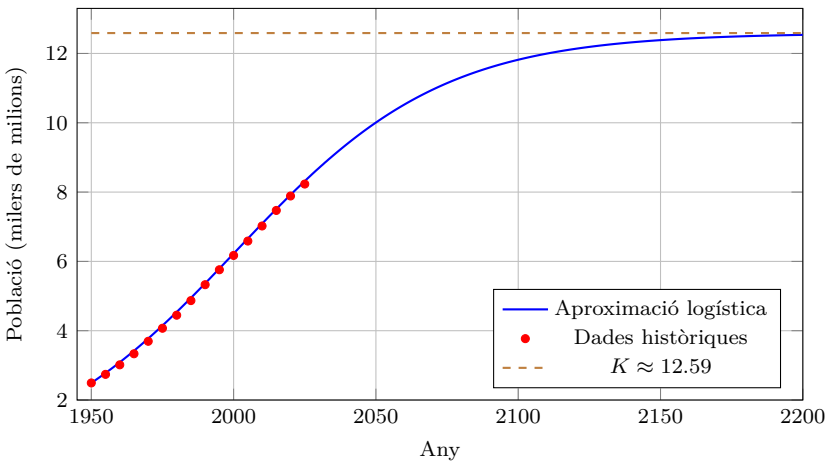
podem usar les 15 parelles $(P(t_i), g_i)$, calculades a partir de les dades de la taula (abans de l'arrodoniment) per a trobar la recta de mínims quadrats corresponent a la taula. Vegeu altres exemples a [18]. Després d'uns quants càlculs que ometem, usant més xifres significatives de $P(t)$, obtenim que

$$r = 0.0275323, \quad K = 12.5885.$$

Finalment, imposant que $P(1950) = P_0 = 2.493092852$ i que és molt natural mesurar el temps a partir de 1950, arribem al model ajustat

$$P(t) = \frac{12.5885}{1 + 4.04937\,\mathrm{e}^{-0.0275323(t-1950)}}.$$

La figura següent mostra els valors històrics en vermell i la corba logística en blau. La corba s'allarga fins a 2200 per fer visible el seu límit asimptòtic, que és el valor K.



L'ajust logístic descriu raonablement bé els resultats entre 1950 i 2025, però el seu límit $K \approx 12.59$ és una predicció de futur molt més alta que la donada pels estudis de les Nacions Unides ([49]). Aquesta predicció suposa un creixement lineal de la taxa relativa de creixement respecte la població, cosa que podria no complir-se en la realitat. De fet, en anys anteriors a 1950 el comportament era ben diferent, vegeu de nou [23]. En general, sempre s'han de tractar amb prudència les extrapolacions d'un model a llarg termini.

Un altre àmbit on les EDOs tenen un paper fonamental per fer prediccions és la mecànica celeste, que s'ocupa de saber la posició futura dels planetes i altres cossos a l'espai. En particular, la predicció de futurs eclipsis usa aquesta i moltes altres eines matemàtiques. Acabem aquest capítol amb un parell de fotografies de l'eclipsi total de Sol, fetes des de Mallorca aquest passat 12 d'agost de 2026.





5. Extensió a dimensió superior

Hi ha una extensió del teorema fonamental del càlcul i de la regla de Barrow a dimensió $n \geq 2$ que se sol conèixer com *teorema de Stokes*.

El teorema porta el nom de George Gabriel Stokes. William Thomson, posteriorment conegut com Lord Kelvin, va comunicar el resultat a Stokes en una carta de

1850. Stokes el va incloure l'any 1854 com una qüestió de l'examen del *Smith's Prize* de la Universitat de Cambridge, fet que va contribuir a associar el resultat amb el seu nom.

En el llenguatge de les formes diferencials, el teorema s'escriu de manera compacta com

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} \mathrm{d}\omega.$$

Així a $\mathbb{R}$, si prenem $\omega = f(x)$ i $\Omega = [a,b]$, aleshores $\mathrm{d}\omega = f'(x)\,\mathrm{d}x$ i $\partial\Omega = \{a\}\cup\{b\}$. Per tant, tenim que

$$f(b) - f(a) = \int_{\{a\}\cup\{b\}} f(x) = \int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} \mathrm{d}\omega = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aquest enunciat engloba també altres resultats clàssics i molt importants del càlcul integral, com el *teorema de Green* al pla,

$$\oint_{\partial\Omega} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Si la frontera de Ω, $\partial\Omega$, és una corba tancada i simple, orientada en sentit contrari a les agulles del rellotge, la fórmula proporciona diferents expressions molt elegants de l'àrea de Ω,

$$\text{Àrea}(\Omega) = \iint_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{\partial\Omega} x\,\mathrm{d}y = -\oint_{\partial\Omega} y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega} x\,\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x,$$

que corresponen a diferents tries de $(P,Q) \in \{(0,x),(-y,0),(-y,x)\}$.



