Anàlisi complexa

v24.10

Carme Cascante*, Núria Fagella, Eduardo Gallego†, Jordi Pau, Martí Prats

9 de setembre de 2024

*CC: cascante@ub.edu, NF: nfagella@ub.edu, JP: jordi.pau@ub.edu:
Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, Catalonia
†EG: Eduardo.Gallego@uab.cat MP: marti.prats@uab.cat:
Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Catalonia

Índex

Introducció

Aquests apunts s'han iniciat com una adaptació d'uns apunts previs en anàlisi complexa de la UB fets per Núria Fagella, Jordi Pau i Carme Cascante de cara a cobrir la primera part del curs *Anàlisi complexa i de Fourier* (a partir d'ara ACF) del grau en Matemàtica Computacional i Analítica de Dades (MatCAD) de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB) pel curs 2023–24, incorporant les meves pròpies aportacions i idees d'edicions anteriors del curs en ACF transmeses per n'Eduard Gallego. A tots ells el meu agraïment per la seva generositat. Mirarem de fer-ne una versió col·lectiva quan haguem acabat el curs.

Per tant, al llarg del curs els apunts aniran evolucionant. Com que hi haurà errors de tota mena, tant ortogràfics com matemàtics, us proposo que, en cas de trobar-ne un, em feu arribar una notificació a través del fòrum del Campus Virtual dedicat exclusivament a aquesta finalitat. Cada aportació tindrà una nota que servirà per millorar la nota final mitjançant un procediment que s'explicarà a classe.

1 Indicacions per al curs Anàlisi complexa i de Fourier

De cara al curs ACF del grau de MatCAD de la UAB, fem les següents propostes didàctiques.

- El capítol 1 es cobreix amb 4 sessions de teoria i problemes. Es pot ometre el repàs de trigonometria. L'exercici 1.3.1 queda fora de l'abast del curs. Els exercicis 1.5.3, 1.7.2 i 1.8.2 són assequibles per l'alumnat, però es consideren d'ampliació ja que el calendari del curs no permet cobrir-los amb detall i convé passar endavant.

- El capítol 2 es cobreix amb 3 sessions. Es dona importància als exercicis 2.3.3–2.3.5, incloent la definició d sinus i cosinus que s'evitarà introduir al final del tema 4, i l'exercici 2.4.3. La secció 2.4 es passa una mica de puntetes i sense demostracions per no embolicar la troca. Els exercicis 2.1.5, 2.1.7, 2.3.9 i 2.4.1 són d'ampliació.

- El capítol 3 s'hauria de fer en tres sessions si fos possible, tot i que sembla difícil d'aconseguir si es vol donar pes a les demostracions, que són prou interessants i a l'exercici 3.2.1 i 3.3.1, el segon porta força feina de fer a classe. Els exercicis 3.1.2, 3.1.3 i 3.3.2 són d'ampliació.

- El capítol 4 es cobreix sense demostracions, en general. Sí que es fa la deducció de CR passant pels operadors de Wirtinger, per les valor didàctic. No es parla del paper del Jacobià (observació 4.16) i se salta les seccions 4.3 i 4.5 per manca de temps. Sí que s'enuncia, al final del tema de CR, el resultat de la proposició 4.24 de manera informal. Es prioritza fer els exercicis 4.1.2, 4.1.4, 4.2.4, 4.2.5, 4.3.2, 4.4.1 sobretot c), 4.4.2, (4.4.6) i altres de similars.

Ampliació: exercicis 4.2.10, 4.2.11, 4.5.4, 4.5.9

- El capítol 5 es cobreix fent les dues primeres seccions en una hora, usant els exercicis 5.2.1, 5.2.4 per il·lustrar els conceptes. Tot seguit es destinen dues hores a demostrar detalladament els teoremes de Cauhy-Goursat, de Cauchy en el disc i la fórmula integral de Cauchy, il·lustrat amb els exercicis 5.3.2 i 5.4.1. Les següents 4 hores es fan per fer resolució de problemes de teoria local de Cauchy, la resta del capítol. Es destina una estona a explicar tots els resultats d'aplicació de la FIC (FIC per derivades, Liouville, TFA, etcètera), obviant el teorema de Morera i la derivació sota el signe integral, donant pinzellades de les idees per les demostracions. Es fan exercicis 5.5.1, 5.5.3, 5.6.1, 5.6.2, 5.7.5, 5.7.7, 5.10.1, 5.10.2, 5.10.6, 5.11.1 i 5.11.4.

  Ampliació: exercicis 5.2.6, 5.3.1, 5.4.6–5.4.8, 5.6.3.

- El capítol 6 es fa en dues hores de manera il·lustrativa. Les demostracions es fan *alla breve* via il·lustracions. En particular, el teorema de Cauchy global es fa en cinc minuts, aprofitant per explicar Morera i la derivació sota el signe integral com a eines de la demostració, però sense fer el detall de l'argument ni tan sols la idea. Ens saltem també el teorema de deformació i de la independència de camí.

- El capítol 7 es fa en quatre hores. En les dues primeres convé arribar a enunciar el teorema dels residus i fins i tot esbossar-ne la demostració, fent exercicis 7.1.1, 7.1.2. Les altres dues hores se centren en resoldre problemes, expecialment d'integrals usant el residu. Exercicis recomanats per fer a classe: 7.2.2, 7.3.3, 7.3.5, i els exemples de la secció 7.5 d'aplicacions. Ens saltem les seccions 7.4, 7.6 i 7.7, que es consideren d'ampliació.

- El capítol 8 es deixa per fer en un seminari eventualment, com a alternativa a un seminari sobre aplicacions univalents.

1 El cos dels nombres complexos

Sigui $\mathbb{R}$ el cos dels nombres reals. L'equació $x^2 + 1 = 0$ no té solucions reals. Agafarem un cos més gran que $\mathbb{R}$, que anomenarem $\mathbb{C}$, on hi tindrem solucions. De fet, tot polinomi de coeficients reals (i de coeficients complexos!) tindrà almenys una arrel, en el que es coneix com a Teorema Fonamental de l'Àlgebra. Diem que $\mathbb{C}$ és un cos algebraicament tancat.

En aquest capítol introduïm aquest cos i veiem les seves propietats bàsiques. Explicarem la forma polar i com usar-la per fer operacions, però abans ens caldrà introduir l'exponencial complexa per donar rigor a aquest càlcul. Finalment veure com les equacions amb potències tenen múltiples solucions, ja siguin polinomials o exponencials, per acabar exposant el teorema fonamental de l'àlgebra que demostrarem al capítol 5.

1.1 El cos dels nombres complexos

Si definim $i = \sqrt{-1}$, aleshores i és solució de $x^2 + 1 = 0$: efectivament, $(\pm i)^2 - 1 = 0$. Per tant, de la mateixa manera que si un polinomi té una arrel real a, aleshores es pot dividir per $(x - a)$, esperem poder escriure

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i).$$

Però de moment la identitat anterior no té cap sentit. Necessitem definir el cos dels nombres complexos.

De moment tenim l'element i ideat: volem que sigui un nombre tal que $i \cdot i = -1$.

Definició 1.1. Donats $a, b \in \mathbb{R}$, definim

$$a + bi$$

com un nombre complex. Diem doncs que, com a conjunt, tenim

$$\mathbb{C} := \{a + bi : (a, b) \in \mathbb{R}^2\},$$

i anomenem nombres complexos els elements de $\mathbb{C}$. Anomenem parts reals i imaginària a

$$\operatorname{Re}(a + bi) = a \qquad \text{i} \qquad \operatorname{Im}(a + bi) = b.$$

•

Ara ens falta definir les operacions del conjunt, per tal de tenir una estructura de cos. Notem de moment que $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, on identifiquem $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ amb el nombre complex $a + bi$.

Podem sumar i fer producte de nombres complexos.

Definició 1.2. Si $z = x + yi$ i $w = a + bi$ són dos nombres complexos, llavors definim la seva suma com

$$z + w = x + a + (y + b)i;$$

i el seu producte com

$$z \cdot w = xa - yb + (xb + ya)i.$$

Sovint escriurem zw enlloc de $z \cdot w$. •

Notem que amb aquesta definició, si $a, x \in \mathbb{R}$, aleshores en identificar-los amb els nombres complexos $a + 0i$ i $x + 0i$ respectivament trobem que la seva suma i el seu producte coincideixen amb els habituals:

$$(x + 0i) + (a + 0i) = x + a + 0i \equiv x + a,$$

$$(x + 0i) \cdot (a + 0i) = xa + 0i \equiv xa.$$

A més, efectivament tenim que

$$i \cdot i = (0 + 1i)(0 + 1i) = -1 + 0i = -1.$$

Per tant, amb aquesta definició hem creat un conjunt amb dues operacions (suma i producte) que estén els nombres reals amb les seves operacions habituals, i on el polinomi $x^2 + 1$ té dues arrels. Notem que la suma és compatible amb l'estructura d'espai vectorial de $\mathbb{R}^2$, però el producte de nombres complexos no coincideix amb el producte vectorial ni amb el producte escalar, és una operació que no existeix a l'espai vectorial tal i com el definim habitualment.

Exemple 1.3. Podem pensar l'operació producte de la següent manera:

$$(1 + 2i)(-3 + 2i) = -3 + 2i - 6i + 4i^2 = -3 - 4i - 4 = -7 - 4i.$$

Notem que el resultat coincideix amb la definició, i el procediment és més intuïtiu. ◊

Podem veure fàcilment que el conjunt $\mathbb{C}$ equipat amb aquestes dues operacions satisfà les següents propietats, que es poden resumir amb la següent afirmació: els complexos tenen estructura d'anell commutatiu.

Lema 1.4. *Siguin $z, w, v \in \mathbb{C}$. Aleshores se satisfan les propietats respecte a la suma:*

S1 Associativa de la suma: $(z + w) + v = z + (w + v)$.

S2 Element neutre per la suma: si escrivim $0_{\mathbb{C}} := 0 + 0i$, aleshores $z + 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}} + z = z$. Amb la identificació dels reals amb la inclusió dels reals en els complexos, escrivim $0_{\mathbb{C}} = 0$.

S3 Element oposat (de la suma): existeix un nombre complex $u \in \mathbb{C}$ tal que $u + z = z + u = 0$, que anomenem nombre oposat a z, i que escrivim com $(-z) := u$.

S4 Commutativa de la suma: $z + w = w + z$.

També se satisfan les següents propietats respecte al producte:

P1 Associativa del producte: $(zw)v = z(wv)$.

P2 Element neutre pel producte: si escrivim $1_{\mathbb{C}} := 1 + 0i$*, aleshores* $z + 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}} + z = z$. *Amb la identificació dels reals amb la inclusió dels reals en els complexos, escrivim* $0_{\mathbb{C}} = 0$.

P3 Commutativa del producte: $zw = wz$.

P4 Distributiva del producte respecte la suma: $z(w + v) = zw + zv$.

De fet, $\mathbb{C}$ és un cos (és a dir, tot element diferent de zero té invers respecte el producte). Per veure-ho, primer introduïm el concepte de conjugat.

Definició 1.5 (Conjugat i mòdul d'un nombre complex)**.** Si $z = x + iy$, el conjugat de z és

$$\overline{z} = x - iy.$$

i el seu mòdul és

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

•

Exemple 1.6. De les definicions podem deduir que

- $\overline{2 - 3i} = 2 + 3i$.
- $\overline{i} = -i$.
- $\overline{13} = 13$.

◊

Observació 1.7. Claramente tenim

- $z = \overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}\,(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}$.
- $|\mathrm{Re}\, z| \leqslant |z|; \qquad |\mathrm{Im} z| \leqslant |z|$.
- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

Les primeres són evidents, la darrera és també un simple càlcul:

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

•

Amb aquesta relació ja podem veure que $\mathbb{C}$ és efectivament un cos:

Lema 1.8. *Siguin $z = x + yi \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Aleshores se satisfà la següent propietat respecte el producte:*

P5 Element invers (del producte): existeix un nombre complex $u \in \mathbb{C}$ tal que $uz = zu = 1$, que anomenem nombre invers de z, i que escrivim com $z^{-1} := 1/z := u$.

Aquest nombre és

$$\frac{1}{z} := \frac{x}{|z|^2} - \frac{y}{|z|^2} i.$$

Demostració. Efectivament, $(x + yi) \cdot \left(\frac{x}{|z|^2} - \frac{y}{|z|^2} i \right) = \frac{x^2+y^2}{|z|^2} + \frac{xy-xy}{|z|^2} i = 1.$ □

Ara ja podem definir la fracció de dos nombres complexos en general:

$$\frac{z}{w} := z \cdot \frac{1}{w}.$$

Així, tenim que

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}}.$$

És a dir, per calcular l'invers d'un nombre complex, només hem de multiplicar numerador i denominador pel seu conjugat.

Exemple 1.9. Tenim

- $\frac{1}{3+10i} = \frac{3-10i}{(3+10i)(3-10i)} = \frac{3-10i}{9+100} = \frac{3}{109} - \frac{10}{109} i.$
- $\frac{1}{i} = \frac{-i}{1} = -i.$

◊

Lema 1.10 (Relació entre x, y i $z, \overline{z}$.)**.** *Tenim $z = x + iy$ i $\overline{z} = x - iy$. Sumant obtenim*

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}.$$

Restant, obtenim

$$y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Observació 1.11. Un polinomi en x, y és un polinomi en $z, \overline{z}$ (amb coeficients complexos). Per exemple

$$x + y + xy + 1 = \frac{z + \overline{z}}{2} + \frac{(z - \overline{z})}{2i} + \frac{(z + \overline{z})}{2} \cdot \frac{(z - \overline{z})}{2i} + 1$$

$$= z \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2i} \right) + \overline{z} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2i} \right) + 1 + z^2 \left(\frac{1}{4i} \right) - \overline{z}^2 \left(\frac{1}{4i} \right).$$

•

Exercici 1.1.1. *Doneu en forma $a + bi$:*

a) $(-1+i)^2$,

b) $\frac{8i-1}{i}$,

c) $\frac{-1+5i}{2+3i}$,

d) $\dfrac{(8+2i)-(1-i)}{(2+i)^2}$,

e) $\left(\dfrac{2+i}{6i-(1-2i)}\right)^2$,

f) $((3-i)^2-3)i$.

Exercici 1.1.2. *Demostreu o doneu un contraexemple:*

a) $\mathrm{Re}\,(z+w) = \mathrm{Re}\,z + \mathrm{Re}\,w$ *b)* $\mathrm{Re}\,(zw) = (\mathrm{Re}\,z)(\mathrm{Re}\,w)$ *c)* $\mathrm{Re}\,(\frac{z}{w}) = \frac{\mathrm{Re}\,z}{\mathrm{Re}\,w}$. ◁

Exercici 1.1.3. *Sigui* $z \in \mathbb{C}$ *tal que* $\mathrm{Im}\,(z) > 0$. *Proveu que* $\mathrm{Im}\,(1/z) < 0$. ◁

Exercici 1.1.4. *Si* $z = x + iy$ *on* $x, y \in \mathbb{R}$, *trobeu les parts real i imaginària de:*

a) z^2

b) $z(z+1)$

c) $\frac{1}{z-3}$.

d) $\frac{1}{z^2}$

e) $\frac{z+1}{2z-5}$

f) z^3. ◁

Exercici 1.1.5. *Sigui* $(x+iy)/(x-iy) = a+ib$. *Proveu que* $a^2+b^2 = 1$. ◁

Exercici 1.1.6. *Descriviu els conjunts de punts del pla que satisfan:*

a) $1 < \mathrm{Im}\,(iz) < 2$,

b) $\mathrm{Im}\,\frac{z-a}{z} = 0, a \in \mathbb{C}^*$,

c) $|z| = \mathrm{Re}\,z + 1$,

d) $|z-1| = |z+i|$,

e) $|z-2| > |z-3|$,

f) $|z-1| + |z+1| = 7$. ◁

Exercici 1.1.7. *Proveu que* $-1+i$ *satisfà* $z^2+2z+2 = 0$. ◁

Exercici 1.1.8. *Escriviu l'equació complexa* $z^3+5z^2 = z+3i$ *com dues equacions reals.* ◁

Exercici 1.1.9. *a) Si* z_1, z_2 *són complexos amb* z_1+z_2 *i* z_1z_2 *reals negatius proveu que* z_1, z_2 *són reals.*

b) Proveu que el vector z_1 *és paral·lel al vector* z_2 *si i només si* $\mathrm{Im}\,(z_1\bar{z}_2) = 0$. ◁

Exercici 1.1.10. *Proveu analíticament i gràfica que* $|z-1| = |\bar{z}-1|$.

Exercici 1.1.11. *Demostreu que* $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1$ *si* $|a| = 1$ *o bé* $|b| = 1$. *Quina excepció cal fer si* $|a| = |b| = 1$?

Demostreu també que $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1$ *si* $|a| < 1$ *i* $|b| < 1$.

1.2 Els nombres complexos com a espai vectorial

Per tot nombre real $\lambda \in \mathbb{R}$ i $z = a + ib \in \mathbb{C}$, definim $\lambda z := (\lambda a) + (\lambda b)i$, és a dir que identifiquem λ amb el nombre complex $\lambda + 0i$ i fem el producte de dos nombres complexos, tal i com hem descrit a la secció anterior.

Aquesta multiplicació per un escalar real compleix les propietats:

E1. Compatibilitat del producte per escalar: $(\lambda\mu)z = \lambda(\mu z)$.

E2. El producte per l'element neutre és la identitat: $1z = z$.

E3. Distributiva respecte la suma real: $(\lambda + \mu)z = \lambda z + \mu z$.

E4. Distributiva respecte la suma complexa: $\lambda(z + w) = \lambda z + \lambda w$.

Aquí estem suposant que $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i $z, w \in \mathbb{C}$.

Com que el pla complex també satisfà les propietats $S1$–$S4$ descrites més amunt, diem que té estructura de $\mathbb{R}$-espai vectorial. Com a $\mathbb{R}$-espai vectorial, $\mathbb{C}$ coincideix amb $\mathbb{R}^2$. L'eix de les x s'anomena *eix real*, i l'eix de les y s'anomena *eix imaginari*. El pla format per $\mathbb{R}^2$ en identificar-se amb els complexos (i incorporar, per tant, l'operació producte de complexos) s'anomena *pla complex* o *pla d'Argand*.

Per tant, $\mathbb{C}$ hereda l'estructura de $\mathbb{R}^2$, i és un espai normat amb $\|z\|_{\mathbb{C}} = |z|$, és a dir,

N1. $\|z\|_{\mathbb{C}} = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

N2. $\|az\|_{\mathbb{C}} = |a|\,\|z\|_{\mathbb{C}}, \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (de fet, $\forall a \in \mathbb{C}$);

N3. $\|z + w\|_{\mathbb{C}} \leqslant \|z\|_{\mathbb{C}} + \|w\|_{\mathbb{C}}$ (desigualtat triangular).

Donats $z, w \in \mathbb{C}$, definim

$$d(z, w) = |z - w|.$$

Amb aquesta distància, $\mathbb{C}$ és un espai mètric[1], amb el que té una topologia i podem parlar de convergència de successions:

Definició 1.12. Diem que una successió de nombres complexos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ és convergent si existeix $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$|z_n - z| \to 0.$$

Diem que z_n tendeix a z, o que z és el límit de la successió, i ho escrivim com

$$z_n \xrightarrow{n\to\infty} z \qquad \text{o bé } \lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

Sovint ometrem la notació $n \to \infty$ en les expressions anteriors quan sigui clar pel context. •

[1] És a dir que satisfà:

D1. $d(z, w) = 0 \Leftrightarrow z = w$;

D2. $d(z, w) = d(w, z)$ (simetria);

D3. $d(z, w) \leqslant d(z, v) + d(v, w)$ (desigualtat triangular).

A més, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ és complet: tota successió de Cauchy de nombres complexos és convergent.

També tenim

$$z_n \to z \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z \\ \\ \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z. \end{cases}$$

Exemple 1.13. La successió $\frac{1}{n} + \frac{(n-1)}{n} i$ tendeix a i, ja que $1/n \to 0$ i $\frac{(n-1)}{n} \to 1$. $\Diamond$

Advertència 1.14. No sempre és convenient passar a part real i part imaginària. Quan ja es té pràctica amb les relacions anteriors, la majoria de vegades és millor fer servir notació complexa. $\bullet$

Tot seguit discutim la convergència de sèries:

Definició 1.15. Sigui $\{z_k\} \subset \mathbb{C}$ una successió de nombres complexos, aleshores diem que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ és convergent si $\left\{ \sum_{k=1}^{n} z_k \right\}_n$ és una successió convergent. En tal cas, si el límit de la successió és z, escrivim

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z.$$

Diem que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ és *absolutament convergent* si $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| < \infty$. $\bullet$

Observació 1.16 (Condició necessària de convergència)**.** Recordem que si una sèrie de nombres complexos $\sum_n c_n$ és convergent, aleshores $|c_n| \to 0$. $\bullet$

Observació 1.17. Tota sèrie absolutament convergent de nombres reals és convergent. En el pla complex passa el mateix. En efecte, si $\sum |z_k| < \infty$, llavors $\sum |\operatorname{Re} z_k| < \infty$ i també $\sum |\operatorname{Im} z_k| < \infty$ ja que $|\operatorname{Re} z_k| \leqslant |z_k|$ i $|\operatorname{Im} z_k| \leqslant |z_k|$, i per tant

$$\left. \begin{array}{ll} \sum \operatorname{Re} z_k & \text{és convergent} \\ \sum \operatorname{Im} z_k & \text{és convergent} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \sum z_k \quad \text{és convergent.}$$

$\bullet$

Teorema 1.18 (Teorema de Mertens)**.** *Siguin $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ dues sèries de nombres complexos absolutament convergents. Llavors la* sèrie producte de Cauchy *de las sèries anteriors, $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n$, on $\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}$ és absolutament convergent i*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \right).$$

Definició 1.19. Donada una successió $\{a_n\}$ de nombres reals, definim el seu *límit superior* com

$$\overline{\lim}\, a_n = \limsup a_n := \inf_k \left(\sup_{n \geqslant k} a_n \right).$$

També es compleix

$$\limsup a_n = \sup \left\{ \lim_{n_k \to \infty} a_{n_k} : a_{n_k} \text{ és una parcial de } a_n \right\}.$$

•

Exemple 1.20. Fem un exemple de càlcul: si tenim la successió $\{a_n\} = \{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}$, aleshores $\liminf a_n = 0$ i $\limsup a_n = 1$. Si $\{b_n\} = \{(-1)^n\}$, aleshores $\liminf b_n = -1$, i $\limsup b_n = 1$.

♢

Lema 1.21 (Criteri de l'arrel.)**.** *Sigui $\{a_n\}$ successió de nombres reals, i sigui $\alpha = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Aleshores*

(i) Si $\alpha < 1$, la sèrie $\sum_n a_n$ és convergent;

(ii) Si $\alpha > 1$, la sèrie $\sum_n a_n$ no convergeix.

Observació 1.22. Recordem que si existeix

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \in [0, +\infty],$$

aleshores $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$ existeix i també val ℓ. •

Definició 1.23. El pla complex hereda la topologia del pla. Per tant, el *disc obert* (o bola oberta) centrat en a i de radi r és el conjunt

$$D_r(a) := D(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}.$$

El disc unitat normalment es denota $\mathbb{D} := D_1(0)$. El *disc tancat* és

$$\overline{D_r}(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leqslant r\}.$$

Diem que un conjunt $A \subset \mathbb{C}$ és *obert* si per tot $a \in A$ existeix $r > 0$ tal que $D_r(a) \subset A$. Diem que A és *tancat* si $A^c = \mathbb{C} \backslash A$ és obert.

Diem que és *fitat* si existeix un $r > 0$ tal que $A \subset D_r(0)$.

Diem que A és *connex* si no es pot obtenir com a unió de dos oberts disjunts i no buits. Diem que és *arcconnex* si donats dos punts $a, b \in A$ existeix un camí en A que els uneix, i.e., existeix una aplicació contínua $\gamma : [0, 1] \to A$ de manera que $\gamma(0) = a$ i $\gamma(1) = b$. Diem que A és *simplement connex* si és connex i donats dos camins entre dos puns $a, b \in A$ es pot transformar l'un en l'altre de manera contínua sense sortir del conjunt A, i.e., existeix una *homotopia de camins*: una aplicació contínua $\gamma : [0, 1]^2 \to A$ tal que $\gamma(0, s) = a$, $\gamma(1, s) = b$, $\gamma(t, 0)$ coincideix amb el primer dels camins, i $\gamma(t, 1)$ coincideix amb el segon.

Diem que A és un *domini* si és obert i connex. •

Observació 1.24. Notem que $\varnothing$ i $\mathbb{C}$ són oberts i tancats, però no hi ha cap més conjunt que sigui obert i tancat alhora.

Un conjunt és simplement connex si és connex i no té forats. •

Exercici 1.2.1. *Digueu si les següents successions són convergents i en cas afirmatiu calculeu el seu límit:*

a) $i^n + \dfrac{1}{n+i}$; *b)* $\dfrac{n+i}{n-i}$; *c)* $\dfrac{3\,i\,n^2}{n^2-2i}$. ◁

Exercici 1.2.2. *Estudieu la convergència i la convergència absoluta de les sèries:*

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n}$; *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$. ◁

Exercici 1.2.3. *Demostreu el teorema de Mertens.* ◁

1.3 Repàs de trigonometria

A l'estudiar càlcul en diverses variables, vam aprendre que podem calcular la longitud d'una corba $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$:

$$L(\gamma) = \int_I |\gamma'(t)|\, dt.$$

Així, la corba

$$t \mapsto \gamma(t) = (-t, \sqrt{1-t^2})$$

envia l'interval $[-1, 1]$ al semicercle unitat superior. Definim π com la longitud d'aquesta corba. Com que $\gamma'(t) = (-1, -t/\sqrt{1-t^2})$, la definició és equivalent a

$$\pi := \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Notem que γ és injectiva i la longitud és una funció creixent. Així, associem a un nombre (que anomenem angle) $\alpha \in [0, \pi]$ la semirecta oberta del pla amb extrem a l'origen de coordenades que passa pel punt $\gamma(t)$ tal que $\alpha = \text{longitud}(\gamma([-1, t])) = \int_{-1}^{t} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$. Per exemple, per $\alpha = \pi$ prenem $t = 1$ ja que π és la longitud del semicercle. L'angle $\alpha = \pi/2$ (anomenat també angle recte) correspon a la meitat del semicercle per simetria, que correspon a $t = 0$, és a dir que té associada la semirecta vertical $\{(0, y) : y > 0\}$.

Si $\alpha \in (\pi, 2\pi)$, aleshores associem α a la semirecta oposada a l'associada a $\alpha - \pi$.

Si $\alpha \in [2k\pi, 2(k+1)\pi)$ amb $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$; aleshores associem α a la semirecta associada a $\alpha - 2k$

Definició 1.25. Donat un angle $\alpha \in \mathbb{R}$, definim el seu sinus com el quocient de la coordenada vertical entre el mòdul de qualsevol dels punts de la seva semirecta associada, (ben definit pel teorema de Tales). Definim el cosinus com el quocient de la coordenada horitzontal entre el mòdul de qualsevol dels punts de la seva semirecta associada. I definim la tangent com el quocient entre sinus i cosinus. •

Observació 1.26. Tenim

$$\sin(\pi) = \cos(\pi/2) = \sin(0) = 0,$$

$$\sin(\pi/2) = \cos(0) = 1,$$

i

$$\cos(\pi) = -1.$$

Notem que per definició, el sinus i el cosinus són funcions 2π periòdiques, mentre que la tangent és π-periòdica.

Lema 1.27. *[Paritat de les funcions trigonomètriques] Si $x \in \mathbb{R}$, aleshores*

$$\sin(-x) = -\sin(x), \qquad \cos(-x) = \cos(x), \qquad \tan(-x) = -\tan(x).$$

Demostració. És conseqüència directa de la definició. □

Lema 1.28. *[Teorema de Pitàgores] Si $x \in \mathbb{R}$, aleshores*

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Demostració. Això es deriva del fet que $t^2 + \sqrt{1-t^2}^2 = 1$. □

Lema 1.29 (Suma d'angles)**.** *Donats $x, y \in \mathbb{R}$, tenim*

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \end{cases}$$

Idea. Aquest lema es pot demostrar usant geometria elemental. □

Lema 1.30 (Angles complementaris, suplementaris i periodicitat)**.** *Donat $x \in \mathbb{R}$, es compleixen les identitats:*

$$\sin(\pi/2 - x) = \cos(x), \qquad \cos(\pi/2 - x) = \sin(x), \qquad \tan(\pi/2 - x) = \tan^{-1}(x).$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x), \qquad \cos(\pi - x) = -\cos(x), \qquad \tan(\pi - x) = -\tan(x).$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos(x), \qquad \tan(x + \pi) = \tan(x);$$

Demostració. Cal combinar la suma d'angles amb les simetries de les funcions trigonomètriques del lema 1.27 i els valors donats a l'observació 1.26. □

Lema 1.31 (Infinitèsims)**.** *Tenim*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad i \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Idea. Es tracta de veure usant geometria elemental que

$$\sqrt{1-x^2} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{\sqrt{2(1-\cos x)}}{x} \leqslant 1,$$

i després fer pas al límit. □

Teorema 1.32. *Les funcions* $\sin(x)$ *i* $\cos(x)$ *són* 2π*-periòdiques, infinitament diferenciables, i*

$$(\sin(x))' = \cos(x) \qquad i \qquad (\cos(x))' = -\sin(x).$$

A més les seves sèries de Taylor són convergents a tot $\mathbb{R}$*, i trobem que*

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad i \qquad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Idea. Per veure la diferenciabilitat n'hi ha prou amb comprovar les dues derivades, que surten de

$$(\sin(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \overset{\text{L1.31}}{=} \cos(x).$$

L'altra es fa anàlogament. La convergència s'obté usant estimacions del residu de Taylor. □

Definició 1.33. Es pot demostrar que la tangent és injectiva en $(-\pi/2, \pi/2)$ i la seva imatge és $\mathbb{R}$. Per tant, per tot $x \in \mathbb{R}$ podem definir $\arctan x$ com l'únic nombre real $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ tal que $\tan\alpha = x$. També pel sinus tenim injectivitat en $(-\pi/2, \pi/2)$ i definim l'arcsinus d'un nombre $x \in [-1, 1]$, que escrivim $\arcsin x$, com l'únic nombre real $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ tal que $\sin\alpha = x$. Finalment el cosinus és injectiu a $(0, \pi)$, i definim l'arccosinus d'un nombre $x \in [-1, 1]$, que escrivim $\arccos x$, com l'únic nombre real $\alpha \in (0, \pi)$ tal que $\cos\alpha = x$. Pel teorema de la funció inversa per funcions de variable real, sabem que les tres funcions són C^∞ en el seu domini. •

Exercici 1.3.1. *Demostreu tots els resultats de la secció.* ◁

Exercici 1.3.2. *Definim el sinus i el cosinus hiperbòlic de* $x \in \mathbb{R}$ *com*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Demostra que se satisfan les següents identitats:

a) $\sinh(0) = 0 \qquad i \qquad \cosh(0) = 1.$

b) $\lim_{x\to+\infty} \sinh x = \lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty \qquad i \qquad \lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty.$

c) $\sinh(-x) = -\sinh(x) \qquad i \qquad \cosh(-x) = \cosh(x).$

d) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$

e) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

f) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$

g) $(\sinh x)' = \cosh x \qquad i \qquad (\cosh(x))' = \sinh(x).$ ◁

1.4 L'exponencial complexa

Per la fórmula de Taylor, tenim

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Podem fer servir aquesta mateixa expressió per tal de definir e^z per $z \in \mathbb{C}$.

Definició 1.34. Per $z \in \mathbb{C}$, definim

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Aquesta sèrie de nombres complexos és absolutament convergent (ja que $\sum \frac{|z|^n}{n!} < \infty$), i per tant convergent. Així que e^z està ben definit per a tot $z \in \mathbb{C}$. •

Per $x \in \mathbb{R}$, tenim del teorema 1.32 que

$$\cos x = \mathrm{Re}\,(e^{ix}); \qquad \sin x = \mathrm{Im}\,(e^{ix}).$$

Així doncs, tenim la *identitat d'Euler*:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

i la fórmula inversa d'Euler:

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \qquad \text{i} \qquad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Notem que la corba $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ definida per $\gamma(x) = e^{ix}$ retorna valors de mòdul 1 pel teorema de Pitàgores:

$$\left|e^{ix}\right| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1.$$

Per tant, la corba γ "enrotlla" la recta real sobre la circumferència unitat, amb velocitat constant i periodicitat 2π.

Podem definir els sinus i cosinus de nombres complexos anàlogament usant el teorema 1.32, però en aquest capítol només apareixen les funcions sinus i cosinus amb variable real.

Proposició 1.35. *Per a tot $z \in \mathbb{C}$, es compleix que*

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}.$$

Demostració. Per definició, tenim

$$\overline{e^z} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \overline{\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{z^n}{n!}}.$$

Com que l'aplicació conjugada és contínua, podem treure el límit a fora del conjugat per obtenir

$$\overline{e^z} = \lim_{k\to\infty} \overline{\sum_{n=0}^{k} \frac{z^n}{n!}} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{\overline{z}^n}{n!} = e^{\overline{z}}.$$

□

Observació 1.36. Una demostració alternativa de $\left|e^{ix}\right| = 1$ per a tot $x \in \mathbb{R}$: Tenim

$$\left|e^{ix}\right|^2 = (e^{ix})\,\overline{(e^{ix})} = e^{ix}\, e^{\overline{ix}} = e^{ix}\, e^{-ix} = e^0 = 1.$$

•

Com a propietat fonamental de l'exponencial real, tenim que

$$e^{x+y} = e^x e^y, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

L'exponencial complexa e^z manté aquesta propietat.

Proposició 1.37. *Donats $z, w \in \mathbb{C}$, tenim*

$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

Si $n \in \mathbb{N}$, trobem per tant

$$e^{nz} = (e^z)^n, \qquad i \qquad e^{-z} = (e^z)^{-1}. \tag{1.1}$$

En particular, tenim

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

que generalitza la identitat d'Euler.

Demostració de la proposició. Per la definició de l'exponencial complexa, tenim

$$e^{z+w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k\, w^{n-k}}{n!},$$

on hem aplicat la fórmula del binomi de Newton en la darrera identitat. Recordem també que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Pel criteri del quocient (vegeu l'observació 1.22), tenim que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ és absolutament convergent. Podem doncs aplicar el teorema de Mertens, i trobem que

$$e^z\, e^w = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!} z^k\, w^{(n-k)}\right),$$

que coincideix amb l'expressió anterior.

Per veure 1.1, notem que és cert per $n \in \{0, 1\}$. Per $n > 1$, suposant que és cert per $n - 1$ com a hipòtesi inductiva, trobem que

$$e^{nz} = e^{(n-1)z+z} = e^{(n-1)z} e^z = (e^z)^{n-1}\, e^z = (e^z)^n.$$

Finalment,

$$1 = e^0 = e^z e^{-z} \implies e^{-z} = (e^z)^{-1}.$$

□

Observació 1.38. Definint les potències negatives de la manera habitual, és a dir $z^{-k} = (z^k)^{-1}$, aleshores 1.1 estén a tots els enters $n \in \mathbb{Z}$. •

Simplement observar (vegeu l'observació 1.26 i el lema 1.30) que

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i; \quad e^{i\pi} = -1; \quad e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i.$$

Lema 1.39 (Fórmula de De Moivre)**.** *Per tot $n \in \mathbb{N}$ i $\theta \in \mathbb{R}$, tenim*

$$e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n \Rightarrow \begin{cases} \cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left((e^{i\theta})^n\right) \\ \sin(n\theta) = \mathrm{Im}\left((e^{i\theta})^n\right) \end{cases}$$

Usant la identitat anterior, podem expressar $\cos(n\theta)$ i $\sin(n\theta)$ en termes de $\sin\theta$ i $\cos\theta$. Vegem un exemple:

Exemple 1.40. Com que

$$(e^{i\theta})^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\,\sin\theta - 3\cos\theta\,\sin^2\theta - i\sin^3\theta,$$

i

$$e^{i3\theta} = \cos 3\theta + i\sin 3\theta,$$

obtenim la identitat $\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\sin^2\theta$. ♢

Exercici 1.4.1. *Fent servir la formula de de Moivre trobeu expressions de* $\sin 3\theta$ *i* $\sin 4\theta$ *en termes de* $\sin\theta$ *i* $\cos\theta$*.* ◁

Exercici 1.4.2. *Trobar les arrels de* $z^4 + 1 = 0$ *i fer-les servir per veure que* $z^4 + 1 = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)$*.* ◁

1.5 Representació polar d'un nombre complex

Tot nombre complex $z \neq 0$, el podem expressar en termes del seu mòdul r (on $r = |z|$) i l'angle θ que forma amb l'eix real. És a dir, podem fer un canvi de coordenades

$$z = x + iy \quad \rightarrow \quad r_\theta.$$

Aquest angle θ quedarà completament determinat si imposem que es trobi en un interval de longitud 2π fixat.

Definició 1.41 (Coordenades polars)**.** Donat $z \in \mathbb{C}$, s'anomena l'*argument principal* de z i es denota per

$$\mathrm{Arg}\ z$$

l'únic angle θ prenent valors $-\pi < \theta \leqslant \pi$ de manera que

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Aleshores tenim
$$z = x + iy = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta}.$$
Anomenem *coordenades polars* de z al parell (r, θ). •

Observació 1.42. Per trobar l'argument principal de z, podem calcular l'arctangent: $\hat{\theta} := \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Aleshores, si $x > 0$ (primer i quart quadrants del pla complex) definim $\theta = \hat{\theta}$, si $x < 0$ i $y \geqslant 0$ (segon quadrant) definim $\theta := \hat{\theta} + \pi$ i si $x < 0$ i $y < 0$ (tercer quadrant) definim $\theta := \hat{\theta} - \pi$. Si $x = 0$ i $y > 0$ (semieix imaginari superior) definim $\theta = \pi/2$ i si $x = 0$ i $y < 0$, prenem $\theta = -\pi/2$. D'aquesta manera, per tot $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, tenim
$$\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]\,.$$
•

Exemple 1.43. 1. La representació polar de i és
$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

2. Calculem la representació polar de $z = \sqrt{3} + i$:

   Tenim $|z| = \sqrt{3+1} = 2$, amb el que
$$\frac{z}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},$$
   que implica
$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ \sin\theta = \frac{1}{2}, \end{cases}$$
   amb el que $\theta = \pi/6$, i per tant la representació polar és
$$\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$
◊

Proposició 1.44. *Siguin $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Es compleix que $e^{z_1} = e^{z_2}$ si i només si $z_1 - z_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}$.*

En particular, la funció exponencial complexa és una funció periòdica i el conjunt de períodes és $2\pi i\mathbb{Z}$.

Demostració. Suposem que per a un $k \in \mathbb{Z}$, $z_1 = z_2 + 2\pi ik$. Llavors
$$e^{z_1} = e^{z_2 + 2\pi ik} = e^{z_2}e^{2\pi ik} = e^{z_2}.$$

Recíprocament, si $e^{z_1} = e^{z_2}$, es compleix que $e^{z_1 - z_2} = 1$, amb el que $e^{\operatorname{Re} z_1 - \operatorname{Re} z_2} = |e^{z_1 - z_2}| = 1$ i $e^{\operatorname{Im}(z_1 - z_2)} = 1$, és a dir
$$\cos \operatorname{Im}(z_1 - z_2) \overset{\text{Euler}}{=} 1.$$
Per tant, $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ i $\operatorname{Im}(z_1 - z_2) = 2k\pi$, o, equivalentment, $z_1 - z_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}$. □

És clar que, fixant un altre interval de longitud 2π, hi ha altres possibilitats amb l'angle θ que ens dóna la representació polar. De fet, aquí n'hem fixat una de concreta per fer de referència. Així doncs, hi ha infinits nombres reals θ (s'anomenen arguments de z) que compleixen la identitat

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Són

$$\text{Arg } z + 2\pi k; \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple 1.45.

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{5\pi}{2}} = e^{-i\frac{3\pi}{2}}. \qquad \Diamond$$

Definició 1.46. Un argument de $z \neq 0$ és un nombre real θ de manera que $z = |z|e^{i\theta}$.

$\arg z$ denota **tots** els possibles arguments de z. •

Exemple 1.47. Sigui $z = 1 - \sqrt{3}i$. Llavors $|z| = 2$ amb el que

$$\frac{z}{|z|} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{3}.$$

Per tant

$$\text{Arg } z = -\frac{\pi}{3}; \qquad \arg z = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad \Diamond$$

El producte, el quocient i la potència solen ser més fàcils de calcular en forma polar:

Exemple 1.48.

$$2e^{3i} \cdot \sqrt{3}e^{i\pi} = 2\sqrt{3}e^{i(3+\pi)}.$$

$$\frac{2e^{3i}}{\sqrt{3}e^{i\pi}} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i(3-\pi)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{i(3-\pi)}.$$

$$\left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{25} = 2^{25}e^{i\frac{25\pi}{4}} = 2^{25}e^{i\frac{24\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2^{25}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Notem que en multiplicar un nombre $z \in \mathbb{C}$ per $re^{i\theta}$, el mòdul es multiplica per r i l'argument augmenta en θ. És a dir que en multiplicar dos nombres complexos, trobem un nombre que té per mòdul el producte de mòduls i per argument la suma d'arguments (podem corregir per tenir l'argument principal sumant o restant 2π). $\Diamond$

Exercici 1.5.1. *Trobeu la forma polar dels nombres següents i dibuixeu-los.*

a) $3(1 + \sqrt{3}\,i)$ *b)* $2\sqrt{3} - 2i$ *c)* $-2 + 2i$ *d)* $-1 - i$. ◁

Exercici 1.5.2. *Expresseu en forma cartesiana ($a + ib$) els següents nombres:*

a) $(2+3i)(4+i)$ *c)* $\frac{1}{4+i}$ *e)* $(1-2i)^3$ *g)* $(1+i)^{100}+(1-i)^{100}$

b) $(4+2i)^2$ *d)* $\frac{i}{2+i}$ *f)* $\frac{1}{2+i}+\frac{4-2i}{3+i}$ *h)* $\left(\frac{1+2i}{1-i}\right)^2$ ◁

Exercici 1.5.3. *Fent servir el producte de* $(1+i)(5-i)^4$ *deduir la formula de Machin*[2]*:* $\pi/4 = 4\arctan(1/5) - \arctan(1/239)$. ◁

Exercici 1.5.4. *Estudiar la convergència de* $\{z_0^n\}$ *si* $|z_0| < 1$ *o si* $|z_0| > 1$. ◁

Exercici 1.5.5. *Digueu si les següents successions són convergents i en cas afirmatiu calculeu el seu límit:*

a) $z_n = \dfrac{i}{n}$; *c)* $z_n = \mathrm{Arg}(-1+i/n)$; *e)* $z_n = \left(\dfrac{1-i}{4}\right)^n$;

b) $z_n = i(-1)^n$; *d)* $z_n = \dfrac{n(2+i)}{n+1}$; *f)* $z_n = \exp\left(\dfrac{2n\pi i}{5}\right)$.

Aquí hem escrit $\exp(z) = e^z$.

1.6 Equacions amb exponencials

Exemple 1.49. Solucionem l'equació

$$e^z = 1, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Tenim

$$1 = e^z = e^x\, e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Com que $|e^{iy}| = 1$, igualant mòduls i arguments obtenim

$$1 = |e^z| = e^x \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \cos y = 1 \\ \sin y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Per tant,

$$e^z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2k\pi i; \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

◊

Moltes de les equacions "exponencials"es redueixen a l'anterior. Per exemple

$$e^z = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad e^{z-i\frac{\pi}{2}} = 1.$$

[2] John Machin (1706), podeu trobar més informació a https://en.wikipedia.org/wiki/Machin-like_formula.

Exemple 1.50. Recordem que donats $z, w \in \mathbb{C}$, per la proposició 1.44 tenim l'equivalència

$$e^z = e^w \iff z = w + 2k\pi i \text{ per algun } k \in \mathbb{Z}.$$

Sabent que $1 = e^0$, podem dir directament que

$$e^z = e^0 \iff z = 0 + 2k\pi i,$$

tal i com hem vist pas a pas en l'exemple anterior. $\Diamond$

Exercici 1.6.1.
Resoleu les següents equacions:

a) $e^z = 1 + i$ *b)* $e^{z^2} = i$ *c)* $e^{iz} = -1.$ $\triangleleft$

1.7 Arrels n-èssimes

Sigui $a \in \mathbb{C}$ amb $a \neq 0$. Per $n \in \mathbb{N}$, calculem els nombres complexos $z \in \mathbb{C}$ de manera que

$$z^n = a.$$

(Aquí no és convenient passar a notació real i fer $(x + iy)^n = a$). Posem $z = re^{i\theta}$ amb $-\pi < \theta \leqslant \pi$. Llavors

$$r^n e^{in\theta} = |a| e^{i \operatorname{Arg} a}.$$

Igualant mòduls obtenim $r^n = |a| \Rightarrow r = \sqrt[n]{|a|}$. També

$$e^{in\theta} = e^{i \operatorname{Arg} a} \Leftrightarrow e^{i(n\theta - \operatorname{Arg} a)} = 1 \quad \Rightarrow \quad n\theta - \operatorname{Arg} a = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Per tant, les solucions de $z^n = a$ són

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} e^{i\theta_k}, \qquad \text{amb} \quad \theta_k = \frac{\operatorname{Arg} a}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Tenim n solucions (amb $k \geqslant n$ dóna solucions repetides).

Exemple 1.51. $\sqrt[4]{i} \to e^{i\pi/8}, e^{i5\pi/8}, e^{i9\pi/8}, e^{i\,13\pi/8}$. Els quatre resultats satisfan que

$$z^4 = i. \qquad \Diamond$$

Exercici 1.7.1. *Calculeu:*

a) $\sqrt[3]{-1}$ *b)* $3^{1/4}$ *c)* $\sqrt[4]{-i}$ *d)* $(-1+\sqrt{3}i)^{1/2}$ *e)* $(3+4i)^{\frac{1}{2}}$ $\triangleleft$

Exercici 1.7.2. *Donat $a \in \mathbb{C}$, quin és el màxim de $|z^n + a|$ per a $|z| \leqslant 1$?* $\triangleleft$

1.8 Polinomis: enunciat del teorema fonamental de l'àlgebra

Per acabar aquest capítol, comentem un dels principals motius que fa dels complexos una eina imprescindible: tot polinomi de coeficients reals o complexos té sempre almenys una arrel complexa, i per tant, el grau del polinomi coincideix amb el seu nombre d'arrels comptant multiplicitats.

Acabem de comprovar que hi ha nombres complexos que són solució de certs polinomis. Per exemple, si $0 \leqslant k < n$, aleshores els nombres

$$e^{\frac{i2k\pi}{n}}$$

són tots diferents i satisfan que

$$z^n = 1.$$

Hem trobat doncs n arrels diferents del polinomi $z^n - 1$, que anomenem arrels n-èsimes de la unitat.

En general, tot polinomi de grau n amb coeficients complexos $p \in \mathbb{C}[x]$, és a dir

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,$$

on $a_k \in \mathbb{C}$ i $a_n \neq 0$ té exactament n arrels *comptant multiplicitats*. Dit d'una altra manera, existeixen n nombres $\{a_k\}_{k=0}^{n-1} \subset \mathbb{C}$ (possiblement coincidents) de manera que

$$p(z) = a_n \prod_{k=0}^{n-1} (z - a_k).$$

Diem que a és una arrel de multiplicitat j si existeixen exactament arrels $k_1, \ldots, k_j$ tals que $a = a_{k_i}$. Per exemple,

$$z^4 + 2z^2 + 1 = (z^2 + 1)^2 = (z + i)^2 (z - i)^2,$$

té dues arrels dobles, que són $\pm i$. Aquest resultat es coneix com a *Teorema fonamental de l'àlgebra*, vegeu el teorema 5.30.

Notem també que el resultat aplica a polinomis de coeficients reals, $p \in \mathbb{R}[x]$: tot polinomi de grau n amb coeficients reals té n arrels complexes comptant multiplicitats. A més, com que $\overline{a_k} = a_k$, trobem que

$$p(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \overline{p(z)}.$$

Per tant, si $a \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ és una arrel de p, el seu conjugat també ho és:

$$p(\overline{a}) = \overline{p(a)} = \overline{0} = 0.$$

Treballant una mica es pot deduir que la multiplicitat d'a i la del seu conjugat coincideixen. Per tant, tot polinomi de grau n amb coeficients reals té j arrels de part imaginària positiva a_k, en té j amb part imaginària negativa $\overline{a_k}$ i $n-2j$ arrels reals b_k, de manera que

$$p(z) = a_n \prod_{k=0}^{j} (z-a_k)(z-\overline{a_k}) \prod_{k=0}^{n-2j} (z-b_k) = a_n \prod_{k=0}^{j} (z^2 - (a_k + \overline{a_k})z + a_k\overline{a_k}) \prod_{k=0}^{n-2j} (z-b_k),$$

és a dir

$$p(z) = a_n \prod_{k=0}^{j} (z^2 - 2\mathrm{Re}\,(a_k)z + |a_k|^2) \prod_{k=0}^{n-2j} (z-b_k).$$

En la darrera expressió, hem trobat una factorització amb coeficients reals, on tots els factors són de grau 1 o 2.

Exercici 1.8.1. *Resoleu* $(z+1)^5 = z^5$. ◁

Exercici 1.8.2. *Sigui* $P(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$*. Considerant el polinomi* $(1-z)P(z)$*, demostreu que tots les zeros de* $P(z)$ *estan dins del disc unitat.* ◁

2 Funcions de variable complexa

En aquest capítol introduïm els conceptes de funció de variable complexa (i parlarem de com representar aquestes funcions) i de funció multivaluada. Treballarem les determinacions contínues d'aquestes funcions multivaluades, centrant-nos en arguments, logaritmes i arrels.

2.1 Funcions

Recordem diversos conceptes:

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ és obert si $\forall a \in \Omega$ hi ha $r > 0$ amb $D_r(a) \subset \Omega$, on $D_r(a)$ denota el disc obert

$$D_r(a) = \big\{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\big\}.$$

- F és tancat $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}\backslash F$ és obert $\Leftrightarrow$ F és tancat per successions (és a dir, si $z_n \in F$ amb $z_n \to z$, aleshores $z \in F$).

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert. Una funció de variable complexa és

$$f : \Omega \to \mathbb{C}.$$

Podem posar $f(z) = u(z) + iv(z)$, on denotem

$$u = \operatorname{Re} f; \qquad v = \operatorname{Im} f.$$

Donat $z \in \Omega$ i $w \in \mathbb{C}$ tals que $w = f(z)$, aleshores diem que w és la imatge de z per f. El conjunt Ω és el *domini de definició* de f. Si $B \subset \Omega$, $f(B) \subset \mathbb{C}$ és la seva imatge, és a dir

$$f(B) = \{w \in \mathbb{C} : \exists z \in B \text{ tal que } f(z) = w\}.$$

Si prenem $B = \Omega$, diem que $f(\Omega)$ és el *rang* o *recorregut* de f.

Exemple 2.1. Si $f(z) = iz$ amb domini $\mathbb{C}$, la imatge de $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ és $f(B) = i\mathbb{R} = \{iy : y \in \mathbb{R}\}$. En general, f actua com una rotació de 90° al voltant de l'origen en sentit antihorari. $\diamondsuit$

Definició 2.2 (Límit d'una funció en un punt)**.** Diem que $\lim_{z\to a} f(z) = \ell$ si i només si $\forall \varepsilon > 0$ hi ha $\delta > 0$ (que pot dependre de a) de manera que per a tot $z \in \Omega$, $0 < |z-a| < \delta$, $|f(z) - \ell| < \varepsilon$. $\bullet$

Definició 2.3 (Continuïtat)**.** Una funció $f : \Omega \to \mathbb{C}$ és *contínua* en Ω si és contínua en tot punt $a \in \Omega$.

$$f \text{ és contínua en } a \iff \lim_{z\to a} f(z) = f(a).$$

Es compleix que f és contínua en a si i només si $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f$ són contínues en a, i també si i només si, per a tota successió $\{z_n\}$ amb $z_n \to a$ se satisfà que $f(z_n) \to \ell$. •

Exemple 2.4. Els polinomis en z i $\overline{z}$ són continus. També e^z és contínua en tot punt de $\mathbb{C}$. ◊

Advertència 2.5. $\operatorname{Arg} z$ és contínua en $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ i NO és contínua en $(-\infty, 0]$.

En efecte, si ens acostem a la semirecta $(-\infty, 0)$ per dalt, llavors $\operatorname{Arg} z \to \pi$, en canvi si ens acostem per baix, tendeix a $-\pi$, amb el que si $a \in (-\infty, 0)$, llavors

$$\text{no existeix} \quad \lim_{z\to a} \operatorname{Arg} z.$$

•

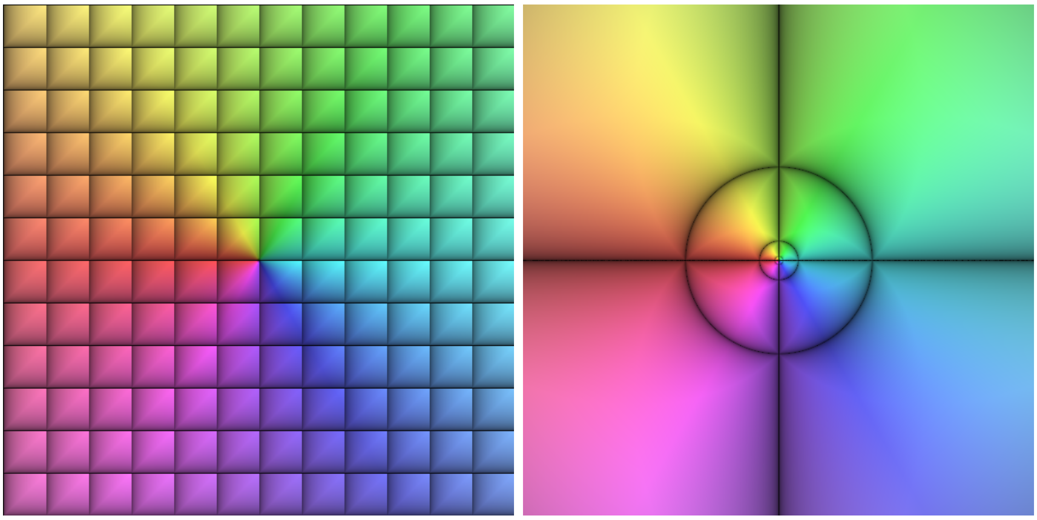


Figura 2.1: A l'esquerra, una coloració del pla complex amb la graella de coordenades enteres, mentre que a la dreta, la graella marca els cercles de mòdul e^k, $k \in \mathbb{Z}$, i els eixos real i imaginari. Per la coloració, s'escull el color en funció de l'angle i la saturació en funció del logaritme del mòdul (empalideix amb mòduls grans). Dibuixem des de $-6-6i$ fins a $6+6i$.

Comentari 2.6 (Dibuixar una funció complexa)**.** Recordem que per dibuixar una funció, entenem representar el conjunt

$$\operatorname{graf} f := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : f(z) = w\}.$$

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es pot fer en el pla, però per una funció complexa necessitem quatre dimensions reals per fer aquesta representació. Difícilment podem arreglar-ho amb una bona perspectiva com solem fer amb les funcions de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Coses que podem fer:

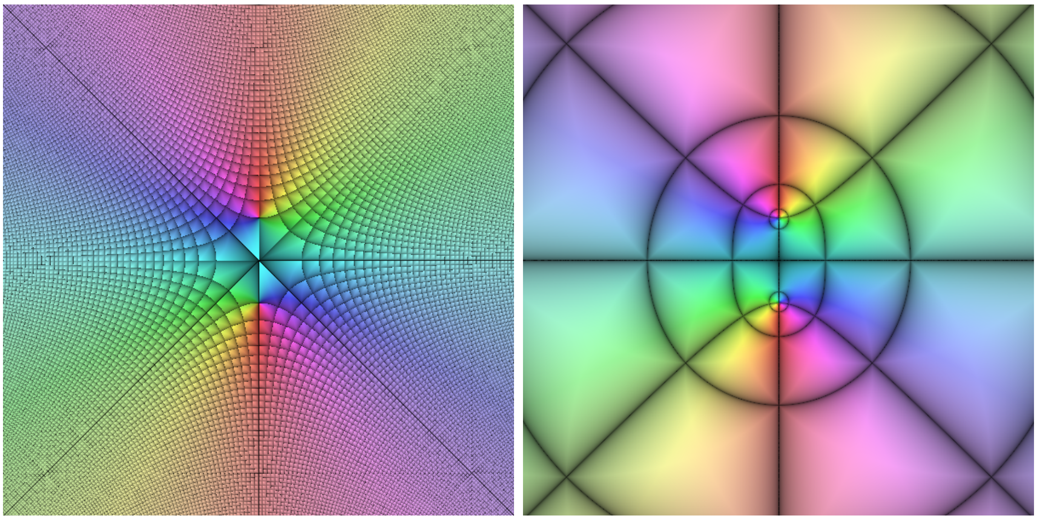


Figura 2.2: Dibuixem la funció $f(z) = z^2 + 1$ en el mateix domini que abans (des de $-6 - 6i$ fins a $6 + 6i$). Notem que a $\pm i$, la funció val zero. A l'esquerra la graella correspon als punts d'imatge amb una coordenada entera, a la dreta als d'imatge en els eixos o bé en els cercles de radi e^k, vegeu figura 2.1.

- Estudiar la imatge de conjunts especials $\{x = c\}$, $\{y = c\}$, $\{r = c\}$ o $\{\theta = c\}$.
- Dibuixar $(x, y) \mapsto |f(x, y)|$ i $(x, y) \mapsto \operatorname{Arg}(f(x, y))$, o bé $(x, y) \mapsto \operatorname{Re} f(x, y)$ i $(x, y) \mapsto \operatorname{Im} f(x, y)$.
- Fer un gràfic de colors (`complex_plot`). Es tracta d'assignar un color a cada pixel w i aleshores pintem el punt z en funció del color de $w = f(z)$, vegeu la figura 2.2.

•

Exemple 2.7 (La funció exponencial)**.** Comencem amb les imatges de rectes verticals: Sabem que a $\mathbb{C}$, la funció exponencial complexa és $2\pi i$-periòdica. Per tant, el que passi en una banda horitzontal d'amplada 2π, passa en qualsevol altra.

Donat que per la formula d'Euler, $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, es compleix que si y varia de 0 a 2π, e^{iy} dona una volta al cercle unitat $\mathbb{T}$. Per tant, la imatge de tot segment vertical de longitud 2π i part real x_0 es transforma en un cercle al voltat del zero de radi e^x.

Anem a veure en que es transformen les rectes horitzontals. Recordem que l'exponencial real envia homeomòrficament $\mathbb{R}$ en la semirecta $(0, \infty)$. Per tant, si fixem $y_0 \in \mathbb{R}$ i considerem els punts de la forma $z = x + iy_0$, amb $x \in \mathbb{R}$, es compleix que els punts $e^z = e^x e^{iy_0}$ cobreixen la semirecta $\{e^x e^{iy_0};\, x \in \mathbb{R}\}$. Vegeu la figura 2.3.

$\Diamond$

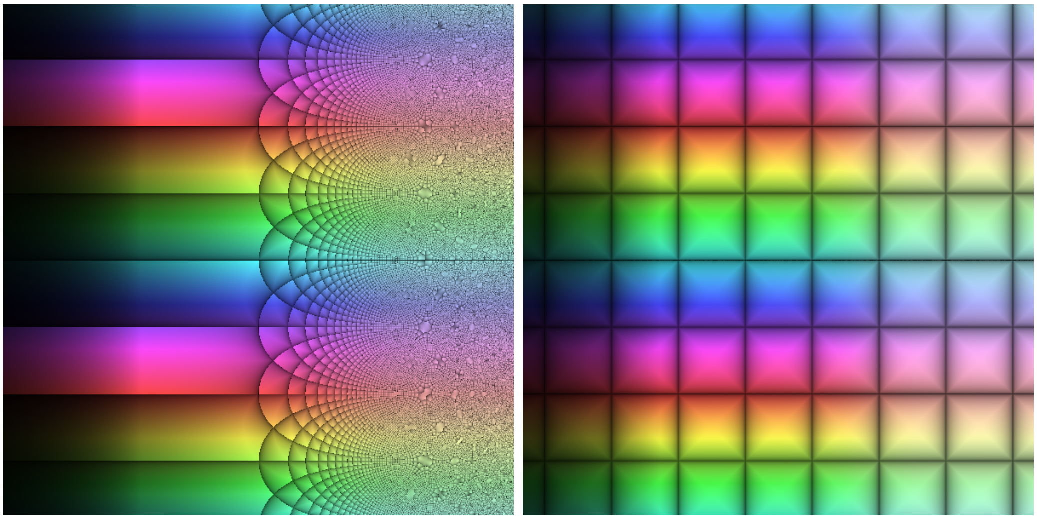


Figura 2.3: Representacions de la funció exponencial en coordenades cartesianes i polars. Notem que té període $2k\pi i$.

Comentari 2.8 (Potències)**.** Les potències d'exponent natural són funcions n a 1, és a dir que cada imatge té n pre-imatges (llevat de l'origen). La funció z^3, per exemple, Fa que els mòduls menors a u decreixin, els majors a u creixin i la imatge d'una circumferència centrada a l'origen dona tres voltes entorn de l'origen, vegeu la figura 7.1. •

Exercici 2.1.1. *Escriure les següents funcions de la forma* $u(x, y) + iv(x, y)$.

a) $f(z) = 1/z$, *b)* $g(z) = \dfrac{2z^2 + 3}{|z - 1|}$, *c)* $h(z) = e^z + e^{-z}$. ◁

Exercici 2.1.2. *Trobeu el rang de*

a) $f(z) = z^2$ *si* z *està en el primer quadrant,*

b) $g(z) = 1/z$ *per* $0 < |z| \leqslant 1$,

c) $h(z) = -2z^3$ *per* z *tal que* $|z| < 1$ *i* $\operatorname{Arg} z < \pi/2$. ◁

Exercici 2.1.3. *Digueu on són contínues les següents funcions*

a) $\dfrac{1}{z - 2 + 3i}$,

b) $\dfrac{iz^3 + 2z}{z^2 + 1}$,

c) $\dfrac{3z - 1}{z^2 + z + 4}$,

d) $z^2(2z^2 - 3z + 1)^{-2}$. ◁

Exercici 2.1.4. *Proveu que la inversió* $w = f(z) = 1/z$ *transforma*

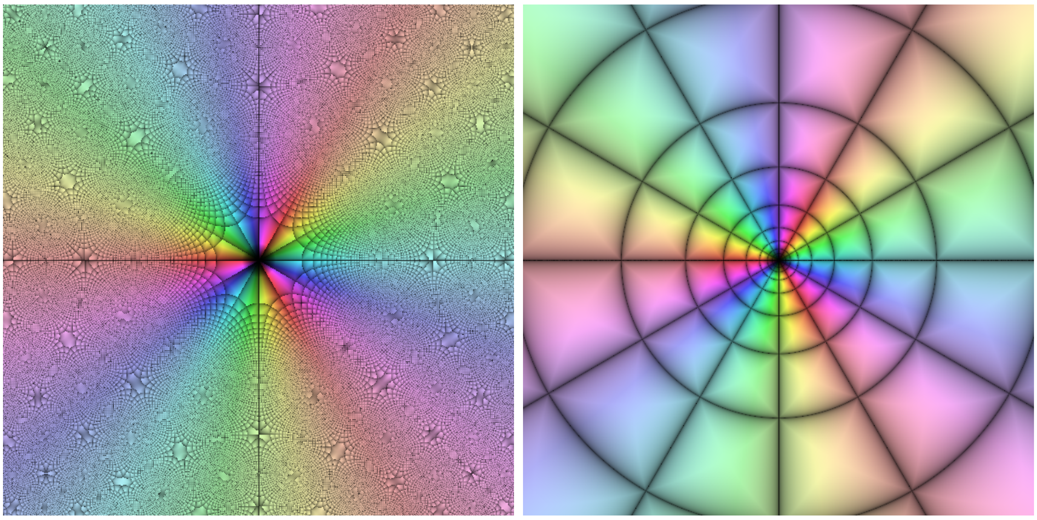


Figura 2.4: Representem el polinomi z^3. Notem que si $w \neq 0$, aleshores té tres arrels cúbiques, que són els vèrtexs d'un triangle equilàter centrat a l'origen.

a) el cercle $|z| = r$ *en el cercle* $|w| = 1/r$,

b) el raig $\mathrm{Arg} z = \theta_0, -\pi < \theta_0 < \pi$, *en el raig* $\mathrm{Arg} w = -\theta_0$,

c) el cercle $|z - 1| = 1$ *a la línia vertical* $x = 1/2$. ◁

Exercici 2.1.5. *Trobeu una funció lineal entera que transformi el cercle* $|z| < 1$ *en el cercle* $|w - w_0| < R$ *de manera que els centres es corresponguin i el diàmetre horitzontal es tranformi en el diàmetre que forma un angle* α *amb l'eix real.* ◁

Exercici 2.1.6. *Per l'exponencial* $f(z) = e^z$:

a) Descriviu-ne el domini i el rang,

b) Proveu que $f(-z) = 1/f(z)$.

c) Descriviu la imatge de $\mathrm{Re}\, z = 1$.

d) Descriviu la imatge de $\mathrm{Im}\, z = \pi/4$.

e) Descriviu la imatge de la banda $0 \leqslant \mathrm{Im}\, z \leqslant \pi/4$. ◁

Exercici 2.1.7. *L'aplicació de Joukowski és* $w = J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. *Proveu que*

a) $J(z) = J(1/z)$.

b) J *porta el cercle unitat* $|z| = 1$ *a l'interval real* $[-1, 1]$.

c) *J porta el cercle* $|z| = r$ $(r > 0, \neq 1)$ *a l'el·lipse* $\dfrac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\right]^2} + \dfrac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\right]^2} = 1$ *que té els focus a* ± 1. ◁

Exercici 2.1.8. *Fent servir la comanda* `contour_plot` *de* Sage *dibuixeu les corbes de nivell de* u *i* v *si* $f = u + iv$ *és*

a) z

b) z^2

c) $\log(z)$

d) $\sin(z)$

e) $1/z$

f) $1/z^2$

g) e^z

h) $\dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z+1}$

i) $\log(z-1) + \log(z+1)$ ◁

2.2 Funcions multivaluades

Ja hem vist que hi ha funcions com ara l'argument que prenen múltiples valors:

$$\arg(i) = \left\{\cdots, \frac{-3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \cdots\right\} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

També és el cas de les arrels n-èsimes:

$$\sqrt[n]{z} = \left\{|z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg z}{n}}\right\} = \left\{|z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}} : k \in \{0, \cdots, n-1\}\right\}.$$

Definició 2.9. Donada una funció multivaluada en A, diem que una funció $f : B \to \mathbb{C}$ n'és una *branca contínua* en $B \subset A$ si $f(z)$ és una elecció d'entre les diferents opcions de manera que aquesta elecció sigui contínua en B.

Per exemple, si $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, aleshores la funció argument principal $\operatorname{Arg} z$ és una branca contínua de l'argument en A. Qualsevol altra branca de l'argument $f : A \to \mathbb{C}$ que escollim consistirà en fixar un $k \in \mathbb{Z}$ i tindrem $f(z) = \operatorname{Arg} z + 2k\pi$.

En canvi, si prenem $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$, aleshores l'argument principal no és una branca contínua, ja que tindrem una discontinuïtat al llarg de la semirecta $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$.

2.3 Logaritmes i arguments

Si $x \in \mathbb{R}$ i $y > 0$, sabem que $e^x = y$ si i només si $x = \ln y$. Volem estudiar aquesta equació en $\mathbb{C}$. Ja sabem que l'exponencial complexa és periòdica i per tant, no injectiva, doncs $e^{z+2k\pi i} = e^z$, per a tot $k \in \mathbb{Z}$, vegeu la proposició 1.44.

Definició 2.10. Un *logaritme* de z és un nombre $w \in \mathbb{C}$ amb $e^w = z$. Escrivim $\log z$ per anomenar el conjunt de tots els $w \in \mathbb{C}$ amb $e^w = z$. •

Com hem vist a la proposició 1.44, el logaritme és doncs

$$w = \log z = \operatorname{Log} z + 2k\pi i = \ln|z| + i\operatorname{Arg}z + 2k\pi i = \ln|z| + i\arg z; \qquad k \in \mathbb{Z},$$

En particular, a diferència del que passa a $\mathbb{R}$, hi ha infinits logaritmes. Per distingir-los, escriurem "ln" pel logaritme neperià definit a la recta real, i "log" per la funció multivaluada del pla complex.

Exemples 2.11. 1. $\log 1 = \ln|1| + i0 + 2\pi ki = 2\pi ki; \quad k \in \mathbb{Z}.$

2. $\log(-1) = \ln 1 + i\pi + 2\pi ki; \quad k \in \mathbb{Z}.$

$\lozenge$

Si fixem una branca de l'argument, llavors també ens dóna una branca del logaritme.

Definició 2.12. Anomenem *Logaritme Principal* a l'elecció

$$\operatorname{Log}z = \ln|z| + i\operatorname{Arg}z.$$

Per tant $\operatorname{Log} : \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow \{-\pi < \operatorname{Im} z \leqslant \pi\}$. •

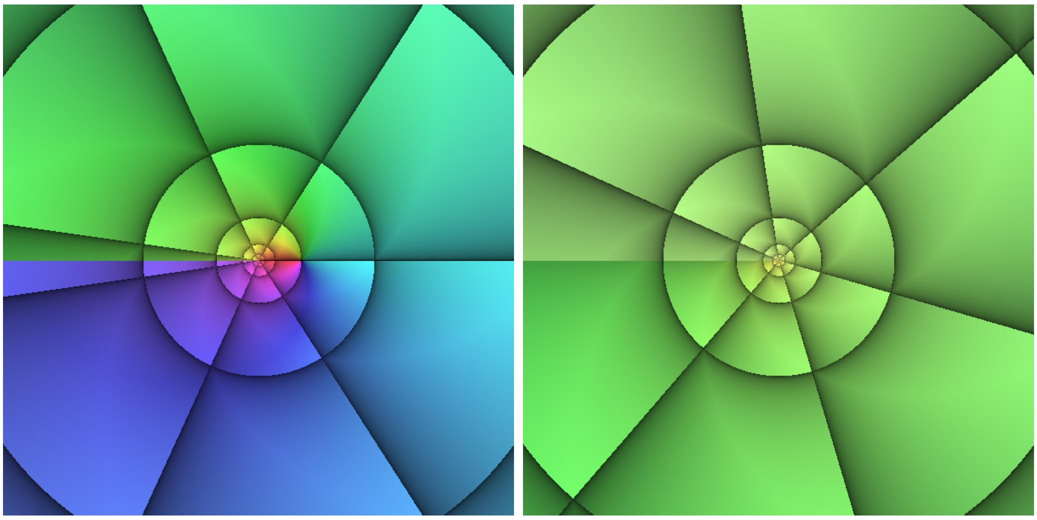


Figura 2.5: A l'esquerra, la funció logaritme principal Log en el domini $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$. A la dreta la branca $\log = \operatorname{Log} + 2\pi i$ en el mateix domini. Totes dues representacions amb la graella cartesiana de la imatge. Observem com les circumferències centrades a l'origen es transformen en rectes verticals. Veiem també com, en el logaritme principal, a l'arribar als reals negatius des del segon quadrant, trobem una discontinuïtat que es podria evitar prenent la determinació del logaritme representada a la dreta (pagant el preu de trobar la discontinuïtat més endavant).

Exemple 2.13. $\mathrm{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i\mathrm{Arg}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\dfrac{\pi}{4}$.

Els altres logaritmes serien $\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i$. $\Diamond$

Com que l'argument principal Arg z és continu en $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$, deduïm que Log z és contínua en $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$. De fet, tenim el següent resultat:

Proposició 2.14. *Existeix una branca contínua de l'argument de z en $\mathbb{C}\backslash r$, on r és qualsevol semirecta de $\mathbb{C}$ amb extrem en el 0.*

Per tant, també hi ha una branca contínua del logaritme de z en $\mathbb{C}\backslash r$.

Demostració. Posem
$$r = \{Re^{i\theta} : 0 \leqslant R < \infty\}.$$
Escollim $\arg z$ la branca de l'argument de z que pren valors en $(\theta, \theta + 2\pi)$, i passem a veure que és contínua. Siguin $z_n, z_0 \in \mathbb{C}\backslash r$ amb $z_n \to z_0$. Volem veure que $\arg z_n \to \arg z_0$. Suposem el contrari. Llavors, substituint, si és necessari la succesió (z_n) per una parcial, podem suposar que existeix $\varepsilon > 0$ i per a tot $n \geqslant 0$, $|\arg z_n - \arg z_0| > \varepsilon$. Donat que la funció $\arg z$ pren valors en un interval fitat, aplicant el teorema de Bolzano-Weierstrass, podem trobar una parcial convergent. És a dir, hi ha z_{n_k} amb
$$\arg z_{n_k} \to \alpha \neq \arg z_0; \qquad \alpha \in [\theta, \theta + 2\pi].$$
($\alpha \neq \arg z_0$, doncs per a tot $n \geqslant 0$, $|\arg z_n - \arg z_0| > \varepsilon$).

Com que l'exponencial és contínua, $e^{i \arg z_{n_k}} \to e^{i\alpha}$, però també
$$e^{i \arg z_{n_k}} = \frac{z_{n_k}}{|z_{n_k}|} \to \frac{z_0}{|z_0|} = e^{i \arg z_0}.$$
Per tant
$$e^{i\alpha} = e^{i \arg z_0} \quad \Rightarrow \quad \alpha - \arg z_0 = 2k\pi$$
per algun $k \in \mathbb{Z}$, i això és absurd (l'única possibilitat és $k = 0$ i estem suposant que $\alpha \neq \arg z_0$). $\square$

Proposició 2.15. *No hi ha cap branca contínua de l'argument de z en $\mathbb{S}^1$.*

Demostració. Suposem que n'hi ha una de contínua, diem-li $h(z)$. Com que $|z| = 1$, tenim que si $z = e^{i\theta}$,
$$e^{ih(z)} = \frac{z}{|z|} = z = e^{i\theta} \Rightarrow \exists k_\theta \in \mathbb{Z} \,:\, h(e^{i\theta}) = \theta + 2k_\theta\pi.$$
Aleshores $k_\theta = (h(e^{i\theta}) - \theta)/2\pi$ és una funció contínua que pren valors enters, i per tant és constant. És a dir, $k_\theta = k$. Llavors
$$2k\pi = h(e^{i0}) = h(1) = h(e^{i2\pi}) = 2\pi + 2k\pi,$$
fet absurd. $\square$

Notació 2.16. Més endavant farem servir la notació determinació $\equiv$ branca contínua. •

Observació 2.17 (Propietats del logaritme)**.** (i) $e^{\log z} = z$ per a tota branca de $\log z$. Ara bé, $\log(e^z) = z$ no és cert en general, donat que per a $k \in \mathbb{Z}$, $e^z = e^{z+2k\pi i}$.

(ii) Per $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, com a conjunts de números, tenim

$$\log(z_1\, z_2) = \log z_1 + \log z_2.$$

Ara bé, fixada una branca $\mathcal{L}(z)$ del logaritme de z, pot passar que $\mathcal{L}(z_1 z_2) \neq \mathcal{L}(z_1) + \mathcal{L}(z_2)$ ja que la suma de dos arguments potser no pertany a la mateixa branca. •

Exemple 2.18. Considerem els punts $-1-i$, $1-i$. Llavors

$$\mathrm{Log}\,((-1-i)(1-i)) = \mathrm{Log}(-2) = \ln 2 + i\mathrm{Arg}(-2) = \ln 2 + \pi i.$$

Per altra banda,

$$\mathrm{Log}\,(-1-i) + \mathrm{Log}\,(1-i) = (\ln\sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}i) + (\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}i) = \ln 2 - \pi i.$$

◊

Definició 2.19 (Potències complexes)**.** Sigui $z \in \mathbb{C}$ amb $z \neq 0$ i $a \in \mathbb{C}$. Sabem que $z = e^{\mathcal{L}z}$ per a qualsevol branca del logaritme $\mathcal{L}$ i per tant, per a $n \in \mathbb{Z}$, $z^n = (e^{\mathcal{L}z})^n = e^{n\mathcal{L}z}$.
Llavors definim

$$z^a := e^{a\log z} = e^{a(\ln|z| + i\arg z)}.$$

•

Advertència 2.20. L'anterior definició no l'aplicarem mai quan a la base escrivim el nombre e: sempre parlem de

$$e^a = e^{\mathrm{Re}\,a}e^{i\mathrm{Im}\,a}$$

i no de

$$e^a \neq e^{a\log e} = e^{a(1+2k\pi i)},$$

la desigualtat sent certa sempre que $a \notin \mathbb{Z}$. Notem que aquesta definició seria, en el fons, circular! •

A priori, la potència z^a pren infinits valors com $\arg z$. Per exemple, donat que $\log i = \log 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$,

$$i^i = e^{i\log i} = e^{i(i(\frac{\pi}{2}+2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}; \qquad k \in \mathbb{Z},$$

que pren infinits valors reals.

Hi ha casos en què pren un nombre finit de valors, com $i^{1/4}$ que pren 4 valors.

Observació 2.21. De fet es pot comprovar que si $z, a \in \mathbb{C}$ i $z \neq 0$,

- Si $a \in \mathbb{Q}$ aleshores $z^a = e^{a\mathrm{Log}\,z}e^{2k\pi i a}$ pren un nombre finit de valors.

- El valor és únic si i només si $a \in \mathbb{Z}$ (és dir, no depèn de la branca del logaritme escollit). En aquest cas tenim una potència natural de z o de z^{-1}.
- Si $a = p/q \in \mathbb{Q}$, amb $q > 0$ i $\operatorname{mcd}(p, q) = 1$, aleshores $z^{p/q}$ pren exactament q valors.
- Si a no és racional, z^a té infinits valors que difereixen en un factor $e^{2\pi i k a}$. •

Observació 2.22. Comparem $z^a z^b$ amb z^{a+b}.

- $z^a z^b = e^{(a+b)\operatorname{Log} z + 2\pi i(ka+jb)}$, on $k, j \in \mathbb{Z}$.
- $z^{a+b} = e^{(a+b)\operatorname{Log} z + 2\pi i m(a+b)}$, on $m \in \mathbb{Z}$.

Per tant, com a conjunts, $z^{a+b} \subset z^a z^b$.
Anàlogament tenim $z^{ab} \subset (z^a)^b$. •

Exercici 2.3.1. *Doneu exemples que mostrin la falsedat de la igualtat* $\operatorname{Log}(a \cdot b) = \operatorname{Log} a + \operatorname{Log} b$. *(Per exemple, $a = b = -1 - i$).* ◁

Exercici 2.3.2. *Trobeu l'error en el següent raonament de Bernoulli:* $(-z)^2 = z^2$*, llavors* $2\log(-z) = 2\log z$*. Per tant,* $\log(-z) = \log(z)$. ◁

Exercici 2.3.3. *Calculeu els possibles valors de*

a) $\log(1)$ *c)* $\log(1+i)$ *e)* $\log(1 - i\sqrt{3})$ *g)* 2^{-i}

b) $\log(-1)$ *d)* i^i *f)* $(\sqrt{3}+i)^{1-i}$ *h)* $\log(i)$ ◁

Exercici 2.3.4. *Escrivim* $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ *i* $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$*. Resoleu les equacions*

a) $e^z = 2i$; *c)* $e^{2z} + e^z + 1 = 0$; *e)* $\cos z = \sin z$.

b) $\operatorname{Log}(z^2 - 1) = i\pi/2$; *d)* $\cos z = 2i$;

Exercici 2.3.5. *Una branca de l'argument $\mathcal{A}(z)$ (o del logaritme $\mathcal{L}(z)$) queda fixada si donem i) el domini Ω on està definida ii) el valor de $\mathcal{A}(z)$ (o de $\mathcal{L}(z)$) d'un punt de Ω. Considereu els dominis:*

$$\Omega_1 = \mathbb{C}\setminus\{re^{i\pi},\ r \geqslant 0\}; \qquad \Omega_2 = \mathbb{C}\setminus\left\{re^{i\pi/4},\ r \geqslant 0\right\}$$

$$\Omega_3 = \mathbb{C}\setminus(\{x \in [-1,0]\} \cup \{-1 + iy,\ y \in [0, 1.5]\} \cup \{x + 1.5i,\ x \in [-1, \infty)\}).$$

Completeu la següent taula.

	Ω_1	Ω_2	Ω_3
$\mathcal{A}(1) = 0$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$ $\mathcal{L}(2i) =$
$\mathcal{A}(1) = -2\pi$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$	$\mathcal{A}(i) =$ $\mathcal{L}(i) =$ $\mathcal{L}(2i) =$
$\mathcal{A}(i) = -\frac{3\pi}{2}$	$\mathcal{A}(1) =$ $\mathcal{L}(1) =$	$\mathcal{A}(1) =$ $\mathcal{L}(1) =$	$\mathcal{A}(1) =$ $\mathcal{L}(1) =$ $\mathcal{L}(2i) =$

◁

Exercici 2.3.6. *Sigui $\mathcal{L}$ una determinació del logaritme en $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ tal que $\mathcal{L}(1) = 2\pi i$. Proveu que la funció $f(z) = \mathcal{L}(z+3)$ és holomorfa en*

$$D := \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\,(z) > -3\}\,.$$

Quant val $f(3i)$? ◁

Exercici 2.3.7. *Estudieu si existeix alguna determinació del logaritme en els conjunts següents i determineu els possibles conjunts imatge:*

a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\ z > 0\}$. *b)* $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\ z > \mathrm{Im}\ z\}$. *c)* $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$. ◁

Exercici 2.3.8. *Determinar explícitament la inversa de $q(z) = 2e^z + e^{2z}$ en funció de logaritmes. Resoldre $q(z) = 3$, trobant totes les solucions.*

Exercici 2.3.9. *Siguin $h_0(z), h_1(z)$ i $h_2(z)$ les determinacions de l'arrel cúbica en $\Omega = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ tal que $h_0(1) = 1$, $h_1(1) = e^{2\pi i/3}$ i $h_2(1) = e^{4\pi i/3}$.*

i) *Descriviu $h_j(\Omega)$ per $j = 0, 1, 2$.*

ii) *Per $j = 0, 1, 2$ relacioneu h_j amb* Log *i* Arg *(on* Log *i* Arg *denoten les branques principals del logaritme i de l'argument respectivament).*

iii) *Usant les relacions anterior, trobeu el valor de $h_j(i)$, per $j = 0, 1, 2$.* ◁

2.4 Determinacions de logaritmes i arrels de funcions

Recordem que $\mathcal{L}$ és una branca o determinació del logaritme de z en Ω si $\mathcal{L}$ és contínua en Ω i

$$e^{\mathcal{L}(z)} = z \qquad \forall z \in \Omega.$$

Definició 2.23. Sigui X espai mètric (normalment $X = \Omega \subset \mathbb{C}$ obert o $X = [a,b]$ un interval). Sigui $f : X \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ contínua. Una *determinació del logaritme de f en Ω* és una funció $\mathcal{L}_f : X \to \mathbb{C}$ contínua tal que

$$e^{\mathcal{L}_f(x)} = f(x) \qquad \forall x \in X.$$

•

Com sempre, està relacionat amb l'argument.

Definició 2.24. Diem que $\mathcal{A}_f$ és una determinació de l'argument de f en X si $\mathcal{A}_f$ és contínua en X i

$$f(x) = |f(x)|\, e^{i\mathcal{A}_f(x)} \qquad \forall x \in \Omega.$$

•

Observació 2.25. Si tenim una determinació $\mathcal{A}_f$ de l'argument de f, llavors també tenim una determinació del logaritme de f definint

$$\mathcal{L}_f f(x) := \ln|f(x)| + i\mathcal{A}_f(x).$$

També, si $\mathcal{L}_f$ és una determinació del logaritme de f, llavors $\operatorname{Im}\mathcal{L}_f$ és una determinació de l'argument de f. Resumint, hi ha determinació del logaritme si i només si, hi ha determinació de l'argument. •

Exemple 2.26. Si $X = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ i $f(z) = z$, llavors no existeix cap determinació de $\log f(z) = \log z$ en X. (Varem veure que no hi ha cap argument continu en S^1). ◊

Exemple 2.27. Si $X = [0,1]$, llavors $\mathcal{L}_f(x) = 4\pi i x$ és una determinació de $\log f$ en $f(x) = e^{4\pi i x}$ (altres serien $i(4\pi x + 2k\pi)$). ◊

Definició 2.28. Diem que $\mathcal{S}_f$ és una determinació de l'arrel n-èssima de f en X, $\sqrt[n]{f}$, si $\mathcal{S}_f$ és contínua en X i

$$\mathcal{S}_f(x)^n = f(x) \qquad \forall x \in X.$$

•

Observació 2.29. (i) Si hi ha una determinació $\mathcal{L}_f$ del logaritme de f, aleshores hi ha determinació de $\sqrt[n]{f}$.

Simplement definim $\mathcal{S}_f(x) = e^{\frac{1}{n}\mathcal{L}_f(x)}$.

(ii) Pot existir una determinació de l'arrel n-èssima $\sqrt[n]{f}$, encara que no n'hi hagi cap del logaritme.

Per exemple, sigui $f(z) = z^n$ per $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} := \Omega$. La funció $\mathcal{S}(z) = z$ és una determinació de $\sqrt[n]{f}$ en Ω (doncs $\mathcal{S}(z)^n = f(z)$). Però la funció f no te determinació del logaritme en Ω. Suposem que existeix una determinació del logaritme de f, que anomenem $\mathcal{L}$.

Definim $\varphi(t) = e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$. Llavors $h_0(t) = 2\pi i n t$ i $h_1(t) = \mathcal{L}(\varphi(t))$ són determinacions del logaritme de la funció φ^n en $[0,1]$. En efecte,

$$e^{h_1(t)} = e^{\mathcal{L}(\varphi(t))} = e^{\mathcal{L}(e^{2\pi i t})} = (e^{2\pi i t})^n = (\varphi(t))^n,$$

i, per altra banda,

$$e^{h_0(t)} = e^{2\pi i n t} = \varphi(t)^n.$$

Per tant, per a tot $t \in [0,1]$, $e^{h_0(t)} = e^{h_1(t)}$, amb el que existeix $k \in \mathbb{Z}$ i $h_1 = h_0 + 2k\pi i$, vegeu la proposició 2.30.

A més a més, com que $\varphi(0) = e^{2\pi i 0} = e^{2\pi i} = \varphi(1)$, es compleix que

$$h_1(0) = \mathcal{L}(\varphi(0)) = \mathcal{L}(\varphi(1)) = h_1(1).$$

Però,

$$h_1(0) = h_0(0) + 2\pi i k = 2\pi i k \neq 2\pi i n + 2\pi i k = h_0(1) + 2\pi i k = h_1(1)!!$$

(iii) Si existeix una determinació $\mathcal{L}$ del logaritme de z en la imatge $f(\Omega)$, aleshores hi ha determinació del logaritme de f en Ω.

Simplement, definim $\mathcal{L}_f(z) = \mathcal{L}(f(z))$.

Ara bé, el reciproc no és cert. Pot existir determinació del logaritme de f en Ω, encara que no hi hagi cap logaritme continu de z en $f(\Omega)$. N'hi ha prou amb prendre $f(z) = e^z$, $\mathcal{L}_f(z) = z$, $\Omega = \mathbb{C}$, $f(\Omega) = \mathbb{C}^*$. •

Proposició 2.30. *Sigui X espai mètric* ***connex****, i $f : X \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ contínua. Si $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ són dues determinacions del logaritme de f en X, llavors*

$$\mathcal{L}_1(x) = \mathcal{L}_2(x) + 2\pi k i; \qquad x \in X$$

per un cert $k \in \mathbb{Z}$.

Demostració. Per $x \in X$, tenim

$$e^{\mathcal{L}_1(x)} = f(x) = e^{\mathcal{L}_2(x)} \quad \Rightarrow \quad \exists k_x \in \mathbb{Z} : \mathcal{L}_1(x) - \mathcal{L}_2(x) = 2k_x\pi\, i.$$

Com que $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ són continues en X, aleshores la funció $k : X \to \mathbb{Z}$ definida per

$$k(x) := k_x = \frac{\mathcal{L}_1(x) - \mathcal{L}_2(x)}{2\pi i}$$

és contínua en X. Com X és connex, llavors $k(X)$ és un connex de $\mathbb{Z}$, i per tant és un punt, amb el que $k(x) = k$ per a tot $x \in X$. $\square$

Exercici 2.4.1. *Siguin X un espai topològic connex. Demostreu que si $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ són dues determinacions de l'arrel n-èsima de $f : X \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ llavors existeix una arrel n-èsima de la unitat ζ tal que $\mathcal{S}_2(x) = \zeta \cdot \mathcal{S}_1(x)$, per a tot $x \in X$.* $\triangleleft$

Exercici 2.4.2. *Determineu els dominis de les funcions e^{z^2}, $e^{1/z}$, $1/e^z$, $1/(e^z - 1)$, de la branca principal de $\sqrt{1-z}$ i de la branca principal de $\sqrt{1+e^z}$.* $\triangleleft$

Exercici 2.4.3. *Donar una determinació de $f(z)$ que sigui contínua a la regió D donada.*

a) $f_1(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$,

b) $f_2(z) = (z^2 + 4)^{1/2}$, $D = \mathbb{C}\backslash\{iy \in \mathbb{C} : |y| < 2\}$,

c) $f_3(z) = (z^4 - 1)^{1/2}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$,

d) $f_4(z) = (z^3 - 1)^{1/3}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. $\triangleleft$

3 Sèries de potències

En aquest capítol treballarem amb les sèries de potències de nombres complexos. Veurem què és el radi de convergència i com calcular-lo i treballarem diferents tipus de convergència a l'interior del disc de convergència i a la frontera, concloent amb els criteris de Dirichlet i d'Abel.