Com a exemple, es pot aplicar la darrera igualtat per veure que l'àrea A encerclada per l'el·lipse $\mathcal{E}$ donada per l'equació

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a,b > 0,$$

que té semieixos a i b, és $A = \pi\,a\,b$. Per fer això, parametritzem $\mathcal{E}$, com $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Així,

$$\begin{aligned} A = \oint_{\mathcal{E}} x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} (a\cos\theta)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(b\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} a\,b\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= a\,b\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = a\,b\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right)_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \pi\,a\,b. \end{aligned}$$

Com a conseqüència del teorema de Stokes, també tenim el *teorema de Gauss (o de la divergència)* a l'espai,

$$\iiint_{\Omega} \mathrm{div}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S,$$

on, si $\mathbf{F} = (F_1,F_2,F_3)$, $\mathrm{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$ i $\mathbf{n}$ és el vector normal unitari exterior a la frontera de Ω, $\partial\Omega$. Aquest resultat té, per exemple, múltiples aplicacions a l'electromagnetisme.

FÓRMULA 12

La fórmula de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

El matemàtic francès Abraham de Moivre va provar, el 1721, aquesta bonica fórmula, però amb una constant que només va poder calcular aproximadament en lloc del $\sqrt{2\pi}$ que apareix en la fórmula que presideix aquest capítol. Va ser el matemàtic escocès James Stirling qui, el 1730, va obtenir el valor exacte d'aquesta constant. Com veurem en la demostració que presentem, el producte de Wallis té un paper fonamental en la seva determinació.

En concret, el resultat que representa la fórmula i que demostrarem és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n} = 1.$$

1. Primer pas, prova de De Moivre

Començarem provant la part de la demostració deguda a De Moivre; és a dir, que existeix $0 < B \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = B \quad \text{si} \quad b_n := \frac{n!}{\sqrt{n}\,(n/\mathrm{e})^n}.$$

Per a $n \geq 1$, considerem la successió $a_n := \log(b_n) = \log(n!) - n\log(n) + n - \frac{1}{2}\log(n)$. Demostrarem en primer lloc que $\{a_n\}_n$ convergeix; per fer-ho, usarem la igualtat evident

$$a_{m+1} = \sum_{n=0}^{m}(a_{n+1} - a_n), \quad \text{on} \quad a_0 := 0.$$

Càlculs directes donen

$$a_{n+1} - a_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

A més, a partir del desenvolupament de Taylor de $\log(1+x)$ al voltant de l'origen, i prenent $x = 1/n$, tenim

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Amb això, i després d'uns quants càlculs més,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = \frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Com a conseqüència, per a n prou gran, $|a_{n+1}-a_n|\le\frac{1}{6n^2}$ i la sèrie corresponent és absolutament convergent. En particular,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\Big(\log(n!)-n\log(n)+n-\frac{1}{2}\log(n)\Big)=A$$

per a una certa constant $A\in\mathbb{R}$. Per tant,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{n}(n/\mathrm{e})^n}=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{a_n}=\mathrm{e}^A=:B>0. \tag{11}$$

Per acabar la demostració només faltarà provar que $B=\sqrt{2\pi}$. Per a fer-ho ens basarem en l'anomenat *producte de Wallis*.

2. Producte de Wallis

L'expressió següent, que representa π com un producte infinit, la va descobrir l'anglès John Wallis el 1655.

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

La seva demostració també usava arguments analítics però la que veurem aquí no és l'original. Per a cada enter $n\ge 0$, considerem les integrals definides

$$0<I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demostrarem en primer lloc que, per a tot $n\ge 2$,

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

Integrant per parts, obtenim

$$\begin{aligned}
I_n&=\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}(x)\sin x\,\mathrm{d}x\\
&=\big(-\sin^{n-1}(x)\cos x\big)\Big|_0^{\pi/2}+(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x\\
&=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x\\
&=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}(x)\big(1-\sin^2(x)\big)\,\mathrm{d}x=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n.
\end{aligned}$$

Aleshores, $nI_n=(n-1)I_{n-2}$, i ja tenim el resultat. A més,

$$I_0=\int_0^{\pi/2}1\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\quad\text{i}\quad I_1=\int_0^{\pi/2}\sin x\,\mathrm{d}x=1.$$

Aplicant repetidament la recurrència als índexs parells,

$$\begin{aligned}
I_{2n}&=\frac{2n-1}{2n}I_{2n-2}=\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}I_{2n-4}=\cdots\\
&=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}I_0=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