3.1 Sèries de potències de nombres complexos

Una sèrie de potències de nombres complexos és una expressió de la forma

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-b)^n,$$

on $\{a_n\}$ és una successió de nombres complexos i $b \in \mathbb{C}$.

Per tal d'estudiar sèries de potències de nombres complexos, primer ens cal recordar diversos conceptes i resultats.

Definició 3.1 (Convergència Uniforme)**.** Diem que $f_n \to f$ uniformement en A si

$$\sup_{z\in A} |f_n(z) - f(z)| \to 0.$$

També, una sèrie de funcions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ convergeix uniformement en A si la successió $\sum_{k=0}^{n} f_k$ convergeix uniformement en A. •

Teorema 3.2 (Criteri M de Weierstrass)**.** *Si tenim una sèrie de funcions $\sum_n f_n$, on $f_n : A \to \mathbb{C}$, de manera que $|f_n(z)| \leqslant M_n$ per a tot $z \in A$, amb $\sum_n M_n < \infty$, aleshores la sèrie $\sum_n f_n$ és absoluta i uniformement convergent en A.*

Teorema 3.3 (Cauchy-Hadamard)**.** *Sigui $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-b)^n$ sèrie de potències de nombres complexos. Llavors existeix un únic $R \in [0, +\infty]$ de manera que*

(a) La sèrie convergeix absolutament per a tot $z \in \mathbb{C}$ amb $|z-b| < R$.

(b) Per $z \in \mathbb{C}$ amb $|z-b| > R$, la sèrie és divergent.

(c) Si $0 \leqslant r < R$, la sèrie convergeix absolutament i uniforme en $|z-b| \leqslant r$.

A més, es té

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

R s'anomena radi de convergència *de la sèrie de potències.*

Abans de demostrar el teorema, vegem alguns exemples.

Exemples 3.4. 1. El radi de convergència de la sèrie de potències $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ és $R=1$. Aquí aprofitem per recordar que, si $0<r<1$, llavors $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$. De la mateixa manera, també tenim

$$\sum_{n\geqslant 0} z^n = \frac{1}{1-z}, \qquad |z|<1.$$

Aquesta identitat és molt útil per calcular el valor de la suma d'algunes sèries de potències.

2. Calculem el radi de convergència de la sèrie de potències

$$\sum_{n\geqslant 0} 2^n z^n.$$

Tenim

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{2^n} = 2.$$

Per tant, el radi de convergència és $R=1/2$, amb el que la sèrie convergeix si $|z|<1/2$ i és divergent si $|z|>1/2$.

3. El radi de convergència de la sèrie de potències $\sum_{n\geqslant 1} n^n z^n$ és $R=0$.

◊

Prova del Teorema. Clarament (c) implica (a), amb el que només ens cal demostrar (c) i (b).

(c) Prenem ρ amb $|z-b|\leqslant r<\rho<R$. Llavors

$$\frac{1}{\rho} > \frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \inf_k \sup_{n\geqslant k} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Per tant, existeix un $k\in\mathbb{N}$ de manera que

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho}, \qquad n\geqslant k.$$

Per veure la convergència uniforme en $|z-b|\leqslant r$, aplicarem el criteri M de Weierstrass. Tenim

$$\left|a_n(z-b)^n\right| \leqslant \left(\frac{r}{\rho}\right)^n, \qquad |z-b|\leqslant r; \quad n\geqslant k$$

Com que $r/\rho<1$, la sèrie $\sum_n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ és convergent, amb el que pel criteri M de Weierstrass, la nostra sèrie de potències convergeix absoluta i uniformement en $|z-b|\leqslant r$.

(b) Sigui $z\in\mathbb{C}$ amb $|z-b|>R$. Prenem $\rho>R$ amb $|z-b|>\rho$. Tenim

$$\frac{1}{\rho} < \frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

De la definició de límit superior, veiem que hi ha infinits n_k de manera que $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1/\rho$. Aleshores

$$\left|a_{n_k}(z-b)^{n_k}\right| > \frac{|z-b|^{n_k}}{\rho^{n_k}} > 1,$$

amb el que la sèrie és divergent ja que el terme general no tendeix a zero. $\square$

Com veiem, el càlcul del radi de convergència R ens determina tota la regió de convergència de la sèrie (un disc obert de radi R, d'aquí que R s'anomeni radi de convergència), excepte els punts z amb $|z-b| = R$, és a dir, els punts de la frontera del disc de convergència. Per aquests punts, la sèrie tant pot ser convergent com divergent, i s'ha d'estudiar apart (ho farem més endavant).

Exercici 3.1.1. *Considereu la sèrie de potències $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-i)^n$. Digueu si són certes les següents afirmacions.*

a) $S(z)$ pot ser divergent en $z = 0$ i convergent en $z = -i$ simultàniament

b) $S(z)$ pot ser convergent en $z = 1+i$ i en $z = 2+i$ simultàniament

c) Si $S(z)$ és convergent en $z = 1+i$, aleshores també ho és en $z = 2i$

d) Si $S(z)$ és divergent en $z = 2i$, aleshores també ho és en $z = 2+i$. $\triangleleft$

Exercici 3.1.2. *Sigui $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una sèrie convergent en el disc $D = D(0,R)$. Demostreu que*

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}, \qquad si \quad 0 < r < R. \qquad \triangleleft$$

Exercici 3.1.3. *Sigui $S_1(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ i $S_2(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$. Demostreu que S_1 és convergent en z si i només si ho és S_2. En cas afirmatiu, tenim $S_1(z) = zS_2(z)$.*

3.2 Càlcul del radi de convergència

Pel criteri del quocient, observació 1.22, podem obtenir una altra manera de calcular el radi de convergència d'una sèrie de potències, que en alguns casos pot ser més convenient que aplicar el criteri de l'arrel.

Lema 3.5 (Criteri del quocient)**.** *Podem calcular el radi de convergència de la sèrie de potències*

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-b)^n$$

amb la fórmula

$$R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},$$

sempre que aquest límit existeixi.

Exemples 3.6. Calculem el radi de convergència R de les següents sèries de potències:

(1) $\sum_{n\geqslant 1} nz^n$. Apliquem el criteri del quocient. Tenim

$$R = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1.$$

(2) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{(n+1)!}$. Aplicant el criteri del quocient, tenim

$$R = \lim_n \frac{1/(n+1)!}{1/(n+2)!} = \lim_n \frac{(n+2)!}{(n+1)!} = \lim_n (n+2) = +\infty.$$

El criteri del quocient sol ser més simple per fer els càlculs, especialment quan apareixen factorials.

◊

Advertència 3.7. El fet que existeixi el límit superior

$$\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|},$$

no implica que aquest coincideixi amb $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

•

Exemple 3.8. Per tant, per calcular el radi de convergència R de la sèrie de potències

$$\sum_{n\geqslant 1} n 2^n z^{2n}$$

no podem aplicar directament el criteri del quocient. Per tal de calcular R en aquest cas, ho podem fer:
(i) Aplicant la definició de R amb la fórmula $\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. En el nostre cas, tenim que $a_{2n} = n2^n$ i a_n val zero si n és senar. Llavors

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \lim \sqrt[2n]{n2^n} = \sqrt{2} \lim \sqrt[2n]{n} = \sqrt{2},$$

amb el que $R = 1/\sqrt{2}$.

(ii) Fent el canvi de variables $w = z^2$ obtenim la sèrie de potències $\sum_{n\geqslant 1} n2^n w^n$. Apliquem el criteri del quocient per calcular el radi de convergència R' d'aquesta nova sèrie:

$$R' = \lim_n \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_n \frac{n}{n+1} = 1/2.$$

Aleshores la sèrie és convergent si $|w| < 1/2$ i divergent si $|w| > 1/2$. És a dir, la nostra sèrie inicial és convergent si $|z^2| < 1/2 \Leftrightarrow |z| < 1/\sqrt{2}$, i és divergent si $|z^2| > 1/2 \Leftrightarrow |z| > 1/\sqrt{2}$. Així també obtenim que $R = 1/\sqrt{2}$.

$\Diamond$

Exemple 3.9. Passem a calcular el radi de convergència R de la sèrie de potències lacunar[1]

$$\sum_{n\geqslant 1} 2^{-n} z^{2^n}.$$

Aqui no tenim cap canvi de variable que ens permeti aplicar el criteri del quocient. Aleshores hem de fer servir la definició

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

Ara observem que a_n sempre val zero excepte quan $n = 2^k$, que tenim $a_{2^k} = 2^{-k}$. Llavors

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[2^k]{|a_{2^k}|} = \lim_k \sqrt[2^k]{2^{-k}} = \lim_k 2^{-\frac{k}{2^k}} = 2^0 = 1,$$

amb el que $R = 1$. $\Diamond$

Fins ara, només hem vist exemples de càlcul quan els coeficients són reals. No hi ha diferència si els coeficients són complexos, ja que sempre estem treballant amb el mòdul dels coeficients.

Exemple 3.10. Calculem el radi de convergència de la sèrie de potències

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+i} z^n.$$

En aquest cas, tenim $a_n = \frac{1}{n+i}$, amb el que $|a_n| = \frac{1}{|n+i|} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. Per tant

$$R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_n \frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} = 1.$$

$\Diamond$

Exemple 3.11. Per veure un altre exemple, passem a calcular el radi de convergència R de la sèrie de potències

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n(1-i)}{1+i}\right) z^n.$$

En aquest cas, tenim

$$a_n = \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n(1-i)}{1+i}\right) = \left(\frac{1}{n} + (-1)^{n+1}\, i\right)$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Lacunary_function

ja que

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{|1+i|^2} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

Llavors

$$|a_n| = \sqrt{\frac{1}{n^2}+1} = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n},$$

amb el que

$$R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_n \frac{\sqrt{1+n^2}}{n} \cdot \frac{(n+1)}{\sqrt{(n+1)^2+1}} = 1.$$

$\diamondsuit$

Exercici 3.2.1. *Calculeu el radi de convergència de les següents sèries de potències*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} z^n, \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{n^n} z^n.$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^{2^n}}{n^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)^n}(z-1)^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2}(z+1)^n;\ a \in (0,1)$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z)^n}{\sqrt{n}}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}(z-2)^{n(n+1)}$

h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+2^n}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2(3z-2)^n$

j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1+(-1)^n)^n z^{2^n}.$ $\triangleleft$

3.3 Comportament a la frontera del disc de convergència

Quan estudiem la convergència d'una sèrie de potències de nombres complexos

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-b)^n,$$

amb radi de convergència R, sabem que la sèrie convergeix per $|z-b| < R$, i que la sèrie és divergent quan $|z-b| > R$. Què passa pels punts z amb $|z-b| = R$? Llavors pot convergir o no. Per exemple, la sèrie de potències

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} z^n$$

té radi de convergència $R = 1$. Per $z = 1$, la sèrie és divergent, i per $z = -1$ la sèrie és convergent (aquí quedaria estudiar els altres punts del cercle $|z| = 1$).

En la frontera del disc de convergència, tenim $z - b = Re^{it}$, així que la sèrie a estudiar queda

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n R^n e^{int}.$$

Per tal d'estudiar la convergència per t fixat, el primer que hem de fer és mirar si el terme general tendeix a zero o no. És a dir, mirem si

$$\left|a_n R^n e^{int}\right| \to 0 \qquad \text{quan} \quad n \to \infty.$$

En cas que no tendeixi a zero, llavors ja sabem que la sèrie és divergent. En cas que tendeixi a zero, ens cal estudiar-ho millor.

Lema 3.12 (Fórmula de sumació per parts)**.** *Siguin $\{a_n\}, \{b_n\}$ successions de nombres complexos, i posem $A_n = a_1 + \cdots + a_n$. Llavors*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k).$$

Demostració. Posant $A_0 = 0$, tenim

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1})\, b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1}.\end{aligned}$$

□

Com a casos particulars, tenim també la següent identitat:

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = A_m b_{m+1} + \sum_{k=n}^{m} A_k (b_k - b_{k+1}), \tag{3.1}$$

on ara $A_k = \sum_{j=n}^{k} a_j$. Notem que per tota constant $A \in \mathbb{C}$ tenim

$$A b_{m+1} - A b_n + \sum_{k=n}^{m} A (b_k - b_{k+1}) = 0.$$

Prenent $\widetilde{A}_k = \sum_{j=1}^{k} a_j = A_k + \widetilde{A}_{n-1}$ (per $k \geqslant n$) i $A = \widetilde{A}_{n-1}$, deduïm

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = \widetilde{A}_m b_{m+1} - \widetilde{A}_{n-1} b_n + \sum_{k=n}^{m} \widetilde{A}_k (b_k - b_{k+1}). \tag{3.2}$$

Teorema 3.13 (Criteri de Dirichlet-Abel uniforme)**.** *Siguin $X, Y \subset C$ dos conjunts. Siguin $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, una successió de funcions $a_n : X \to \mathbb{C}$ i $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ una successió de funcions $b_n : Y \to \mathbb{R}$. Suposeu que es verifica alguna de les següents dues condicions:*

1. *(criteri de Dirichlet) Existeix $M > 0$ pel qual*
$$\left|\sum_{k=1}^{N} a_k(x)\right| \leqslant M,$$
per a tot $x \in X$ i $N \geqslant 1$.

   La successió $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ és no negativa i decreix cap a 0 uniformement en Y (i.e. $b_{n+1}(y) \leqslant b_n(y)$ per a tot $n > 0$ i per a tot $y \in Y$, i $b_n(y) \to 0$ uniformement en Y).

2. *(criteri d'Abel) La sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ convergeix uniformement en X;*

   La successió (b_n) és una successió monòtona de funcions reals fitada uniformement en Y.

Aleshores, la sèrie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(y)$ convergeix uniformement en $X \times Y$.

Demostració. Demostrem el criteri de Dirichlet. Posem $S_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(y)$, i sigui $\varepsilon > 0$. Pel criteri de Cauchy uniforme, ens cal veure que hi ha $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que per a tot $x \in X$, $y \in Y$,
$$\left|S_m(x,y) - S_n(x,y)\right| < \varepsilon, \qquad m > n \geqslant n_0.$$

Per la versió (3.2) de la fórmula de sumació per parts, tenim
$$\begin{aligned}\left|S_m(x,y) - S_n(x,y)\right| &= \Big|\sum_{k=n}^{m} a_k(x)b_k(y)\Big| \\ &= \Big|\sum_{k=n}^{m} \widetilde{A}_k(x)(b_k(y) - b_{k+1}(y)) + \widetilde{A}_m(x)b_{m+1}(y) - \widetilde{A}_{n-1}(x)b_n(y)\Big|,\end{aligned}$$
on $\widetilde{A}_k(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j(x)$, que per hipòtesi estan uniformement fitades per M.

Com que $b_n \to 0$ uniformement en Y, podem trobar $n_0 \in \mathbb{N}$, de manera que $2Mb_{n_0}(y) < \varepsilon$ per a tot $y \in Y$. Siguin $m \geqslant n \geqslant n_0$. Donat que també es compleix que la successió $\{b_k(x)\}$ és decreixent, i no-negativa, obtenim que per a tot $x \in X$, $y \in Y$,
$$\begin{aligned}\left|S_m(x,y) - S_n(x,y)\right| &\leqslant M\sum_{k=n}^{m} |b_k(y) - b_{k+1}(y)| + M(|b_{m+1}(y)| + |b_n(y)|) \\ &= M\left(\sum_{k=n}^{m}(b_k(y) - b_{k+1}(y)) \quad + \quad (b_{m+1}(y) + b_n(y))\right) = 2Mb_n(y) \\ &\leqslant 2Mb_{n_0}(y) < \varepsilon.\end{aligned}$$

De manera similar es pot demostrar el Criteri d'Abel, usant la fórmula de sumació per parts (3.1). □

Com a conseqüència del Criteri d'Abel, tenim el següent resultat que no demostrarem

Teorema 3.14 (Teorema d'Abel)**.** *Si la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n$ convergeix uniformement en un conjunt $A \subset \mathbb{C}$, llavors també convergeix uniformement en el con*

$$C(A,b) = \bigcup_{0\leqslant t\leqslant 1} t(A-b).$$

En particular, si la sèrie convergeix en z_0 amb $|z_0 - b| = R$, llavors

$$\lim_{r\to 1^-} \sum_{n\geqslant 0} a_n r^n (z_0-b)^n = \sum_{n\geqslant 0} a_n (z_0-b)^n.$$

Exemple 3.15. Considerem la sèrie de potències $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

El radi de convergència és $R = 1$. Veiem com és comporta en $|z| = 1$. Clarament, la sèrie $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ és convergent pel criteri de Dirichlet. Ara bé, el criteri de Dirichlet ens serveix també per estudiar la convergència de la sèrie $\sum_n \frac{1}{n}e^{int}$. Tenim

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} = e^{it}\frac{(1-e^{int})}{1-e^{it}} = e^{i\frac{(n+1)t}{2}} \frac{\sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})},$$

on hem fet servir que

$$1 - e^{it} = e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}\right) = -2ie^{i\frac{t}{2}}\sin\frac{t}{2},$$

i de la mateixa manera,

$$1 - e^{int} = -2ie^{i\frac{nt}{2}}\sin\frac{nt}{2}.$$

Com que $|e^{i\frac{(n+1)t}{2}}| = 1$, i $|\sin(\frac{nt}{2})| \leqslant 1$, obtenim

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\Big| \leqslant \frac{1}{|\sin(\frac{t}{2})|} \leqslant \frac{\pi}{|t|} \qquad \text{si } t \in [-\pi,\pi].$$

Com que $\frac{1}{n} \downarrow 0$, aplicant el criteri de Dirichlet, obtenim que la sèrie

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}e^{int} \qquad \text{convergeix uniformement en} \quad [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon].$$

O equivalentment, en tot arc I tancat del cercle unitat que no contingui a $z = 1$.

I per tant, aplicant el Teorema d'Abel, la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ és uniformement convergent en el con $\{re^{it};\, 0 \leqslant r \leqslant 1,\, t \in [\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]\}$.

Per $t = 0$ no podem aplicar el criteri de Dirichlet, ja que $\sin 0 = 0$, i no tenim la fita independent de n. Aleshores, per estudiar aquest cas, s'ha de fer d'una altra manera. Ara bé, si $t = 0$ ens queda la sèrie $\sum \frac{1}{n}$ que ja sabem que és divergent.

$\Diamond$

Exercici 3.3.1. *Estudieu la convergència de les següents sèries de potències:*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{3n+1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n} z^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n}$. ◃

Exercici 3.3.2. *Demostreu el criteri d'Abel i el teorema d'Abel.* ◃

4 Derivació complexa i holomorfia

En aquest capítol definim la derivació complexa i el concepte de funció holomorfa. Veurem les propietats d'aquesta forma de derivació i ho relacionarem amb les equacions de Cauchy-Riemann. Treballarem també la notació de Wirtinger que permet fer un càlcul de derivades complexes molt més eficient. Finalment, veurem que les sèries de potències estudiades al capítol anterior són holomorfes. Per acabar el capítol, farem una introducció de funcions holomorfes importants, centrant-nos en les funcions trigonomètriques i en les branques de les seves funcions inverses.

4.1 Funcions holomorfes

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert; $f : \Omega \to \mathbb{C}$, i $z_0 \in \Omega$.

Definició 4.1. Diem que f és *holomorfa* (o $\mathbb{C}$-derivable) en z_0 si existeix el límit

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

En aquest cas posem

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Diem que f és holomorfa en Ω, i posem $f \in H(\Omega)$, si ho és en tot punt $z_0 \in \Omega$. •

Observació 4.2. Només hem definit funcions holomorfes en un obert, però es pot definir per altres conjunts. Per exemple, f és holomorfa en un compacte K si hi ha un obert Ω amb $K \subset \Omega$ de manera que podem estendre f a tot l'obert de manera que $f \in H(\Omega)$. •

Exemple 4.3.

1. $f(z) = z$ és holomorfa a tot $\mathbb{C}$.
2. $f(z) = z^2$ és holomorfa a tot $\mathbb{C}$ amb $f'(z) = 2z$. En efecte, tenim

$$\frac{(z + h)^2 - z^2}{h} = 2z + h \to 2z \quad \text{si } h \to 0.$$

3. $f(z) = z^n \in H(\mathbb{C})$ amb $f'(z) = nz^{n-1}$.
4. $f(z) = e^z \in H(\mathbb{C})$ amb $f'(z) = e^z$. En efecte, tenim

$$\frac{f(z + h) - f(z)}{h} = \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z \cdot \frac{e^h - 1}{h} \to e^z \quad \text{si} \quad h \to 0,$$

ja que

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^n}{n!} = 1 + \mathcal{O}(h) \to 1 \quad \text{quan} \quad h \to 0. \qquad \Diamond$$

Definició 4.4. Una funció holomorfa a tot $\mathbb{C}$ es diu que és una *funció entera.* •

Exemple 4.5 (Funcions no holomorfes)**.**

1. $f(z) = \overline{z}$ no és holomorfa en cap punt. En efecte, tenim

$$\lim_{h\to 0}\frac{\overline{z_0 + h} - \overline{z_0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h}.$$

Si $h = x \in \mathbb{R}$, llavors $\frac{\overline{h}}{h} = 1$, però si $h = iy$, tenim $\frac{\overline{h}}{h} = -1$ amb el que el límit anterior no existeix.

2. $f(z) = \overline{z}^n$ no és holomorfa.

3. $\operatorname{Re} z$ i $\operatorname{Im} z$ no són holomorfes. $\Diamond$

Ja podem començar a veure que una funció holomorfa essencialment només depèn de z (no té dependència de $\overline{z}$, vegeu l'observació 1.11). Donarem un sentit rigorós a aquesta afirmació a la proposició 4.24

Observació 4.6. Propietats bàsiques de les funcions holomorfes (mateixes proves que per $\mathbb{R}$).

1. Si f és holomorfa en z_0, llavors f és contínua en z_0.

2. Si f, g són holomorfes en z_0, llavors $f+g$ i $f\cdot g$ també ho són, amb les regles habituals de derivació.

3. Si f és holomorfa en z_0 amb $f'(z_0) \neq 0$, llavors $1/f$ és holomorfa en z_0 amb

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{\big(f(z_0)\big)^2}.$$

4. **Regla de la Cadena:** Siguin $\Omega, G \subset \mathbb{C}$ oberts; $f : G \to \mathbb{C}$ i $g : \Omega \to \mathbb{C}$ amb $f(G) \subset \Omega$. Si f és holomorfa en z_0 i g és holomorfa en $f(z_0)$, aleshores la composició $g \circ f$ és holomorfa en z_0 amb

$$(g \circ f)'(z_0) = g'\big(f(z_0)\big) \cdot f'(z_0). \qquad \bullet$$

Exemple 4.7. Més exemples de funcions holomorfes:

1. Donat que $f(z) = z$ és una funció entera, es compleix que tots els polinomis

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad (a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{C}, n \geqslant 0)$$

són funcions enteres.

2. Les funcions racionals (quocients de polinomis en z) són holomorfes en
$$\mathbb{C}\backslash\{\text{zeros del denominador}\}. \qquad \diamondsuit$$

Proposició 4.8 (Derivada de la inversa)**.** *Siguin $g : \Omega \to \mathbb{C}$ i $f : G \to \Omega$ funcions contínues amb $g(\Omega) \subset G$ de manera que*
$$f\big(g(z)\big) = z.$$
Si f és holomorfa en G i per a tot $z \in \Omega$ $f'\big(g(z)\big) \neq 0$, aleshores g és holomorfa en Ω amb
$$g'(z) = \frac{1}{f'\big(g(z)\big)}.$$

Demostració. Notem que g és injectiva, és a dir que $g(z) = g(z_0)$ implica que $z = z_0$. Efectivament, tenim
$$g(z) = g(z_0) \quad \Rightarrow \quad z = f\big(g(z)\big) = f\big(g(z_0)\big) = z_0.$$
Per tant, per $z \neq z_0$, tenim $g(z) \neq g(z_0)$ i llavors
$$1 = \frac{z - z_0}{z - z_0} = \frac{f\big(g(z)\big) - f\big(g(z_0)\big)}{g(z) - g(z_0)} \cdot \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}.$$
Com g és contínua, tenim que $w = g(z) \to w_0 = g(z_0)$ si $z \to z_0$, amb el que, com que f és holomorfa, obtenim
$$\lim_{z\to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{\left(\frac{f(g(z))-f(g(z_0))}{g(z)-g(z_0)}\right)} = \frac{1}{\lim_{w\to w_0} \frac{f(w)-f(w_0)}{w-w_0}} = \frac{1}{f'(w_0)} = \frac{1}{f'(g(z_0))}.$$
$\square$

Corol·lari 4.9 (Derivada del logaritme)**.** *Qualsevol branca contínua del logaritme és holomorfa amb*
$$\big(\ell(z)\big)' = \frac{1}{z}.$$

Observació 4.10. Si, donat $\alpha \in \mathbb{R}$, considerem la banda horitzontal oberta
$$B_\alpha = \{z \in \mathbb{C}; \alpha - \pi < \operatorname{Im} z < \alpha + \pi\},$$
llavors la funció exponencial complexa és biholomorfa entre B_α i $\mathbb{C}\backslash e^{i\alpha}(-\infty, 0]$. $\bullet$

Exercici 4.1.1. *a) Demostreu la regla del producte per la derivació.*

b) Proveu que si f és diferenciable en z_0 llavors és contínua en aquest punt.

c) Proveu que si f és diferenciable en z_0, llavors
$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \lambda(z)(z - z_0)$$
on $\lambda(z) \to 0$ si $z \to z_0$. $\triangleleft$

Exercici 4.1.2. *Siguin $f(z)$ i $g(z)$ funcions enteres. Decidiu si les següents funcions són enteres:*

a) $f(z)^3$, *c)* $f(z)/g(z)$, *e)* $f(1/z)$,

b) $f(z)g(z)$, *d)* $5f(z)+ig(z)$, *f)* $f(g(z))$.

Exercici 4.1.3. *Proveu que* $g(z)=3x^2+2x-3y^2-1+i(6xy+2y)$ *és entera. Escriviu* g *com a funció de* z.[1] ◁

Exercici 4.1.4. *Existeix alguna funció* f *holomorfa en el disc unitat* $\mathbb{D}$ *tal que per a tot* $n=2,3,\ldots$

a) $f\left(\pm\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n+1}$*?*

b) $f\left(\pm\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$*?*

c) $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{\log(n+1)}$*?*

d) $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{n}{n+1}$*?* ◁

Exercici 4.1.5. *Doneu una branca de* $\log(z^2+2z+3)$ *que sigui holomorfa a* $z=-1$. *Calculeu la seva derivada en aquest punt. En quin domini és holomorfa la branca que heu definit?* ◁

Exercici 4.1.6. *Sigui* $f(z)=z^3+1$ *i* $z_1=(-1+\sqrt{3}i)/2, z_2=(-1-\sqrt{3}i)/2$. *Provar que no existeix cap punt* w *en el segment que uneix* z_1 *i* z_2 *de manera que* $f(z_2)-f(z_1)=f'(w)(z_2-z_1)$. *Que es pot dir del teorema del valor mitjà per funcions complexes?* ◁

4.2 Les equacions de Cauchy-Riemann

Les equacions de Cauchy-Riemann ens donen una relació entre l'holomorfia i la $\mathbb{R}$-diferenciabilitat de f (pensada com una funció de dues variables). Una funció $f=u+iv:\Omega\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ la podem pensar com una funció

$$\begin{array}{rcc} f:\Omega\subset\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \big(u(x,y),v(x,y)\big). \end{array}$$

Recordem que $f(x,y)=\big(u(x,y),v(x,y)\big)$ és $\mathbb{R}$-diferenciable en (x_0,y_0), si i només si, existeix una aplicació lineal

$$\begin{array}{rccc} L: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

de manera que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\left\| f(x,y)-f(x_0,y_0)-L\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}\right\|}{\left\|(x-x_0,y-y_0)\right\|} = 0. \tag{4.1}$$

[1]Si $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ holomorfa en un domini Ω tal que $\overline{\Omega}=\Omega$ llavors es pot provar que $f(z)=u(z,0)+iv(z,0)$ en cert sentit, vegeu la secció 4.3.

Aquí estem identificant el nombre complex $a + ib$ amb el vector (a, b), és a dir amb la matriu columna $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

En cas que f sigui diferenciable, es compleix que

$$Df(x_0, y_0) = L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix},$$

on u_x, u_y, v_x, v_y denoten les derivades parcials de u i de v respectivament.

Vegem com actua L en un nombre complex:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Així, amb la identificació $z = x + iy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, trobem

$$Lz = x(a + ic) + y(b + id).$$

Escrivint $\alpha = a + ic$ i $\beta = b + id$, trobem

$$Lz = \alpha x + \beta y = \frac{\alpha - i\beta}{2}(x + iy) + \frac{\alpha + i\beta}{2}(x - iy) = \lambda z + \mu \bar{z}, \tag{4.2}$$

on $\lambda = \frac{\alpha - i\beta}{2}$ i $\mu = \frac{\alpha + i\beta}{2}$. Per tant, tota aplicació $\mathbb{R}$-lineal L es pot expressar com a suma d'una aplicació $\mathbb{C}$-lineal en z i una $\mathbb{C}$-lineal en $\bar{z}$.

Tornant a la diferencial $Df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$, trobem $\alpha = u_x + iv_x = f_x$ i $\beta = u_y + iv_y = f_y$ i en tal cas ens queda

$$\lambda = \frac{f_x - if_y}{2} =: \frac{\partial f}{\partial z}, \qquad \mu = \frac{f_x + if_y}{2} =: \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

Definició 4.11. Posem $z = x + iy$, les *derivades de Wirtinger* (o *operadors de Wirtinger*) són els operadors diferencials:

1. $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$;
2. $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

A vegades, per abreviar escrivim $\partial f := \partial_z f := \frac{\partial f}{\partial z}$ i $\overline{\partial} f := \partial_{\bar{z}} f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$. •

Per tot el que hem vist en aquesta secció, tenim

$$Df_{z_0}(z) = \partial f(z_0) z + \overline{\partial} f(z_0) \bar{z}.$$

Resumint, hem vist que si f és diferenciable en z_0 aleshores la diferencial és $\mathbb{C}$-lineal si i només si $\overline{\partial} f(z_0) = 0$, si i només si f és holomorfa en z_0, ja que al límit (4.1) podem usar la descomposició (4.2) posant $\mu = 0$ i $\lambda = f'(z_0)$.

Notem també que

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv) = \frac{1}{2}\left(u_x + iv_x + i(u_y + iv_y)\right) = \frac{1}{2}((u_x - v_y) + i(v_x + u_y)),$$

amb el que

$$\overline{\partial} f = 0 \iff \begin{cases} u_x = v_y & \text{i} \\ u_y = -v_x, \end{cases}$$

es a dir, les funcions holomorfes compleixen les equacions de Cauchy-Riemann que enunciem a continuació.

Teorema 4.12. *Sigui $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, i $z_0 = x_0 + iy_0$.*

$$f(x+iy) = u(x+iy) + iv(x+iy).$$

Són equivalents:

(a) f és holomorfa en z_0 amb $f'(z_0) = a + ic$;

(b) f pensada com a funció de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}$-diferenciable en (x_0, y_0) amb

$$Df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}.$$

És a dir, f compleix les equacions de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

que es poden escriure també com

$$\overline{\partial} f(z_0) = 0.$$

En tal cas, notem que (a) implica que $f' = u_x + iv_x = f_x = \partial f$.

Observem que per ser holomorfa, a part de complir les equacions de Cauchy-Riemann, la funció ha de ser $\mathbb{R}$-diferenciable.

Proposició 4.13. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert* ***connex****. Si $f \in H(\Omega)$ amb $f'(z) = 0$ per a tot $z \in \Omega$, llavors f és constant.*

Observem que el resultat no té perquè ser cert si Ω no és connex, encara que sí que la funció seria constant en cada component connexa.

Demostració. Només cal observar que la hipòtesi $f' \equiv 0$ implica que la diferencial de f en cada punt de Ω és zero i per tant, el resultat és conseqüència del corresponent resultat per a funcions diferenciables. $\square$

Exemple 4.14. 1. Considerem $f(z) = \overline{z}$ que és diferenciable a tot $\mathbb{R}^2$. Si posem $f(x+iy) = x - iy$, llavors $u(x,y) = x$ i $v(x,y) = -y$ amb el que $u_x = 1 \neq -1 = v_y$ i f no compleix les equacions de Cauchy-Riemann en cap punt.

2. Si $f(z) = |z|^2$, llavors $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$, que és diferenciable a $\mathbb{R}^2$. Es compleix que $u(x,y) = x^2 + y^2$ i $v(x,y) = 0$, amb el que $u_x = 2x$, $u_y = 2y$ i $v_x = v_y = 0$. Per tant, les equacions de Cauchy-Riemann només es compleixen per $x = y = 0$ i f és només holomorfa a l'origen. (Veurem més endavant que aquesta situació no la tractarem, donat que si f és només holomorfa en un punt, no es compleixen les propietats fonamentals de la teoria de Cauchy).

3. Passem a comprovar que la funció
$$x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$
defineix una funció entera.

   En efecte, la funció és clarament $\mathbb{R}$-diferenciable. Notem que $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, i $v(x,y) = 3x^2y - y^3$. Aleshores només ens cal comprovar que es compleixen les equacions de Cauchy-Riemann:
$$\begin{cases} u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y \\ u_y = -6xy = -v_x, \end{cases}$$
i per tant f defineix una funció entera (és a dir, holomorfa a tot $\mathbb{C}$). ◊

Observació 4.15 (Efecte de la derivada)**.** Suposem f holomorfa a z_0 amb $f'(z_0) \neq 0$. Aleshores
$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|$$
i
$$\lim_{z \to z_0} \{\arg[f(z) - f(z_0)] - \arg(z - z_0)\} = \arg f'(z_0),$$
ja que per $z - z_0 = re^{i\theta}$ i $f(z) - f(z_0) = \rho e^{i\varphi}$ tenim
$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\rho}{r} e^{i(\varphi - \theta)} \to f'(z_0) = |f'(z_0)| e^{i\ \arg(f'(z_0))}.$$
Llavors
$$\varphi - \theta = \arg(f(z) - f(z_0)) - \arg(z - z_0) \to \arg(f'(z_0)).$$

Així, si posem $w = f(z)$ i $w_0 = f(z_0)$ veiem que per z a prop de z_0, l'aplicació f *dilata* les distàncies en un factor de $|f'(z_0)|$:
$$|w - w_0| \approx |f'(z_0)| \cdot |z - z_0|.$$
I que f *gira* els vectors que surten de z_0 en un angle $\arg f'(z_0)$:
$$\arg(w - w_0) \approx \arg(z - z_0) + \arg f'(z_0).$$

Altrament dit, per a z a prop de z_0 l'aplicació $w = f(z)$ es comporta com l'aplicació lineal

$$w = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) = c + \rho e^{i\varphi}(z - z_0).$$

•

Observació 4.16. [Altres interpretacions geomètriques] Observem que

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = \langle (u_x, u_y), (v_x, v_y) \rangle = 0.$$

Per tant, les corbes de nivell de u i v són ortogonals.

Observem també que com que $f' = f_x = u_x + iv_x$, tenim

$$|f'|^2 = (u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_x)^2 + (v_x)^2 = u_x v_y - u_y v_x,$$

que coincideix amb el Jacobià de l'aplicació $(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Efectivament,

$$J(u, v) = \det(D(u, v)) = \left| \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \right| = u_x v_y - u_y v_x.$$

Per tant, per la regla del canvi de variable, si g és contínua i f és un difeomorfisme entre un obert U i $f(U)$, tenim

$$\int_U g \circ f(z)\, |f'(z)|^2 \, dm(z) = \int_U g \circ f(z)\, |Jf(z)| \, dm(z) = \int_{f(U)} g \, dm(w),$$

on dm indica la integral de superfície, sovint denotada $dx\,dy$ (la identitat funciona amb la integral en el sentit de Lebesgue si g és mesurable, per exemple) i si prenem $g(w) = 1$, trobem

$$\int_U |f'(z)|^2 \, dm(z) = \int_{f(U)} dm(w) = m(f(U)),$$

és a dir que podem calcular la mesura de Lebesgue del conjunt imatge integrant el quadrat del mòdul de la derivada. •

Exercici 4.2.1. *Trobar els valors de les constants a, b, c de manera que $f(z)$ sigui holomorfa i expresseu-la en termes de z.*

a) $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$

b) $f(z) = \cos x(\cosh y + a \sinh y) + i \sin x(\cosh y + b \sinh y)$. ◁

Exercici 4.2.2. *Sigui $f(z) = u + iv$ holomorfa en un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Proveu que les funcions u i v són harmòniques (una funció $f(x, y)$ és harmònica si les seves segones derivades parcials són contínues i $f_{xx} + f_{yy} = 0$.)*

Exercici 4.2.3. *Considerem $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$*

a) Provar que u és harmònica.

b) Trobar una v de manera que $f = u + iv$ sigui holomorfa (s'anomena harmònica conjugada de u).

c) Trobar una expressió compacta de $f(z)$. ◁

Exercici 4.2.4. *Trobar els polinomis harmònics de la forma $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$. Trobar la funció harmònica conjugada i la funció holomorfa corresponent.* ◁

Exercici 4.2.5. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ una regió (és a dir, un obert connex) i f una funció holomorfa en Ω.*

1. *Proveu que si f només pren valors imaginaris purs, aleshores f és constant.*
2. *Proveu que si $|f|$ és constant, aleshores f també és constant. Equivalentment si f només pren valors en una circumferència, llavors f és constant.* ◁

Exercici 4.2.6. *Doneu una descripció de les funcions enteres de la forma $f(x + iy) = u(x) + iv(x, y)$.* ◁

Exercici 4.2.7. *(a) Determineu els nombres $\lambda \in \mathbb{R}$ pels quals*

$$v_\lambda(x, y) = 2 \sin x \sinh y + x^3 - \lambda xy^2 + y$$

és la part imaginària d'una funció entera f_λ i calculeu f_λ.

(b) Sigui $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre determinat en a). És

$$g_\lambda = \frac{\partial v_\lambda}{\partial x} - i \frac{\partial v_\lambda}{\partial y}$$

una funció entera? Quina relació hi ha entre g_λ i f_λ? ◁

Exercici 4.2.8. *Decidiu on no són holomorfes les funcions següents*

a) $\dfrac{1}{z - 2 + 3i}$, *b)* $\dfrac{iz^3 + 2z}{z^2 + 1}$, *c)* $\dfrac{3z - 1}{z^2 + z + 4}$, *d)* $\dfrac{z^2}{(2z^2 - 3z + 1)^2}$. ◁

Exercici 4.2.9. *Provar que $|z|^2$ és diferenciable en $z = 0$ però enlloc més.* ◁

Exercici 4.2.10. *Sigui*

$$f(z) = \begin{cases} \exp(-1/z^4) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}.$$

Demostreu que

a) $f(z)$ satisfà les equacions de Cauchy-Riemann a tot punt $z \in \mathbb{C}$.

b) f no és contínua al 0 i per tant f no és holomorfa a un entorn del 0. ◁

Exercici 4.2.11. *Si u i v s'expressen respecte les coordenades polars (r, θ), proveu que les equacions de Cauchy-Riemann es poden expressar de la forma*

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

(Indicació: estudieu el límit incremental seguint $\arg z = \theta_0$ i $|z| = r_0$.)

Exercici 4.2.12. *Quina part del pla es contreu i quina part es dilata si la transformació es realitza mitjançant la funció:*

a) $w = z^2$;

b) $w = z^2 + 2z$;

c) $w = \dfrac{1}{z}$;

d) $w = e^z$;

e) $w = \log(z-1)$. ◁

4.3 Diferenciabilitat al pla complex

Ja hem vist la definicio de funció holomorfa, i hem vist com aquesta condició és equivalent a ser una funció diferenciable que satisfà les equacions de Cauchy Riemann. Tornem ara a visitar els operadors de Wirtinger per mirar d'arribar a unes regles de càlcul senzilles.

Exemple 4.17. Les derivades de $f(z) = z$ són

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(1 - i \cdot i) = 1 \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(1 + i \cdot i) = 0.$$

Les derivades de $f(z) = \overline{z}$ són

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 1.$$

◊

Comencem per veure com s'escriu la diferencial del producte i la regla de la cadena amb els operadors de Wirtinger.

Lema 4.18. *Sigui $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriu de coeficients reals, i f_A l'aplicació lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ associada definida per $f_A(z) = f_A(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ per $z = x + iy$. Si escrivim les columnes d'A usant notació complexa, és a dir $\alpha = a + ic$ i $\beta = b + id$, aleshores trobem que per tot $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, escrivint $z = x + iy \in \mathbb{C}$, tenim*

$$f_A(x, y) = \frac{1}{2}\left[(\alpha - i\beta)\, z + (\alpha + i\beta)\, \overline{z}\right].$$

A més, aquesta és l'única manera d'escriure $f_A(z) = w_1 z + w_2 \overline{z}$ amb $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$.

Observació 4.19. Pel lema 4.18, donada una aplicació $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ diferenciable, aleshores en tot punt z_0 del domini i per tot vector $z \in \mathbb{C}$ tenim

$$Df_{z_0}(z) = \partial f(z_0) \cdot z + \overline{\partial} f(z_0) \cdot \overline{z}. \qquad \bullet$$

Observació 4.20. Es pot comprovar també que tot parell de funcions diferenciables satisfà

1. $\partial(f \cdot g) = \partial f \cdot g + f \cdot \partial g$;
2. $\overline{\partial}(f \cdot g) = \overline{\partial} f \cdot g + f \cdot \overline{\partial} g$. •

Lema 4.21. *[Regla de la cadena] si f i g són diferenciables en un obert, aleshores*

1. $\partial(f \circ g) = \partial f \partial g + \overline{\partial} f \overline{\overline{\partial} g}$;
2. $\overline{\partial}(f \circ g) = \partial f \overline{\partial} g + \overline{\partial} f \overline{\partial g}$.

Aquí cal entendre que si avaluem $\partial(f \circ g)$ en un punt z del seu domini, aleshores en la primera fórmula ∂f i $\overline{\partial} f$ s'avaluen en $g(z)$.

Demostració. Per la regla de la cadena, tenim que

$$D(f \circ g)_{z_0}(z) = Df_{g(z_0)} \circ Dg_{z_0}(z) = Df_{g(z_0)}\left(Dg_{z_0}(z)\right).$$

Usant el lema 4.18 i l'observació 4.19, trobem que per tot z tenim

$$\begin{aligned}\partial(f \circ g)(z_0) \cdot z &+ \overline{\partial}(f \circ g)(z_0) \cdot \overline{z} \\ &= \partial f(g(z_0)) \cdot \left(\partial g(z_0) \cdot z + \overline{\partial} g(z_0) \cdot \overline{z}\right) + \overline{\partial} f(g(z_0)) \cdot \overline{\left(\partial g(z_0) \cdot z + \overline{\partial} g(z_0) \cdot \overline{z}\right)}.\end{aligned}$$

Per la unicitat del lema 4.18, trobem les igualtats dels coeficients que acompanyen z i dels que acompanyen $\overline{z}$, és a dir 1 i 2. □

Observació 4.22. En particular, combinant el lema anterior amb l'exemple 4.17 trobem que

1. $\overline{\partial}\,\overline{f} = \overline{\partial f}$;
2. $\partial \overline{f} = \overline{\overline{\partial} f}$; •

Lema 4.23. *Siguin $g = (g_1, g_2) : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ i $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funcions diferenciables. Si escrivim*

$$\partial_z f = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} - i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right], \qquad \partial_{\overline{z}} f = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial x_2}\right],$$

$$\partial_w f = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x_3} - i\frac{\partial f}{\partial x_4}\right], \quad i \quad \partial_{\overline{w}} f = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x_3} + i\frac{\partial f}{\partial x_4}\right],$$

alsehores

1. $\partial(f \circ g) = \partial_z f \partial g_1 + \partial_w f \partial g_2 + \partial_{\overline{z}} f \overline{\overline{\partial} g_1} + \partial_{\overline{w}} f \overline{\overline{\partial} g_2}$;

2. $\overline{\partial}(f \circ g) = \partial_z f \overline{\partial} g_1 + \partial_w f \overline{\partial} g_2 + \partial_{\overline{z}} f \overline{\partial g_1} + \partial_{\overline{w}} f \overline{\partial g_2}$.