De manera semblant, per als índexs senars,

$$\begin{aligned}
I_{2n+1}&=\frac{2n}{2n+1}I_{2n-1}=\frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}I_{2n-3}=\cdots\\
&=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}I_1=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}.
\end{aligned}$$

Per una altra banda, a $0 < x < \pi/2$ tenim $0 < \sin x < 1$. Per tant, $\sin^{2n+1}(x) < \sin^{2n}(x) < \sin^{2n-1}(x)$. Integrant en $[0, \pi/2]$, obtenim $I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$. Com que $I_{2n} > 0$, podem dividir tot per I_{2n} i obtenim

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} < 1 < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}}.$$

Usant les expressions anteriors,

$$\begin{aligned}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} &= \frac{2\cdot 4\cdots 2n}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}\cdot\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}\frac{2}{\pi}\\ &= \frac{2}{\pi}\frac{(2\cdot 4\cdots 2n)^2}{(1\cdot 3\cdots(2n-1))(3\cdot 5\cdots(2n+1))} = \frac{2}{\pi}W_n,\end{aligned}$$

on

$$W_n = \frac{(2\cdot 4\cdots 2n)^2}{(1\cdot 3\cdots(2n-1))(3\cdot 5\cdots(2n+1))} = \prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}.$$

El resultat final quedarà demostrat provant que

$$\frac{2n}{2n+1}\frac{\pi}{2} < W_n < \frac{\pi}{2}, \tag{12}$$

ja que aleshores

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} W_n = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Com que

$$\frac{2}{\pi}W_n = \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} < 1,$$

obtenim la desigualtat de la dreta de (12). Per a la de l'esquerra, usarem la igualtat

$$I_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n}I_{2n+1}.$$

I aleshores

$$1 < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n}\frac{2}{\pi}W_n,$$

que és equivalent a la desigualtat que buscàvem.

3. Pas final: determinació de la constant

Per a obtenir la constant B introduïda a (11) usarem una expressió equivalent al producte de Wallis que acabem de provar. Concretament

$$\begin{aligned}\pi &= 2\cdot\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^2 4^2 6^2\cdots(2n)^2}{1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-1)^2\cdot(2n+1)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2(2^n n!)^2}{\left(\frac{(2n)!}{2^n n!}\right)^2(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)^2 n}.\end{aligned}$$

Prenent arrels

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

Com que les subsuccessions d'una successió convergent tenen el mateix límit, de $\lim_{n\to\infty} b_n = B > 0$ es dedueix que $\lim_{n\to\infty} b_n^2/b_{2n} = B$. En conseqüència,

$$B = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n^2}{b_{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{n^{2n+1}\mathrm{e}^{-2n}}\frac{\sqrt{2n}\,(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2\sqrt{2}}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi},$$

tal com volíem provar.

4. Aplicacions i extensions de la fórmula

La fórmula de Stirling té nombroses aplicacions en anàlisi, combinatòria, probabilitat, estadística, teoria de la informació, ...

Per exemple, el nombre de xifres d'un enter positiu N és $\lfloor \log_{10}(N) \rfloor + 1$. Per tant, el nombre de xifres de $N = n!$ es pot aproximar mitjançant

$$\left\lfloor n \log_{10}(n) - n \log_{10}(\mathrm{e}) + \frac{1}{2} \log_{10}(2\pi n) \right\rfloor + 1,$$

on recordem que $\lfloor m \rfloor$ és el major enter menor o igual que m. Per a $n = 100$ aquesta expressió val 158, que és exactament el nombre de xifres de 100!.

Mostrem a continuació un parell més d'aplicacions. En primer lloc observem que

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{2\pi n \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}} = \frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n} 2^{2n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}. \tag{13}$$

Vegem com aquest resultat s'usa en l'estudi de passejades aleatòries.

Comencem calculant la probabilitat p_n que, en llançar $2n$ vegades una moneda justa, s'obtinguin exactament n cares, quan n és gran. Per a k entre 0 i $2n$, la probabilitat p_k d'obtenir exactament k cares segueix una distribució binomial i és

$$p_k = \binom{2n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} = \binom{2n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

Per tant, usant (13), obtenim

$$p_n = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Aquest càlcul és rellevant quan s'estudia el passeig aleatori sobre la recta. En poques paraules, aquest procés aleatori consisteix a començar en un punt concret (diguem el 0) i, a cada instant, fer un pas de longitud 1 cap a la dreta o cap a l'esquerra, segons si, en llançar una moneda justa, surt cara o creu. En aquest context, p_n ens dona la probabilitat de trobar-nos a l'origen (no necessàriament per primera vegada) després d'haver fet exactament $2n$ passos (òbviament, amb un nombre senar de passos no ens trobarem mai en el punt inicial). Es pot demostrar que, quan la sèrie associada $\sum_n p_n$ és divergent, la probabilitat de tornar a l'origen en un passeig aleatori és 1, vegeu [19, capítol III] o [6]. Precisament, l'estimació asimptòtica $p_n \sim 1/\sqrt{\pi n}$ és la que permet provar la divergència d'aquesta sèrie.

També podem usar (13) per aproximar els números de Catalan, C_n, que es defineixen com

$$C_n := \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \sim \frac{1}{n}\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\, n^{3/2}},$$

i apareixen sovint a combinatòria.

Una versió més precisa de la fórmula de Stirling, que no demostrarem, és

$$\begin{aligned} n! &= \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \frac{1}{1680n^7} + O\left(\frac{1}{n^9}\right)\right) \\ &= \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right). \end{aligned}$$

Acabem comentant que, l'any 1955, a [42] es van provar les fites següents

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12n+1}\right) < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12n}\right),$$

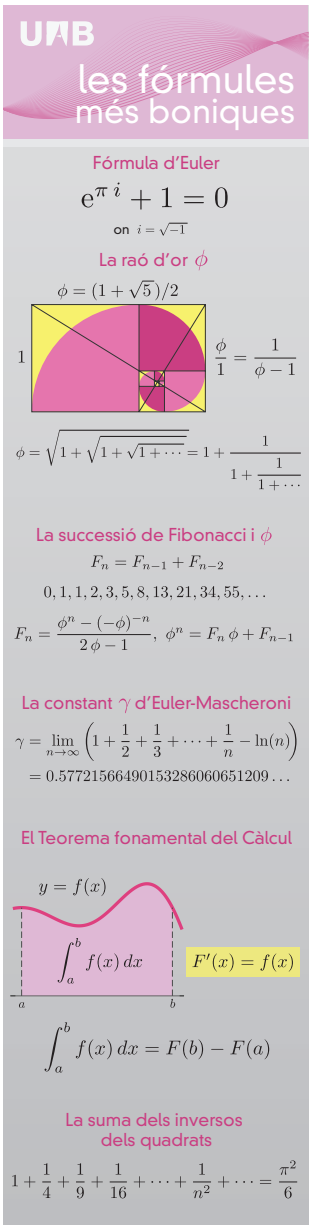
per a tot enter $n \geq 1$. Per exemple, aplicades a $n = 100$ donen

$$9.33261525 \cdot 10^{157} < 100! < 9.33262173 \cdot 10^{157}.$$

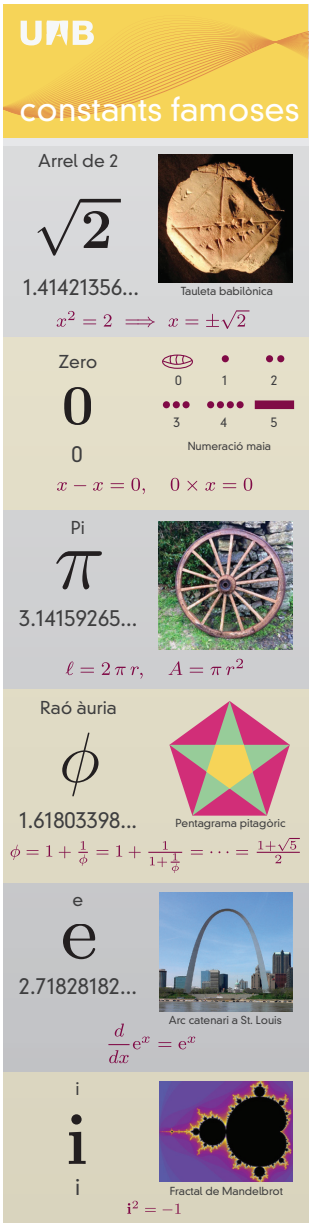
APÈNDIX A

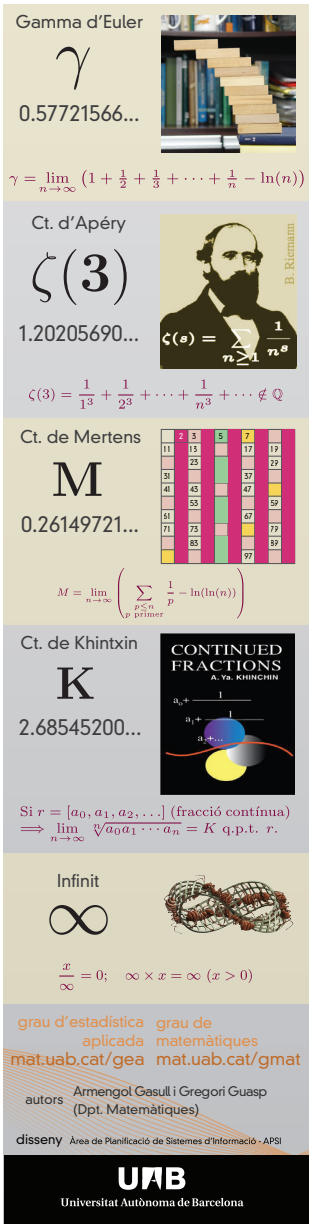
Dos punts de llibre

El nostre departament va publicar, durant el curs 2015/16, un precursor d'aquest treball, en forma de punt de llibre, amb una tria similar de fórmules i que apareix a continuació.