Demostració. La demostració és anàloga a la del lema 4.21, tenint en compte que com a aplicacions a l'espai euclidià, la matriu que correspon a $Df \circ Dg$ es pot descompondre com

$$\left(\frac{\partial(u_f, v_f)}{\partial(x_1, x_2)}\right) \cdot \left(\frac{\partial(u_{g_1}, v_{g_1})}{\partial(x_1, x_2)}\right) + \left(\frac{\partial(u_f, v_f)}{\partial(x_3, x_4)}\right) \cdot \left(\frac{\partial(u_{g_2}, v_{g_2})}{\partial(x_1, x_2)}\right),$$

on $f = u_f + iv_f$, $g_j = u_{g_j} + v_{g_j}$. A cada sumand apliquem el mateix raonament que en el lema anterior. □

Proposició 4.24. *Si $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es pot expressar com $F(z) = f(z, \overline{z})$ on f és una funció holomorfa respecte les dues variables, és a dir*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ (z, w) & \mapsto & f(z, w) \end{array}$$

amb $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial \overline{w}} = 0$, aleshores

$$\partial F(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z, \overline{z}) \quad i \quad \overline{\partial} F(z) = \frac{\partial f}{\partial w}(z, \overline{z}),$$

i les derivades $\frac{\partial f}{\partial z}$ i $\frac{\partial f}{\partial w}$ es poden calcular pels mètodes habituals.

Demostració. Prenem $g(z) = (g_1(z), g_2(z)) = (z, \overline{z})$, que satisfà que $\partial g_1 = 1$, $\partial g_2 = 0$, $\overline{\partial} g_1 = 0$, $\overline{\partial} g_2 = 1$, vegeu l'exemple 4.17. A part, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z, \overline{z}) = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial \overline{w}}(z, \overline{z}) = 0$. Així, pel lema 4.23, trobem que

1. $\partial F = \partial_z f \cdot 1 + \partial_w f \cdot 0 + 0 \cdot \overline{0} + 0 \cdot \overline{1}$;
2. $\overline{\partial} F = \partial_z f \cdot 0 + \partial_w f \cdot 1 + 0 \cdot \overline{1} + 0 \cdot \overline{0}$,

i la proposició se segueix. □

Exemples 4.25. El lema anterior ens diu que si expressem una funció com a producte, composició, etcètera, de funcions holomorfes en z i $\overline{z}$, aleshores només ens cal derivar independentment cada una de les parts tal com faríem amb un polinomi, amb l'altre *variable* actuant com una constant (malgrat no ser-ho!). Així, per exemple,

- Si $f(z) = z^2 + \overline{z}z^3 + z\overline{z}^2$, aleshores $\partial f(z) = 2z + 3\overline{z}z^2 + \overline{z}^2$, i $\overline{\partial} f(z) = z^3 + 2z\overline{z}$.
- Si $f(z) = e^{z + \cos(\overline{z})}$, aleshores $\partial f(z) = e^{z + \cos(\overline{z})}$ i $\overline{\partial} f(z) = e^{z + \cos(\overline{z})} \cdot (-\sin(\overline{z}))$. ◊

Exercici 4.3.1. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i f una funció holomorfa en Ω. Definim $\Omega^* = \{z \in \mathbb{C} : \overline{z} \in \Omega\}$ i $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ donada per $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Proveu que f^* és holomorfa en Ω^*.* ◁

Exercici 4.3.2. *Trobeu els punts on la funció f té derivada complexa (i calculeu-la si escau) en els següents casos. (Podeu fer servir si cal que $f' = f_x$.)*

a) $f(z) = |z|^4$

b) $f(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$

c) $f(z) = z + \frac{1}{z}$

d) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+2)}$

e) $f(z) = |z|$

f) $f(x+iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$

g) $\cos |z|^2$

h) $f(z) = z + z\bar{z}$ ◁

4.4 Funcions analítiques

Definició 4.26. Si Ω és un obert, una funció $f : \Omega \to \mathbb{C}$ és una *funció analítica* en Ω si per a cada punt $a \in \Omega$, existeix un disc $D_r(a) \subset \Omega$, tal que f és la suma d'una sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ en $D_r(a)$. •

Veurem a continuació que tota funció analítica és holomorfa

Teorema 4.27 (Derivació d'una sèrie de potències)**.** *Sigui $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-b)^n$ sèrie de potències amb radi de convergència $R > 0$. Llavors la sèrie derivada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-b)^{n-1}$$

té el mateix radi de convergència. A més, si definim

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z-b)^n, \qquad |z-b| < R,$$

aleshores f és holomorfa en $|z-b| < R$ amb

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-b)^{n-1}, \qquad |z-b| < R.$$

Observació 4.28. Iterant el resultat del teorema, obtenim que tota sèrie de potències és infinitament derivable en $|z-b| < R$, i totes les seves derivades són holomorfes en $|z-b| < R$.

Per inducció, iterant la fòrmula anterior es verifica que

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z-b)^{n-k} \quad z \in D_R(b),$$

i, en particular,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(b)}{k!}, \quad k \geqslant 0.$$

•

Prova del teorema 4.27. Prenent $h(z) = f(z+b)$, podem suposar que $b = 0$, amb el que ens queda la sèrie de potències
$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n.$$
El radi de convergència de $\sum_n n a_n z^{n-1}$ és el mateix que el de $\sum n a_n z^n$ (ja que el producte per un número no canvia el radi de convergència, vegeu l'exercici 3.1.3) que, com que $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, és
$$\frac{1}{R'} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{n} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R},$$
amb el que les dues sèries tenen el mateix radi de convergència.

Posem
$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n\, z^{n-1}, \qquad |z| < R.$$
Fixem z_0 amb $|z_0| < R$, i volem provar que f és holomorfa en z_0 amb $f'(z_0) = g(z_0)$. Cal provar doncs que
$$\lim_{z\to z_0} \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - g(z_0) \right| = 0.$$
Si $z \in D_R(0)\backslash\{z_0\}$, llavors,
$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - g(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} - n z_0^{n-1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n A_n,$$
on $A_1 = 0$ i per a $n \geqslant 2$,
$$\begin{aligned} A_n = \sum_{m=0}^{n-1} z_0^{n-1-m} z^m - n z_0^{n-1} &= \sum_{m=0}^{n-1} \left(z_0^{n-1-m} z^m - z_0^{n-1} \right) = \sum_{m=0}^{n-1} z_0^{n-1-m} \left(z^m - z_0^m \right) \\ &= (z-z_0) \sum_{m=1}^{n-1} z_0^{n-1-m} \sum_{k=0}^{m-1} z_0^{m-1-k} z^k = (z-z_0) \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} z_0^{n-2-k} z^k. \end{aligned}$$
Per tant, si triem $|z_0| < \rho < R$, per a $|z| < \rho$ i $n \geqslant 2$, es compleix que
$$\begin{aligned} |A_n| &\leqslant |z-z_0| \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} |z_0|^{n-2-k} |z|^k \leqslant |z-z_0| \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \rho^{n-2} \\ &= |z-z_0| \left(\sum_{m=1}^{n-1} m \right) \rho^{n-2} = |z-z_0| \frac{n(n-1)}{2} \rho^{n-2} \leqslant |z-z_0| n^2 \rho^{n-2}. \end{aligned}$$
Tot plegat ens dona que si $|z| < \rho$,
$$\left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - g(z_0) \right| \leqslant |z-z_0| \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| \rho^{n-2}.$$

Però les sèries de potències $\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n|z^{n-2}$ i $\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n|z^n$ tenen el mateix radi de convergència, i el radi d'aquesta darrera sèrie és

$$\frac{1}{\limsup_n (n^2|a_n|)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\limsup_n (|a_n|)^{\frac{1}{n}}} = R > \rho.$$

Així doncs, $\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n|\rho^{n-2} = C < \infty$ i, per tant,

$$\lim_{z\to z_0} \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - g(z_0) \right| \leqslant \lim_{z\to z_0} C|z-z_0| = 0,$$

com voliem demostrar. □

A partir del teorema acabat de provar, sabem que tota sèrie de potències és holomorfa en el seu disc de convergència i que es deriva fent-ho terme a terme. Amb això, podem calcular el valor de la suma de diverses sèries. Per exemple, sabem que

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \qquad |z| < 1.$$

Derivant, obtenim

$$-\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1}, \qquad |z| < 1.$$

Per tant,

$$-\frac{z}{(1+z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^n, \qquad |z| < 1.$$

Observem que la classe de funcions analítiques en un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ és trivialment tancada per la suma. Es compleix que també és tancada respecte al producte, com a conseqüència del teorema de Mertens:

Teorema 4.29. *Siguin f i g les sumes de les sèries de potències $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-a)^n$ i $\sum_{n\geqslant 0} b_n(z-a)^n$ en $D_r(a)$, respectivament.*

Llavors la sèrie producte de Cauchy d'aquestes dues,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) (z-a)^n$$

convergeix absolutament en $D_r(a)$ i la seva suma és $f \cdot g$ en $D_r(a)$.

En particular, el producte de dues funcions analítiques en un obert de $\mathbb{C}$ és analítica en aquest obert.

Exercici 4.4.1. *Discutir l'analiticitat de* *a)* $8\bar{z} + i$,

b) $\dfrac{z}{\bar{z}+2}$,

c) $\dfrac{z^3+2z+i}{z-5}$,

d) $x^2 - y^2 + 2xyi$,

e) $x^2 + y^2 + y - 2 + ix$,

f) $\left(x + \dfrac{x}{x^2+y^2}\right) + i\left(y - \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$,

g) $|z|^2 + 2z$,

h) $\dfrac{|z|^2+z}{2}$. ◁

Exercici 4.4.2. *Trobeu la suma de les sèries*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{3}\right)^n$; *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+i)^n}{n!}$; *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ *si* $|z|<1$. ◁

Exercici 4.4.3. *Sigui* $f(z) := \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ *per* $|z| < R$ *on* R *és el radi de convergència de la sèrie. Demostreu que si* $f(z_k) = 0$ *per una successió* $(z_k)_k$ *tal que* $z_k \neq 0$ *i* $z_k \to 0$ *quan* $k \to \infty$, *aleshores* $f(z) \equiv 0$ *(i.e.* $c_n = 0$ *per a tot* $n \geqslant 0$*).* (Indicació: Calculeu $f(0)$ i considereu la sèrie $f(z)/z$). ◁

Exercici 4.4.4. *Demostreu que si dues sèries* $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *i* $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ *són convergents i tenen la mateixa suma per a una successió* $(z_k)_k$ *tal que* $z_k \neq 0$ *i* $z_k \to 0$ *quan* $k \to \infty$ *aleshores* $a_n = b_n$ *per a tot* $n \geqslant 0$. ◁

Exercici 4.4.5. *Calculeu la suma de les sèries de potències de l'exercici 3.3.1.*

Exercici 4.4.6. *Considereu la sèrie*

$$S(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^{2n-1}}{2n}.$$

a) Estudieu-ne la convergència puntual i uniforme sobre compactes.

b) Calculeu quant val la suma per tot z del disc de convergència.

c) Doneu el valor de

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n9^n}.$$ ◁

Exercici 4.4.7. *Considereu la sèrie de potències*

$$\sum_{n\geqslant 1} n(n+1)z^n.$$

a) Estudieu la seva convergència.

b) Calculeu la seva suma.

c) Quant val $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{n(n+1)}{2^n}$*?* ◁

Exercici 4.4.8. *Considereu la sèrie de potències*

$$S(z) = 2\pi i + \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n(2z+1)^n}{n}.$$

*(a) Calculeu la seva suma i el seu domini de convergència, especificant amb precisió totes les funcions involucrades. (*Indicació: *Per especificar un logaritme, cal donar un domini de definició i la imatge d'un punt.)*

(b) Calcula la solució (si existeix) de l'equació $S(z) = e$*.* ◁

4.5 Algunes funcions holomorfes importants

L'exponencial complexa: ja haviem vist que ve definida per

$$e^z = \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

La sèrie té radi de convergència $R = +\infty$, i per tant e^z defineix una funció entera amb

$$(e^z)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

La identitat

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w; \qquad z, w \in \mathbb{C}$$

també es pot veure de la següent manera:

Per $a \in \mathbb{C}$, considerem la funció $f_a(z) = e^z\, e^{a-z}$. Com que és producte de funcions enteres, la funció f_a és entera amb

$$f_a'(z) = e^z\, e^{a-z} + e^z\,(-e^{a-z}) = 0.$$

Per tant f_a és constant en $\mathbb{C}$, amb el que $f_a(z) = f_a(a) = e^a$, amb el que

$$e^z\, e^{a-z} = e^a.$$

Posant $a = z + w$ obtenim el resultat.

De la identitat anterior, tenim que $e^z\, e^{-z} = 1$, amb el que $e^z \neq 0$ per a tot $z \in \mathbb{C}$, i també

$$\frac{1}{e^z} = e^{-z}.$$

Recordem també que

(i) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$, per a tot $z \in \mathbb{C}$.

(ii) $|e^{it}| = 1$ per a tot $t \in \mathbb{R}$.

Definició 4.30 (Funcions trigonomètriques)**.** Per $z \in \mathbb{C}$, definim

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

vegeu la figura 4.1. Fent servir el desenvolupament en sèrie de potències de e^z, tenim

$$\sin z = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(i^n - (-i)^n)}{2i} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

També

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

Per tant, $\sin z$ i $\cos z$ estenen les corresponents funcions $\sin x$ i $\cos x$ de $\mathbb{R}$ a tot el pla complex. •

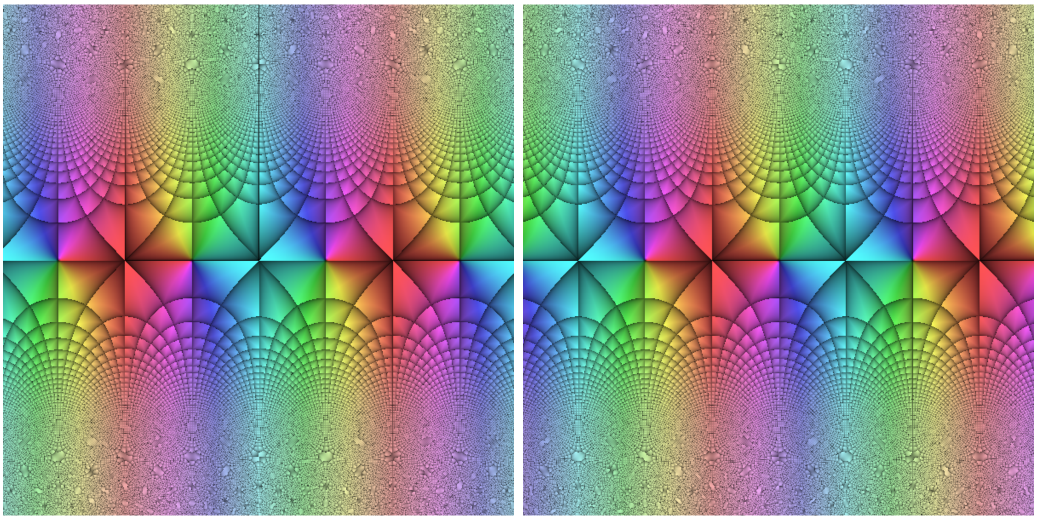


Figura 4.1: A l'esquerra, la funció cosinus, a la dreta el sinus.

Advertència 4.31. Ara $\sin z$ i $\cos z$ no són fitades! Per exemple

$$\sin(it) = \frac{e^{-t} + e^t}{2i} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to \infty} |\sin(it)| = +\infty.$$

•

Finalment, passem a veure que tot logaritme continu en Ω d'una funció holomorfa, és també holomorf.

Proposició 4.32. *Sigui* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *obert i* $f : \Omega \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *holomorfa. Sigui* $\mathcal{L}_f$ *una determinació del logaritme de* f *en* Ω*. Llavors* $\mathcal{L}_f$ *és holomorfa en* Ω *amb*

$$\mathcal{L}_f'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \qquad z \in \Omega.$$

Demostració. Fixem $z_0 \in \Omega$. Com que f és holomorfa, en particular és contínua, amb el que hi ha $\delta > 0$ de manera que

$$f\big(D(z_0, \delta)\big) \subset D\left(f(z_0), \frac{1}{2}\,|f(z_0)|\right) := D.$$

Com que $f(z_0) \neq 0$, llavors D evita alguna semirecta amb origen el 0, amb el que existeix una determinació $\ell(z)$ del logaritme de z en D, que sabem que ha de ser holomorfa. Definim

$$h(z) = \ell\big(f(z)\big), \qquad z \in D_0 := D(z_0, \delta).$$

Com que f és holomorfa, llavors h és holomorfa en D_0 amb

$$h'(z_0) = \ell'\big(f(z_0)\big) \cdot f'(z_0) = \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}.$$

També h és una determinació del logaritme de f en D_0. Com que D_0 és connex i $\mathcal{L}_f$ també és una determinació del logaritme de f en D_0, aplicant la proposició 2.30, tenim que hi ha $k \in \mathbb{Z}$ de manera que $\mathcal{L}_f = h + 2k\pi i$ en D_0, amb el que deduïm que g és holomorfa en D_0 amb

$$\mathcal{L}_f'(z_0) = h'(z_0) = \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}.$$

□

Exercici 4.5.1. *Demostreu que:*

(i) $\sin z$ *i* $\cos z$ *són funcions enteres amb*

$$(\sin z)' = \cos z; \qquad (\cos z)' = -\sin z.$$

(ii) $\cos(-z) = \cos z$*, i també* $\sin(-z) = -\sin z$ *per a tot* $z \in \mathbb{C}$.

(iii) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

(iv) *Per a tot* $z, w \in \mathbb{C}$, $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$, $\sin(z + w) = \sin z \cos w - \cos z \cos w$. ◁

Exercici 4.5.2.

Resoleu les següents equacions:

a) $\sin z = 4$ *b)* $\cos z = i$. ◁

Exercici 4.5.3. *a) Proveu que* $\cos \overline{z} = \overline{\cos z}$ *i que* $\sin \overline{z} = \overline{\sin z}$*, per a tot* $z \in \mathbb{C}$.

b) Trobeu tots els zeros de les funcions sinus i cosinus.

c) Deduïu de (b) que, per a z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$*, es verifica:*

i) $\cos z_1 = \cos z_2$ *si, i només si,* $z_2 \pm z_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$.

ii) $\sin z_1 = \sin z_2$ *si, i només si,* $z_2 - z_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$ *o bé* $z_2 + z_1 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$.

d) Proveu que per a tot $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *se satisfà:*

i) $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ *(vegeu l'exercici 1.3.2).*

ii) $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.

iii) $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$.

iv) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$.

e) Sobre quines rectes està acotada la funció sinus? I la funció cosinus? ◁

Exercici 4.5.4. *(a) Proveu que per a cada* $w \in \mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$*, l'equació* $\tan z = w$ *té infinites solucions, que són la funció multivaluada*

$$\arctan w := \frac{1}{2i} \log \left(\frac{i - w}{i + w} \right).$$

Vegeu també que per a $w = \pm i$ *l'equació no té cap solució.*

(b) Vegeu que dues determinacions contínues de $\arctan w$ *en un conjunt connex* $E \subset \mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$ *difereixen de* $k\pi$, $k \in Z$.

(c) Vegeu que no hi ha cap determinació contínua de $\arctan w$ *als anells* $\{r < |w - i| < R\}$, $\{r < |w + i| < R\}$, $0 < r < R < 2$*, però que sí que n'hi ha si* $2 < r < R < +\infty$.

Exercici 4.5.5. *Demostra que el domini de continuïtat de la branca principal de l'arctangent*

$$\mathrm{Arctan} z := \frac{1}{2i} \mathrm{Log} \left(\frac{i - w}{i + w} \right).$$

és $\mathbb{C}\backslash\{iy : |y| \geqslant 1\}$. ◁

Exercici 4.5.6. *a) Sigui* $\mathcal{L}$ *la determinació del logaritme en* $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ *que compleix que* $\mathcal{L}(1) = 4\pi i$*. Definim* $f(z) := -\mathcal{L}(2-2z)$*. Demostreu que* f *és holomorfa en* $\mathbb{C}\backslash[1, +\infty)$*. Calculeu* $f(0)$ *i* $f(-i)$.

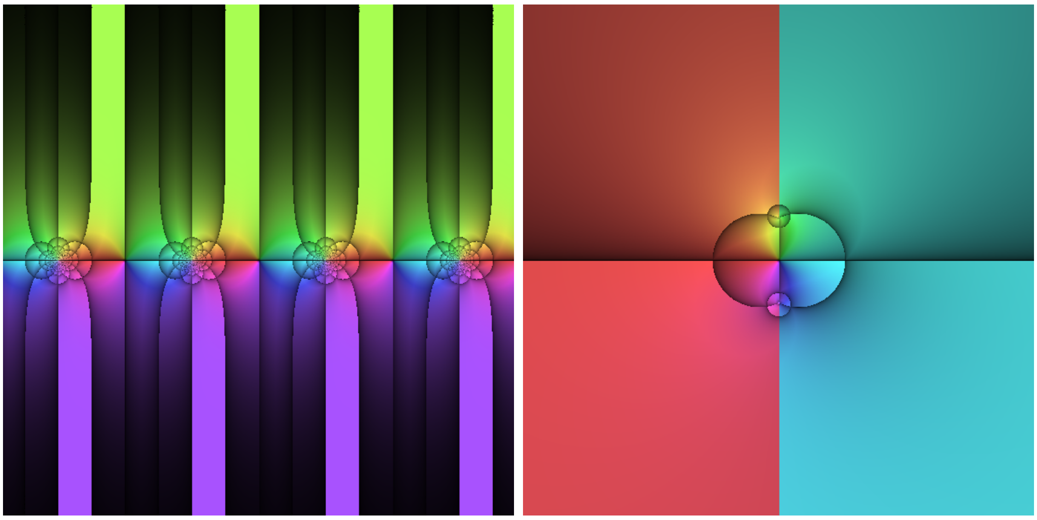


Figura 4.2: A l'esquerra, la tangent, a la dreta, la branca principal de l'arctangent.

b) Considereu la sèrie de potències

$$S(z) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(2z-1)^n}{n}.$$

Demostreu que $S(z) = -\mathrm{Log}\,(2-2z)$, *per tot* $z \in D := \mathbb{D}(1/2, 1/2)$, *on* Log *és la determinació principal del logaritme.*

c) Quina relació hi ha entre $S(z)$ *i* $f(z)$*? (Indicació: Relacioneu primer* $\mathcal{L}(z)$ *amb* $\mathrm{Log}\,(z)$ *per* $z \in \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$*).* ◁

Exercici 4.5.7. *Sigui* $\sqrt{\cdot}$ *la determinació de l'arrel quadrada en* $\mathbb{C} \backslash [0, \infty)$ *complint que* $\sqrt{-1} = i$ *i sigui* $f(z) = \sqrt{3z+2}$.

1. *Expresseu* $\sqrt{\cdot}$ *en termes d'una determinació del logaritme i argument.*

   Recordem que
   $$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} \log z} = e^{\frac{1}{2}(\ln |z| + i \arg z)}.$$

2. *Quina és la regió més gran of* f *és holomorfa? Quina és la imatge? Existeix* z *tal que* $f(z) = -i$*?*

3. *Què val* $f(\frac{i-2}{3})$*?* ◁

Exercici 4.5.8. *Trobeu el desenvolupament en sèrie de potències al voltant del punt* $a = 1$ *de la funció* $f(z) = \sqrt[3]{z}$ *on* $\sqrt[3]{\cdot}$ *denota la determinació de l'arrel cúbica definida a* $\mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$ *tal que* $\sqrt[3]{1} = e^{2\pi i/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. ◁

Exercici 4.5.9. *Els* polinomis de Legendre $P_j(\zeta)$ *són els coeficients de* z^j *en el desenvolupament de Taylor*

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\zeta z+z^2}}=\sum_{j=0}^{\infty}P_j(\zeta)z^j.$$

Provar que $P_j(\zeta)$ *és un polinomi de grau* j *i calcular* P_0, P_1, P_2 *i* P_3.

◁

5 Integrals de línia i teoria local de Cauchy

En aquest capítol expliquem com la integració del càlcul en diverses variables aplica al pla complex. Veurem en particular com integrar sobre corbes amb notació complexa, el teorema fonamental del càlcul per funcions amb primitives holomorfes, i una extensió d'aquest resultat anomenat teorema de Cauchy, on l'holomorfia es demana ja no a la primitiva si no a la pròpia funció a integrar, i a més es pot relaxar la hipòtesi d'holomorfia en un punt del domini per demanar-hi tan sols continuïtat. Aquest resultat ens portarà a la fórmula integral de Cauchy:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{(w-a)}\, dw, \qquad \text{per a tot } a \in D(z, R),$$

la pedra angular de la teoria local de l'anàlisi complexa, coneguda com a teoria local de Cauchy.

Un cop demostrada la fórmula integral de Cauchy, deduïrem un munt de propietats de les funcions holomorfes $f \in H(\Omega)$:

- Propietat de la mitjana: l'evaluació $f(z)$ coincideix amb la mitjana de la funció en una bola centrada en z.
- Analiticitat: podem expressar f localment com a sèrie de potències.
- Desigualtats de Cauchy: $|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!}{r^n} \sup_{|z-a|=r} |f(z)|, \qquad n \geqslant 0.$
- Teorema de Liouville: si $f \in H(\mathbb{C})$ és fitada, és constant.
- Teorema fonamental de l'àlgebra: tot polinomi de coeficients complexos té almenys una arrel.
- Teorema de Morera: si $g \in C(\Omega)$ integra 0 en vores de triangles, aleshores és holomorfa.
- Fórmula integral de Cauchy per derivades $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw$.
- Ordre dels zeros: si $f(a) = 0$ aleshores $f(z) = g(z)(z-a)^n$ amb g holomorfa i $g(a) \neq 0$.
- Principi de prolongació analítica: si els zeros de f tenen un punt d'acumulació en Ω, aleshores $f \equiv 0$.
- Principi del mòdul màxim: si el màxim absolut de $|f|$ en $\overline{\Omega}$ s'assoleix a l'interior, aleshores f és constant.

5.1 Corbes

Definició 5.1. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert. Una *corba* en Ω és una aplicació $\gamma : [a,b] \to \Omega$ contínua.

La imatge (recorregut) de γ és $\gamma^* = \gamma([a,b]) \subset \Omega$. Observeu que podria tenir interseccions. $\gamma(a)$ és el punt inicial, i $\gamma(b)$ és el punt final.

Diem que la corba és *tancada* si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Diem que la corba és *simple* si γ és injectiva (és a dir, no té interseccions).

Diem que γ és de classe C^1 si $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$, amb $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1$. En aquest cas, definim

$$\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t).$$

Una corba γ es diu que és C^1 *a trossos* si hi ha $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ de manera que $\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$ és de classe C^1 per $k = 1, \ldots, n$. Farem servir el nom de *camí* per indicar una corba C^1 a trossos. •

Definició 5.2. Una *reparametrització* de γ és una corba $\eta : [c,d] \to \Omega$ de manera que $\eta = \gamma \circ \varphi$, on $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ és una aplicació bijectiva.

En el cas de camins, les reparametritzacions són a més a més, de classe $\mathcal{C}^1$ a trossos.

La corba *inversa* de γ és la corba $\gamma^- : [a,b] \to \Omega$ definida per $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$ (és a dir, recorre la imatge en sentit contrari). •

En aquest cas, els recorreguts coincideixen, és a dir, $\eta^* = \gamma^*$, només canvia la velocitat en què la recorrem. Per exemple, una reparametrització de la corba $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ és $\eta(t) = e^{2it}$, $t \in [0, \pi]$.

Definició 5.3. Escrivim la *suma de camins*: $\gamma \vee \eta$ (recorrem primer γ i després η). •

Definició 5.4 (Longitud d'una corba)**.** Si $\gamma \in C^1$, la longitud de γ és

$$\mathrm{L}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

Si γ és un camí (corba C^1 a trossos), llavors

$$\mathrm{L}(\gamma) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)|\, dt.$$

•

Definició 5.5 (Integrals de funcions amb valors complexos)**.** Sigui $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ contínua. Definim

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b \mathrm{Re}\left(f(t)\right) dt + i \int_a^b \mathrm{Im}\left(f(t)\right) dt.$$

•

Lema 5.6 (Propietats de la integral)**.** *Si $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ són integrables (en sentit de Riemann o de Lebesgue), aleshores:*

(i) la integral és $\mathbb{C}$-lineal: si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, llavors

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\, dt = \alpha \int_a^b f(t)\, dt + \beta \int_a^b g(t)\, dt,$$

(ii) se satisfà la desigualtat triangular per integrals*:*

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

Demostració. Deixem la primera propietat com a exercici pel lector.

Per $A \in \mathbb{C}$, podem posar $|A| = e^{i\theta} A$. Llavors, aplicant (i), tenim

$$0 \leqslant \left| \int_a^b f(t)\, dt \right| = e^{i\theta} \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b e^{i\theta} f(t)\, dt.$$

Com que

$$\int_a^b e^{i\theta} f(t)\, dt \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b e^{i\theta} f(t)\, dt = \operatorname{Re}\left(\int_a^b e^{i\theta} f(t)\, dt \right),$$

amb el que, fent servir la definició de la integral d'una funció amb valors complexos, veiem que

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| = \operatorname{Re}\left(\int_a^b e^{i\theta} f(t)\, dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re}\left(e^{i\theta} f(t) \right) dt.$$

Com que $\operatorname{Re}\left(e^{i\theta} f(t) \right) \leqslant \left| e^{i\theta} f(t) \right| = |f(t)|$, obtenim el resultat. □

Exercici 5.1.1. *Proveu que l'el·lipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ és una corba diferenciable (és a dir, existeix una parametrització $z(t), t \in I$ que el seu rang és l'el·lipse, és diferenciable, $z'(t) \neq 0$ i $z(t)$ és injectiva. Diem que $z(t)$ és una parametrització admissible o regular).* ◁

Exercici 5.1.2. *Parametritzeu el contorn format pel perímetre del quadrat amb vèrtex $-1 - i, 1 - i, 1 + i$ i $-1 + i$ seguint aquest ordre. Quina és la seva longitud?* ◁

5.2 Integració sobre corbes

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínua, i $\gamma : [a, b] \to \Omega$ corba de classe C^1. Definim

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t)\, dt \qquad \text{i} \qquad \int_\gamma f(z)\, |dz| := \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\, |\gamma'(t)|\, dt.$$

En cas que γ sigui un camí (corba C^1 a trossos), ho partim a trossos:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f\big(\gamma(t)\big)\, \gamma'(t)\, dt \qquad \text{i} \qquad \int_\gamma f(z)\, |dz| := \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\, |\gamma'(t)|\, dt..$$

Exemple 5.7 (Exemple de dificultat de càlcul)**.** Sigui $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, i sigui $f(z) = e^z$. Llavors

$$\int_\gamma e^z\, dz = \int_0^{2\pi} e^{e^{it}}\, ie^{it}\, dt = \quad ?$$

Més endavant, al Corol·lari 5.10, veurem que aquesta integral dona zero. Fer el càlcul directe d'aquest tipus d'integrals pot ser una tasca díficil, encara que de vegades es pot calcular fàcilment. Per exemple, si $\gamma(t) = a + e^{ikt}$, $t \in [0, 2\pi]$ i $k \in \mathbb{Z}$ (donem k voltes al cercle de radi 1 centrat en el punt a: si $k > 0$ anem en sentit contrari a les agulles del rellotge, i al revés si $k < 0$), llavors

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{ik\, e^{ikt}}{e^{ikt}}\, dt = 2\pi ik.$$

$\diamondsuit$

Proposició 5.8 (Propietats)**.**

1. *Donat un camí γ, tenim*

$$\int_\gamma \big(\lambda f(z) + \mu g(z)\big)\, dz = \lambda \int_\gamma f(z) dz + \mu \int_\gamma g(z) dz, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

2. *Si recorrem la corba en sentit invers, el signe canvia, és a dir,*

$$\int_{\gamma^-} f(z)\, dz = -\int_\gamma f(z)\, dz$$

3. *Si γ és C^1 a trossos (camí), llavors*

$$\left|\int_\gamma f dz\right| \leqslant \int_\gamma |f|\, |dz| = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(\gamma(t))|\, |\gamma'(t)|\, dt.$$

En particular, si $|f| \leqslant M$ per a tot $z \in \gamma$, llavors $\left|\int_\gamma f dz\right| \leqslant M\, \mathrm{L}(\gamma)$.

4. *Si η és una reparametrització de γ, llavors*

$$\int_\gamma f(z) dz = \pm \int_\eta f(z) dz,$$

on el signe és positiu si la reparametrització preserva el sentit i negatiu en cas contrari.

Demostració. 1. Exercici.

2. Tenim $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$. Llavors

$$\int_{\gamma^-} f(z)\, dz = \int_a^b f\big(\gamma^-(t)\big)\, (\gamma^-)'(t)\, dt = -\int_a^b f\big(\gamma(a+b-t)\big)\, \gamma'(a+b-t)\, dt.$$

Fent el canvi de variable $s = a + b - t$, obtenim

$$\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_b^a f\big(\gamma(s)\big)\gamma'(s)(-ds) = -\int_a^b f\big(\gamma(s)\big)\gamma'(s)ds = -\int_\gamma f(z)dz.$$

3. Directe a partir de la definició de la integral sobre una corba i la propietat (ii) anterior.

4. Tenim $\eta = \gamma \circ \varphi$, i com que estem treballant amb corbes C^1, l'aplicació bijectiva $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ també ha de ser de classe C^1. Si $\varphi(c) = a$ (la reparametrització preserva el sentit), llavors

$$\int_\eta f(z)dz = \int_c^d f\big(\eta(t)\big)\,\eta'(t)\,dt = \int_c^d f\Big(\gamma\big(\varphi(t)\big)\Big)\gamma'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

Llavors, fent el canvi de variable $s = \varphi(t)$, obtenim

$$\int_\eta f(z)dz = \int_a^b f\big(\gamma(s)\big)\gamma'(s)ds = \int_\gamma f(z)dz.$$

Si, en canvi, la reparametrització no preserva el sentit, és a dir, si $\varphi(c) = b$, aleshores podem combinar aquesta demostració amb l'apartat 2 per obtenir el signe canviat. □

El següent resultat correspondria a una versió de la regla de Barrow del teorema fonamental del càlcul per integrals sobre corbes.

Teorema 5.9. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert i f contínua en Ω. Suposem que existeix F primitiva holomorfa de f (és a dir, $F' = f$). Aleshores, per a tot camí γ en Ω, es compleix*

$$\int_\gamma f(z)dz = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).$$

Demostració. Tenim

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} F'\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,dt.$$

Si posem $F(\gamma(t)) := g(t) = u(t) + iv(t)$, com que $(F \circ \gamma)'(t) = F'\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)$, es compleix que $(F \circ \gamma)'(t) = g'(t) = u'(t) + iv'(t)$, amb el que, aplicant la regla de Barrow usual a $\mathbb{R}$, obtenim

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (F \circ \gamma)'(t)\,dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt + i \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} v'(t)\,dt \\
&= \sum_{k=1}^n (u(t_k) - u(t_{k-1})) + i \sum_{k=1}^n (v(t_k) - v(t_{k-1})) \\
&= u(b) - u(a) + i(v(b) - v(a)) = g(b) - g(a) = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).
\end{aligned}$$

□

Corol·lari 5.10. *[Conseqüències]*

- *Si γ és un camí tancat en Ω i f té primitiva holomorfa en Ω, aleshores*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

  Per exemple, si $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, llavors $\int_\gamma e^z dz = 0$.

- *Si f té primitiva holomorfa en Ω, llavors $\int_\gamma f(z)dz$ no depèn del camí $\gamma \subset \Omega$. Només depèn dels punts inicials i finals (no cal ni parametritzar la corba). Per exemple, si γ és un camí que va de 1 a $2i$, aleshores*

$$\int_\gamma z^3 dz = \frac{z^4}{4}\Big]_1^{2i} = \left(\frac{(2i)^4}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4}.$$

Exercici 5.2.1. *Sigui $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ el cercle unitat amb l'orientació habitual. Avalueu, per a tots els $m \in \mathbb{Z}$:*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^m}, \qquad \int_\gamma \frac{|dz|}{z^m}, \qquad \int_\gamma \frac{dz}{|z^m|}, \qquad \int_\gamma \frac{|dz|}{|z^m|}, \qquad \triangleleft$$

Exercici 5.2.2. *Sigui $\gamma = \partial D(0, r)$. Calculeu, per a $n \in \mathbb{Z}$,* $\displaystyle\int_\gamma z^n\, dz.$ $\triangleleft$

Exercici 5.2.3. *Sigui $\gamma = [i + 1, -i]$. Avalueu les següents integrals de línia:*

a) $\int_\gamma \sin(2z)\, dz$ *b)* $\int_{|z|=1} ze^{z^2}\, dz$ *c)* $\int_{|z-2|=1} \frac{1}{z}\, dz$ $\triangleleft$

Exercici 5.2.4. *Avaluar les següents integrals.*

a) $\displaystyle\int_C \left(\frac{6}{(z-i)^2} + \frac{2}{z-i} + 1 - 3(z-i)^2\right) dz$ *si C és $|z - i| = 4$ recorreguda un cop amb l'orientació estàndard.*

b) $\displaystyle\int_\gamma (x - 2xyi)dz$ *al llarg del contorn $\gamma : z = t + it^2$ amb $t \in [0, 1]$.*

c) $\displaystyle\int_\gamma (|z - 1 + i|^2 - z)dz$ *al llarg de la semicircumferència $\gamma : z = 1 - i + e^{it}$ on $t \in [0, \pi]$.*

d) La funció no analítica $f(z) = x^2 + iy$ (per què?) al llarg de $|z| = 1$ recorreguda un cop en sentit antihorari. $\triangleleft$

Exercici 5.2.5. *Calcular les següents integrals al llarg del camí γ que s'indica.*

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z}dz$ *per qualsevol contorn en el semiplà dret que va de* $-3i$ *a* $3i$*. Quin problema tenim si seguim un contorn pel semiplà esquerre? (Indicació: considerar la determinació principal del logaritme en la qual el logaritme no està definit si* $y = 0, x \leqslant 0$*.)*

b) $\displaystyle\int_\gamma e^z \cos z dz$ *per un camí d'origen* $a = i$ *i final* $b = \pi$*.*

c) $\displaystyle\int_\gamma z^{1/2} dz$ *per la branca principal de* $z^{1/2}$ *per un camí d'origen* $a = i$ *i final* $b = \pi$ *que no talli la semirecta* $(-\infty, 0]$*.* ◁

Exercici 5.2.6.
Considerem la determinació de l'arrel $\sqrt{z^2-1}$ *que és holomorfa a* $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ *i positiva a* $(1,\infty)$*.*

(a) Vegeu que $z + \sqrt{z^2-1}$ *omet l'eix real negatiu si* $z \in \Omega = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 1]$*, de manera que la determinació principal* $\operatorname{Log}(z + \sqrt{z^2-1})$ *és definida a* Ω*.*

(b) Vegeu que $\operatorname{Log}(z + \sqrt{z^2-1})$ *és una primitiva de* $\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$ *a* Ω*.*

(c) Avalueu $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}$*, on* γ *és el tros de cercle* $|z-1| = \sqrt{2}$ *que va de* i *a* $-i$ *passant pel semiplà de la dreta (*$\operatorname{Re} z > 0$*).*

Indicació: comproveu que $\sqrt{z^2-1} = e^{\frac{1}{2}(\operatorname{Log}(z-1)+\operatorname{Log}(z+1))}$ *s'estén a* $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ *de manera contínua.*

◁

Exercici 5.2.7. *Siguin* $\gamma_1 := \{|z| = 1 : \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ *i* $\gamma_2 := \{|z| = 2 : \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$*. Demostreu que:*

a) $\displaystyle\left|\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2+2}\right| \leqslant \pi$

b) $\displaystyle\left|\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2+1}\right| \leqslant \frac{\pi}{3}$

c) $\displaystyle\left|\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2}\, dz\right| \leqslant 2\pi e$

d) $\displaystyle\left|\int_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{z^2}\, dz\right| \leqslant \pi e^2.$ ◁

Exercici 5.2.8. *(a) Sigui* γ *un camí en* $\mathbb{C}$*. Proveu que si* f *és una funció contínua en* γ^* *llavors*

$$\overline{\int_\gamma f(z)\, dz} = \int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{z})}\, dz.$$

(b) Deduïu que si f *és una funció contínua en el cercle unitat llavors*

$$\overline{\int_{|z|=1} f(z)\, dz} = -\int_{|z|=1} \overline{f(z)}\, \frac{dz}{z^2}.$$ ◁

5.3 Teorema de Cauchy

El següent resultat, anomenat teorema de Cauchy-Goursat o també teorema de Cauchy per triangles, és un resultat clau per tal de provar el teorema de Cauchy per un disc o per oberts convexos. Aquests resultats seran suficients per a veure la formula integral de Cauchy i les conseqüències de la teoria local.

Teorema 5.11 (Cauchy-Goursat)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, $p \in \Omega$ i $f \in C(\Omega) \cap H(\Omega \backslash \{p\})$. Llavors*

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0$$

per a tot triangle $T \subset \Omega$.

Observació 5.12.

1. Ens cal tenir tot el triangle ple T dins de Ω. És a dir, si la frontera del triangle ∂T envolta un forat de Ω, llavors no s'aplica.
2. En cas que f sigui holomorfa a tot Ω excepte un punt p, però f no és contínua en p, tampoc s'aplica. •

Demostrem abans un cas particular:

Proposició 5.13. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert i $f \in H(\Omega)$. Llavors $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$ per a tot triangle $T \subset \Omega$.*

Demostració. Tenim orientada la frontera ∂T del nostre triangle en sentit contrari a les agulles del rellotge. Fent servir els punts mitjos de cada segment, partim el nostre triangle T en 4 triangles T_1, T_2, T_3, T_4. Totes les fronteres ∂T_i d'aquests triangles venen orientats en sentit contrari a les agulles del rellotge, amb el que el triangle del mig te els costats orientats en sentit contrari als costats comuns dels altres triangles (així quan es fa la suma de les integrals sobre la frontera d'aquests 4 triangles, les integrals en els segments del mig es cancel·len, al calcular-se un en un sentit, i l'altre en sentit contrari). És convenient que us feu el dibuix. Llavors

$$\int_{\partial T} f = \int_{\partial T_1} f + \int_{\partial T_2} f + \int_{\partial T_3} f + \int_{\partial T_4} f.$$

Observem que

$$\mathrm{L}(\partial T_j) = \frac{1}{2}\mathrm{L}(\partial T); \quad \mathrm{diam}(T_j) = \frac{1}{2}\mathrm{diam}(T), \qquad 1 \leqslant j \leqslant 4.$$

Anomenem $T^{(1)}$ el triangle dels 4 amb

$$\left|\int_{\partial T^{(1)}} f\right| \geqslant \left|\int_{\partial T_j} f\right|, \qquad 1 \leqslant j \leqslant 4.$$

Llavors
$$\left|\int_{\partial T} f\right| \leqslant 4\left|\int_{\partial T^{(1)}} f\right|$$
Repetim el procés amb $T^{(1)}$ per tal d'obtenir un altre triangle $T^{(2)}$ amb propietats anàlogues. De manera inductiva, obtenim una successió $\{T^{(k)}\}$ de triangles de manera que

(i) $T^{(1)} \supset T^{(2)} \supset \cdots \supset T^{(k)} \supset \ldots$;

(ii)
$$\left|\int_{\partial T^{(k)}} f\right| \leqslant 4\left|\int_{\partial T^{(k+1)}} f\right|;$$

(iii) $\mathrm{L}\,(\partial T^{(k+1)}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}(\partial T^{(k)})$ i també $\mathrm{diam}(T^{(k+1)}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{diam}(T^{(k)})$.

Tot això implica que

(a)
$$\left|\int_{\partial T} f\right| \leqslant 4^n\left|\int_{T^{(n)}} f\right|;$$

(b) $\mathrm{L}\,(\partial T^{(n)}) = 2^{-n}\,\mathrm{L}(\partial T)$ i també $\mathrm{diam}(T^{(n)}) = \frac{1}{2^n}\,\mathrm{diam}(T)$.

De (b) se segueix que $diam(T^{(n)}) \to 0$, amb el que juntament amb (i), tenim una successió decreixent de compactes en un espai mètric complet amb diametres que tendeixen a zero. Llavors
$$\bigcap_k T^{(k)} = \{z_0\}.$$
Aquest resultat és com el teorema dels intervals encaixats, i se sol veure en assignatures anteriors del grau de matemàtiques.

Fixem $\varepsilon > 0$. Com que f és holomorfa en z_0, podem trobar $\delta > 0$ de manera que $D(z_0, \delta) \subset \Omega$ i
$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon, \qquad 0 < |z - z_0| < \delta.$$
En altres paraules, tenim
$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon\,|z - z_0|, \qquad 0 < |z - z_0| < \delta. \tag{5.1}$$
Prenem n prou gran de manera que $\mathrm{diam}(T^{(n)}) = 2^{-n}\mathrm{diam}(T) < \delta$. Com que $z_0 \in T^{(n)}$, se segueix que $T^{(n)} \subset D(z_0, \delta)$.

Com que la funció $g_0(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ té primitiva holomorfa (ja que és un polinomi holomorf), tenim que
$$\int_{\partial T^{(n)}} g_0(z)dz = 0,$$
i per tant
$$\left|\int_{\partial T^{(n)}} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial T^{(n)}} (f(z) - g_0(z))dz\right| = \left|\int_{\partial T^{(n)}} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0))\,dz\right|.$$

Aplicant (5.1) obtenim

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial T^{(n)}} f(z)dz\right| &< \varepsilon \int_{\partial T^{(n)}} |z - z_0|\,|dz| \leqslant \varepsilon\,\mathrm{diam}(T^{(n)})\,\mathrm{L}(\partial T^{(n)}) \\ &= \varepsilon\, 4^{-n}\,\mathrm{diam}(T)\,\mathrm{L}(\partial T).\end{aligned}$$

Per tant, per (a), veiem que

$$\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| < \varepsilon\,\mathrm{diam}(T)\,\mathrm{L}(\partial T).$$

Com que $\varepsilon > 0$ és arbitrari i $\mathrm{diam}(T)$ i $\mathrm{long}(\partial T)$ són fixes, se segueix que

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0,$$

tal i com volíem veure. □

Demostració del teorema de Cauchy-Goursat. En cas que el punt p, on no sabem si f és holomorfa, es trobi fora del triangle ple T, simplement podem agafar una regió Ω' amb $p \notin \Omega'$ de manera que $T \subset \Omega'$. Com $f \in H(\Omega')$, aplicant la proposició 5.13 obtenim $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$.

En cas que el punt p es trobi en el triangle ple T, sempre ens reduirem al cas que p sigui un dels vèrtexs del triangle. Anem doncs a fer aquest cas primer.

Si p és un dels vèrtexs del triangle, fixem $\varepsilon > 0$, i partim el triangle T en dos parts. Un que sigui un petit triangle T_ε de diàmetre $< \varepsilon$ amb vèrtex p, i l'altre part quedaria un trapezi Z. Com que el trapezi el podem partir en dos triangles, i el punt p queda fora dels dos triangles plens, aplicant el cas anterior tenim que

$$\int_{\partial Z} f(z)dz = 0.$$

Llavors

$$\int_{\partial T} f(z)dz = \int_{\partial Z} f(z)dz + \int_{\partial T_\varepsilon} f(z)dz = \int_{\partial T_\varepsilon} f(z)dz.$$

Com que f és contínua en Ω, en particular és contínua en el compacte T, amb el que hi ha una constant positiva M de manera que $|f(z)| \leqslant M$ per a tot $z \in T$. En particular, $|f(z)| \leqslant M$ per a tot $z \in T_\varepsilon$, i M no depèn de ε. Llavors

$$\left|\int_{\partial T_\varepsilon} f(z)dz\right| \leqslant \int_{\partial T_\varepsilon} |f(z)|\,|dz| \leqslant M\,\mathrm{L}(\partial T_\varepsilon) < 3M\,\varepsilon.$$

Com que ε és arbitrari, deduïm que $\int_{\partial T_\varepsilon} f(z)dz = 0$, amb el que en aquest cas també tenim

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

Si p es troba en ∂T, llavors ajuntem p amb el vèrtex del triangle que no es troba en el segment que conté p, per formar dos triangles, i pel cas anterior obtenim que $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$.

Si p es troba a l'interior del triangle T, ajuntem aquest punt amb tots els vèrtexs del triangle formant tres triangles, i aplicant el cas anterior veiem que $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$. $\square$

Teorema 5.14 (Teorema de Cauchy per un disc). *Sigui D disc obert i $f \in C(D)$. Si $f \in H(D \backslash \{p\})$, llavors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

per a tot camí tancat γ en D.

Demostració. Per un teorema anterior, només cal provar que f té primitiva holomorfa en D. Fixem $a \in D$, i definim

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(w)\, dw, \qquad z \in D,$$

on $[a, z]$ és el segment que uneix a amb z.

Sigui $z_0 \in D$ i anem a provar que F és holomorfa en z_0 amb $F'(z_0) = f(z_0)$. Ens cal provar que

$$\lim_{|h| \to 0} \left| \frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} - f(z_0) \right| = 0.$$

Considerem el triangle ∂T amb vèrtexs a, $z_0 + h$, z_0 amb $|h|$ prou petit per tal que $z_0 + h \in D$. Com que tot el triangle ple T es troba dins del disc D, aplicant el teorema de Cauchy-Goursat, obtenim que

$$\int_{\partial T} f(w)dw = 0.$$

És a dir,

$$\int_{[a,z_0+h]} f(w)dw + \int_{[z_0+h,z_0]} f(w)dw - \int_{[a,z_0]} f(w)dw = 0,$$

amb el que, tenint en compte la definició de F, tenim

$$F(z_0 + h) - F(z_0) = -\int_{[z_0+h,z_0]} f(w)dw = \int_{[z_0,z_0+h]} f(w)dw.$$

Per tant, com que $f(z_0) = \frac{1}{h} \int_{[z_0,z_0+h]} f(z_0)dw$, arribem a la desigualtat

$$\left| \frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} - f(z_0) \right| \leqslant \frac{1}{|h|} \int_{[z_0,z_0+h]} |f(w) - f(z_0)|\, |dw|.$$

Fixem $\varepsilon > 0$. Com que f és contínua en z_0, hi ha $D > 0$ de manera que $|f(w) - f(z_0)| < \varepsilon$ si $|w - z_0| < D$. Prenent doncs h amb $|h| < D$, obtenim

$$\left| \frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} - f(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{|h|} L\big([z_0, z_0 + h]\big) = \varepsilon,$$

ja que la longitud del segment $[z_0, z_0 + h]$ és $|h|$. $\square$

Observació 5.15. Per tal de poder fer aquesta prova, ha estat clau el fet que podem triar $|h|$ de manera que el triangle amb vèrtexs a, $z_0 + h$, z_0 es trobi dins de D. Això mateix ho podem fer si agafem un obert convex. Recordem que un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ es diu *convex* si

$$a, b \in \Omega \quad \Rightarrow \quad [a, b] \subset \Omega.$$

Aleshores, la mateixa prova ens serveix canviant D disc obert, per Ω obert convex, amb el que obtenim el següent resultat. •

Teorema 5.16 (Teorema de Cauchy per oberts convexos)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert convex, i $f \in C(\Omega) \cap H(\Omega \backslash \{p\})$. Llavors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

per a tot camí tancat γ en Ω.

Exercici 5.3.1. *Recordeu que* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

(a) Proveu que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ia)^2} dx = \sqrt{\pi}$ *per a tot* $a > 0$. *(Indicació: Apliqueu el teorema de Cauchy al rectangle* $[-R, R] \times [0, a]$.*)*

(b) Proveu que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cos(nx)\, dx = \sqrt{2\pi} e^{-n^2/2}$, $n \in \mathbb{Z}$. ◁

Exercici 5.3.2. *Determineu el domini d'holomorfia de les funcions f donades i digueu perquè* $\oint_{|z|=2} f(z)dz = 0$.

a) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2 - 6z + 10}$,

b) $f(z) = \operatorname{Log}(z + 3)$. ◁

5.4 Fórmula integral de Cauchy

Hem provat Les versions locals del teorema de Cauchy, provant el teorema de Cauchy per a un triangle i el teorema de Cauchy en oberts convexos. El proper resultat és la fórmula integral de Cauchy i obtindrem les conseqüències més importants de la teoria local: desenvolupament local en sèries de potències d'una funció holomorfa, zeros de funcions holomorfes (factorització local), principi de prolongació analítica, desigualtats de Cauchy, teorema de Liouville, teorema fonamental de l'àlgebra, teorema de l'aplicació oberta i principi del mòdul màxim.

Teorema 5.17 (Fórmula integral de Cauchy (versió local))**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert i $f \in H(\Omega)$. Suposem que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \qquad |z_0 - a| < r,$$

on $\gamma_r(t) = a + re^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Observació 5.18. Ens cal tenir tot el disc tancat $\overline{D_r(a)}$ dins de Ω. Aleshores, el resultat no s'aplicaria necessàriament si, per exemple, $\Omega = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ i $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, encara que f fos contínua en $\overline{D}$ (ens caldria tenir f holomorfa en un obert que contingui $\overline{\mathbb{D}}$). •

Demostració. Com que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$, hi ha $r_1 > r$ de manera que $\overline{D_r(a)} \subset D := D(a, r_1) \subset \Omega$. Fixem $z_0 \in \Omega$, i definim la funció

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si} \quad z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si} \quad z = z_0. \end{cases}$$

Clarament g és holomorfa en $D \backslash \{z_0\}$. Vegem que g és també contínua en z_0, ja que al ser f holomorfa, aleshores

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = g(z_0).$$

Així doncs, tenim que $g \in C(D) \cap H(D \backslash \{z_0\})$. Com que $\gamma_r \subset D$, pel teorema de Cauchy per un disc se segueix que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} g(z)\, dz = 0.$$

És a dir,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz = 0.$$

Per tant,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z - z_0} \right).$$

Per acabar la prova, ens cal veure que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z - z_0} = 1, \qquad z_0 \in D_r(a).$$

Tenim

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}\, dt}{re^{it} + (a - z_0)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + (a - z_0)}{re^{it} + (a - z_0)}\, dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a - z_0)\, dt}{re^{it} + (a - z_0)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a - z_0)\, dt}{re^{it} + (a - z_0)}.$$

Per tant, només cal provar que

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{(a - z_0)\,dt}{re^{it} + (a - z_0)} = 0.$$

Si $z_0 = a$ no hi ha res a provar. Llavors suposem que $z_0 \neq a$. Fent el canvi $w = e^{-it}$, que dóna $dw = -ie^{-it}dt$, veiem que

$$I = (a - z_0) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{e^{it}(r + (a - z_0)e^{-it})} = -\frac{(a - z_0)}{i} \int_{|w|=1} \frac{dw}{r + (a - z_0)w}.$$

Aquí estem integrant sobre la corba $|w| = 1$, on fem servir aquesta notació per indicar la corba $\sigma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Igualment, moltes vegades farem us de la notació $\int_{|z-a|=r}$ per indicar que estem integrant sobre la corba $\sigma_a(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ (fent només una volta al cercle). Ara, posant

$$g(w) = \frac{1}{r + (a - z_0)w},$$

només ens cal provar que $\int_{|w|=1} g(w)dw = 0$, i això ens ho dóna el teorema de Cauchy per un disc, si podem veure que g és holomorfa en un disc centrat al 0 de radi $R > 1$. Ara bé, g és holomorfa a tot $\mathbb{C}$ excepte en el punt $w_0 = \frac{r}{z_0 - a}$, i com que $|w_0| > 1$, podem trobar tal R, amb el que ja hem provat el que es demanava. □

Observació 5.19. Aplicant el teorema de Cauchy per oberts convexos, fent servir la mateixa prova, podem demostrar el següent resultat:

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert convex, γ camí tancat de Ω i $f \in H(\Omega)$. Aleshores

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = f(z_0)\,Ind(\gamma, z_0), \qquad z_0 \notin \gamma^*,$$

on

$$Ind(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

és l'índex de γ respecte el punt z_0. Més endavant, veurem la interpretació geomètrica de l'índex com també algunes propietats (essencialment compta el número de voltes que fa γ al voltant del punt z_0). •

Exercici 5.4.1. *Avalueu, usant la fórmula integral de Cauchy, les següents integrals:*

a) $\int_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1}dz$;

b) $\int_{|z|=1} \frac{\sin(e^z)}{z}dz$;

c) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1}$;

d) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+z+1}$;

e) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+2z-3}$;

f) $\int_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{\cos(z)}{z^2(z^2-\pi^2)}dz$;

g) $\int_{|z|=3} \frac{3z-2}{z^2-z}dz$;

h) $\int_{|z+1|=1} \frac{1}{z^2-1}dz$. ◁

Exercici 5.4.2. *Sigui p un polinomi de grau n, amb tots els seus zeros continguts en $D(0,R)$. Demostreu que*

$$\int_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)}\, dz = 2\pi i n. \quad \triangleleft$$

Exercici 5.4.3. *Sigui $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Calculeu la integral de línia $\int_{|z|=1} \left(\frac{2}{z-a} - \frac{1}{z} \right) dz$, i deduïu que*

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)\, dt}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)} = 2\pi, \quad \text{per a tot } 0 \leqslant r < 1 \text{ i } \theta \in \mathbb{R}. \quad \triangleleft$$

Exercici 5.4.4. *Siguin $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, on Ω és un domini tal que $\overline{\mathbb{D}} \subset \Omega$. Donat $a \in \mathbb{C}$ amb $|a| \neq 1$, calculeu*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \left(\frac{f(w)}{w-a} - \frac{a g(w)}{aw - 1} \right) dw. \quad \triangleleft$$

Exercici 5.4.5. *Es consideren els següent exercicis relacionats amb la Fórmula Integral de Cauchy.*[1]

a) Calculeu $\oint_C \frac{z^2}{z^4 - 1} dz$ sobre la circumferència de radi 3 centrada en 0.

b) És cert que $\oint_C \frac{e^z}{z} = 0$ si C és tancada i simple?

Exercici 5.4.6. Fórmula integral de Poisson. *Sigui ϕ funció harmònica en un domini que contingui el disc $|z| \leqslant R$. Provar que llavors per $0 \leqslant r \leqslant R$*

$$\phi(re^{i\theta}) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\phi(Re^{it})}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(t - \theta)} dt.$$

$\triangleleft$

Exercici 5.4.7. *El* problema de Dirichlet *consisteix en trobar una funció harmònica en un domini obert Ω que sigui contínua fins la seva frontera $\partial\Omega$ i amb un valor prefixat a $\partial\Omega$. Suposem que ϕ_1 i ϕ_2 són harmòniques a Ω i contínues fins a $\partial\Omega$ i que $\phi_1 = \phi_2$ a la vora $\partial\Omega$. Provar que $\phi_1 = \phi_2$ en tot punt de Ω. (Indicació: aplicar el principi del màxim (mínim) a $\phi_1 - \phi_2$.)* $\triangleleft$

Exercici 5.4.8. *Una distribució estacionària T de la temperatura en una regió Ω és una fiunció harmònica. Trobeu la temperatura T a l'interior d'un disc de radi 1 si sabem la temperatura val 1 al primer quadrant de la circumferència de frontera i 0 a la resta de punts de la vora. En particular veieu que la temperatura al centre del disc és $1/4$.* $\triangleleft$

[1] De vegades es fa servir la notació $\oint$ per indicar que la integral és sobre un circuit tancat.

5.5 Propietat de la mitjana i sèries de potències

Tot seguit passem a estudiar les conseqüències directes de la fórmula integral de Cauchy. Comencem per la propietat de la mitjana.

Lema 5.20 (Propietat de la mitjana). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, $f \in H(\Omega)$ i suposem que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt.$$

Demostració. Per la fórmula integral de Cauchy, tenim

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

Parametritzant la corba fent $z = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, ens queda

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{it})}{re^{it}}\, ire^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt.$$

□

Teorema 5.21 (Desenvolupament local en sèrie de potències). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert. Tota funció holomorfa en Ω és localment una sèrie de potències. Concretament, si $R_a = dist(a, \mathbb{C}\backslash\Omega)$, aleshores*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \qquad \text{per tot } |z-a| < R_a,$$

amb

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw, \qquad \text{per tot } r < R_a$$

i el radi de convergència de la sèrie és major o igual a R_a.

Demostració. Per $0 < r < R_a$, tenim $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Aplicant la fórmula integral de Cauchy obtenim

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{w-z}\, dw, \qquad |z-a| < r.$$

Volem escriure aquesta integral com una sèrie de potències. Tenim

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{(w-a)\left(1 - \frac{(z-a)}{w-a}\right)}.$$

Ara, observem que per w amb $|w-a| = r$, tenim

$$\left|\frac{z-a}{w-a}\right| = \frac{|z-a|}{r} < 1,$$

i per tant

$$\frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{w-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n.$$

Llavors

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}.$$

Introduïnt aquesta expressió en la fórmula integral de Cauchy, obtenim

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-a|=r}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f(w)\,\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\right) dw.$$

Ara volem intercanviar l'ordre d'integració amb el sumatori. Això ho podem fer si la sèrie de funcions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ convergeix uniformement en $\{|w-a|=r\}$, on

$$f_n(w) = f(w)\,\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}.$$

Per w amb $|w-a|=r$, tenim

$$|f_n(w)| \leqslant \left(\max_{w:|w-a|=r}|f(w)|\right)\frac{|z-a|^n}{|w-a|^{n+1}} \leqslant \frac{C_r}{r}\left(\frac{|z-a|}{r}\right)^n.$$

Com que $|z-a|<r$, llavors $\sum_n\left(\frac{|z-a|}{r}\right)^n < \infty$, amb el que aplicant el criteri M de Weierstrass, se segueix que la sèrie $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ convergeix uniformement en $\{|w-a|=r\}$. Intercanviant doncs la integració amb el sumatori, tenim que per $|z-a|<r$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-a|=r}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw\right)(z-a)^n.$$

□

Corol·lari 5.22. *Sigui $\Omega\subset\mathbb{C}$ obert i $f\in H(\Omega)$. Aleshores $f\in C^{\infty}(\Omega)$ i totes les seves derivades són holomorfes.*

Demostració. Com que això ja ho sabem per sèries de potències, és conseqüència del resultat anterior. □

Exercici 5.5.1. *Desenvolupeu en sèrie de potències al voltant del punt a i doneu el radi de convergència de:*

a) $1/z$, $a=1$,

b) z^2e^z, $a=0$,

c) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $a=0$,

d) $\frac{1}{(1-z)^3}$, $a=0$,

e) $\frac{e^z}{1-z}$, $a=0$,

f) $\frac{1}{1+e^z}$, $a=0$.

(en (e) i (f) només cal calcular els 3 primers termes). ◁

Exercici 5.5.2. *Sigui $\alpha \in \mathbb{C}$, provar que si $(1+z)^\alpha$ es pensa com $e^{\alpha \operatorname{Log}(1+z)}$ llavors per $|z| < 1$*

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3 + \cdots$$

(generalització del binomi de Newton).

Exercici 5.5.3. *Trobeu els desenvolupament en sèrie de potències al voltant del punt a de les següents funcions:*

a) $f(z) = \cos^2 z$, $a = 0$.

b) $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$, $a = 1$.

c) $\sqrt[3]{z}$, $a = 1$.

Aquí $\sqrt[3]{\cdot}$ és la determinació de l'arrel cúbica en $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ que val $(-1+i\sqrt{3})/2$ en $z = 1$. ◁

Exercici 5.5.4. *Considereu la funció* $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-1)(z+i)z}$ *i el punt $a = -1$.*

1. *"Sense fer cap càlcul", raoneu quin és el disc de convergència de la sèrie de potències de f al voltant del punt a.*

2. *Calculeu la sèrie de potències de f al voltant de a.* ◁

Exercici 5.5.5. *a) Es pot desenvolupar $\sqrt{z}$ en sèrie de potències en un entorn de l'origen?*

b) Quin és el disc màxim centrat a 0 on es pot desenvolupar $\cos(1/(z-1))$ en sèrie de potències?

c) I la funció $\dfrac{1}{2-z} + \dfrac{z}{3-z}$*?*

Exercici 5.5.6. *Determinar com a mínim els coeficients a_1, a_2, a_3, a_4 de la sèrie de Taylor de $1/(1+z+z^4)$. Expliqueu perquè el radi de convergència és com a mínim $2/3$.*

5.6 Fórmula integral de Cauchy centrada per derivades i desigualtats de Cauchy

Com que també sabem que $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ (vegeu l'observació 4.28), obtenim el següent resultat

Lema 5.23 (Fórmula integral de Cauchy centrada per derivades)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, $f \in H(\Omega)$ i sigui $a \in \Omega$ i $r > 0$ de manera que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw.$$

Exemple 5.24. Passem a calcular

$$I = \int_{|z-1|=1} \frac{ze^z}{(z-1)^2}\, dz.$$

La funció $f(z) = ze^z$ és entera. Llavors, per la fórmula integral de Cauchy per derivades, tenim

$$I = \int_{|z-1|=1} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz = 2\pi i\, f'(1) = 4\pi i\, e.$$

◊

Lema 5.25 (Desigualtats de Cauchy)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, $f \in H(\Omega)$, i sigui $a \in \Omega$ i $r > 0$ de manera que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors*

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!\, M_r}{r^n}, \qquad n \geqslant 0,$$

on $M_r = \sup_{|z-a|=r} |f(z)|$.

Observació 5.26. En particular, tenim $|f(a)| \leqslant \sup_{|z-a|=r} |f(z)|$. •

Demostració. Aplicant la fórmula integral de Cauchy per derivades, tenim

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw.$$

Per tant

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(a)| &\leqslant \frac{n!}{2\pi} \int_{|w-a|=r} \frac{|f(w)|}{|w-a|^{n+1}}\, |dw| = \frac{n!}{2\pi\, r^{n+1}} \int_{|w-a|=r} |f(w)|\, |dw| \\ &\leqslant \frac{n!}{2\pi\, r^{n+1}}\, M_r\, \mathrm{L}\left(\{|w-a| = r\}\right) = \frac{n!\, M_r}{r^n}. \end{aligned}$$

□

Observació 5.27. La desigualtat no es pot millorar. Per exemple, sigui $f(z) = z^n$, $a = 0$ i $r = 1$. En aquest cas, $M = M_1 = \sup_{|z|=1} |f(z)| = 1$, i també tenim $f^{(n)}(0) = n!$, amb el que $|f^{(n)}(0)| = n!\, M$. •

Exercici 5.6.1. *Donat $r > 0$ i $a \in \mathbb{C}$ calculeu*

$$I = \int_{|z-a|=r} \frac{e^{2z}}{(z-a)^3} dz.$$ ◃

Exercici 5.6.2. *Siguin* $0 \leqslant m \leqslant n$ *enters. Calculeu*

$$\int_{|z|=1} \frac{(1+z)^n}{z^{m+1}}\, dz.$$

◁

Exercici 5.6.3. *Intentem calcular* $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ *fent servir la fórmula integral de Cauchy per derivades (potser cal recordar la desigualtat* $|\int_\Gamma f(z)dz| \leqslant \int_\Gamma |f(z)||dz|$*.)*

a) Considereu la semicircumferència C *en el semiplà superior centrada a* 0 *amb radi* R *i tancada pel segment de l'eix* OX*. Calculeu* $\displaystyle\int_C \frac{1}{(1+z^2)^2} dz$*.*

b) Descomposar $C = C_1 \cup C_2$ *on* C_1 *és el segment de* $-R$ *a* R *i* C_2 *la part restant de* C*. Fent servir la desigualtat triangular per integrals donar una fita superior de* $\left|\displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz\right|$.

c) Fent servir els apartats anteriors calcular $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz$*. Que passa si* R *tendeix a infinit?* ◁

Exercici 5.6.4. *Sigui* $\alpha > 0$ *i* $f \in H(D(0,1))$ *complint que existeix* $c > 0$ *i per a tot* $|z| < 1$, $(1-|z|)^\alpha |f(z)| \leqslant c$*. Demostreu que per a tot* $n \geqslant 0$, $|f^{(n)}(0)| \leqslant cn! \left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha (n+\alpha)^\alpha$*.* ◁

Exercici 5.6.5. *(a) Sigui* f *una funció entera tal que existeixen constants* $n \in \mathbb{N}$, $C > 0$ *i* $R > 0$ *tals que* $|f(z)| \leqslant C|z|^n$*, per a* $|z| \geqslant R$*. Demostreu que* f *és un polinomi de grau més petit o igual que* n*.*

(b) Deduïu que si f *és una funció entera amb* $\lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$*, llavors* f *és un polinomi. (Indicació: Demostreu que* f *només té un nombre finit de zeros* $a_1, \ldots, a_n$ *(comptant multiplicitats) i apliqueu l'apartat (a) a la funció* $F = P/f$*, on* $P(z) = (z-a_1)\cdots(z-a_n)$*.)* ◁

Exercici 5.6.6. *Sigui* f *una funció entera de manera que existeixen constants* $C, M > 0$ *tals que* $|f(z)|e^{-C|z|} \leqslant M$ *per a tot* $z \in \mathbb{C}$*. Demostreu que* $|f'(z)|e^{-C|z|} \leqslant CMe$ *per a tot* $z \in \mathbb{C}$*.*

Indicació. Apliqueu la desigualtat de Cauchy al cercle centrat a z *i radi* r *per provar que* $|f'(z)|e^{-C|z|} \leqslant \frac{M}{r} e^{Cr}$ *per a tot* $r > 0$ *i* $z \in \mathbb{C}$*. Avalueu a* $r = 1/C$*.* ◁

Exercici 5.6.7. *(a) Suposem que una funció* f *entera satisfà que* $|f(z)| \leqslant M$ *si* $|z| = R$*. Demostreu que els coeficients* c_k *de la seva sèrie de Taylor centrada a* $a = 0$ *compleixen*

$$|c_k| \leqslant \frac{M}{R^k}.$$

(b) *Suposem que el mòdul d'un polinomi $P(z)$ està acotat per 1 pels z al disc unitat. Demostreu que tots els coeficients de P tenen mòdul acotat per 1.* ◃

Exercici 5.6.8. *Proveu que si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $|f(z)| \leqslant |e^{iz}|$ per a tot $z \in \mathbb{D}$, aleshores, per a tot $n \in \mathbb{N}$,*

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant n!\, e.$$ ◃

5.7 Teorema de Liouville i teorema fonamental de l'àlgebra

Teorema 5.28 (Teorema de Liouville)**.** *Tota funció entera i fitada és constant.*

Demostració. Sigui $z \in \mathbb{C}$. Per a tot $R > 0$, tenim $\overline{D(z,R)} \subset \Omega = \mathbb{C}$ i $f \in H(\mathbb{C})$. Com que $|f(w)| \leqslant M$ per a tot $w \in \mathbb{C}$, aplicant les desigualtats de Cauchy amb $n = 1$, obtenim

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1!\, M}{R} \longrightarrow 0$$

quan $R \to \infty$, ja que M no depèn de R. Per tant $f'(z) = 0$ per a tot $z \in \mathbb{C}$, amb el que f és constant. □

Corol·lari 5.29. *Si f és entera amb $\mathrm{Re} f \geqslant 0$, llavors f és constant.*

Demostració. En efecte, considerem la funció entera $g(z) = e^{-f(z)}$. Llavors

$$|g(z)| = e^{-\mathrm{Re} f(z)} \leqslant e^0 = 1,$$

amb el que g és entera i fitada. Pel teorema de Liouville, g és constant, i per tant f és constant. □

Teorema 5.30 (Teorema fonamental de l'àlgebra)**.** *Sigui P un polinomi no constant. Hi ha $z_0 \in \mathbb{C}$ amb $P(z_0) = 0$.*

Demostració. Suposem que $P(z) \neq 0$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. Aleshores la funció $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ és entera. Si veiem que és fitada, aplicant el teorema de Liouville arribariem a contradicció. Si $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, llavors

$$|P(z)| = |z|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| \longrightarrow +\infty$$

quan $|z| \to +\infty$, amb el que $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$, que clarament implica que f és fitada. Com f és entera i fitada, pel teorema de Liouville, f ha de ser constant, amb el que P és constant !! □

Corol·lari 5.31. *Tot polinimi de grau n té exactament n arrels complexes (comptant multiplicitats).*

Demostració. Sabem que P té un zero, diem α_1. Llavors $P(z) = (z - \alpha_1)P_1(z)$, on P_1 és un polinomi de grau $n - 1$, que també té un zero si $n \geqslant 2$. Iterant aquest procés obtenim el resultat. □

Exercici 5.7.1. *Suposem que f és entera. Provar que si $f^{(4)}(z)$ és fitada en el pla llavors f és un polinomi de grau 4 com a màxim.* ◁

Exercici 5.7.2. *La funció $f(z) = 1/z^2$ tendeix a 0 quan $z \to \infty$ però no és una funció constant. Contradiu això el Teorema de Liouville?* ◁

Exercici 5.7.3. *Sigui f una funció entera. Per a $|a| < R$ i $|b| < R$ calculeu*

$$I = \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz.$$

Useu el resultat per demostrar el teorema de Liouville. ◁

Exercici 5.7.4. *Caracteritzeu les funcions enteres f tals que $|f'(z)| \leqslant |z|$ per a tot $z \in \mathbb{C}$.* ◁

Exercici 5.7.5. *Sigui f una funció entera. Usant el teorema de Liouville proveu que*

(a) Si $|f| \geqslant 1$, llavors f és constant.

(b) Si $\operatorname{Re} f \geqslant 0$, llavors f és constant.

(b) Si $\operatorname{Im} f \leqslant 1$, llavors f és constant. ◁

(d) Si $\operatorname{Re} f$ no té zeros, llavors f és constant.

Exercici 5.7.6. *Sigui f una funció entera tal que $|f(z)| \leqslant Ce^{\operatorname{Re} z}$, per a tot $z \in \mathbb{C}$, on $C > 0$ és una constant. Què es pot dir de f?* ◁

Exercici 5.7.7. *Sigui f una funció entera tal que $|f'(z)| < |f(z)|$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. Què podem dir de f?* ◁

5.8 Teorema de Morera

Teorema 5.32 (Teorema de Morera)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert i $f \in C(\Omega)$. Si per a tot triangle $T \subset \Omega$, es té*

$$\int_{\partial T} f(z)\, dz = 0,$$

llavors f és holomorfa en Ω.

Demostració. Si reseguim la prova del teorema de Cauchy per un disc, veiem que hem provat que que si $D \subset \Omega$ és un disc obert, $f \in C(D)$ i $\int_{\partial T} f = 0$ per a tot triangle $T \subset \Omega$, llavors f té primitiva holomorfa en D.

Fixem $z_0 \in \Omega$, i prenem $r > 0$ de manera que $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$. Llavors f té primitiva F holomorfa en $D(z_0, r)$, amb el que $f = F'$ és holomorfa en z_0. □

Corol·lari 5.33. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert i $f \in C(\Omega) \cap H(\Omega \backslash \{p\})$. Llavors $f \in H(\Omega)$.*

Demostració. Pel teorema de Cauchy-Goursat, tenim que $\int_{\partial T} f = 0$ per a tot triangle $T \subset \Omega$, amb el que aplicant el teorema de Morera, se segueix que f és holomorfa en Ω. □

Corol·lari 5.34. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, i sigui $\{f_n\}$ una successió de funcions de $H(\Omega)$ de manera que $f_n \to f$ uniformement sobre els compactes de Ω. Llavors $f \in H(\Omega)$.*

Demostració. Com que $f_n \in H(\Omega) \subset C(\Omega)$ i $f_n \to f$ uniformement sobre compactes, se segueix que $f \in C(\Omega)$. Llavors, pel teorema de Morera, per provar que $f \in H(\Omega)$, ens cal veure que

$$\int_{\partial T} f(z)\, dz = 0$$

per a tot triangle $T \subset \Omega$. Fixem $T \subset \Omega$ triangle. Com que $f_n \to f$ uniformement en el compacte ∂T, podem passar el límit a fora de la integral en el càlcul que segueix,

$$\int_{\partial T} f(z)\, dz = \int_{\partial T} \lim_n f_n(z)\, dz = \lim_n \int_{\partial T} f_n(z)\, dz = 0,$$

ja que, al ser f_n holomorfes en Ω, aplicant el teorema de Cauchy-Goursat, tenim que

$$\int_{\partial T} f_n(z)\, dz = 0.$$

□

Exercici 5.8.1. *Sigui $f(z) = 1/z^2$. Comproveu que $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ per a tot camí tancat γ que no passi per 0, però f no és analítica en 0. Contradiu això el Teorema de Morera?* ◁

Exercici 5.8.2. *(a) Sigui h una funció contínua a $\mathbb{R}$ amb suport compacte (és a dir, existeix $K \subset \mathbb{R}$ compacte tal que $h(x) = 0$ si $x \notin K$) i sigui*

$$H(z) = \int_{\mathbb{R}} h(t) e^{-itz} dt$$

la seva transformada de Fourier. Proveu que H és una funció entera amb creixement exponencial: existeixen $A, C > 0$ tals que $|H(z)| \leqslant Ce^{A|\operatorname{Im} z|}$.

(b) Sigui h una funció contínua a $[0, 1]$. Demostreu que la seva transformada de Hilbert

$$H(z) = \int_0^1 \frac{h(t)}{t - z} dt$$

és analítica per a $z \in \mathbb{C} \backslash [0, 1]$. ◁

5.9 Derivació sota el signe integral i fórmula integral de Cauchy per derivades

Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert i $f \in H(\Omega)$. Suposem que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors, per la fórmula integral de Cauchy, tenim

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz, \qquad |z_0 - a| < r,$$

També tenim la fórmula integral de Cauchy per derivades.

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz.$$

Observem aquí una diferència: en la fórmula integral de Cauchy, la podem aplicar per a tot $z_0 \in D_r(a)$; i en canvi en la versió per derivades només tenim l'enunciat per a $z_0 = a$ el centre del disc. Així doncs, una qüestió que ens apareix de manera natural és si en la fórmula integral de Cauchy per derivades, també podem agafar $z_0 \in D_r(a)$ igual que en la fórmula de Cauchy? La resposta és que sí, i serà conseqüència del següent resultat.

Teorema 5.35 (Derivació sota el signe d'integració)**.** *Siguin* $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ *oberts i* $\gamma : [a,b] \to \Omega_2$ *camí en* Ω_2. *Sigui* $F : \Omega_1 \times \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ *una funció contínua. Si per a cada* $z \in \gamma^* := \gamma([a,b])$, $F(\cdot, z)$ *és holomorfa en* Ω_1 *llavors la funció definida per*

$$f(w) = \int_\gamma F(w,z)\, dz, \qquad w \in \Omega_1$$

és holomorfa en Ω_1 *amb*

$$f'(w) = \int_\gamma \frac{\partial F}{\partial w}(w,z)\, dz, \qquad w \in \Omega_1.$$

Abans de passar a la prova d'aquest teorema, passem a aplicar-lo per provar la versió desitjada de la fórmula integral de Cauchy per derivades.

Corol·lari 5.36 (Fórmula integral de Cauchy per derivades)**.** *Sigui* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *obert i* $f \in H(\Omega)$. *Suposem que* $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. *Llavors, per* $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz, \qquad |z_0 - a| < r,$$

Demostració. Suposem que $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. Llavors, donat que f és holomorfa en Ω, per la fórmula integral de Cauchy, tenim

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-w}\, dz = \int_{|z-a|=r} F(w,z)\, dz, \qquad w \in D_r(a),$$

on

$$F(w,z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-w)}.$$

Passarem a aplicar el teorema de derivació sota el signe integral amb $\Omega_1 = D_r(a)$ i $\Omega_2 = \Omega$, i la corba $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Tenim $\gamma^* = \gamma[0, 2\pi] = \{z : |z - a| = r\}$. Com que $w \in D_r(a)$ i $|z - a| = r$, llavors clarament F és contínua en $D_r(a) \times \gamma[0, 2\pi]$, i també, per $z \in \gamma[0, 2\pi]$ fixat, la funció $F_z(w) = F(w, z)$ és holomorfa en w. Així doncs, aplicant el teorema de derivació sota el signe integral, se segueix que

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z - w)^2}\, dz, \qquad w \in D_r(a).$$

Iterant aquesta fórmula, obtenim que

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z - w)^{n+1}}\, dz, \qquad |w - a| < r.$$

□

Per provar el teorema 5.35, és suficient demostrar el següent cas particular.

Proposició 5.37. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert i $F : \Omega \times [a, b] \to \mathbb{C}$ contínua. Si $F(w, s)$ és holomorfa en w per a tot $s \in [a, b]$, llavors la funció*

$$f(w) = \int_a^b F(w, s)\, ds$$

és holomorfa en Ω amb

$$f'(w) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial w}(w, s)\, ds, \quad w \in \Omega.$$

Prova del teorema a partir de la proposició. Podem suposar que γ és de classe C^1. Llavors

$$\int_\gamma F(w, z)\, dz = \int_a^b F(w, \gamma(s))\, \gamma'(s) ds = \int_a^b G(w, s)\, ds,$$

on $G(w, s) = F(w, \gamma(s))\, \gamma'(s)$ que és clarament contínua en $\Omega_1 \times [a, b]$ degut a la hipòtesi sobre F. També G és holomorfa en w per a tot $s \in [a, b]$. Per tant, aplicant la proposició, se segueix que f és holomorfa en Ω_1 amb

$$f'(w) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial w}(w, \gamma(s))\, \gamma'(s)\, ds = \int_\gamma \frac{\partial F}{\partial w}(w, z)\, dz.$$

□

Demostració de la proposició. Podem suposar $a = 0$ i $b = 1$. Per $n \geqslant 1$, considerem la suma finita de funcions

$$f_n(w) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F\big(w, \frac{k}{n}\big), \qquad w \in \Omega.$$

Com que, per hipòtesi, les funcions $F(w, \frac{k}{n})$ són holomorfes en w, i en tenim una suma finita, se segueix que les funcions f_n són holomorfes en Ω.

Per veure que f és holomorfa en Ω, provarem que $f_n \to f$ uniformement sobre els compactes d'Ω, amb el que aplicant un dels corol·laris del teorema de Morera, obtindrem que $f \in H(\Omega)$.

Sigui $K \subset \Omega$ compacte. Recordem que una funció contínua en un compacte és uniformement contínua, amb el que al ser F contínua en el compacte $K \times [0,1]$, donat $\varepsilon > 0$, hi ha $\delta > 0$ de manera que

$$\sup_{w \in K} \Big| F(w, s_1) - F(w, s_2) \Big| < \varepsilon, \qquad \text{si} \quad |s_1 - s_2| < \delta. \tag{5.2}$$

Observem que, com que $\frac{1}{n} = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}$, tenim

$$f_n(w) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} F\left(w, \frac{k}{n}\right) ds.$$

També

$$f(w) = \int_0^1 F(w, s)\, ds = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} F(w, s)\, ds.$$

Aleshores, si $n > 1/\delta$ i $w \in K$,

$$\begin{aligned} \big|f_n(w) - f(w)\big| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(F\left(w, \frac{k}{n}\right) - F(w, s) \right) ds \right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| F\left(w, \frac{k}{n}\right) - F(w, s) \right| ds \\ &\leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} - \frac{(k-1)}{n} \right) = \varepsilon, \end{aligned}$$

on hem aplicat (5.2) ja que per $s \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, tenim $|s - \frac{k}{n}| < \frac{1}{n} < \delta$ ja que hem triat $n > 1/\delta$. Per tant

$$\sup_{w \in K} \big|f_n(w) - f(w)\big| < \varepsilon, \qquad n > 1/\delta,$$

provant que $f_n \to f$ uniformement en compactes de Ω, i per tant f és holomorfa en Ω.

Fixem ara $w \in \Omega$ i prenem $r > 0$ de manera que $\overline{D(w,r)} \subset \Omega$. Per la fórmula integral de Cauchy per derivades (la versió on prenem el centre del disc, que ja tenim provada), tenim

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^2}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{1}{(z-w)^2} \left(\int_0^1 F(z, s)\, ds \right) dz.$$

Ara, aplicant el teorema de Fubini, finalment obtenim

$$f'(w) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{F(z,s)}{(z-w)^2}\, dz \right) ds = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial w}(w,s)\, ds,$$

ja que com que, fixat $s \in [0,1]$, la funció $F_s(w) = F(w,s)$ és holomorfa, per la fórmula integral de Cauchy per la derivada, tenim

$$\frac{\partial F}{\partial w}(w,s) = F_s'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{F_s(z)}{(z-w)^2}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{F(z,s)}{(z-w)^2}\, dz.$$

Per tal de justificar l'aplicació del teorema de Fubini, cal provar que

$$J := \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{|z-w|=r} \frac{|F(z,s)|}{|z-w|^2}\, |dz| \right) ds < \infty.$$

Com que F és contínua en $\Omega \times [0,1]$, en particular és contínua en el compacte $\partial D(w,r) \times [0,1]$, i per tant fitada en aquest compacte. Llavors hi ha una constant $M > 0$ de manera que $|F(z,s)| \leqslant M$ per a tot z amb $|z-w| = r$ i tot $s \in [0,1]$. Llavors

$$J = \frac{1}{2\pi r^2} \int_0^1 \int_{|z-w|=r} |F(z,s)|\, |dz|\, ds \leqslant \frac{M}{2\pi r^2} \int_0^1 2\pi r\, ds < \infty.$$

□

Exercici 5.9.1. *Avalueu, usant la fórmula de Cauchy per a les derivades*

a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2} dz.$ *b)* $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z^4} dz.$ *c)* $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-i\theta} e^{e^{i\theta}}.$ ◁

5.10 Zeros de funcions holomorfes i principi de prolongació analítica

Tot seguit passem a estudiar el conjunt de punts on una funció holomorfa donada val zero, l'anomenat conjunt de zeros de la funció, Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert i $f \in H(\Omega)$. Posem

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}.$$

Proposició 5.38. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert connex i $f \in H(\Omega)$. Si existeix $a \in \Omega$ de manera que $f^{(n)}(a) = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, llavors $f \equiv 0$.*

Demostració. Sigui

$$A = \left\{ z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0 \quad \text{per a tot } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Tenim que A és no buit ja que $a \in A$. Passem a veure que A és tancat. Sigui $\{b_k\} \subset A$ amb $b_k \to b$. Volem provar que $b \in A$. Com que cada $f^{(n)}$ és contínua i $b_k \in A$, tenim que

$$f^{(n)}(b) = f^{(n)}(\lim_k b_k) = \lim_k f^{(n)}(b_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad b \in A.$$

Per tant A és tancat. Passem a veure que A és obert. Sigui $b \in A$. Com que tota funció holomorfa és localment una sèrie de potències, poden trobar $r > 0$ amb $\overline{D(b,r)} \subset \Omega$ amb

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(z-b)^n = 0, \qquad z \in D(b,r).$$

Com que $f(z) = 0$ per a tot $z \in D(b,r)$, se segueix que $D(b,r) \subset A$ amb el que A també és obert.

Com Ω és connex, i A és no buit, i obert i tancat a la vegada, se segueix que $A = \Omega$ amb el que $f \equiv 0$ en Ω. □

Teorema 5.39. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$ amb $f \not\equiv 0$. Per a tot $z_0 \in Z(f)$ hi ha un únic $m \in \mathbb{N}$ (anomenat l'ordre o multiplicitat del zero z_0) de manera que*

$$f(z) = (z-z_0)^m\, g(z), \qquad z \in \Omega,$$

on $g \in H(\Omega)$ amb $g(z_0) \neq 0$.

Demostració. Com tota funció holomorfa és localment una sèrie de potències, podem trobar $r > 0$ amb $\overline{D(z_0,r)} \subset \Omega$ amb

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n, \qquad z \in D(z_0,r).$$

Sabem que $a_0 = f(z_0) = 0$. Sigui m el mínim nombre natural amb $a_m \neq 0$ (aquest mínim existeix per la proposició anterior, ja que $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$). Així doncs, tenim que

$$f(z) = \sum_{n \geqslant m} a_n(z-z_0)^n = (z-z_0)^m\, h(z), \qquad z \in D(z_0,r),$$

amb

$$h(z) = a_m + a_{m+1}(z-z_0) + a_{m+2}(z-z_0)^2 + \cdots = \sum_{k \geqslant 0} a_{m+k}(z-z_0)^k, \qquad z \in D(z_0,r)$$

que és holomorfa en $D(z_0,r)$ amb $h(z_0) \neq 0$. Finalment, definint

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^m} & \text{si} \quad z \in \Omega\backslash\{z_0\} \\[2ex] h(z_0) & \text{si} \quad z = z_0, \end{cases}$$

tenim $\lim_{z \to z_0} g(z) = a_m = h(z_0) \neq 0$, g és holomorfa en $\Omega\backslash\{z_0\}$ i g és contínua en z_0 i per tant holomorfa en tot Ω, vegeu el corol·lari 5.33. □

Exemple 5.40. Trobem la multiplicitat de $z = 0$ com a zero de la funció

$$f(z) = 6\sin(z^3) + z^9 - 6z^3.$$

Tenim
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$
Per tant,
$$\sin(z^3) = z^3 - \frac{z^9}{6} + \frac{z^{15}}{5!} + \dots,$$
amb el que
$$f(z) = 6\sin(z^3) + z^9 - 6z^3 = \frac{z^{15}}{5!} + o(z^{20}),$$
i per tant $z = 0$ té ordre o multiplicitat 15.