Durant el curs següent, 2016/17, vàrem publicar un nou punt de llibre, aquest cop recollint les constants matemàtiques més famoses.





APÈNDIX B

Unes dotzenes més de fórmules candidates

El criteri per a l'elecció, i la qualificació de *fascinant*, de les fórmules és totalment subjectiu i té més a veure amb els gustos dels autors en el moment de fer la tria que amb qualsevol intent de donar més o menys importància a cada un dels resultats que apareixen (o no). Les taules que venen a continuació són una mostra d'altres tries que es podrien haver fet. Algunes de les fórmules que contenen ja han aparegut en aquest llibre. Probablement cada lector d'aquest text tindrà la seva taula de *fórmules fascinants*.

$1 = 0.9999\ldots$	$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$
$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$	$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$
$A_{\text{tra}} = \dfrac{B + b}{2} h$	$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
$\left(m^2 - n^2\right)^2 + \left(2mn\right)^2 = \left(m^2 + n^2\right)^2$	$V_{\text{pir}} = \dfrac{A\,h}{3}$
$\ell = 2\pi R$	$A = \pi R^2$
$V_{\text{esf}} = \dfrac{4\pi}{3} R^3$	$x^{\pm} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Nivell elemental

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$	$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^x\right) = \mathrm{e}^x$	$\log(1+2+3) = \log(1)+\log(2)+\log(3)$
$\mathrm{e}^{2\pi i} - 1 = 0$	$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$
$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1;1,1,1,1,\ldots]$	$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$	$\int_1^x \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \log(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^x\right) = x^x(1+\log(x))$	$\mathrm{mcd}(m,n)\ \mathrm{mcm}(m,n) = m\,n$

Nivell intermedi

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
$\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 = 1$	$\mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i\sin y)$
$\det(AB) = \det(A)\det(B)$	$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$
$\sqrt{k^2+1} = [k;2k,2k,2k,2k,\ldots]$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tan(x)\right) = 1+\tan^2(x)$
$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{!n} = \mathrm{e}$	$d(p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k}) = (n_1+1)\cdots(n_k+1)$
$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$	$\mathrm{mcd}(F_m, F_n) = F_{\mathrm{mcd}(m,n)}$

Nivell intermedi

$1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$A_T=\dfrac{1}{2}ab\sin C$
$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$	$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$
$F_n=\dfrac{\phi^n-(-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$	$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$
$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$	$\displaystyle\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u$
$\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det A}$	$\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$
$\lvert A\cup B\rvert=\lvert A\rvert+\lvert B\rvert-\lvert A\cap B\rvert$	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\lVert\mathbf{u}\rVert\,\lVert\mathbf{v}\rVert\cos\theta$

Nivell intermedi

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\log(2)$
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}nP\{X=n\}=\sum_{n=0}^{\infty}P\{X>n\}$	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p\text{ primer}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$
$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$	$\Gamma(s+1)=s\,\Gamma(s)$
$\dfrac{\pi-3}{4}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n+1)(2n+2)}$	$\mathrm{Vol}(B_n)=\dfrac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}$
$\dfrac{2}{\pi}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}=\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}$
$T_m(T_n(x))=T_{mn}(x)$	$\displaystyle\int_{\partial C}\omega=\int_C\mathrm{d}\omega$

Nivell avançat

$f(a) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \dfrac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z$	$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \log\left(\frac{b}{a}\right)$
$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi s)},\ s\notin\mathbb{Z}$	$P(\lambda) = \det(A-\lambda\,\mathrm{Id}) \Rightarrow P(A) = 0$
$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi$	$\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin(\pi s)},\ s\in(0,1)$
$\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = G$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)^2} = \frac{\pi^2}{16}+\frac{G}{2}$
$P\big(\,\mathrm{mcd}(m,n)=1\big) = \dfrac{6}{\pi^2}$	$f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(x-y)\,\mathrm{d}y$
$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{at}\cos(bt)\}(s) = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$\mathcal{F}\left\{\mathrm{e}^{-\pi x^2}\right\}(s) = \mathrm{e}^{-\pi s^2}$

Nivell avançat

$\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{2n}} = (-1)^{n+1}\frac{B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}$	$\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lvert f(x)\rvert^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\lvert\widehat{f}(n)\right\rvert^2$
$\displaystyle\int_M K\,\mathrm{d}A = 2\pi\,\chi(M)$	$\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_k \mathrm{Res}(f,z_k)$
$\pi(x)\sim\dfrac{x}{\log(x)}$	$\displaystyle\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$
$\sigma(p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k}) = \displaystyle\prod_{j=1}^{k}\frac{p_j^{n_j+1}-1}{p_j-1}$	$\left\lvert 2^{\mathbb{N}}\right\rvert = \lvert\mathbb{R}\rvert$
$\displaystyle\oint_{\partial C} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_C\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}A$	$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s\,\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0)$
$\mathrm{e} = [2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,\ldots]$	$\det(I_m+AB) = \det(I_n+BA)$

Nivell avançat

Bibliografia

[1] M. Aigner, G. M. Ziegler, Proofs from THE BOOK, 6a edició, Springer, Berlin-Heidelberg, 2018.

[2] A. Alonso, T. Bermúdez, De conejos y números. La sorprendente sucesión de Fibonacci, La Gaceta de la RSME 5 (2002), 175–196.

[3] C. Alsina, R. B. Nelsen, Charming Proofs: A Journey into Elegant Mathematics, Dolciani Mathematical Expositions, vol. 42, Mathematical Association of America, 2010.

[4] E. Artin, The Gamma Function, Athena series: selected topics in mathematics, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.

[5] X. Bardina, Quants rècords veurem al llarg de la nostra vida?, Materials Matemàtics 2007, treball 3, 14 p.

[6] X. Bardina, Caminant a l'atzar tots els camins porten a Roma, Materials Matemàtics 2008, treball 4, 29 p.

[7] L. M. Blumenthal, B. E. Gillam, Distribution of points in n-space, Amer. Math. Monthly 50 (1943), 181–185.

[8] A. Bogomolny, Cut The Knot: Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles, https://www.cut-the-knot.org

[9] J. R. Carlson, Determination of Heronian Triangles, The Fibonacci Quarterly 8 (1970), 499–506.

[10] Ó. Ciaurri, E. Fernández, J. L. Varona, El producto de Wallis y $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ son lo mismo, Gac. R. Soc. Mat. Esp. 21 (2018), 566.

[11] Ó. Ciaurri, L. M. Navas, F. J. Ruiz, J. L. Varona, A simple computation of $\zeta(2k)$, Amer. Math. Monthly 122 (2015), 444–451.

[12] K. Conrad, The Gaussian integral, http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/analysis/gaussianintegral.pdf

[13] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, Geometry Revisited, Math. Assoc. Amer., 1967.

[14] M. Dalmau, F. Tomàs, Teorema de Pitàgoras 3D, Materials Matemàtics 2013, treball 5, 10 p.

[15] P. S. Donchian, H. S. M. Coxeter, An n-dimensional extension of Pythagoras' theorem, Math. Gaz. 19 (1935), 296.

[16] F. Dumortier, J. Llibre, J. C. Artés, Qualitative Theory of Planar Differential Systems, Springer, 2006.

[17] M. Erickson, Beautiful Mathematics, MAA Spectrum, Mathematical Association of America, 2011.

[18] M. Farré, La recta de mínims quadrats, Materials Matemàtics 2006, treball 10, 7 p.

[19] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. I, tercera edició, Wiley, New York, 1968.

[20] C. E. Garza-Hume, M. C. Jorge, A. Olvera, Quadrilaterals and Bretschneider's Formula, The Mathematics Teacher 111 (2018), 310–314.

[21] A. Gasull, Gemmes matemàtiques, Materials Matemàtics 2019, treball 2, 88 p.

[22] A. Gasull, 55 proves sense paraules, Materials Matemàtics 2022, treball 2, 61 p.

[23] A. Gasull, J. Torregrosa, Models de població del món i prediccions, Materials Matemàtics 2009, treball 4, 20 p.

[24] J. Girbau, Relojes de sol, Materials Matemàtics 2006, treball 14, 18 p.

[25] G. H. Hardy, E. M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, 6a edició, revisada per D. R. Heath-Brown i J. H. Silverman, Oxford University Press, 2008.

[26] A. Hess, A highway from Heron to Brahmagupta, Forum Geom. 12 (2012), 191–192.

[27] R. V. Jean, Phyllotaxis: A Systemic Study in Plant Morphogenesis, Cambridge Studies in Mathematical Biology, vol. 15, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[28] S. J. Kifowit, T. A. Stamps, Serious About the Harmonic Series II, 31st Annual Conference of the Illinois Mathematics Association of Community Colleges, Monticello, Illinois, 2006.