$\diamond$

Corol·lari 5.41. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$ amb $f \neq 0$. Llavors els zeros de f són aïllats.*

Demostració. Sigui $z_0 \in Z(f)$. Pel teorema anterior, tenim que $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ amb $g \in H(\Omega)$ i $g(z_0) \neq 0$. Per continuïtat, hi ha $\varepsilon > 0$ de manera que $g(z) \neq 0$ per $z \in D(z_0, \varepsilon)$, amb el que $f(z) \neq 0$ si $z \in D(z_0, \varepsilon)$ amb $z \neq z_0$. $\square$

Recordem que z_0 és un punt d'acumulació d'un conjunt A si hi ha una successió $(z_n)_n \subset A \backslash \{z_0\}$ amb $z_n \to z_0$.

Teorema 5.42 (Principi de prolongació analítica)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$. Si $Z(f)$ té un punt d'acumulació en Ω, aleshores $f \equiv 0$ en Ω.*

Demostració. Sigui $z_0 \in \Omega$ punt d'acumulació de $Z(f)$, és a dir, hi ha $z_n \in Z(f)$ amb $z_n \to z_0$. Com que f és contínua, llavors $f(z_0) = \lim_n f(z_n) = 0$, amb el que $z_0 \in Z(f)$, i llavors z_0 és un zero de f que no és aïllat. Com que sabem que els zeros d'una funció holomorfa no idènticament nul·la són aïllats, això implica que $f \equiv 0$. $\square$

Corol·lari 5.43. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funció holomorfa, no idènticament zero. Llavors el conjunt de zeros de f és un conjunt finit o numerable.*

Demostració. Podem escriure $\Omega = \bigcup_n K_n$, on $K_n := \{z \in \mathbb{C}; d(z, \mathbb{C}\backslash\Omega) \geqslant \frac{1}{n}\} \cap \overline{D(0,n)}$. Llavors, per a cada n, K_n és compacte (tancat i fitat a $\mathbb{C}$). Donat que f no és idènticament zero, el conjunt de zeros són aïllats, i es compleix en particular que $Z(f) \cap K_n$ és finit (si no hi hauria un punt d'acumul·lació), amb el que
$$Z(f) = \bigcup_n (Z(f) \cap K_n)$$
és finit o numerable al ser unió numerable de conjunts finits. $\square$

Observació 5.44. En cas que f tingui un número infinit de zeros, aquests s'han d'acumular a la frontera de Ω. Si f és entera, llavors els zeros s'acumulen a $\{\infty\}$. Per exemple, els zeros de $f(z) = \sin z$ són $k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$.

$\bullet$

El principi de prolongació analítica, s'aplica moltes vegades en la forma següent:

Corol·lari 5.45 (Principi de prolongació analítica, versió 2). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert connex i $f, g \in H(\Omega)$. Si $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ té un punt d'acumulació en Ω, aleshores $f \equiv g$ en Ω.*

Demostració. Apliquem el principi de prolongació analítica a la funció holomorfa $h = f - g$, i obtenim el resultat, ja que $Z(h) = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$. □

En particular, si Ω és connex i $f, g \in H(\Omega)$ coincideixen en, per exemple, un obert, o bé un arc, o una recta, o un cercle, o un segment; llavors $f \equiv g$ en Ω.

Exemple 5.46. Passem a trobar totes les funcions $f \in H(\mathbb{D})$ amb $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2+1}$, per a tot $n \in \mathbb{N}$ amb $n > 1$. Observem que

$$f\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} = \Big(\frac{1}{n}\Big)^2 \frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}.$$

Llavors la funció $g(z) = \frac{z^2}{1+z^2}$ és holomorfa en $\mathbb{D}$ i compleix que $g(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2+1}$, amb el que tenim dues funcions $f, g \in H(\mathbb{D})$ amb $f(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})$. Com que $\frac{1}{n} \to 0 \in \mathbb{D}$ i $\mathbb{D}$ és connex, llavors aplicant el principi de prolongació analítica, obtenim que

$$f(z) = g(z) = \frac{z^2}{1+z^2}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

♢

Exercici 5.10.1. *Trobeu els zeros, amb l'ordre corresponent, de les següents funcions:*

$$(a) \quad \frac{z^2+1}{z^2-1} \qquad\qquad (b) \quad z^2 \sin z \qquad\qquad (c) \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{z^5}\ .$$ ◃

Exercici 5.10.2. *Trobeu la multiplicitat de $z = 0$ com a zero de la funció entera $f(z) = 6\sin z^3 + z^3(z^6 - 6)$.* ◃

Exercici 5.10.3. *Trobeu tots els zeros de les següents funcions holomorfes i calculeu-ne les seves multiplicitats:*

a) $f(z) = z^2(e^{z^2} - 1)$.

b) $f(z) = (z^2 - \pi^2)\sin z/z$.

c) $f(z) = (\sqrt{z} - 2)^3$.

Aquí $\sqrt{\cdot}$ és la determinació de l'arrel quadrada en $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ que val -1 en $z = 1$. ◃

Exercici 5.10.4. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domini. Demostreu que l'anell de funcions holomorfes $H(\Omega)$ a una regió Ω és un domini d'integritat, és a dir, si $f, g \in H(\Omega)$ amb $fg \equiv 0$ aleshores $f \equiv 0$ o $g \equiv 0$.* ◃

Exercici 5.10.5. *Sigui* $\{a_n\}_n$ *una successió estrictament decreixent de nombres reals* $a_n \in (0,1)$ *i tal que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Sigui* f *funció holomorfa a* $\mathbb{D}$. *Demostreu que:*

(a) Si $f(a_n) \in \mathbb{R}$ *per a tot* n *aleshores* $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ *per a tot* $z \in \mathbb{D}$.

(b) Si a més $f(a_{2n}) = f(a_{2n+1})$ *per a tot* n, *aleshores* f *és constant.* ◃

Exercici 5.10.6. *Trobeu totes les funcions holomorfes a* $\mathbb{D}$ *tals que:*

(a) $|f(1/n)| \leqslant 1/2^n$, *per a tot nombre natural* $n \geqslant 2$.

(b) $f(1/n) = 1/(n^2+1)$ *per a* $n > 1$. ◃

Exercici 5.10.7. *Trobeu totes les funcions* f *holomorfes en el disc* $D(0,2)$ *tals que* $f(e^{i\theta}) = e^{i2\theta}$ *per a tot* $\theta \in [0, 2\pi)$, *i a més* $f(0) = 0$. ◃

5.11 El principi del mòdul màxim

Una característica de les funcions holomorfes és que no poden tenir màxims absoluts en el seu domini de definició. Podem observar el contrast amb l'anàleg real: existeixen moltes funcions derivables amb màxims absoluts en l'interior del domini de definició com, per exemple, la funció $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = 1 - x^2$ que té un màxim absolut en $x = 0$.

Teorema 5.47 (Principi del mòdul màxim). *Sigui* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *obert connex i* $f \in H(\Omega)$. *Si* $|f|$ *té un màxim absolut en* Ω, *llavors* f *és constant.*

Demostració. Sigui $z_0 \in \Omega$ amb $|f(z)| \leqslant |f(z_0)|$ per a tot $z \in \Omega$. Posem

$$A = \{z \in \Omega : |f(z)| = |f(z_0)|\}.$$

Tenim que A és no buit ja que $z_0 \in A$. Com Ω és connex, si veiem que A és obert i tancat, tindrem que $A = \Omega$, que implica que f és constant. Però A és tancat, ja que $|f|$ és contínua i $A = (|f|)^{-1}(x_0)$ amb $x_0 = |f(z_0)|$.

Vegem que A és obert: sigui $a \in A$. Volem trobar $r > 0$ de manera que $D_r(a) \subset A$. Sigui $r > 0$ tal que $\overline{D_r(a)} \subset A$. Per la propietat de la mitjana, es compleix llavors que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + se^{it})\,dt, \qquad 0 < s \leqslant r.$$

Per tant, com que $a \in A$, obtenim

$$|f(a)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a + se^{it})|\,dt \leqslant |f(z_0)| = |f(a)|, \qquad 0 < s \leqslant r.$$

Com que $|f|$ és contínua i $|f(a + se^{it})| \leqslant |f(a)|$ per a tot $t \in [0, 2\pi]$, es verifica que

$$|f(a)| = |f(a + se^{it})|, \quad \forall t \in [0, 2\pi], \qquad 0 < s \leqslant r.$$

És a dir, $D_r(a) \subset A$. □

Passem ara a veure algunes conseqüències, que quan les apliquem, seguirem dient que apliquem el principi del mòdul màxim.

Corol·lari 5.48. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ regió fitada, i $f \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Llavors el màxim de $|f|$ s'assoleix a la frontera $\partial\Omega$.*

Demostració. Com Ω és fitat, llavors $\overline{\Omega}$ és un tancat i fitat de $\mathbb{C}$ i per tant compacte. Com que $|f|$ és contínua en el compacte $\overline{\Omega}$, llavors $|f|$ té un màxim absolut en un punt a de $\overline{\Omega}$. Si $a \in \Omega$, pel principi del mòdul màxim, llavors $|f|$ és constant, amb el que, en particular, $|f|$ assoleix el màxim en tot punt $w \in \partial\Omega$. □

Corol·lari 5.49. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert connex i $f \in H(\Omega)$. Si $|f|$ té un màxim local en Ω, llavors f és constant.*

Demostració. Per hipòtesi, hi ha $a \in \Omega$ i $r > 0$ de manera que $|f(z)| \leqslant |f(a)|$ per a tot $z \in D_r(a)$. Com $f \in H(D_r(a))$ i $|f|$ té un màxim absolut en $D_r(a)$, pel principi del mòdul màxim, se segueix que f és constant en $D_r(a)$ i, al ser Ω connex, aplicant el principi de prolongació analítica obtenim que f és constant en Ω. □

Exemple 5.50. Passem a provar que, per a tot polinomi holomorf P, tenim

$$\sup_{|z|=1} \left| P(z) - \frac{1}{z} \right| \geqslant 1.$$

Aquest resultat ens diu que la funció $\frac{1}{z}$ no es pot aproximar uniformement per polinomis holomorfs en el compacte $S^1 = \{|z| = 1\}$.

Observem primer que

$$\sup_{|z|=1} \left| P(z) - \frac{1}{z} \right| = \sup_{|z|=1} \frac{|zP(z) - 1|}{|z|} = \sup_{|z|=1} |zP(z) - 1|.$$

Aleshores, si aquest suprem és estrictament menor que 1, tenim que, en ser la funció $h(z) = zP(z) - 1$ entera, pel principi del mòdul màxim

$$|h(0)| \leqslant \sup_{|z|=1} |h(z)| < 1,$$

però això no és possible ja que $h(0) = -1$. Per tant

$$\sup_{|z|=1} \left| P(z) - \frac{1}{z} \right| \geqslant 1.$$

◊

Una altra propietat rellevant de les funcions holomorfes (no constants) és que envien oberts a oberts. Aquesta propietat no val per a funcions de variable real (tan regulars com vulguem). Per exemple, la imatge de la funció $f(x) = x^2$ de l'interval obert $(-1, 1)$ és $[0, 1)$ que no és obert.

Teorema 5.51 (Teorema de l'aplicació oberta)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f \in H(\Omega)$ no constant. Aleshores f és oberta. És a dir, si U és un obert de Ω, llavors $f(U)$ és obert.*

Demostració. Sigui $U \subset \Omega$ obert, i $z_0 \in U$. Per veure que $f(U)$ és obert, volem trobar un entorn de $w_0 := f(z_0)$ dins de $f(U)$. Considerem la funció

$$g(z) = f(z) - f(z_0), \qquad z \in \Omega.$$

Com que $g(z_0) = 0$ i els zeros de les funcions holomorfes són aïllats, al ser f no constant, podem trobar $r > 0$ de manera que $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ amb $g(z) \neq 0$ per a tot $z \in \overline{D(z_0, r)}$.

Sigui $\gamma := \partial D(z_0, r)$. Llavors $0 \notin g(\gamma)^*$, on $g(\gamma)^*$ denota la imatge per g de la corba $g(\gamma)$. Per tant

$$\delta = \inf_{z \in \gamma^*} |g(z)| > 0.$$

És a dir,

$$|g(z)| \geqslant \delta, \qquad |z - z_0| = r.$$

Sigui $w_0 = f(z_0)$. Passarem a provar que $D\big(w_0, \frac{\delta}{2}\big) \subset f(U)$.

Suposem que no. Llavors hi ha $w \in D\big(w_0, \frac{\delta}{2}\big)$ amb $w \notin f(U)$. Això implica que la funció

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - w}$$

és holomorfa en U. Pel principi del mòdul màxim, tenim

$$|h(z_0)| \leqslant \sup_{z \in \gamma} |h(z)|.$$

(Aquesta desigualtat també es pot obtenir fent servir la propietat de la mitjana, per exemple). Com que $|g(z)| \geqslant \delta$ per $z \in \gamma$, tenim

$$|h(z)| = \frac{1}{|f(z) - w|} = \frac{1}{|f(z) - w_0 + (w_0 - w)|} \leqslant \frac{1}{|f(z) - w_0| - |w - w_0|}$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta - |w - w_0|}, \qquad z \in \gamma.$$

Per tant,

$$\frac{1}{|w - w_0|} = |h(z_0)| \leqslant \frac{1}{\delta - |w - w_0|} \quad \Rightarrow \quad |w - w_0| \geqslant \frac{\delta}{2},$$

en contradicció amb la nostra hipòtesis de que $w \in D\big(w_0, \frac{\delta}{2}\big)$. Per tant, f és oberta. □

Exercici 5.11.1. *Trobeu el màxim de:*

a) $|\cos z|$ *i* $|\sin z|$ *a* $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

b) $|e^z|$ *i* $|e^{z^2}|$ *a* $|z| \leqslant 1$. ◁

Exercici 5.11.2. *Trobeu totes les funcions holomorfes en $\mathbb{D}$ tals que $f(1/2) = 3$ i $|f(z)| \leqslant 3$ si $|z| < 1$.* ◁

Exercici 5.11.3. *Es considera $f(z) = e^{\cos(z)} z^2$ i el disc D de radi 2 centrat a 5. Provar que $f(z)$ assoleix el valor màxim i mínim del mòdul a $|z - 5| = 2$. (Indicació: considerar $1/f(z)$)* ◁

Exercici 5.11.4. *Sigui f una funció holomorfa en el disc $D(0, R)$, $R > 0$. Definim*

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \qquad 0 \leqslant r < R.$$

Demostreu que si f no és constant, aleshores $M(r)$ és estrictament creixent a $[0, R)$. ◁

Exercici 5.11.5. *Sigui f una funció holomorfa en un obert connex Ω i D un disc obert tal que $\overline{D} \subset \Omega$. Suposeu que $|f(z)| = c$ per tot $z \in \partial D$, on c és una constant. Proveu que f té almenys un zero en D o bé f és constant en Ω.* ***Indicació.*** *Distingiu segons si $c = 0$ o $c > 0$. En el segon cas, proveu, que si f no té zeros en D aleshores f és constant en D.* ◁

Exercici 5.11.6. *Sigui f una funció holomorfa i no constant en $\Omega \subset \mathbb{C}$, un obert connex. Suposeu que existeix $a \in \Omega$ tal que $|f(a)| \leqslant |f(z)|$ per a tot $z \in \Omega$. Proveu que aleshores $f(a) = 0$.* ◁

Exercici 5.11.7. *Sigui $f \in H(\mathbb{C})$ no constant. Demostreu que, per a tot $c > 0$,*

$$\overline{\{z;\ |f(z)| < c\}} = \{z;\ |f(z)| \leqslant c\}.$$ ◁

6 Topologia en el pla complex: teoria global de Cauchy

Un cop hem estudiat la teoria local de Cauchy, el proper objectiu és estudiar propietats globals de les funcions holomorfes. Mitjançant la versió global del teorema de Cauchy, estudiarem la relació entre l'holomorfia d'una funció i la topologia del domini on està definida. Per a donar aquesta versió global, cal esudiar un concepte topològic, el de camí homòleg a zero. Veurem aplicacions importants de la teoria global, entre les que es troben el teorema dels residus, que ens permetrà calcular moltes integrals, o el principi de l'argument i teorema de Rouché que controlen els zeros de les funcions holomorfes.

6.1 Índex d'una corba tancada respecte d'un punt

Comencem amb la noció d'índex d'una corba tancada γ respecte d'un punt z_0, $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0)$. Intuitivament, $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0)$ compta el número de voltes sobre sí mateix que ha de donar un observador colocat en el punt z_0 per a reseguir la corba.

Abans de donar la definició, necessitem el següent resultat:

Proposició 6.1. *1. Sigui $a, w_0 \in \mathbb{C}$ i $r > 0$ complint que $D_r(a) \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Sigui $z_0 \in D_r(a)$ tal que $e^{w_0} = z_0$. Llavors existeix una única determinació del logaritme en $D_r(a)$, $\mathcal{L}$, tal que $\mathcal{L}(z_0) = w_0$.*

2. Sigui $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ contínua i $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que $e^{w_0} = \gamma(a)$. Llavors existeix una única determinació del logaritme de γ, $\hat{\gamma}$, complint que $\hat{\gamma}(a) = w_0$. A més, si γ és diferenciable, $\hat{\gamma}$ també i $\hat{\gamma}'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$.

Demostració. Provem 1. La unicitat és immediata. Sigui $a = |a|e^{i\alpha}$. Llavors $D_r(a) \subset \mathbb{C}\backslash e^{i\alpha}(-\infty, 0]$ i si ℓ és una determinació del logaritme a $\mathbb{C}\backslash e^{i\alpha}(-\infty, 0]$, llavors $\ell_{|D_r(a)}$ és una determinació del logaritme a $D_r(a)$. Es compleix, doncs, que si denotem $k = \frac{w_0 - \ell(z_0)}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$, la funció $\mathcal{L}(z) := \ell(z) + 2\pi ik$ és una determinació del logaritme en $D_r(a)$ tal que $\mathcal{L}(z_0) = w_0$.

Provem ara 2. La unicitat és evident. Sense pèrdua de generalitat, podem suposar que $a = 0$ i $b = 1$. Sigui $\varepsilon = \frac{1}{2} \inf_{t\in[0,1]} |\gamma(t)| > 0$. Donat que γ és uniformement contínua en $[0, 1]$, existeix $\delta > 0$ tal que $|\gamma(t) - \gamma(s)| < \varepsilon$ per a tot $s, t \in [0, 1]$ tal que $|t - s| \leqslant \delta$.

Sigui $n \geqslant 1$ tal que $\frac{1}{n} < \delta$ i sigui $z_k = \gamma(\frac{k}{n})$, per a $k = 0, 1, \cdots n-1$. Llavors $|z_k - z_{k+1}| < \varepsilon$ i $\gamma([\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]) \subset D(z_k, \varepsilon) \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$, per a $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

Aplicant l'apartat 1, sigui $\mathcal{L}_0$ l'única determinació del logaritme en $D(z_0, \varepsilon)$ tal que $\mathcal{L}_0(z_0) = w_0$. I, recurrentment, per a $k = 1, \cdots n-1$, sigui $\mathcal{L}_k$ l'única determinació del logaritme en $D(z_k, \varepsilon)$ tal que $\mathcal{L}_k(z_k) = \mathcal{L}_{k-1}(z_k)$.

Llavors si $k = 1, \cdots n-1$, $\mathcal{L}_{k-1} = \mathcal{L}_k$ en $D(z_{k-1}, \varepsilon) \cap D(z_k, \varepsilon)$. Per tant, la funció $\hat{\gamma}(t) = \mathcal{L}_k(\gamma(t))$, si $\frac{k}{n} \leqslant t \leqslant \frac{k+1}{n}$, $k = 0, \cdots n-1$, és la determinació del logaritme de γ complint $\hat{\gamma}(0) = w_0$.

Finalment, si γ és diferenciable, com a conseqüència de la construcció de $\hat{\gamma}$ i del fet que les determinacions del logaritme són holomorfes, es verifica que $\hat{\gamma}$ és diferenciable i si $\frac{k}{n} \leqslant t \leqslant \frac{k+1}{n}$, llavors $\hat{\gamma}'(t) = \mathcal{L}_k'(\gamma(t))\gamma'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$. □

Definició 6.2. Sigui $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ una corba tancada en $\mathbb{C}$ i $z \in \mathbb{C} \backslash \gamma^*$. Llavors, l'índex de γ respecte de z es defineix per:

$$\operatorname{Ind}(\gamma, z) := \frac{\hat{\gamma}_z(b) - \hat{\gamma}_z(a)}{2\pi i},$$

on $\hat{\gamma}_z$ és qualsevol determinació del logaritme de $\gamma_z : [a, b] \to \mathbb{C} \backslash \{0\}$, definida per $\gamma_z(t) = \gamma(t) - z$. •

Observació 6.3.

1. Donat que dues determinacions del logaritme de γ_z difereixen en un múltiple de $2\pi i$, l'índex està ben definit.

2. L'índex $\operatorname{Ind}(\gamma, z)$ és un nombre enter. En efecte, donat que γ és una corba tancada, γ_z també ho és i, per tant, $e^{\hat{\gamma}_z(b)} = \gamma_z(b) = \gamma_z(a) = e^{\hat{\gamma}_z(a)}$. Llavors,

$$\operatorname{Ind}(\gamma, z) := \frac{\hat{\gamma}_z(b) - \hat{\gamma}_z(a)}{2\pi i} \in \mathbb{Z}.$$

   Aquest valor doncs, pot ser positiu, negatiu o zero: una volta és positiva si es realitza en el sentit contrari a les agulles dels rellotge i és negativa si es fa en el senit de gir de les agulles del rellotge, vegeu la figura 6.2. •

Proposició 6.4. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, γ camí tancat en Ω i $z_0 \notin \gamma^*$. L'índex de γ respecte z_0 ve definit com*

$$\operatorname{Ind}(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

En particular, si γ^{-1} denota el camí invers de γ, tenim

$$\operatorname{Ind}(\gamma^{-1}, z) = -\operatorname{Ind}(\gamma, z), \qquad z \notin \gamma^*.$$

Demostració. Sense pèrdua de generalitat, podem suposar que γ és de classe $\mathcal{C}^1$. Llavors si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ i $\hat{\gamma}_z$ és una determinació del logaritme de $\gamma_z : [a, b] \to \mathbb{C} \backslash \{0\}$, es verifica que

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}(\gamma, z) &= \frac{\hat{\gamma}_z(b) - \hat{\gamma}_z(a)}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b (\hat{\gamma}_z)'(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma_z'(t)}{\gamma_z(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \end{aligned}$$

□

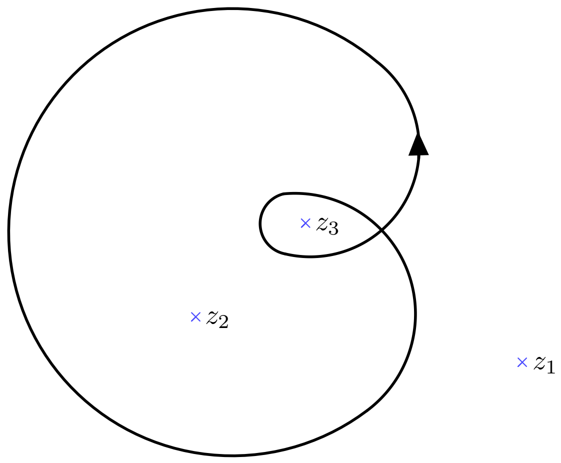


Figura 6.1: Tenim $\mathrm{Ind}\,(\gamma, z_1) = 0$, ja que des de z_1 podem observar tot el camí sense haver de “girar” sobre nosaltres mateixos. En canvi $\mathrm{Ind}\,(\gamma, z_2) = 1$ perquè ens cal fer una volta, i $\mathrm{Ind}\,(\gamma, z_3) = 2$ perquè ens cal fer dues voltes per resseguir el camí amb la mirada si ens situem en cada un d'aquests punts.

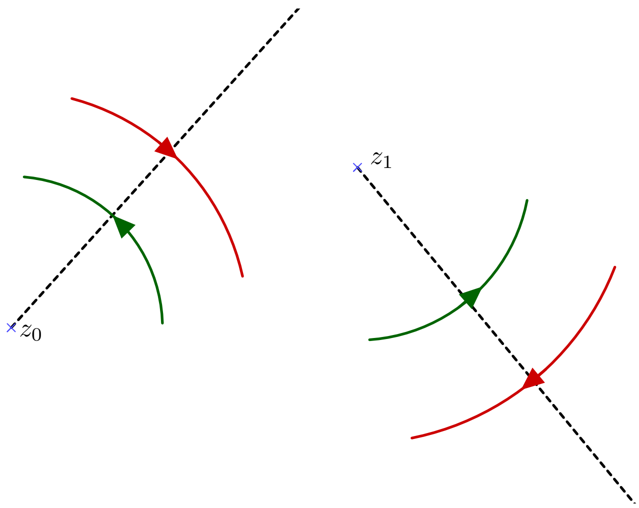


Figura 6.2: Podem observar els camins verds que intersequen en sentit positiu o antihorari i els vermells en negatiu o horari.

Proposició 6.5. *Si γ és un camí tancat, llavors la funció* $\operatorname{Ind}(\gamma, z) : \mathbb{C}\backslash\gamma^* \to \mathbb{Z}$ *és contínua.*

Demostració. Per $z, z_0 \in \mathbb{C}\backslash\gamma^*$, tenim

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{Ind}(\gamma, z) - \operatorname{Ind}(\gamma, z_0)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \Big(\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-z_0}\Big)dw\right| \\ &= \frac{|z-z_0|}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{dw}{(w-z)(w-z_0)}\right|.\end{aligned}$$

Volem veure que aquesta quantitat tendeix a zero quan $z \to z_0$. Sigui

$$\delta := \frac{1}{2}\operatorname{dist}(z_0, \gamma^*).$$

Clarament tenim que $|w - z_0| \geqslant 2\delta$ si $w \in \gamma^*$. Llavors, per $|z - z_0| < \delta$, tenim també

$$|w-z| \geqslant |w-z_0| - |z-z_0| \geqslant 2\delta - \delta = \delta, \qquad w \in \gamma^*.$$

Per tant, si $|z - z_0| < \delta$, tenim

$$\left|\operatorname{Ind}(\gamma, z) - \operatorname{Ind}(\gamma, z_0)\right| \leqslant \frac{|z-z_0|}{2\pi}\int_\gamma \frac{|dw|}{|w-z|\,|w-z_0|} \leqslant \frac{|z-z_0|}{4\pi\delta^2}\,\mathrm{L}(\gamma).$$

Com que aquesta quantitat tendeix a zero quan $z \to z_0$, ja hem provat la continuïtat de la nostra funció. □

Proposició 6.6. *Sigui γ un camí tancat. Llavors:*

(i) $\operatorname{Ind}(\gamma, z)$ *és constant en cada component connexa de* $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$*;*

(ii) $\operatorname{Ind}(\gamma, z) = 0$ *si z pertany a la component no fitada de* $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$.

Demostració. (i) Com que la funció $\operatorname{Ind}(\gamma, z)$ és contínua i pren valors en $\mathbb{Z}$, és constant en cada component connexa.

(ii) Sabem que és constant en aquesta component. Prenem $R > 0$ prou gran de manera que $\gamma^* \subset D(0, R)$ i també $R > \operatorname{Long}(\gamma)$. Si $|z| > 2R$, llavors $|w-z| \geqslant |z|-|w| \geqslant 2R-R = R$ per $w \in \gamma^*$, i per tant

$$\left|\operatorname{Ind}(\gamma, z)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{|dw|}{|w-z|} \leqslant \frac{1}{2\pi R}\operatorname{Long}(\gamma) < \frac{1}{2\pi}.$$

Com que $\operatorname{Ind}(\gamma, z)$ ha de ser un enter, l'única possibilitat és que valgui 0, i com que l'índex és constant en aquesta component, val zero en tot punt d'aquesta component. □

Observació 6.7 (Càlcul geomètric de l'índex)**.** Fixem una semirecta L amb origen z_0 que no travessi punts on el camí té interseccions. Per cada vegada que el camí γ passa per L en sentit positiu, li sumem 1, i si passa en sentit negatiu, li restem 1. Veure figura 6.2. •

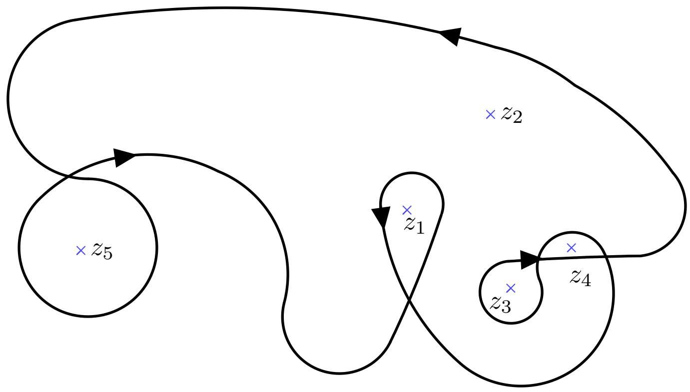


Figura 6.3: Per a calcular l'índex de γ respecte z_j, tracem una semirecta partint del punt i sumem interseccions amb la corba en sentit positiu i restem les de sentit negatiu, tal i com il·lustra la figura 6.2.

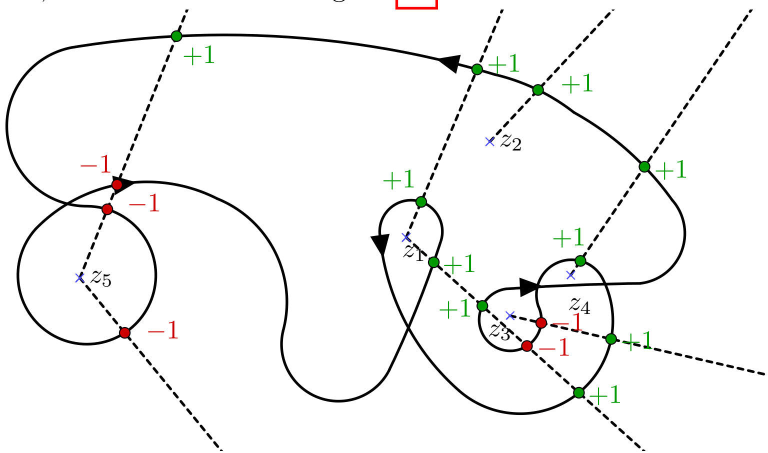


Figura 6.4: Trobem $\text{Ind}(\gamma, z_1) = 1+1 = 1+1-1+1 = 2$ per dues semirectes diferents. Així mateix calculem $\text{Ind}(\gamma, z_2) = 1$, $\text{Ind}(\gamma, z_3) = 0$, $\text{Ind}(\gamma, z_4) = 2$ i $\text{Ind}(\gamma, z_5) = -1$.

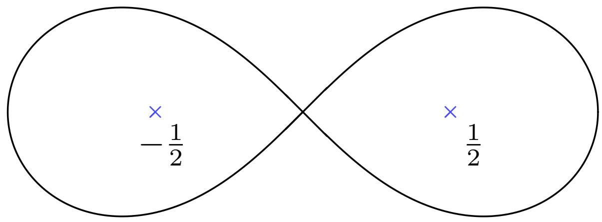


Figura 6.5: Lemniscata de Bernouilli.

Exercici 6.1.1. *Considerem el camí* $\gamma(t) = 4e^{it}\cos\frac{2}{3}t$, $(0 \leqslant t \leqslant 6\pi)$. *Calculeu* $\text{Ind}\,(\gamma, 3)$ *i* $\text{Ind}\,(\gamma, 1)$.
Indicació: *Comproveu que si* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *és una corba,* $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ *és una partició de* $[a, b]$ *i diem* γ_k *a la restricció de* γ *a l'interval* $[t_{k-1}, t_k]$*, per* $k = 1, \ldots, n$ *llavors l'increment de l'argument de* γ *és igual a la suma dels increments dels arguments de les* γ_k*'s.* $\triangleleft$

6.2 El teorema global de Cauchy

Recordem la fórmula integral de Cauchy per oberts convexos: Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert convex i sigui $f \in H(\Omega)$. Llavors

$$f(z_0)\,\text{Ind}\,(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz, \qquad z_0 \notin \gamma^*$$

per a tot camí tancat γ en Ω.

Exemple 6.8. Sigui γ la corba en forma de infinit o "ulleres"(veure dibuix 6.6), amb $-1/2$ i $1/2$ un a dins de cada part. Com que la funció $f(z) = \cos(\frac{\pi}{2}z)$ és entera (holomorfa a tot $\mathbb{C}$), tenim

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w}\,dw = 2\pi i\,\cos 0\,\text{Ind}\,(\gamma, 0) = 2\pi i\,\cos 0 = 2\pi i,$$

com també

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w - 1/2}\,dw = 2\pi i\,\cos(\frac{\pi}{4})\,\text{Ind}\,(\gamma, 1/2) = 2\pi i\,\cos(\frac{\pi}{4})\,(-1) = -\sqrt{2}\,\pi i.$$

$\Diamond$

Volem obtenir versions més generals tan del teorema de Cauchy com de la fórmula integral de Cauchy, que siguin vàlides per oberts no necessàriament convexos, com també per unions de camins.

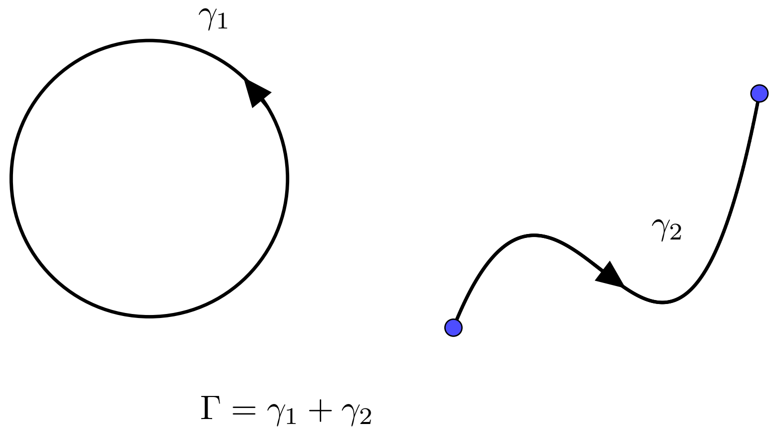


Figura 6.6: Una cadena formada per dos camins.

Definició 6.9. Una *cadena* és una combinació lineal de camins

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{k} n_i \gamma_i, \qquad n_i \in \mathbb{Z},$$

on γ_i és un camí per a tot $1 \leqslant i \leqslant k$. Veure dibuix 6.6 per exemples de cadenes.

La imatge o recorregut de Γ és $\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \cdots \cup \gamma_k^*$.

Si $f \in C(\Gamma^*)$, definim la integral per linealitat

$$\int_\Gamma f = n_1 \int_{\gamma_1} f + \cdots + n_k \int_{\gamma_k} f.$$

Diem que Γ és un *cicle* si γ_i és un camí tancat per a tot $1 \leqslant i \leqslant k$.

L'índex d'un cicle Γ respecte un punt $z_0 \notin \Gamma^*$ és

$$\operatorname{Ind}(\Gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z - z_0} = \sum_{i=1}^{k} n_i \operatorname{Ind}(\gamma_i, z_0).$$

•

Degut a la definició, aquest índex té les mateixes propietats que l'índex d'una corba: és un enter, és constant en cada component connexa de $\mathbb{C} \backslash \Gamma^*$, i val zero en la component no fitada.

Exemple 6.10. Considerem les corbes $\gamma_1(t) = 4e^{it}$ i $\gamma_2(t) = e^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$. Formem el cicle

$$\Gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2) = \gamma_1 - \gamma_2.$$

Tenim $\operatorname{Ind}(\Gamma, 6i) = 0$, ja que estem a la component no fitada. També

$$\operatorname{Ind}(\Gamma, 2) = \operatorname{Ind}(\gamma_1, 2) - \operatorname{Ind}(\gamma_2, 2) = 1 - 0 = 1.$$

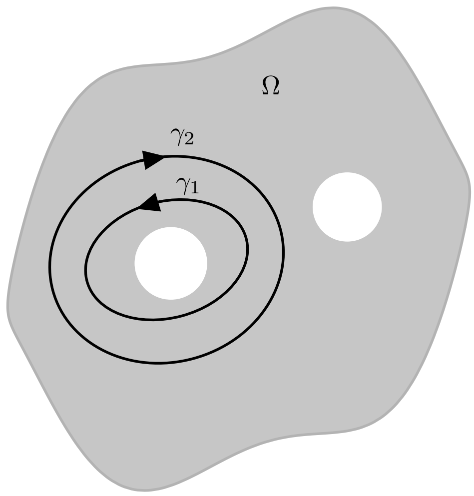


Figura 6.7: Els camins γ_1 i γ_2 no són homòlegs a 0 en Ω. En canvi, $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ sí que ho és.

$$\operatorname{Ind}(\Gamma, 0) = \operatorname{Ind}(\gamma_1, 0) - \operatorname{Ind}(\gamma_2, 0) = 1 - 1 = 0.$$

◊

Definició 6.11 (Homologia)**.** Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert i Γ cicle en Ω. Diem que Γ és homòleg a 0 en Ω si

$$\operatorname{Ind}(\Gamma, a) = 0 \qquad \forall a \notin \Omega.$$

Posem $\Gamma \approx 0$ en Ω per indicar que Γ és homòleg a 0 en Ω. •

Exemple 6.12. En la figura 6.7, les corbes γ_1 i γ_2 **no** són homòlegs a 0 en Ω. En canvi, el cicle $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ **sí** que és homòleg a 0 en Ω. ◊

Definició 6.13. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, i siguin Γ_1 i Γ_2 cicles en Ω. Diem que Γ_1 és homòleg a Γ_2 en Ω si $\Gamma_1 - \Gamma_2$ és homòleg a 0 en Ω. En aquest cas, fem servir la notació $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$ en Ω. •

Teorema 6.14 (Teorema de Cauchy Global)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert, $f \in H(\Omega)$, i sigui Γ un cicle en Ω homòleg a 0 en Ω. Llavors*

(a) Fórmula Integral de Cauchy global:

$$f(z) \operatorname{Ind}(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw, \qquad \forall z \in \Omega \backslash \Gamma^*.$$

(b) Teorema de Cauchy global:

$$\int_\Gamma f(z) dz = 0.$$

Observació 6.15. Si tenim un cicle Γ en Ω de manera que $\int_\Gamma f = 0$ per a tota $f \in H(\Omega)$, llavors si prenem un punt $a \notin \Omega$, la funció $f_a(z) = \frac{1}{z-a} \in H(\Omega)$, amb el que

$$\operatorname{Ind}(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f_a(z) = 0, \qquad \forall a \notin \Omega.$$

amb el que Γ ha de ser homòleg a 0 en Ω és una condició necessària per tal que valgui el teorema de Cauchy. •

Prova de (b) a partir de (a). Fixem $a \in \Omega \backslash \Gamma^*$, i definim la funció $F(z) = (z-a)f(z)$, que és holomorfa en Ω. Aplicant la fórmula integral de Cauchy, com que $F(a) = 0$, tenim

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(z)}{z-a}\,dz \overset{a)}{=} F(a)\operatorname{Ind}(\Gamma, a) = 0.$$

Prova de (a). Considerem la funció $F : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ definida per

$$F(z,w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{si} \quad z \neq w \\ \\ f'(z) & \text{si} \quad z = w. \end{cases}$$

Llavors F és contínua en $\Omega \times \Omega$ (veure la demostració al final de la prova), i per a tot $w \in \Omega$, la funció $F_w(z) := F(z,w)$ és holomorfa en Ω (clarament és holomorfa en $\Omega \backslash \{w\}$ i contínua en Ω, i sabem que aquestes dues condicions, aplicant el Teorema de Cauchy-Goursat i el Teorema de Morera (concretament usant el corol·lari 5.33), impliquen que és holomorfa a tot Ω). Pel teorema de derivació sota el signe integral, la funció

$$g(z) = \int_\Gamma F(z,w)\,dw, \qquad z \in \Omega$$

és holomorfa en Ω.

Ara volem estendre aquesta funció a tot $\mathbb{C}$, per tal d'obtenir una funció entera. Considerem l'obert no buit

$$G = \{w \in \mathbb{C}\backslash\Gamma^* : \operatorname{Ind}(\Gamma, w) = 0\}.$$

Observeu que donat que hem vist que $\operatorname{Ind}(\Gamma, \cdot)$ és constant en cada component connexa de $\mathbb{C}\backslash\Gamma^*$, G és la unió d'algunes d'aquestes components connexes que són obertes, i entre elles està la component connexa no fitada de $\mathbb{C}\backslash\Gamma^*$. A més, com que Γ és homòleg a 0 en Ω, tenim que $\operatorname{Ind}(\Gamma, a) = 0$ per a tot $a \in \mathbb{C}\backslash\Omega$, amb el que $\mathbb{C}\backslash\Omega \subset G$, i per tant

$$\Omega \cup G = \mathbb{C}.$$

Definim

$$\widetilde{g}(z) = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}, dw, \qquad z \in G.$$

Per $z \in G \cap \Omega$, tenim

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_\Gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\int_\Gamma \frac{dw}{w-z} \\ &= \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\operatorname{Ind}(\Gamma, z) = \widetilde{g}(z), \end{aligned}$$

ja que $\operatorname{Ind}(\Gamma, z) = 0$ per $z \in G$. Per tant, la funció $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida per

$$G(z) = \begin{cases} g(z) & \text{si} \quad z \in \Omega \\ \\ \widetilde{g}(z) & \text{si} \quad z \in G \end{cases}$$

està ben definida i és entera.

Passem a veure que és fitada. Prenem $R > 0$ prou gran de manera que $\Gamma^* \subset \{|\zeta| \leqslant R\}$. Observem que, si $|z| > 2R$, llavors z pertany a la component no fitada de $\mathbb{C} \backslash \Gamma^*$, amb el que $\operatorname{Ind}(\Gamma, z) = 0$, que implica que $z \in G$. Per tant, si $|z| > 2R$, tenim

$$|G(z)| = |\widetilde{g}(z)| \leqslant \int_\Gamma \frac{|f(w)|}{|w - z|} |dw| \leqslant M \frac{\mathrm{L}(\gamma)}{|z| - R} \leqslant M \frac{\mathrm{L}(\gamma)}{R}, \tag{6.1}$$

on $M = \sup_{w \in \Gamma^*} |f(w)|$. Per tant, G és fitada en $\{|z| > 2R\}$. Com que G és contínua, G també és fitada en el compacte $\overline{D(0, R)}$, amb el que G és una funció entera i fitada. Pel teorema de Liouville, G és constant. Ara bé, (6.1) també ens diu que $\lim_{z \to \infty} G(z) = 0$ que, al ser G constant, implica que $G \equiv 0$.

Així doncs, per $z \in \Omega \backslash \Gamma^*$, tenim

$$0 = \frac{G(z)}{2\pi i} = \frac{g(z)}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} \, dw - f(z) \operatorname{Ind}(\Gamma, z).$$

$\square$

Demostració de la continuïtat de F. Comprovem que la funció $F : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ definida per

$$F(z, w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{si} \quad z \neq w \\ \\ f'(z) & \text{si} \quad z = w, \end{cases}$$

és contínua en $\Omega \times \Omega$.

En efecte, sigui $\Delta = \{(z, w) \in \Omega \times \Omega;\ z = w\}$ la diagonal, que és un tancat relatiu en $\Omega \times \Omega$. Llavors, F és contínua en $\Omega \times \Omega \backslash \Delta$ i ens queda comprovar que F és també contínua en els punts de la diagonal.

Fixem un punt $a \in \Omega$ i considerem un disc $D_r(a) \subset \Omega$. Siguin $z \neq w \in D_r(a)$. Llavors es verifica

$$\begin{aligned} |F(z, w) - F(a, a)| &= \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f'(a) \right| = \left| \frac{f(z) - f'(a)z - (f(w) - f'(a)w)}{z - w} \right| \\ &= \frac{1}{|z - w|} \left| \int_{[w,z]} (f'(\zeta) - f'(a)) d\zeta \right| \leqslant \frac{|z - w|}{|z - w|} \sup_{\zeta \in [w,z]} |f'(\zeta) - f'(a)|. \end{aligned}$$

Observeu que donat que $F(z, z) = f'(z)$, aquesta desigualtat val també si $z = w$. Tenint en compte que f' és contínua en a, i per tant,

$$\lim_{(z,w) \to (a,a)} \sup_{\zeta \in [w,z]} |f'(\zeta) - f'(a)| = 0,$$

obtenim que
$$\lim_{(z,w)\to(a,a)} F(z,w) = F(a,a) = f'(a).$$
□

Corol·lari 6.16. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, i $f \in H(\Omega)$. Siguin Γ_1 i Γ_2 cicles en Ω. Si $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$ en Ω, llavors*
$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$

Demostració. Com que el cicle $\Gamma_1 - \Gamma_2$ és homòleg a 0 en Ω, aplicant el teorema de Cauchy global, tenim
$$0 = \int_{\Gamma_1-\Gamma_2} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz - \int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$
□

Exemple 6.17. Considerem l'anell
$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}.$$
Per r_1, r_2 amb $r < r_1 < r_2 < R$, considerem els cercles $\gamma_1(t) = r_1 e^{it}$ i $\gamma_2(t) = r_2 e^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$. Com que γ_1 i γ_2 són corbes homòloges en Ω, tenim que
$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$
per a tota funció f holomorfa en Ω. ◊

Corol·lari 6.18 (Fórmula integral de Cauchy per derivades-versió global)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, $f \in H(\Omega)$, i sigui Γ cicle en Ω homòleg a 0. Llavors*
$$f^{(n)}(z)\,\mathrm{Ind}\,(\Gamma, z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw, \qquad \forall z \in \Omega\backslash\Gamma^*.$$

Demostració. Com que l'índex és constant en cada component connexa de $\Omega\backslash\Gamma^*$, només cal aplicar la versió global de la fórmula integral de Cauchy, i derivar sota el signe integral. □

6.3 Homotopia i teorema de Cauchy

Definició 6.19 (Homotopia)**.** Siguin $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ corbes tancades. Diem que γ_0 i γ_1 són *homòtopes* en Ω (posem $\gamma_0 \sim \gamma_1$ en Ω) si existeix una aplicació contínua $H : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ de manera que

(i) $H(t,0) = \gamma_0(t)$ per a tot $t \in [a,b]$;

(ii) $H(t,1) = \gamma_1(t)$ per a tot $t \in [a,b]$;

(iii) $H(a,s) = H(b,s)$ per a tot $s \in [0,1]$. •

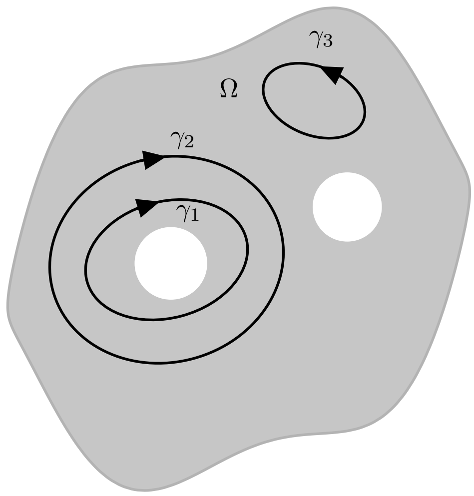


Figura 6.8: Tenim $\gamma_1 \sim \gamma_2$, $\gamma_3 \sim 0$. Tenim en canvi $\gamma_1 \not\sim \gamma_3$.

Observem que la condició (iii) ens diu que les corbes $\gamma_s(t) := H(t,s)$ són tancades per a tot $s \in [0,1]$.

Definició 6.20. Diem que una corba γ és homòtopa a 0 en Ω (posem $\gamma \sim 0$ en Ω) si γ és homòtopa a una corba constant (és a dir, a un punt). •

Essencialment, si $\gamma_0 \sim \gamma_1$ en Ω, llavors la corba γ_0 s'ha de poder deformar contínuament cap a la corba γ_1 sense passar per cap punt que no sigui d'Ω (veure l'exemple de la Figura 6.8).

Evidentment, el concepte de corbes homòtopes també té sentit per corbes que no siguin tancades però tinguin els mateixos extrems. Quan es parla d'homotopia de corbes no tancades que tenen el mateix punt inicial i final, se sol imposar que la homotopia també compleixi que les corbes $\gamma_s(t) := H(t,s)$ tinguin el mateix punt inicial i final que γ_0 i γ_1 en lloc de la condició (iii).

Proposició 6.21. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, i siguin $\gamma, \eta : [a,b] \to \Omega$ dues corbes tancats en Ω de manera que $\gamma_0 \sim \gamma_1$ en Ω. Llavors*

$$\operatorname{Ind}(\gamma_0, z) = \operatorname{Ind}(\gamma_1, z) \qquad \forall z \notin \Omega.$$

És a dir, si $\gamma_0 \sim \gamma_1$ en Ω, aleshores γ_0 és homòloga a γ_1 en Ω. En particular, $\gamma \sim 0$ en Ω implica que γ és homòloga a 0 en Ω. Ara bé, el recíproc no és cert (veure la figura 6.9 per un exemple d'una corba en un obert Ω homòloga a 0, però no homòtopa a 0 en Ω).

Lema 6.22. *Siguin $\gamma, \eta : [a,b] \to \mathbb{C}$ dues corbes tancades i sigui $z \in \mathbb{C}$. Si*

$$\left|\gamma(t) - \eta(t)\right| < |z - \gamma(t)| \qquad \forall t \in [a,b],$$

llavors Ind(γ, z) =Ind(η, z).

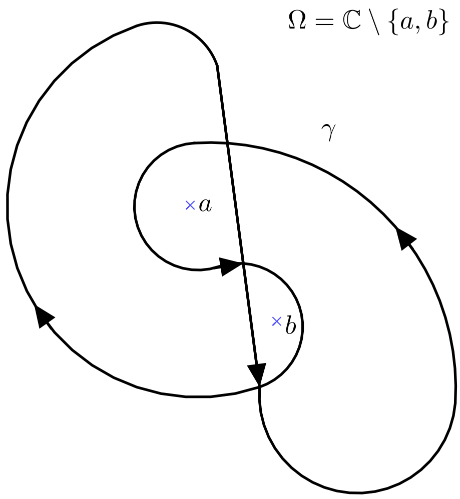


Figura 6.9: El camí γ és homòleg a 0 en Ω, però $\gamma \not\simeq 0$ en Ω.

Demostració. Observem que la hipòtesi implica que $z \notin \gamma^* = \gamma[a,b]$. També tenim que $z \notin \eta^*$ ja que per $t \in [a,b]$ tenim

$$|z - \eta(t)| = |z - \gamma(t) + (\gamma(t) - \eta(t))| \geqslant |z - \gamma(t)| - |\gamma(t) - \eta(t)| > 0.$$

A més a més, per a $t \in [a,b]$, escrivint $\gamma_z(t) = \gamma(t) - z$ i $\eta_z(t) = \eta(t) - z$ tenim

$$|\gamma_z(t) - \eta_z(t)| < |\gamma_z(t)|.$$

Tot plegat ens dona que $0 \notin \gamma_z^*$ i la corba tancada $\alpha_z = \frac{\eta_z}{\gamma_z}$ verifica

$$\big|1 - \alpha_z(t)\big| < 1 \qquad \forall t \in [a,b].$$

Sigui $\hat{\gamma}_z$ una determinació del logaritme de γ_z i $\mathcal{L}$ una determinació del logaritme en $D(1,1)$. Llavors, $\hat{\alpha}_z := \mathcal{L} \circ \alpha_z$ és una determinació del logaritme d'α_z i, per tant, $\hat{\eta}_z := \hat{\gamma}_z + \hat{\alpha}_z$ és una determinació del logaritme de η_z. En conseqüència,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}(\eta, z) &= \hat{\eta}_z(b) - \hat{\eta}_z(a) = (\hat{\gamma}_z(b) - \hat{\gamma}_z(a)) + (\hat{\alpha}_z(b) - \hat{\alpha}_z(a)) \\ &= \hat{\gamma}_z(b) - \hat{\gamma}_z(a) = \operatorname{Ind}(\gamma, z). \end{aligned}$$

Aquí hem usat que, com que η i γ són corbes tancades, també ho és α_z i, en particular,

$$\hat{\alpha}_z(b) = \mathcal{L}(\alpha_z(b)) = \mathcal{L}(\alpha_z(a)) = \hat{\alpha}_z(a).$$

$\square$

Demostració de la proposició. Sigui H una homotopia entre γ_0 i γ_1. Volem veure que $\operatorname{Ind}(\gamma_0, z) = \operatorname{Ind}(\gamma_1, z)$ per a tot $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Sigui $z \in \mathbb{C} \setminus \{\Omega\}$. Com que $[a,b] \times [0,1]$ és compacte, $H([a,b] \times [0,1])$ també i H és uniformement contínua. Per tant,

1. $\varepsilon = d(z, H([a,b]\times[0,1])) = \inf_{(t,s)\in[a,b]\times[0,1]} |z - H(t,s)| > 0$

2. Existeix $n \geqslant 1$ tal que per a tot $t \in [a,b]$ i $s_1, s_2 \in [0,1]$, $|s_1 - s_2| \leqslant \frac{1}{n}$,
$$|H(t,s_1) - H(t,s_2)| < \varepsilon.$$

Per a cada $s \in [0,1]$, considerem la corba tancada γ_s en Ω definida per $\gamma_s(t) = H(t,s)$, si $t \in [a,b]$. Llavors, 1. i 2. ens donen que per a tot $t \in [a,b]$, i tot $s_1, s_1 \in [0,1]$ amb $|s_1 - s_2| \leqslant \frac{1}{n}$,
$$|\gamma_{s_1}(t) - \gamma_{s_2}(s)| < |z - \gamma_{s_1}(t)|.$$

Aplicant el lema anterior, deduïm que $\operatorname{Ind}(\gamma_{s_1}, z) = \operatorname{Ind}(\gamma_{s_2}, z)$, per a tot $s_1, s_2 \in [0,1]$ amb $|s_1 - s_2| \leqslant \frac{1}{n}$. En particular,
$$\operatorname{Ind}(\gamma_{\frac{k-1}{n}}, z) = \operatorname{Ind}(\gamma_{\frac{k}{n}}, z),$$
per a $k = 1, \cdots, n$. Per tant,
$$\operatorname{Ind}(\gamma_0, z) = \operatorname{Ind}(\gamma_1, z).$$

□

Com que tota corba homòtopa a zero en Ω, és homòloga a zero en Ω, a partir del teorema de Cauchy global, obtenim la següent versió homotòpica.

Teorema 6.23 (Versió homotòpica del teorema de Cauchy)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert i γ camí tancat en Ω homòtop a 0 en Ω. Si $f \in H(\Omega)$, aleshores*

(a) $\int_\gamma f(z)dz = 0$*;*

(b)
$$f(z)\operatorname{Ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw, \qquad \forall z \in \Omega\backslash\gamma^*.$$

També tenim els següents corol·laris:

Teorema 6.24 (Teorema de deformació)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, $f \in H(\Omega)$, i siguin γ_0, γ_1 camins tancats homòtops en Ω. Llavors*
$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Demostració. Tenim que $\Gamma = \gamma_0 - \gamma_1$ és un cicle en Ω. Si $z \notin \Omega$, per la proposició anterior tenim que $\operatorname{Ind}(\gamma_0, z) = \operatorname{Ind}(\gamma_1, z)$, amb el que $\operatorname{Ind}(\Gamma, z) = 0$ per a tot $z \notin \Omega$, i per tant el cicle Γ és homòleg a 0 en Ω. Pel teorema de Cauchy global obtenim
$$\int_\Gamma f(z)dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

□

Corol·lari 6.25 (Teorema de la independència del camí)**.** *Sigui* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *obert, i siguin* γ_0, γ_1 *camins (no necessàriament tancats) homòtops en* Ω *i amb extrems fixos (és a dir,* $\gamma_s(a) = \gamma_0(a)$ *i* $\gamma_s(b) = \gamma_0(b)$ *per a tot* $s \in [0,1]$*). Si* $f \in H(\Omega)$*, aleshores*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Demostració. El camí $\gamma := \gamma_0 \vee \gamma_1^-$ és tancat (ull: en aquest cas, estem considerant el camí que primer recorre γ_0 i després la corba γ_1 en sentit contrari) i homòtop a 0 en Ω. Aleshores el resultat és consequècia del teorema anterior. □

6.4 Dominis simplement connexos

Definició 6.26. Un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ és *simplement connex* si és connex i tota corba tancada és homòtopa a 0 en Ω. •

Intuïtivament, podem dir que un obert connex és simplement connex si i només si Ω "no té forats". De fet, si $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, es té que un obert connex és simplement connex si i només si $\overline{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ és connex. Per exemple, sabem que $\Omega = \mathbb{C} \backslash \{0\}$ és connex però no simplement connex. Aquí tenim $\mathbb{C} \backslash \Omega = \{0\}$ que és connex. En canvi $\overline{\mathbb{C}} \backslash \Omega = \{0\} \cup \{\infty\}$ que no és connex.

Teorema 6.27 (Teorema de Cauchy per dominis simplement connexos)**.** *Sigui* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *obert simplement connex,* $f \in H(\Omega)$ *i* γ *camí tancat en* Ω*. Llavors* $\int_\gamma f(z)dz = 0$ *i també val la fórmula integral de Cauchy.*

Demostració. Com que Ω és simplement connex, llavors tot camí tancat és homòtop a zero, i el resultat se segueix de la versió homotòpica del teorema de Cauchy. □

Proposició 6.28. *Sigui* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *obert simplement connex, i* $f \in H(\Omega)$*. Llavors* f *té primitiva holomorfa en* Ω*.*

Demostració. Fixem un punt $a \in \Omega$. Com que Ω és un obert connex, llavors és arconnex, amb el que donat $z \in \Omega$, hi ha una poligonal $L_{a,z} \subset \Omega$ que uneix a amb z.[1] Definim

$$F(z) = \int_{L_{a,z}} f(w)\,dw, \qquad z \in \Omega.$$

Donat h amb $|h|$ prou petit, considerem el camí tancat γ format per la poligonal $L_{a,z}$, el segment $[z, z+h]$ i la poligonal $L_{a,z+h}$ (recorreguda en sentit contrari). Com Ω és simplement connex, pel teorema de Cauchy tenim

$$0 = \int_\gamma f(w)dw = F(z) + \int_{[z,z+h]} f(w)dw - F(z+h).$$

A partir d'aquí acabem la prova, veient que F és holomorfa amb $F'(z) = f(z)$, igual com vam fer en el teorema de Cauchy per un disc. □

[1] Recordem que no és cert en general que un conjunt connex sigui arcconnex.

Proposició 6.29 (Determinació del logaritme en dominis simplement connexos)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert simplement connex, i $f \in H(\Omega)$ amb $f(z) \neq 0$ per a tot $z \in \Omega$. Llavors hi ha $g \in H(\Omega)$ amb*

$$e^{g(z)} = f(z) \quad \textit{per a tot } z \in \Omega.$$

A més, si $z_0 \in \Omega$ i tenim $e^{w_0} = f(z_0)$, podem escollir g de manera que $g(z_0) = w_0$.

Demostració. Com que $f(z) \neq 0$ per a tot $z \in \Omega$, llavors la funció f'/f és holomorfa en Ω. Per la proposició anterior, té primitiva holomorfa G. Considerem la funció $H(z) = e^{G(z)} \in H(\Omega)$ amb $H(z) \neq 0$ per a tot $z \in \Omega$. Llavors la funció f/H és holomorfa en Ω amb derivada donada per

$$(f/H)' = \frac{f'H - fH'}{H^2}.$$

Però $H' = HG' = Hf'/f$ amb el que $f'H - fH' = 0$. Per tant f/H és igual a una constant $c \neq 0$ en Ω. És a dir,

$$f(z) = c\, e^{G(z)} = e^{G(z)+c'}$$

per alguna constant c'. Agafant $g(z) = G(z) + c' + 2k\pi i$ per un $k \in \mathbb{Z}$ apropiat, tenim que $g(z_0) = w_0$ i la proposició queda provada. □

Com a exemple, vegem que en la regió $\Omega = \mathbb{C} \backslash E$, on E és una espiral que surt del 0 fins a l'infinit, hi ha determinació holomorfa del logaritme de z (ja que Ω és simplement connex, la funció $f(z) = z \in H(\Omega)$, amb $f(z) \neq 0$ en Ω).

Comentari 6.30. El fet que una funció holomorfa tingui primitiva en Ω, o que una funció holomorfa sense zeros en Ω tingui determinació del seu logaritme en Ω, caracteritza els dominis simplement connexos, encara que quan tenim un obert connex Ω, la millor manera de comprovar si és simplement connex és mirar si $\overline{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ és connex o no. •

Finalment i fora de programa, enunciem el següent resultat fonamental d'anàlisi complexa:

Teorema 6.31 (Teorema de l'aplicació de Riemann)**.** *Tot obert Ω simplement connex del pla diferent de $\mathbb{C}$ és conformement equivalent al disc unitat $\mathbb{D}$. Això vol dir que hi ha un homeomorfisme holomorf $h : \Omega \to \mathbb{D}$ amb inversa holomorfa.*

7 Sèries de Laurent

En aquest capítol veurem com són les singularitats aïllades de les funcions holomorfes i estudiarem els desenvolupaments en sèrie entorn d'una singularitat. Obtindrem el teorema dels residus, que ens permetrà calcular integrals definides i indefinides que altrament serien complicades.

7.1 Sèries de Laurent i singularitats

Veurem tot seguit que tota funció holomorfa en un anell es té un desenvolupament en sèrie de Laurent, que té una expressió formal similar a les sèries de potències, considerant també exponents negatius.

Sigui $a \in \mathbb{C}$, i siguin $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$. Considerem l'anell

$$\Omega = \big\{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\big\}.$$

Observem que a Ω, són holomorfes les funcions $1, (z-a), (z-a)^2, \dots, (z-a)^n$, però també ho són les funcions $(z-a)^{-1}, (z-a)^{-2}, \dots, (z-a)^{-n}$.

Definició 7.1. Anomenem *sèrie de Laurent* al voltant d'$a \in \mathbb{C}$ a una sèrie de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,(z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-a)^n.$$

La part amb exponents negatius s'anomena la *part singular* de la sèrie de Laurent. •

Observem que $f_2(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-a)^n$ és una sèrie de potències que tindrà un radi de convergència R_2, de manera que $f_2 \in H\big(D(a,R_2)\big)$.

Considerem ara la sèrie que correspondria a les potències negatives, amb $w = \frac{1}{z-a}$, és a dir, estudiem la sèrie $g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n$. Aquesta és també una sèrie de potències, que tindrà el seu radi de convergència R_1 i, en particular, convergirà uniformement en $|w| \leqslant r$, per a tot $r < R_1$. Aleshores

$$f_1(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$$

convergirà si $\frac{1}{|z-a|} < R_1$, és a dir, si $|z-a| > \frac{1}{R_1}$. I a més a més, la sèrie que defineix $f_1(z)$ convergeix uniformement si $\{|z-a| \geqslant 1/r\}$, on $r < R_1$.

Ajuntant les dues parts de la sèrie de Laurent $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-a)^n$, veiem que f és holomorfa en l'anell $\{\frac{1}{R_1} < |z-a| < R_2\}$ (sempre que $1/R_1 < R_2$). El recíproc d'aquesta afirmació també és certa: tota funció holomorfa en un anell s'expressa com una sèrie de Laurent.

Teorema 7.2. *Sigui* $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$ *amb* $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$, *i sigui* $f \in H(\Omega)$. *Aleshores hi ha una única sèrie de Laurent amb*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \, (z-a)^n, \qquad z \in \Omega.$$

A més, la sèrie és absoluta i uniformement convergent en els compactes d'Ω*. En particular,*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw. \tag{7.1}$$

Demostració. Considerem les sèries $f_1(z) = \sum_{n \geqslant 0} c_n \, (z-a)^n$ i $f_2(w) = \sum_{n \geqslant 1} c_{-n} \, w^n$ amb c_n donat per (7.1), amb radis de convergència $R_1 = \left(\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1}$ i $R_2 = \left(\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}\right)^{-1}$.

Notem en primer lloc que si $n \in \mathbb{Z}$ i $r < \rho < R$, aleshores

$$|c_n| \overset{\text{P5.8}}{\leqslant} \frac{1}{2\pi} \int_{|w-a|=\rho} \frac{|f(w)|}{|w-a|^{n+1}} |dw| \leqslant \frac{\sup \partial D_\rho(a)|f|}{\rho^n}.$$

Per tant,

$$\frac{1}{R_1} \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{\sup \partial D_\rho(a)|f|}}{\rho} = \frac{1}{\rho}.$$

i

$$\frac{1}{R_2} \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sup \partial D_\rho(a)|f|} \rho = \rho.$$

Com que $\rho \in (r, R)$ és arbitrari, deduïm que

$$\frac{1}{R_1} \leqslant \frac{1}{R} \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{R_2} \leqslant r.$$

les sèries f_1 i f_2 són absoluta i uniformement convergents en compactes dels seus discs de convergència $D_{R_1}(a)$ i $D_{R_2}(0)$ respectivament. Fent el canvi $w = (z-a)^{-1}$ en la segona sèrie deduïm que

$$f_3(z) = f_2(w) = \sum_{n \leqslant 1} c_n \, (z-a)^n$$

és absoluta i uniformement convergent en compactes de $\overline{D_{R_2^{-1}}}^c$. Per tant, $f_1 + f_3$ és absoluta i uniformement convergent en compactes d'Ω tal i com volíem veure.

Resta demostrar que $f = f_1 + f_3$ i que la sèrie és única. Prenem ρ amb $r < \rho < R$. Recordem que, per $k \in \mathbb{Z}$, tenim

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} (z-a)^k dz = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq -1 \\ 1 & \text{si} \quad k = -1 \end{cases}$$

Si $g(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k(z-a)^k$ convergeix uniformement en els compactes de Ω (això serà així per Cauchy-Hadamard), llavors podem treure el sumatori fora de la integral en el càlcul que segueix, per obtenir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-a|=\rho}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-a|=\rho}(w-a)^{k-(n+1)}dw = b_n,$$

que determina el coeficient $b_n = c_n$ de manera única. Observem que el valor de ρ escollit no afecta, ja que si $r < \rho_1 < \rho_2 < R$, els cercles $\gamma_1(t) = a + \rho_1 e^{it}$ i $\gamma_2(t) = a + \rho_2 e^{it}$ per $t \in [0, 2\pi]$ són homòlegs en Ω.

□

Exercici 7.1.1. *Calcular la sèrie de Laurent de*

a) $\dfrac{z-1}{z(z-4)^3}$ *a* $0 < |z-4| < 4$.

b) $1/e^{(1-z)}$ *per* $|z| > 1$. ◁

Exercici 7.1.2. *Per a la funció* $f(z) = \dfrac{\sin z \cos 3z}{z^4}$

1. *Trobar els primers termes no nuls de la part central de la seva sèrie de Laurent a* $z = 0$.
2. *Calcular* $\oint f(z)dz$ *si es recorre* $|z| = 1$ *un cop i en sentit antihorari.*

◁

Exercici 7.1.3. *Trobeu el desenvolupament en sèrie de Laurent de* $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ *a les corones: (a)* $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, *(b)* $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$, *(c)* $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ *i (d)* $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1\}$. ◁

Exercici 7.1.4. *Sigui* $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$, *donar les sèries de Laurent per les tres corones centrades a* 0 *allà on* f *és analítica (*$|z| < 1, 1 < |z| < 3$ *i* $|z| > 3$*).* ◁

Exercici 7.1.5. *Donar els primers termes de la sèrie de Laurent*

a) $f(z) = z^2 \cos\left(\dfrac{1}{3z}\right)$ *per* $|z| > 0$.

b) $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$ *per* $0 < |z| < R$.

◁

Exercici 7.1.6. *Quina és la corona (o anell) de convergència de* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^n}{2^{|n|}}$*?* ◁

7.2 Singularitats aïllades de funcions holomorfes

Definició 7.3. Les *singularitats* d'una funció holomorfa serien els punts on f no és holomorfa. És a dir, si $f \in H(\Omega \backslash E)$, llavors els punts de E s'anomenen les singularitats de f.

Una singularitat z_0 d'una funció holomorfa f es diu *aïllada* si hi ha $r > 0$ de manera que $f \in H\big(D(z_0, r)\backslash\{z_0\}\big)$. •

Per exemple, les funcions

$$\frac{\sin z}{z}; \qquad \frac{1}{z^2}; \qquad e^{1/z}$$

són holomorfes a $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, i tenen una singularitat aïllada en $z = 0$.

Definició 7.4. Sigui z_0 una singularitat aïllada d'una funció holomorfa f. Diem que z_0 és una *singularitat evitable* de f si hi ha $\varepsilon > 0$ i $g \in H\big(D(z_0, \varepsilon)\big)$ amb

$$f(z) = g(z) \qquad \forall z \in D(z_0, \varepsilon)\backslash\{z_0\}.$$

•

És a dir, una singularitat evitable seria una singularitat "fictícia", ja que podriem redefinir la funció de manera que sigui holomorfa al voltant del punt. És clar que si z_0 és una singularitat aïllada de f, i existeix $\lim_{z\to z_0} f(z)$, llavors z_0 és una singularitat evitable de f (simplement definint $f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)$). Ara bé, existeix un criteri encara més feble per determinar quan una singularitat aïllada és evitable.

Proposició 7.5. *Sigui z_0 singularitat aïllada d'una funció holomorfa f. Llavors z_0 és evitable si i només si*

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)f(z) = 0.$$

Demostració. Tenim $f \in H\big(D(z_0, r)\backslash\{z_0\}\big)$. Si z_0 és una singularitat evitable, llavors hi ha $\varepsilon > 0$ i $g \in H(D(z_0, \varepsilon))$ amb $f(z) = g(z)$ per $z \in D(z_0, \varepsilon)\backslash\{z_0\}$. Per tant

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0)g(z) = 0 \cdot g(z_0) = 0.$$

Suposem ara que $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$, i passem a provar que z_0 és una singularitat evitable de f. Definim

$$h(z) = \begin{cases} (z - z_0)f(z) & \text{si} \quad z \neq z_0 \\ 0 & \text{si} \quad z = z_0 \end{cases}.$$

Llavors h és holomorfa en $D(z_0, r)\backslash\{z_0\}$. Com que $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$, la funció h és contínua en z_0, amb el que se segueix que h és holomorfa en $D(z_0, r)$ (veure una de les conseqüències del teorema de Morera). Com que $h(z_0) = 0$, pel teorema 5.39 hi ha $g \in H\big(D(z_0, r)\big)$ amb $h(z) = (z - z_0)g(z)$. En particular, $f(z) = g(z)$ per $z \neq z_0$, amb el que z_0 és una singularitat evitable de f. □

A partir d'aquesta proposició ja podem veure que la funció $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ té una singularitat evitable en $z = 0$. En canvi, les singularitats en $z = 0$ de les funcions $\frac{1}{z^2}$ i $e^{1/z}$ no són evitables.

Definició 7.6. Sigui z_0 una singularitat aïllada d'una funció holomorfa f. Diem que z_0 és un *pol* de f si

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty.$$

•

Exemple 7.7. La funció $\frac{1}{z^2}$ té un pol en $z = 0$. En canvi, la singularitat en $z = 0$ de la funció $f(z) = e^{1/z}$ no és evitable ni és un pol, ja que si $z = -x$, tenim que $e^{-1/x} \to 0$ quan $x \to 0$, i en canvi, per $z = ix$, tenim $|e^{1/ix}| = 1$. ♢

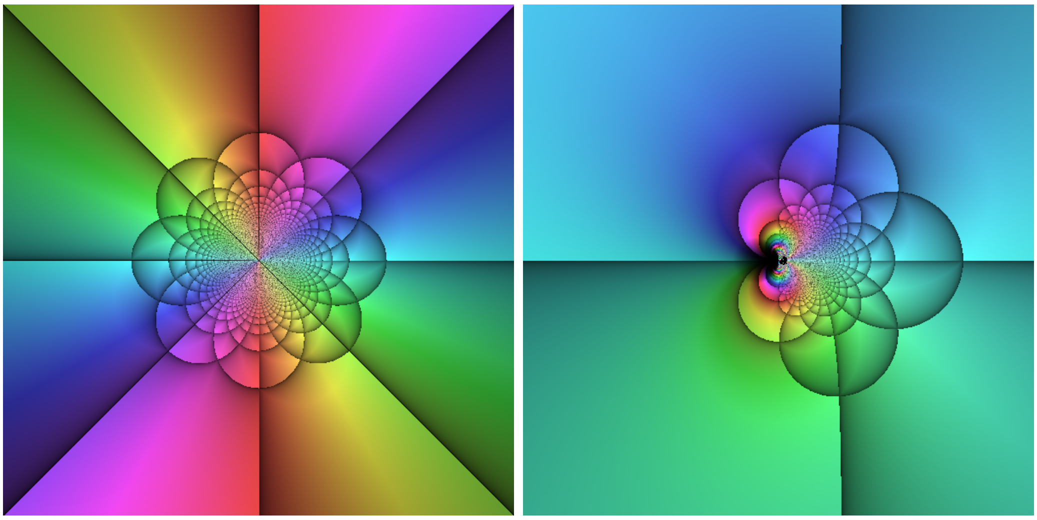


Figura 7.1: A l'esquerra la funció $\frac{1}{z^2}$, amb un pol d'ordre 2 a l'origen; a la dreta $f(z) = e^{1/z}$, amb una singularitat essencial a l'origen.

Definició 7.8. Una singularitat aïllada d'una funció holomorfa que no és evitable ni és un pol, es diu que és una *singularitat essencial.* •

Tornem al cas en què una funció f holomorfa en $D(z_0, R)\backslash\{z_0\}$ tingui un pol en el punt z_0. Donat que $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$, existeix $0 < r < R$ i per a tot $0 < |z - z_0| < r$, $f(z) \neq 0$. Si definim en $\Omega = D(z_0, r)$ la funció

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)} & \text{si} \quad z \neq z_0 \\ 0 & \text{si} \quad z = z_0 \end{cases},$$

es compleix que que $\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$, que prova que g és contínua en z_0. Per tant, $g \in C(\Omega) \cap H(\Omega\backslash\{z_0\})$, que implica que $g \in H(\Omega)$. Com que $g(z_0) = 0$, pel teorema 5.39

hi ha $m \in \mathbb{N}$ de manera que $g(z) = (z - z_0)^m g_1(z)$, on $g_1 \in H(\Omega)$ amb $g_1(z_0) \neq 0$. En particular, $g_1(z) \neq 0$ en un entorn de z_0, amb el que podem desenvolupar en sèrie de potències al voltant de z_0 la funció $1/g_1$,

$$\frac{1}{g_1(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z - z_0)^k.$$

Llavors, per z en un entorn de z_0 amb $z \neq z_0$, tenim

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-z_0)^m} \frac{1}{g_1(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z-z_0)^k \\ &= \frac{A_0}{(z-z_0)^m} + \frac{A_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots \frac{A_{m-1}}{(z-z_0)} + G(z), \end{aligned}$$

on G és una sèrie de potències al voltant de z_0, i $A_0 \neq 0$.

Definició 7.9. Donada una funció f amb un pol en z_0, anomenem *ordre del pol* z_0 al nombre natural m tal que podem escriure

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

amb $c_{-m} \neq 0$. •

Per exemple, la funció $f(z) = \frac{1}{z^2}$ té un pol d'ordre 2 en $z = 0$.
També veiem que z_0 és un pol de f d'ordre m, si

$$\lim_{z \to z_0} \left| (z - z_0)^k f(z) \right| = +\infty, \quad \text{per a tot } k < m,$$

i existeix el límit

$$c_m = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) \neq 0.$$

Si tenim una singularitat aïllada d'una funció holomorfa f, podem veure quin tipus de singularitat és mitjançant la sèrie de Laurent de f en $0 < |z - z_0| < r$.

Lema 7.10 (Classificació de singularitats aïllades en termes de la sèrie de Laurent)**.** *Sigui f holomorfa en $\{0 < |z - z_0| < r\}$ amb sèrie de Laurent donada per*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad 0 < |z - z_0| < r.$$

(i) z_0 és evitable si $c_{-n} = 0$ per a tot $n \geqslant 1$;

(ii) z_0 és un pol d'ordre m si $c_{-n} = 0$ per a tot $n > m$ i $c_{-m} \neq 0$;

(iii) z_0 és una singularitat essencial si hi ha infinits $c_{-n} \neq 0$ per $n > 0$.

El següent resultat ens dona una idea del que passa al voltant d'una singularitat essencial d'una funció holomorfa.

Teorema 7.11 (Casorati-Weierstrass)**.** *Sigui f holomorfa en $D(z_0, r)\backslash\{z_0\}$. Si z_0 és una singularitat essencial de f, llavors*

$$f\Big(D(z_0, \varepsilon)\backslash\{z_0\}\Big)$$

és dens en $\mathbb{C}$ per a tot $0 < \varepsilon \leqslant r$.

Demostració. Sigui ε amb $0 < \varepsilon \leqslant r$. Suposem que $f\big(D(z_0, \varepsilon)\backslash\{z_0\}\big)$ no és dens en $\mathbb{C}$. Aleshores hi ha $w_0 \in \mathbb{C}$ i $t > 0$ de manera que

$$|f(z) - w_0| \geqslant t \qquad \text{si} \quad 0 < |z - z_0| < \varepsilon. \tag{7.2}$$

En particular, $f(z) \neq w_0$ i per tant la funció

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

és holomorfa en $D(z_0, \varepsilon)\backslash\{z_0\}$. La condició (7.2) ens diu també que g és fitada, amb el que $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)g(z) = 0$, que implica que $\{z_0\}$ és una singularitat evitable de g per la proposició 7.5. Llavors existeix

$$\alpha = \lim_{z\to z_0} g(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z) - w_0}.$$

Si $\alpha = 0$, llavors $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$, amb el que z_0 seria un pol de f, en contradicció amb la nostra hipòtesi. Finalment, si $\alpha \neq 0$, llavors

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 + \frac{1}{\alpha}$$

amb el que z_0 seria una singularitat evitable de f, en contradicció amb el fet que z_0 és una singularitat essencial de f. □

Un resultat més avançat (teorema gran de Picard), ens diu que al voltant d'una singularitat essencial, una funció holomorfa pren tots els valors complexos excepte potser un.

Exercici 7.2.1. *Construcció de funcions*

1. *Trobar una funció f que tingui un pol d'ordre 2 a $z = 1 + i$ i singularitats essencials a $z = 0, 1$.*

2. *Trobar una funció f que tingui una singularitat evitable a $z = 0$, un pol d'ordre 6 a $z = 1$ i una singularitat essencial a $z = i$.* ◁

Exercici 7.2.2. *Sigui f analítica amb zero d'ordre n a z_0 i g analítica amb zero d'ordre m a z_0. Si $h(z) = f(z)/g(z)$ proveu que* *a)* *Si* $n > m$ $h(z)$ *te un zero d'ordre* $n - m$ *a* z_0*,*

b) *si* $n < m$ $h(z)$ *te un pol d'ordre* $m - n$ *a* z_0*,*

c) *si* $n = m$ $h(z)$ *és holomorfa i no nul·la a* z_0*.* ◁

Exercici 7.2.3. *Determineu les singularitats de les funcions següents. Si* a *és una singularitat evitable de* f*, calculeu el valor que cal donar a* $f(a)$ *per a què* f *sigui holomorfa en un entorn d'*a*, i si* a *és un pol de* f*, determineu la part singular de* f *en* a *(la part de la sèrie amb índexs negatius).*

a) $f(z) = z\cos(1/z)$.

b) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^3(z-1)^2}$.

c) $f(z) = \dfrac{1}{(1-e^z)^2}$. ◁

Exercici 7.2.4. *Sigui* $f \in H(D(a,r)\setminus\{a\})$*. Suposem que existeix una successió* $(z_n)_n$ *tal que* $z_n \to a$ *i*

$$\lim_{n\to\infty} |e^{f(z_n)}| = 0, \qquad \left|f\left(z_n + \frac{1}{n}\right)\right| \leqslant 1 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Determineu el tipus de singularitat que té la funció f *en el punt* a*.* ◁

Exercici 7.2.5. *a) La funció* $\tan(1/z)$ *té una singularitat aïllada al* 0*? De quin tipus?*

b) *Sigui* 0 *singularitat aïllada de* $f(z)$*. Suposem que* $|f(z)| \leqslant |z|^{-\alpha}$ *on* $0 < \alpha < 1$*. Demostreu que* 0 *és una singularitat evitable.* ◁

7.3 Teorema dels Residus

L'objectiu és calcular el valor de $\int_\gamma f$ quan γ és un camí tancat en Ω, però la funció f no és holomorfa en tot Ω, sinó que té singularitats aïllades.

Definició 7.12. Sigui f holomorfa amb una singularitat aïllada en un punt a. Sigui

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-a)^n$$

el desenvolupament en sèrie de Laurent de f al voltant del punt a. El *residu de* f *en* a és

$$\operatorname{Res}(f,a) = c_{-1}.$$

•

Proposició 7.13. *Sigui* $r > 0$ *i* $a \in \mathbb{C}$ *i sigui* $f \in H\big(D_r(a)\setminus\{a\}\big)$*. Llavors*

$$\int_{|z-a|=\varepsilon} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,a) \qquad \forall\, 0 < \varepsilon < r.$$

Demostració. Això és una conseqüència immediata del teorema 7.2 i de la definició de residu. □

Observació 7.14 (Càlcul de residus)**.** És clar que si $z = a$ és una singularitat evitable de f, llavors $\operatorname{Res}(f, a) = 0$.

Si $z = a$ és un pol simple de f, llavors

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} (z - a) f(z).$$

Suposem que $z = a$ és un pol de f d'ordre m. En aquest cas, tenim el desenvolupament de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - a)^n, \qquad 0 < |z - a| < r.$$

Llavors, per $0 < |z - a| < r$, tenim

$$g(z) := (z - a)^m f(z) = c_{-m} + c_{-(m-1)}(z - a) + \cdots + c_{-1}(z - a)^{m-1} + c_0 (z - a)^m + \ldots$$

amb el que el residu de f en el punt a és el coeficient $(m - 1)$-èssim del desenvolupament en sèrie de potències de la funció g, que sabem que és

$$\frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}.$$

Per tant, si $z = a$ és un pol de f d'ordre m, llavors

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \partial^{(m-1)} \big[(z - a)^m f(z) \big]_{z=a}.$$

•

Exemple 7.15. Considerem la funció

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2 - 1)^2},$$

que té singularitats en els punts $z_0 = 1$ i $z_1 = -1$, que són pols d'ordre 2. Llavors, si $g(z) = (z - 1)^2 f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2}$, tenim

$$\operatorname{Res}(f, 1) = g'(1) = 0.$$

Si $h(z) = (z + 1)^2 f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$, llavors $h'(z) = \frac{e^z (z-1) - 2e^z}{(z-1)^3}$ i

$$\operatorname{Res}(f, -1) = h'(-1) = \frac{1}{2e}.$$

◊

Teorema 7.16 (Teorema dels residus). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, i sigui $f \in H(\Omega \backslash A)$, on $A \subset \Omega$ no té punts d'acumulació en Ω. Si Γ és un cicle en $\Omega \backslash A$ que és homòleg a 0 en Ω, llavors*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{a \in A} \mathrm{Ind}\,(\Gamma, a)\,\mathrm{Res}\,(f, a).$$

Demostració. Vegem primer que la suma té un nombre finit de termes diferents de zero. Posem

$$K = \Gamma^* \cup \{z \in \mathbb{C} \backslash \Gamma^*; \,\mathrm{Ind}\,(\Gamma, z) \neq 0\}.$$

Comprovem que K és compacte. Observem primer que $K \subset \Omega$, doncs per hipòtesi $\mathrm{Ind}\,(\Gamma, z) = 0$ per a tot $z \in \mathbb{C} \backslash \Omega$. Si $\Gamma^* \subset D(0, R)$, llavors $\mathbb{C} \backslash D(0, R)$ està contingut en la component connexa no fitada de $\mathbb{C} \backslash \Gamma^*$, on es verifica que $\mathrm{Ind}\,(\Gamma, \cdot) = 0$. Per tant, $K \subset D(0, R)$ i, en particular, K és **fitat**. Per altra banda, cada component connexa de $\mathbb{C} \backslash \Gamma^*$ és un obert i K és el complementari de les components connexes de $\mathbb{C} \backslash \Gamma^*$ on l'índex val zero, es a dir, K és **tancat** i, en conseqüència, K és compacte.

Com que A no té punts d'acumulació en Ω, és finit o numerable i, en particular,

$$B = \{a \in A : \mathrm{Ind}\,(\Gamma, a) \neq 0\} = K \cap A,$$

és finit ja que el compacte $K \subset \Omega$ no pot contenir punts d'acumulació. Per tant

$$B = \{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Considerem discs oberts $D_i := D(a_i, \varepsilon_i)$, $i = 1, \ldots, n$ amb $\overline{D_i} \cap (A \backslash \{a_i\}) = \varnothing$ de manera que

(i) $\overline{D(a_i, \varepsilon_i)} \subset \Omega, \quad i = 1, \ldots, n;$

(ii) $D(a_i, \varepsilon_i) \cap \Gamma^* = \varnothing, \quad i = 1, \ldots, n;$

(iii) $\overline{D(a_i, \varepsilon_i)} \cap \overline{D(a_j, \varepsilon_j)} = \varnothing \quad$ per $i \neq j$.

Per $i = 1, \ldots, n$, sigui $\gamma_i(t) = a_i + \varepsilon_i e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, cercles de centre a_i i radi ε_i, i considerem el cicle

$$\Lambda = \Gamma - \sum_{i=1}^n n_i\,\gamma_i, \qquad n_i = \mathrm{Ind}\,(\Gamma, a_i).$$

Llavors Λ és un cicle en $\Omega \backslash A$. Passem a veure que és homòleg a 0 en $\Omega \backslash A$. Hem de veure que

$$\mathrm{Ind}\,(\Lambda, z) = 0 \quad \text{per a tot } z \notin (\Omega \backslash A).$$

Si $z \notin \Omega$, llavors $\mathrm{Ind}\,(\Gamma, z) = 0$ ja que Γ és homòleg a 0 en Ω. També, per $i = 1, \ldots, n$, tenim $\mathrm{Ind}\,(\gamma_i, z) = 0$ ja que z pertany a la component no fitada de $\mathbb{C} \backslash \gamma_i^*$, amb el que $\mathrm{Ind}\,(\Lambda, z) = 0$.

Si $z \in A \backslash B$, llavors $\mathrm{Ind}(\Gamma, z) = 0$ per la definició del conjunt B. A més, també $\mathrm{Ind}(\gamma_i, z) = 0$ per a tot $i = 1, \ldots, n$ ja que z es troba a l'exterior del cercle γ_i. Per tant $\mathrm{Ind}(\Lambda, z) = 0$.