[29] D. E. Knuth, Johann Faulhaber and sums of powers, Math. Comp. 61 (1993), 277–294.

[30] D. E. Knuth, The Art of Computer Programming. Vol. 1: Fundamental Algorithms, 3rd ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1997.

[31] N. Kondratieva, Three most beautiful mathematical formulas, Interdisciplinary Studies of Complex Systems 6 (2015), 63–82.
[32] J. C. Lagarias, Euler's constant: Euler's work and modern developments, Bulletin of the American Mathematical Society 50 (2013), 527–628.
[33] W. G. Leavitt, The sum of the reciprocals of the primes, Two-Year College Math. J. 10 (1979), 198–199.
[34] A. López, Aplicaciones de las fracciones continuas, Materials Matemàtics 2019, treball 1, 35 p.
[35] H. Montgomery, R. C. Vaughan, Multiplicative Number Theory I: Classical Theory, Cambridge University Press, 2007.
[36] R. B. Nelsen, Heron's Formula via Proofs without Words, The College Mathematics Journal 32 (2001), 290–292.
[37] I. Papadimitriou, A simple proof of the formula $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \pi^2/6$, Amer. Math. Monthly 80 (1973), 424–425.
[38] S. Parthasarathy, The Most Beautiful Formulae/Theorems/Identities in Mathematics, Gonit Sora, abril de 2015.
[39] B. Pritsker, Geometrical Kaleidoscope, Courier Dover Publications, 2017.
[40] C. H. Raifaizen, A Simpler Proof of Heron's Formula, Mathematics Magazine 44 (1971), 27–28.
[41] D. P. Robbins, Areas of polygons inscribed in a circle, Amer. Math. Monthly 102 (1995), 523–530.
[42] H. Robbins, A Remark on Stirling's Formula, The American Mathematical Monthly 62 (1955), 26–29.
[43] E. Robertson, J. O'Connor, MacTutor History of Mathematics Archive, School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/
[44] G. C. Rota, The Phenomenology of Mathematical Beauty, Synthese 111 (1997), 171–182.
[45] C. Safont, Quant mesuren les columnes de la UAB?, Materials Matemàtics 2011, treball 2, 27 p.
[46] L. Salem, F. Testard, C. Salem, The Most Beautiful Mathematical Formulas, John Wiley & Sons, New York, 1992.
[47] D. Singmaster, Some Corrections to Carlson's "Determination of Heronian Triangles", The Fibonacci Quarterly 11 (1973), 157–158.
[48] J. Stoer, R. Bulirsch, Introduction to Numerical Analysis, 2a edició, Texts in Applied Mathematics, vol. 12, Springer-Verlag, New York, 1993.
[49] United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division, World Population Prospects 2024, 2024. https://population.un.org/wpp/
[50] D. Wells, Are These the Most Beautiful? The Mathematical Intelligencer 12, (1990) 37–41.
[51] R. Wilson, Euler's Pioneering Equation: The Most Beautiful Theorem in Mathematics, Oxford University Press, 2018.
[52] S. Zeki, J. P. Romaya, D. M. T. Benincasa, M. F. Atiyah, The experience of mathematical beauty and its neural correlates, Frontiers in Human Neuroscience 8 (2014) article 68.

Els autors



Armengol Gasull

Armengol Gasull Embid (Barberà del Vallès, 1959) és matemàtic i professor de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), on va cursar la llicenciatura i el doctorat en Matemàtiques. Després d'exercir-hi com a professor ajudant, col·laborador i titular, l'any 2002 va obtenir la càtedra d'universitat.

La seva activitat investigadora se centra principalment en els sistemes dinàmics i les equacions diferencials ordinàries, especialment en l'estudi qualitatiu de sistemes diferencials plans, l'estabilitat global, la injectivitat global, les equacions en diferències i la modelització matemàtica.

També ha contribuït a la divulgació i a la recreació matemàtiques. L'any 2017 va rebre el Premi Albert Dou de divulgació matemàtica, atorgat en el marc dels Premis Sant Jordi, i ha estat vinculat a diverses publicacions en aquests àmbits, entre elles *Materials Matemàtics* i el *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*.



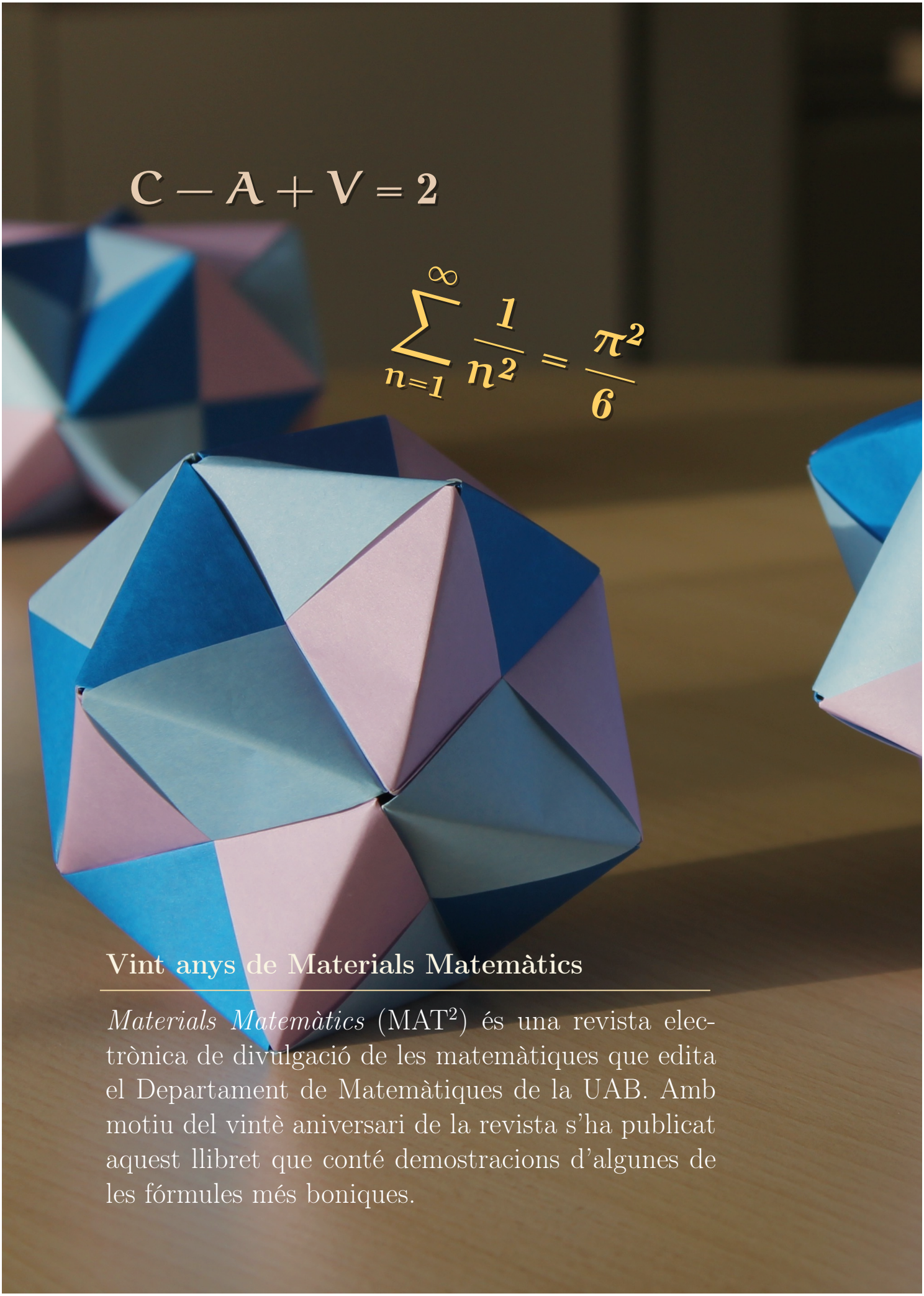
Gregori Guasp

Gregori Guasp Balaguer (Palma de Mallorca, 1959) és matemàtic i professor jubilat del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), on va cursar la llicenciatura i el doctorat en Matemàtiques.

La seva activitat investigadora s'ha desenvolupat principalment en l'àmbit de la geometria diferencial, i ha format part del Grup de Recerca de Geometria Diferencial de la UAB.

Al llarg de la seva carrera ha compaginat la recerca amb una gran dedicació a l'ensenyament i la divulgació de les matemàtiques. Entre altres activitats, va ser coordinador de Matemàtiques de les proves d'accés a la universitat i és editor de *Materials Matemàtics*.

L'any 2022 va publicar, conjuntament amb Agustí Reventós, *Un recull (extens) d'exercicis sobre corbes i superfícies*, una obra amb 229 exercicis resolts de geometria diferencial i nombrosos recursos interactius.



Vint anys de Materials Matemàtics

Materials Matemàtics (MAT^2) és una revista electrònica de divulgació de les matemàtiques que edita el Departament de Matemàtiques de la UAB. Amb motiu del vintè aniversari de la revista s'ha publicat aquest llibret que conté demostracions d'algunes de les fórmules més boniques.



Armengol Gasull
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Armengol.Gasull@uab.cat



Gregori Guasp
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Gregori.Guasp@uab.cat

Publicat el 22 d'octubre de 2026