Si $z \in B$, llavors $z = a_k$ per algun $1 \leqslant k \leqslant n$. Com que $\mathrm{Ind}(\gamma_i, a_k) = 0$ si $i \neq k$, i $\mathrm{Ind}(\gamma_k, a_k) = 1$, tenim

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\,(\Lambda, z) &= \mathrm{Ind}\,(\Lambda, a_k) = \mathrm{Ind}\,(\Gamma, a_k) - \sum_{i=1}^{n} n_i \,\mathrm{Ind}\,(\gamma_i, a_k)\\ &= \mathrm{Ind}\,(\Gamma, a_k) - n_k = \mathrm{Ind}\,(\Gamma, a_k) - \mathrm{Ind}\,(\Gamma, a_k) = 0.\end{aligned}$$

Així doncs, tenim una funció $f \in H(\Omega \backslash A)$, i Λ és un cicle en $\Omega \backslash A$ que és homòleg a 0 en $\Omega \backslash A$. Pel teorema de Cauchy global, tenim que

$$\int_{\Lambda} f(z) dz = 0.$$

És a dir,

$$0 = \int_{\Lambda} f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz - \sum_{i=1}^{n} n_i \int_{\gamma_i} f(z) dz.$$

Per la proposició anterior, tenim

$$\int_{\gamma_i} f(z) dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\,(f, a_i),$$

amb el que, com que $n_i = \mathrm{Ind}\,(\Gamma, a_i)$, tenim

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ind}\,(\Gamma, a_i) \,\mathrm{Res}\,(f, a_i).$$

□

Moltes vegades, aplicarem el teorema dels residus quan tenim una funció holomorfa amb un nombre finit de singularitats $\{a_1, \ldots, a_n\}$ dins d'una corba γ tancada simple, de manera que el índexos d'aquests punts valen 1, amb el que en aquest cas el teorema dels residus ens diu que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}\,(f, a_i).$$

Exercici 7.3.1. *Existeix alguna funció f amb pol simple a z_0 de manera que* $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$*? Què passa si el pol és d'ordre* 2*, pot passar que* $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$*?* ◁

Exercici 7.3.2. *Decidir si són certes o falses les següents afirmacions. Donar els arguments que provin les afirmacions.*

1. *Si f, g tenen un pol a z_0 llavors $f + g$ té un pol a z_0.*
2. *Si f, g tenen un pol a z_0 i en els dos casos el residu és no nul llavors $f \cdot g$ té un pol a z_0 amb residu no nul.*

3. *Si f té una singularitat essencial a $z = 0$ i g un pol d'ordre finit a $z = 0$ llavors $f + g$ té singularitat essencial a $z = 0$.*

4. *Si f té un pol d'ordre m a $z = 0$ llavors $f(z^2)$ té un pol d'ordre $2m$.* ◁

Exercici 7.3.3. *Suposem f holomorfa amb un zero d'ordre m a z_0. Provar que $g(z) = f'(z)/f(z)$ te un pol simple a z_0 amb $\mathrm{Res}(g, z_0) = m$.* ◁

Exercici 7.3.4. *a) Provar que si $g(z)$ té un zero simple a z_0, llavors $1/g(z)$ té un pol simple a z_0.*

b) Provar que $\mathrm{Res}(1/g, z_0) = 1/g'(z_0)$.

c) Sigui $f(z) = 1/\sin(z)$, trobar els seus pols i provar que són simples. Trobar els residus. ◁

Exercici 7.3.5. *Trobar i classificar les singularitats aïllades de cadascuna de les funcions següents. Calcular el residu a cada singularitat.*

a) $f(z) = \dfrac{z^3 + 1}{z^2(z + 1)}$.

b) $g(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$.

c) $h(z) = \cos(1 - 1/z)$. ◁

Exercici 7.3.6. *Avaluar* $\displaystyle\oint \frac{1}{(z+1)(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)(z-5)}dz$ *al llarg de la corba $|z - 3| = 3$ recorreguda en sentit antihorari.* ◁

Exercici 7.3.7. *Avaluar les següents integrals*

a) $\displaystyle\oint_{|z|=5} \frac{\sin z}{z^2 - 4}dz$

b) $\displaystyle\oint_{|z|=8} \frac{1}{z^2 + z + 1}dz$

c) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{e^{iz}}{z^2(z - 2)(z + 5i)}dz$. ◁

Exercici 7.3.8. *Calculeu la integral de la funció* $f(z) = \dfrac{1 + z}{1 + \sin z}$ *sobre la vora del disc $D(0, 7)$.* ◁

Exercici 7.3.9. *Per a $t > 0$, sigui C_t la circumferència de centre it, que passa pels punts -2 i 2. Calculeu*

$$f(t) = \int_{C_t} \frac{e^{i\pi z} + 1}{z(z - t)}\, dz, \quad \text{per a } t \neq 2.$$ ◁

7.4 Residu a l'infinit

Definició 7.17. Sigui f meromorfa en $\mathbb{C}$, i sigui Γ una corba simple orientada positivament i tal que conté tots els pols de f. Aleshores el residu de f a l'infinit és

$$\operatorname{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\, dz.$$

•

Pel teorema dels residus, si A és el conjunt de pols de f, tenim

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\sum_{a \in A} \operatorname{Ind}(\Gamma, a) \operatorname{Res}(f, a).$$

Lema 7.18. *Sigui f meromorfa en $\mathbb{C}$. Aleshores el residu de f a l'infinit és*

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), 0\right).$$

Demostració. Fem el canvi de variable $w = 1/z$. Sigui C_t la circumferència de radi t, recorreguda en sentit antihorari. Si R és tal que C_R conté totes les singularitats, aleshores trobem

$$-2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty) = \int_{C_R} f(z)\, dz = \int_{C^-_{1/R}} f\left(\frac{1}{w}\right) \frac{-dw}{w^2},$$

on $C^-_{1/R}$ és la corba inversa de $C_{1/R}$, vegeu la definició 5.2. Canviant-ne l'orientació trobem

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{C_{1/R}} f\left(\frac{1}{w}\right) \frac{dw}{w^2} \overset{\text{T 7.16}}{=} -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), 0\right),$$

tal i com volíem veure. □

Exercici 7.4.1. *Trobar el valor la integral $\oint_{|z|=2} \frac{5z-1}{z(z-1)} dz$ calculant els residu de l'integrand a l'infinit.* ◁

Exercici 7.4.2. *Sigui $a \in \mathbb{R}$, calculeu, estudiant el residu a l'infinit, $I = \oint_C \frac{a^2 - z^2}{z(z^2 + a^2)} dz$ on C és una corba simple que envolta les singularitats de l'integrand.* ◁

Exercici 7.4.3. *Avaluar $\oint_{|z|=1} e^{1/z} \sin(1/z) dz$.* ◁

7.5 Aplicació al càlcul d'integrals

El teorema dels residus es pot fer servir per calcular diverses integrals reals. Farem diversos exemples típics.

Exemple 7.19. Tenim una funció racional R sense singularitats en $|z| = 1$, i volem calcular

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt.$$

Fent el canvi $z = e^{it}$, podem posar

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}; \qquad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

Com que $dz = ie^{it}\, dt$, llavors $dt = \frac{dz}{iz}$, amb el que

$$I = \frac{1}{i} \int_\gamma R\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) \frac{dz}{z},$$

on γ és el cercle $|z| = 1$. Ara apliquem el teorema dels residus i ja està.

Per exemple,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t}.$$

Fent el canvi $z = e^{it}$, tenim

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t} = \int_{|z|=1} \frac{1}{2 + \left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right)} \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}\, dz.$$

La funció

$$f(z) = \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}$$

té singularitats en els punts $\alpha = (-2 + \sqrt{3})i$ i $\beta = (-2 - \sqrt{3})i$. Tenim $|\alpha| < 1$ i $|\beta| > 1$, amb el que aplicant el teorema dels residus, tenim

$$\int_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, \alpha).$$

Com que α és un pol simple de f, tenim

$$\operatorname{Res}(f, \alpha) = \lim_{z \to \alpha} (z - \alpha) f(z) = \lim_{z \to \alpha} \frac{2}{z - \beta} = \frac{2}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{3}\, i}.$$

Per tant,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t} = \int_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, \alpha) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

$\Diamond$

Exemple 7.20. Càlcul d'integrals del tipus

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{iax}\, dx$$

on f no té cap pol en l'eix real.

Per exemple, donat $k > 0$, calculem

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + k^2}\, dx.$$

Tenim

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + k^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + k^2}\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2}\, dx\right).$$

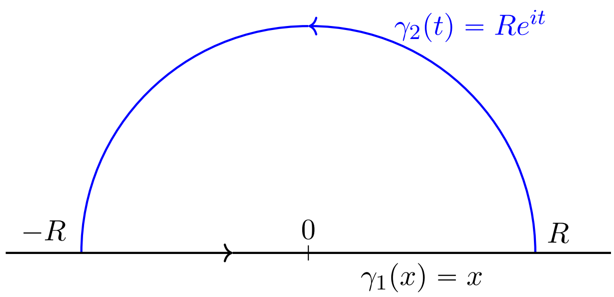
Així doncs, passem a calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2}\, dx.$$

Considerem la funció

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + k^2}.$$

Aquesta funció és holomorfa a tot $\mathbb{C}$, excepte en els punts ki, $-ki$ que són pols de f d'ordre 1. Prenem $R > 0$ molt gran, de manera que $R > k$. Integrem la funció f en el semicercle γ format pel segment $\gamma_1(x) = x$, amb $x \in [-R, R]$ i $\gamma_2(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$.



Com que només el punt ki es troba en l'interior del semicercle, pel teorema dels residus, tenim

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ki).$$

Passem a calcular el residu de f en el punt ki. Com que és un pol d'ordre 1, tenim

$$\operatorname{Res}(f, ki) = \lim_{z\to ki}(z - ki)f(z) = \lim_{z\to ki}\frac{e^{iz}}{z + ki} = \frac{e^{iki}}{2ki},$$

amb el que

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = \frac{\pi}{k}\, e^{-k}.$$

Per altra banda, tenim

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Tenim

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+k^2}\,dx.$$

Fent $R \to \infty$, obtenim

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+k^2}\,dx + \lim_{R\to\infty} I_R = \lim_{R\to\infty} \int_\gamma f(z)dz = \frac{\pi}{k}\,e^{-k},$$

on

$$I_R = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Si veiem que $\lim_{R\to\infty} I_R = 0$, obtenim

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+k^2}\,dx = \frac{\pi}{k}\,e^{-k} \quad \Rightarrow \quad \int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+k^2}\,dx = \frac{\pi}{2k}\,e^{-k}.$$

Passem a provar que $\lim_{R\to\infty} I_R = 0$. Tenim

$$I_R = \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{R^2e^{2it}+k^2}\,Ri\,e^{it}\,dt.$$

Llavors

$$|I_R| \leqslant \int_0^\pi \frac{|e^{iRe^{it}}|}{|R^2e^{2it}+k^2|}\,R\,dt.$$

Com que $|e^{iRe^{it}}| = e^{-R\sin t}$, fent servir que $|R^2e^{2it}+k^2| \geqslant R^2-k^2$, i que $\sin t \geqslant 0$ per $t \in [0,\pi]$, veiem que

$$|I_R| \leqslant \frac{R}{R^2-k^2} \int_0^\pi e^{-R\sin t}dt \leqslant \frac{\pi R}{R^2-k^2} \longrightarrow 0$$

quan $R \to \infty$, provant el resultat desitjat. $\Diamond$

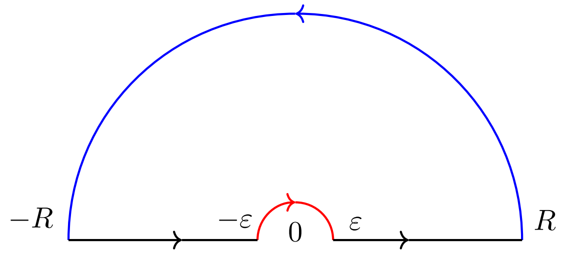
Exemple 7.21. Si f té algun pol en l'eix real, evitem el pol. Per exemple, passem a calcular

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Integrant per parts, es pot veure que aquesta integral impròpia és convergent (encara que no és absolutament convergent). Considerem la funció

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z},$$

que és holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Integrem f en el camí γ de la següent figura.



Pel teorema de Cauchy, tenim

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Per altra banda, com que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_R + \gamma_2 - \gamma_\varepsilon$, amb $\gamma_1(x) = x$ per $x \in [\varepsilon, R]$; $\gamma_2(y) = y$ per $y \in [-R, -\varepsilon]$; $\gamma_R(t) = Re^{it}$ per $t \in [0, \pi]$ i $\gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it}$ per $t \in [0, \pi]$, tenim

$$0 = \int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz - \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz.$$

Tenim

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x}\, dx.$$

També, després de fer el canvi $x = -y$, tenim

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iy}}{y}\, dy = -\int_\varepsilon^R \frac{e^{-ix}}{x} dx.$$

Fent $R \to \infty$ i $\varepsilon \to 0$, obtenim

$$0 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x}\, dx + \lim_{R\to+\infty} I_r - \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon,$$

amb

$$I_R = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz; \qquad I_\varepsilon = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\, dz.$$

Es compleix que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{(e^{ix} - e^{-ix})}{x}\, dx = 2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

A més, $\lim_{R\to\infty} I_R = 0$. En efecte,

$$|I_R| = \left| i \int_0^\pi e^{iRe^{i\theta}} d\theta \right| \leqslant \int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta.$$

Observem que fixat $0 < \delta < \pi/2$, $|\sin\theta| \geqslant \sin\delta$, per a $\delta \leqslant \theta \leqslant \pi - \delta$. Per tant, $e^{-R\sin\theta} \leqslant e^{-R\sin\delta}$, per a $\delta \leqslant \theta \leqslant \pi - \delta$. Per tant,

$$|I_R| \leqslant 2\delta + \int_\delta^{\pi-\delta} e^{-R\sin\theta} d\theta \leqslant 2\delta + \pi e^{-R\sin\delta}.$$

Sigui $\varepsilon > 0$ i $\delta < \min(\frac{1}{3}\varepsilon, \frac{\pi}{2})$. Llavors, existeix $R_0 > 1$, tal que $e^{-R\sin\delta} < \frac{\varepsilon}{3\pi}$, per a cada $R > R_0$. Per tant, si $R > R_0$, $I_R < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$, i, en defintiva, $\lim_{R\to\infty} I_R = 0$.

Tot plegat ens dona que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon.$$

Finalment, donat que per a $\theta \in [0, \pi]$, $|e^{i\varepsilon e^{it}}| \leqslant e^{-\varepsilon \sin\theta} \leqslant 1$, aplicant el Teorema de la convergència dominada, obtenim

$$I_\varepsilon = \int_0^{\pi} \frac{e^{i\varepsilon e^{it}}}{\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it}\, dt = i \int_0^{\pi} e^{i\varepsilon e^{it}}\, dt \longrightarrow \pi i$$

quan $\varepsilon \to 0$. Per tant

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

$\Diamond$

Exercici 7.5.1. *Considereu la funció* $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2}$.

(a) Determineu les singularitats de f.

(b) Calculeu la part principal del desenvolupament de Laurent al voltant de $z = 2i$.

(c) Justifiqueu la convergència de

$$\int_0^{\infty} f(x)dx$$

i calculeu-ne el seu valor. $\triangleleft$

Exemple 7.22. Si R és una funció racional sense pols a l'eix real amb $\lim_{z\to\infty} zR(z) = 0$ (és a dir, $R = P/Q$ amb grau $Q \geqslant$ grau $P + 2$), podem calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, dx.$$

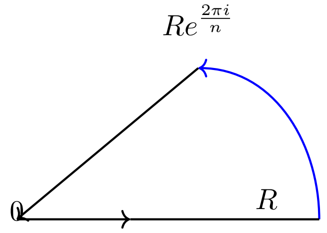
$\Diamond$

Exercici 7.5.2. *Demostreu que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$\triangleleft$

Exemple 7.23. Càlcul de
$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}, \qquad n \geqslant 2.$$
Aquesta integral és convergent ja que $n > 1$. Considerem la funció
$$f(z) = \frac{1}{1+z^n},$$
que és holomorfa a tot $\mathbb{C}$ excepte en les solucions de $z^n + 1 = 0$, és a dir, en
$$a_k = e^{i(\frac{\pi}{n}+\frac{2k\pi}{n})}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$
Integrem la funció f en el "formatget"γ del dibuix, amb $R > 1$ gran.

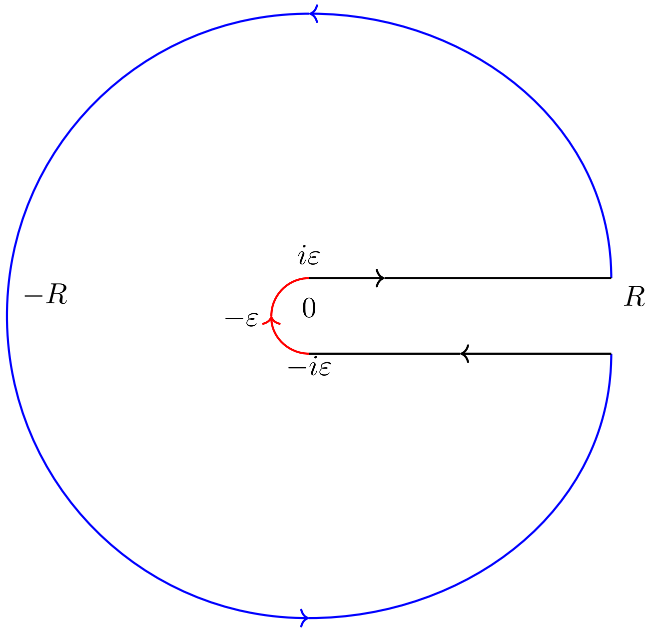


Només el pol a_0 es troba en l'interior del camí γ, amb el que, pel teorema dels residus,
$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, a_0).$$
◊

Exercici 7.5.3. *Calculeu*
$$I := \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^5}.$$
◁

Exemple 7.24. Per $0 < \alpha < 1$, podem calcular
$$\int_0^\infty \frac{Q(x)}{x^\alpha}\,dx$$
on Q no té cap pol en $\mathbb{R}^+$ amb $\lim_{z\to\infty} zQ(z) = 0$.

En aquest cas, considerem la funció
$$f(z) = Q(z)\,z^{-\alpha}, \qquad z^{-\alpha} = e^{-\alpha \log z},$$
amb $\log z = \ln|z| + i \arg z$, amb $\arg z \in (0, 2\pi)$. Llavors $z^{-\alpha}$ és holomorfa a $\mathbb{C}\backslash[0,+\infty)$. En aquest cas, integrem f en el recinte "comecocos"γ de la figura



Tenim $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$, amb

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= x + i\varepsilon; & x &\in [0, R^*]; \\ \gamma_2(t) &= Re^{it}; & t &\in [\varepsilon^*, 2\pi - \varepsilon^*] \\ \gamma_3(x) &= x - i\varepsilon; & x &\in [0, R^*]; \\ \gamma_4(t) &= \varepsilon e^{it}; & t &\in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]. \end{aligned}$$

◊

Exercici 7.5.4. *Donat $a \in (0,1)$ calculeu el valor de la integral*

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\, dx\ .$$

◁

Exercici 7.5.5. *Calcular*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}.$$

◁

Exemple 7.25. Calcular integrals del tipus

$$\int_0^\infty R(x)\, \ln x\, dx,$$

on R no té cap pol en $\mathbb{R}^+$ i si $R = P/Q$, grau$Q \geqslant$ grauP $+ 2$.

Observem, primer, que si raonem com en els casos anteriors i agafem la funció $g(z) = R(z)\,(\log z)^2$ on $\log z = \ln|z| + i\arg z$ amb $\arg z \in (0, 2\pi)$, i integrem la funció f en la regió "comecocos"del cas anterior, es compleix que $z \in \gamma_1^*$, $z = x + i\varepsilon$, amb el que $\log z \to \log x$ si $\varepsilon \to 0$ i si $z \in \gamma_3^*$, $z = x - i\varepsilon$, amb el que $\log z \to \log x + 2\pi i$ si $\varepsilon \to 0$. Tot plegat ens dona que si $z = x + i\varepsilon$, amb $x > 0$, $g(x + i\varepsilon) \to R(x)\ln x$, i $g(x - i\varepsilon) \to -R(x)(\ln x + 2\pi i)$ quan $\varepsilon \to 0$ i no podem calcular la integral desitjada.

Per aquest motiu, agafem la funció

$$f(z) = R(z)\,(\log z)^2$$

on $\log z = \ln|z| + i\arg z$ amb $\arg z \in (0, 2\pi)$, i integrem la funció f en la regió "comecocos"del cas anterior. $\diamondsuit$

Exercici 7.5.6. *Calcular*

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1 + x^2}\,dx.$$

$\triangleleft$

Exercici 7.5.7. *Calculeu els residus de les funcions següents en els punts indicats:*

a) $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$, $z_0 = 0$.

b) $f(z) = \dfrac{1 + e^z}{z^4}$, $z_0 = 0$. $\triangleleft$

Exercici 7.5.8. *Calculeu* $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^{1/z}}{z - a}\,dz$ *pels diferents valors d'*$a \in \mathbb{C}$ *tals que* $|a| \neq 1$. $\triangleleft$

Exercici 7.5.9. *Justifiqueu la integrabilitat (Lebesgue o impròpia Riemann) i calculeu les següents integrals (en tots els apartats* $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *i* $n = 0, 1, 2, \cdots$*):*

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5 + 4\cos t}\,dt.$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{2 + \cos t}\,dt.$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}\,dx.$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - x + 1}\,dx.$

f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1 + x^2}\,dx.$ $\triangleleft$

Exercici 7.5.10. *Justifiqueu la convergència de*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 3}dx$$

i calculeu-ne el seu valor (cal justificar tots els passos). $\triangleleft$

Exercici 7.5.11. *Siguin* $f(z) = e^z/z^2$ *i la recta* $\gamma = \{1 + it;\ t \in (-\infty, +\infty)\}$.

a) Calculeu (justificant tots els passos)

$$\int_\gamma f(z)dz.$$

(Indicació: integreu f *sobre la vora del semidisc de centre* $z_0 = 1$ *i radi* R *amb* $\operatorname{Re} z \leqslant 1$*).*

b) Deduïu que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-t^2)\cos(t) + 2t\sin(t)}{(1+t^2)^2}dt = \frac{2\pi}{e}$. ◁

Exercici 7.5.12. *Considereu*

$$f(z) = \frac{z^2 - 2}{(z^2+1)^2(z^2+4)^2}.$$

(a) Trobeu la part principal de la sèrie de Laurent al voltant de $z = 2i$.

(b) Justifiqueu la convergència de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

i calculeu-ne el seu valor (justifiqueu tots els passos). ◁

Exercici 7.5.13. *(a) Sigui* f *una funció holomorfa en* $\mathbb{D}^* = \{0 < |z| < 1\}$. *Suposem que* $f(a_n) = 0$ *per una successió* $a_n \in \mathbb{D}^*$ *tal que* $a_n \to 0$. *Demostreu que* $f \equiv 0$ *o bé* $z = 0$ *és una singularitat essencial de* f.

(b) Sigui f *una funció holomorfa en* $\mathbb{D}^*$ *tal que per a tot* $n \geqslant 2$, f *no té zeros sobre les corbes* $|z| = 1/n$ *i a més*

$$\int_{|z|=\frac{1}{n}} \frac{1}{f(z)}dz \neq \int_{|z|=\frac{1}{n+1}} \frac{1}{f(z)}dz.$$

Demostreu que $z = 0$ *és una singularitat essencial de* f. Indicació: Utilitzeu el Teorema de deformació i l'apartat anterior. ◁

Exercici 7.5.14. *Calculeu, justificant tots els passos, la integral*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^2+x+1}dx, \quad -1 < \alpha < 1.$$

Indicació: Considereu la funció $f(z) = \dfrac{z^\alpha}{z^2+z+1}$. *Definiu una determinació del logaritme* $log(z)$ *a* $\mathbb{C}\backslash[0, +\infty)$ *de manera que* $z^\alpha = e^{\alpha log(z)}$. *Finalment integreu la funció* $f(z)$ *a la mateixa regió que les integrals del tipus*

$$\int_0^{+\infty} R(x)\ln(x)dx.$$ ◁

7.6 Principi de l'argument

El principi de l'argument i el teorema de Rouché es fan servir per calcular el nombre de zeros i pols d'una funció holomorfa (excepte per pols) dins d'una corba tancada.

Definició 7.26. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert. Diem que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ és *meromorfa* en Ω si $f \in H(\Omega \backslash E)$, on $E \subset \Omega$ està format per punts aïllats, i aquestes singularitats de f són pols. En aquest cas, posem $f \in M(\Omega)$ •

Teorema 7.27 (Principi de l'argument)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ obert i $f \in M(\Omega)$. Denotem per Z el conjunts dels zeros de f en Ω, i per E el conjunt de pols de f en Ω. Sigui γ camí tancat en $\Omega \backslash (Z \cup E)$, homòleg a 0 en Ω. Llavors*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{z \in Z} Ind(\gamma, z)\, m(f, z) - \sum_{p \in E} Ind(\gamma, p)\, m(f, p),$$

on $m(f, z)$ és la multiplicitat del zero z, i $m(f, p)$ denota l'ordre del pol p.

Observació 7.28. S'anomena el principi de l'argument, ja que si $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$ és la corba imatge, llavors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \mathrm{Ind}(\Gamma, 0),$$

amb el que, si γ és una corba tancada simple, llavors el nombre de zeros menys el nombre de pols de f en l'interior de γ (comptant multiplicitats) és igual al nombre de voltes que dona la corba imatge $f(\gamma)$ al voltant del zero, que seria la variació de l'argument al llarg de $f(\gamma)$ dividit per 2π.

En efecte, tenim

$$\mathrm{Ind}(\Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w - 0} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt}{f(\gamma(t))} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

•

Demostració del teorema 7.27. Observem que si f és holomorfa en $\Omega \backslash E$, llavors la funció $h = f'/f$ és holomorfa en $\Omega \backslash (E \cup Z)$. Aplicant el teorema dels residus, tenim

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{w \in E \cup Z} \mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, w\right) \mathrm{Ind}(\gamma, w).$$

• Si z_0 és un zero de f de multiplicitat m, llavors $f(z) = (z - z_0)^m\, g(z)$, on g és holomorfa en un entorn de z_0 amb $g(z_0) \neq 0$. Llavors, en un entorn de z_0 tenim

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Com que $g(z) \neq 0$ en un entorn de z_0, llavors g'/g és holomorfa en aquest entorn, amb el que

$$\mathrm{Res}(f'/f, z_0) = m.$$

• Si p_0 és un pol de f d'ordre m, llavors $g(z) = (z - p_0)^m f(z)$ és holomorfa en un entorn de p_0 amb $g(p_0) \neq 0$. Llavors, procedint com abans obtenim

$$\mathrm{Res}(f'/f, p_0) = -m.$$

Per tant

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{w \in Z} \mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, w\right) \mathrm{Ind}(\gamma, w) + \sum_{p \in E} \mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, p\right) \mathrm{Ind}(\gamma, p)$$

$$= \sum_{w \in Z} \mathrm{Ind}(\gamma, w)\, m(f, w) - \sum_{p \in E} \mathrm{Ind}(\gamma, p)\, m(f, p).$$

□

Exemple 7.29. Aplicant el principi de l'argument calculem el nombre de zeros (comptant multiplicitats) del polinomi $Q(z) = z^4 + 2z^3 - 2z + 10$ al primer quadrant.

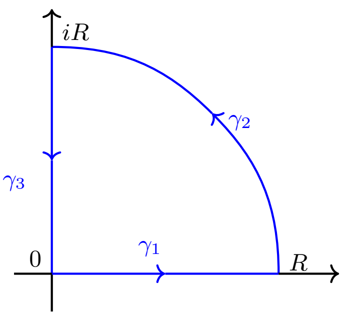
Volem aplicar el principi de l'argument a la corba $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ formada per:

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= x, & x &\in [0, R] \\ \gamma_2(t) &= Re^{it}, & t &\in [0, \pi/2] \\ -\gamma_3(y) &= iy, & y &\in [0, R]. \end{aligned}$$

on $R > 0$ és prou gran per englobar les arrels de Q al primer quadrant $\mathcal{Q}_1$, que són un nombre finit. Pel principi de l'argument,

$$\# Z(Q) \cap \mathcal{Q}_1 = \sum_{w \in Z} \mathrm{Ind}(\gamma, w)\, m(Q, w) = \mathrm{Ind}\big(Q \circ \gamma, 0\big).$$

En el que raonarem a continuació, provarem també que el polinomi Q no té cap zero a γ^*.



Mirem doncs quantes voltes fa la corba $Q \circ \gamma$ al voltant de 0. Estudiem cada tros de γ.
La corba $Q(\gamma_1(x)) = Q(x)$ és continguda a $\mathbb{R}_+$, ja que

$$Q(x) = x^4 + 2x(x^2 - 1) + 10 > 10 - 2 = 8 > 0.$$

Tenim doncs que Q no s'anul·la a γ_1^* i $Q(\gamma_1)$ és un segment al semieix real positiu, que va de $Q(0)$ a $Q(R)$.

Seguidament

$$Q(\gamma_2(t)) = Q(Re^{it}) = (Re^{it})^4 \left(1 + \frac{2}{Re^{it}} - \frac{2}{(Re^{it})^3} + \frac{10}{(Re^{it})^4}\right).$$

Per tant, quan R és molt gran, $Q(\gamma_2(t))$ no s'anul·la i és una petita pertorbació de $R^4 e^{i4t}$. Com que $t \in [0, \pi/2]$ tenim $4t \in [0, 2\pi]$.

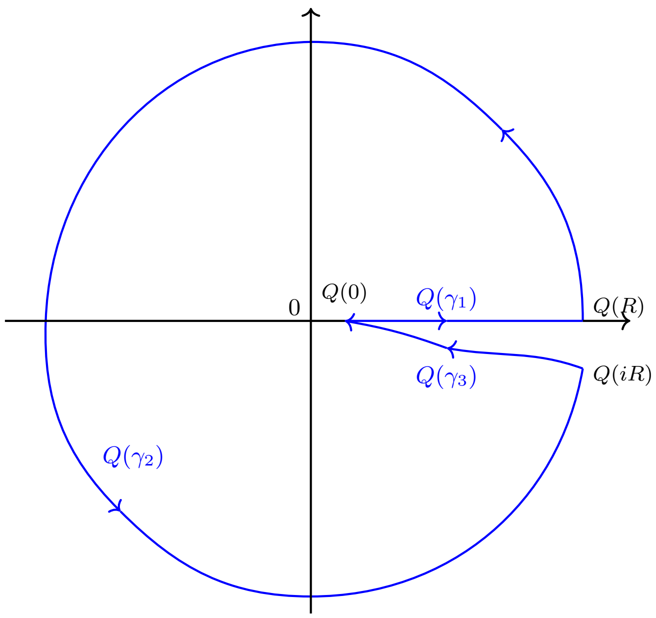
Pel tercer tros tenim

$$Q(\gamma_3(y)) = Q(iy) = (y^4 + 10) - 2i(y^3 + y),$$

i en particular $Q(iR)$ és un punt amb part imaginària negativa. Observem que per a $y > 0$,

$$\mathrm{Re}Q(iy) > 0, \qquad \mathrm{Im}Q(iy) < 0.$$

Per tant $Q(\gamma_3(y))$ va del punt $Q(iR)$ cap a $Q(0)$ restant sempre dins del quart quadrant.



Amb tot això tenim que le nombre de voltes que fa $Q \circ \gamma$ al voltant de 0 és 1; pel principi de l'argument

$$\#Z(Q) \cap \mathcal{Q}_1 = \mathrm{Ind}\big(Q \circ \gamma, 0\big) = 1.$$

$\Diamond$

Exercici 7.6.1. *Quines de les següents funcions són meromorfes a $\mathbb{C}$?*

a) z^5 *b)* $z^{5/2}$ *c)* $e^{1/z}$ *d)* $1/\sin(z)$. ◁

Exercici 7.6.2. *Calculeu el nombre de zeros (comptats amb multiplicitat) amb part real positiva del polinomi* $P(z) = z^6 - z^4 - 2z - 6$*. I si alternativament el polinomi fos* $Q(z) = z^6 - z^4 - 2z + 6$*?* ◁

Exercici 7.6.3. *Sigui* f *una funció entera tal que*

$$f(z) \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}.$$

Demostreu que f *té, com a molt, un zero a tot* $\mathbb{C}$*.* ◁

Exercici 7.6.4. *Quants zeros té* $P(z) = z^4+6z^3-4z^2+1/8$ *en la regió* $\left\{z \in \mathbb{C};\ \frac{1}{2} < |z| < 1\right\}$*?* ◁

7.7 Teorema de Rouché

Teorema 7.30. *Sigui* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *obert i* $f, g \in M(\Omega)$*. Sigui* γ *camí tancat simple homòleg a* 0 *en* Ω*. Suposem que* f *i* g *no tenen pols en* γ^**. Si*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|, \qquad z \in \gamma^*$$

aleshores

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g,$$

on Z_f, Z_g *denoten el nombre de zeros (comptant multiplicitats) de* f *i* g *en l'interior de* γ*, i* P_f, P_g *el nombre de pols (comptant l'ordre) de* f *i* g *en l'interior de* γ*.*

Observació 7.31. Cal que la desigualtat sigui estricta. També, al ser γ simple, tenim que $\mathrm{Ind}(\gamma, z)$ val 0 o 1 per $z \notin \gamma^*$. •

Demostració del teorema 7.30. Notem que f i g tampoc no poden tenir zeros en γ^* per la hipòtesi imposada (en cas contrari, tindriem $|g(z)| < |g(z)|$!!).

Tenim $F = f/g \in M(\Omega)$. Si suposem, per simplificar, que els pols d'una funció no coincideixen amb els zeros de l'altra, aleshores

$$\{\text{zeros de } F\} = \{\text{zeros de } f\} \cup \{\text{pols de } g\}; \qquad \{\text{pols de } F\} = \{\text{zeros de } g\} \cup \{\text{pols de } f\}.$$

Per la hipòtesi, tenim que $|\frac{f(z)}{g(z)} - 1| < 1$ per $z \in \gamma^*$, amb el que la corba imatge $\Gamma = F(\gamma) \subset D(1,1)$, amb el que Γ no dona cap volta al voltant del 0, i per tant $\mathrm{Ind}(\Gamma, 0) = 0$. Pel principi de l'argument

$$0 = \mathrm{Ind}(\Gamma, 0) = Z_F - P_F = Z_f + P_g - (Z_g + P_f),$$

d'on obtenim el resultat. Quan hi ha coincidències, aleshores comptant els ordres de zeros i pols arribem a la mateixa conclusió. □

La majoria de les vegades apliquem el teorema de Rouché en un cercle $\{|z-a| = R\}$ i a funcions f, g holomorfes en un entorn de $\overline{D(a, R)}$. En aquest cas, si $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ per $|z-a| = R$, es segueix que f i g tenen el mateix nombre de zeros comptant multiplicitats en el disc obert $D(a, R)$. Això ens pot servir per determinar els zeros de f en el disc, si podem triar una funció g de la qual es pugui determinar fàcilment el nombre de zeros.

Exemple 7.32. Trobem el nombre de zeros del polinomi $P(z) = z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1$ en el disc unitat $\mathbb{D}$.

Prenem la funció $g(z) = 6z^3$ que té 3 zeros comptant multiplicitats en $\mathbb{D}$. Tenim $|g(z)| = 6$ si $|z| = 1$. Llavors

$$|P(z) - g(z)| = |z^7 - 2z^5 - z + 1| \leqslant |z|^7 + 2|z|^5 + |z| + 1 = 5 < 6 = |g(z)|, \qquad \text{si } |z| = 1.$$

Pel teorema de Rouché, P i g tenen el mateix nombre de zeros (comptant multiplicitats) en $\mathbb{D}$, amb el que P té 3 zeros en $\mathbb{D}$. ♢

Exemple 7.33. Trobem quants zeros té $P(z) = z^4 - 6z + 3$ en l'anell $\{1 < |z| < 2\}$.

Primer, trobem els zeros de P dins del disc $\{|z| < 2\}$. Prenem $g(z) = z^4$ que té 4 zeros comptant multiplicitats en $\{|z| < 2\}$. Tenim

$$|P(z) - g(z)| = |-6z + 3| \leqslant 6|z| + 3 = 15 < 16 = |g(z)| \qquad \text{si } |z| = 2.$$

Com abans, aquesta desigualtat també implica que P no té zeros en $|z| = 2$. Pel Teorema de Rouché, P i g tenen el mateix nombre de zeros en $\{|z| < 2\}$, amb el que P té 4 zeros en $\{|z| < 2\}$.

Ara, busquem els zeros de P en el disc unitat $\{|z| < 1\}$. Prenem $h(z) = -6z$ que té un zero en el disc unitat. Tenim

$$|P(z) - h(z)| = |z^4 + 3| \leqslant |z|^4 + 3 = 4 < 6 = |h(z)| \qquad \text{si } |z| = 1.$$

Pel Teorema de Rouché, P té un zero en el disc unitat $\{|z| < 1\}$.

En conclusió, el polinomi P té 3 zeros en l'anell $\{1 < |z| < 2\}$. ♢

Exercici 7.7.1. *Demostreu que l'equació $e^z = 2z + 1$ té exactament una solució en el disc unitat obert. (Indicació: Proveu que $|e^z - 1| \leqslant e - 1$ si $|z| = 1$.)* ◃

Exercici 7.7.2. *Sigui f una funció holomorfa en el disc unitat tancat tal que $|f(z)| < 1$, per a $|z| = 1$. Quants punts fixos té f?* ◃

Exercici 7.7.3. *Calculeu el nombre de solucions (comptant multiplicitats) de les següents equacions en el disc unitat:*

(a) $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0$.

(b) $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8 = 0$.

(c) $z^7 - 5z^4 + z^2 = 2$.

◁

Exercici 7.7.4. *Considerem* $P(z) = z^6 + 3z^4 + z^2 + z + 9$.

(a) Proveu que tots els zeros de $P(z)$ *són a l'anell* $1 < |z| < 2$.

(b) Calculeu el nombre de zeros (comptats amb multiplicitat) de $P(z)$ *al primer quadrant.*

◁

Exercici 7.7.5. *(a) Calculeu el nombre de solucions a* $\mathbb{D}$ *de l'equació* $e^z = 4z + 1$.

(b) Demostreu que l'equació $e^z = 3z^n$ *té* n *solucions en el disc unitat* ($n = 0, 1, 2, \dots$).

◁

Exercici 7.7.6. *Sigui* $a \in \mathbb{C}$, $0 < |a| < 1$, *i* $n \in \mathbb{N}$.

(a) Demostreu que l'equació

$$(z-1)^n e^z = a$$

té exactament n *arrels diferents al semiplà* $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re} z > 0\}$. *(*Indicació*: Considereu un disc centrat a* $z = 1$ *i de radi* $R \geqslant 1$.*)*

(b) Proveu que si, a més, $|a| \leqslant 1/2^n$, *llavors totes aquestes arrels són al disc* $D(1, 1/2)$.

◁

Exercici 7.7.7. *Sigui* f *una funció holomorfa en* $\overline{\mathbb{D}}$ *tal que* $|f(z)| < 1$ *per tot* $|z| = 1$. *Quants punts fixos té* f*?* ◁

Exercici 7.7.8. *Demostreu que per a tot* $R > 0$ *existeix* $n(R) \geqslant 0$ *tal que si* $n > n(R)$

$$P_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$$

no té zeros al disc $\{|z| \leqslant R\}$. ◁

Exercici 7.7.9. *Sigui* f_n *una successió de funcions holomorfes en un obert* Ω *tals que* $f_n \to f$ *uniformement en compactes de* Ω, *per una certa funció* f.

1. *(Teorema de Hurwitz) Demostreu que si per a tota* $n \geqslant 0$, f_n *no s'anul.la en cap punt de* Ω, *aleshores o be* $f \equiv 0$ *o be* f *no s'anul.la en* Ω. (Indicació: Argumenteu per reducció a l'absurd, utilitzant que, si f no és identicament nul·la, llavors els zeros són aïllats, agafant llavors per a cada zero un disc prou petit que el separi de la resta, i aplicant el Teorema de Rouché.)

2. *(Corol.lari) Deduïu que si $f_n(z) \neq a$ per a tota $z \in \Omega$, aleshores, $f \equiv a$ o be $f(z) \neq a$ en Ω.*

3. *Proveu que si f_n és injectiva en Ω per a tot $n \geqslant 0$, aleshores f és constant o bé f és injectiva en Ω.* (Indicació: Argumenteu per reducció a l'absurd, i utilitzeu l'apartat anterior.)

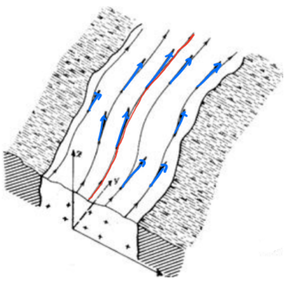
◁

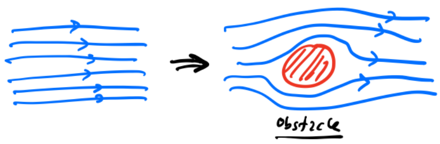
8 Fluids

La solució de molts problemes importants en *dinàmica de fluids*, també anomenada *hidrodinàmica* o *aerodinàmica* s'obté sovint fent servir mètodes de variable complexa.

8.1 Qüestions generals. Escenari i notació.

1. *El flux del fluid és bidimensional.* En el nostre model suposem que les característiques del flux són idèntiques per tot pla paral·lel. Això ens permet fixar l'atenció només en un pla, considerem el pla z. Les figures construïdes en aquest pla s'interpreten com seccions transversals de cilindres. En la figura, el disc representa la secció d'un cilindre de l'espai.





2. *El flux és estacionari o uniforme.* Considerem que la velocitat del fluid en un punt no varia amb el temps, només depèn de la posició (x, y). Veieu per exemple un mapa de vents de la Terra a `https://earth.nullschool.net/`, cal esperar un bona estona per veure com canvia la distribució. En petita escala temporal podem pensar que és un flux estacionari.

3. *Les components de la velocitat deriven d'un potencial.* Denotem per $\mathbf{V}(x, y) = (V_1, V_2)$ les components de la velocitat del fluid en el punt (x, y). Suposarem que existeix una funció $\varphi(x, y)$, que anomenem *velocitat potencial*, de manera que

$$\nabla\varphi = \mathrm{grad}\varphi = \mathbf{V}.$$

En aquest cas el flux es diu que és *irrotacional* o *potencial*. Es pot demostrar[1] que aquesta condició és equivalent a

$$\mathrm{rot}\mathbf{V} = \frac{-\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial V_2}{\partial x} = 0.$$

[1] Ho podeu fer com exercici

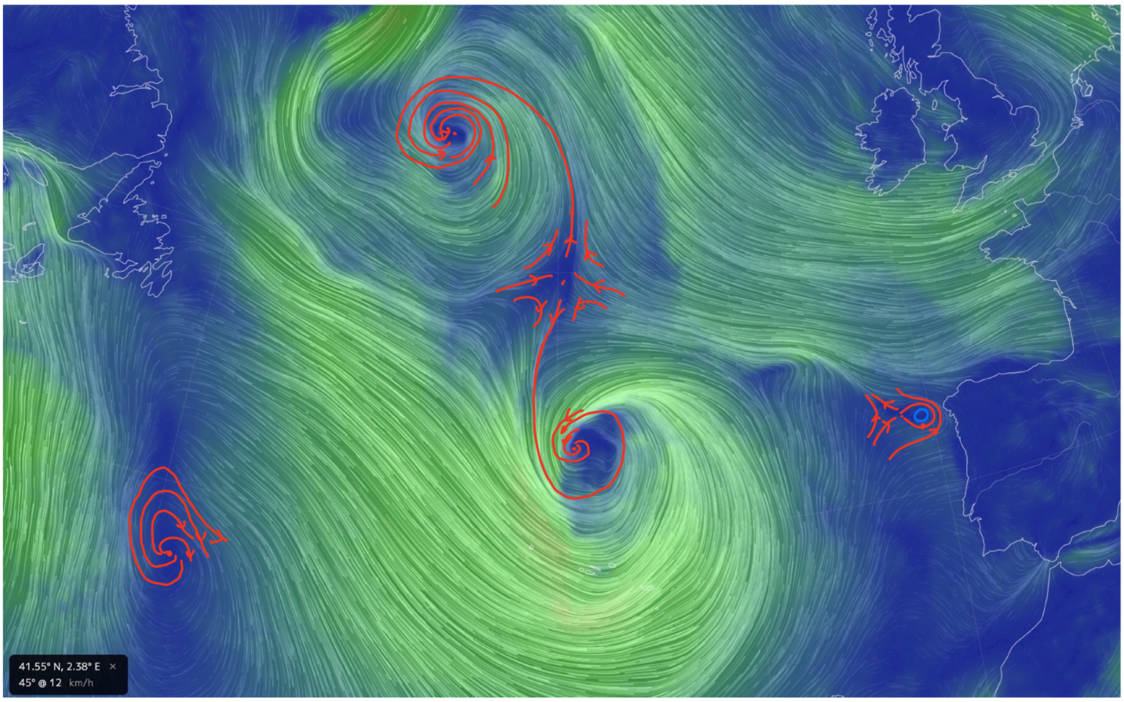


Figura 8.1: Mapa de vents.

4. *El fluid és incompressible.* La densitat, o massa per unitat de volum, és constant. Si V_n és la component normal de la velocitat al llarg d'un circuit tancat C (vegeu la figura 8.2) aquesta condició equival a

$$Q := \int_C V_n ds = \int_C (-V_2 dx + V_1 dy) = 0.$$

   Això expressa que la quantitat de fluid dins C és constant (entra el mateix que surt). Aquesta condició és equivalent a

$$\mathrm{div}\mathbf{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 0$$

   A la quantitat Q se l'anomena *flux* del vector $\mathbf{V}$ a través del contorn C. En fluids més generals la quantitat Q pot ser no nul·la.

En general, per fluxos que no necessàriament provenen d'un potencial, a la quantitat

$$\Gamma := \int_C (V_1 dx + V_2 dy) = \int_C V_t ds$$

on C és una corba tancada, V_t la component tangencial de $\mathbf{V}$ en C (vegeu la figura 8.2) i ds l'element de longitud, se l'anomena *circul·lació* del flux al voltant de C.

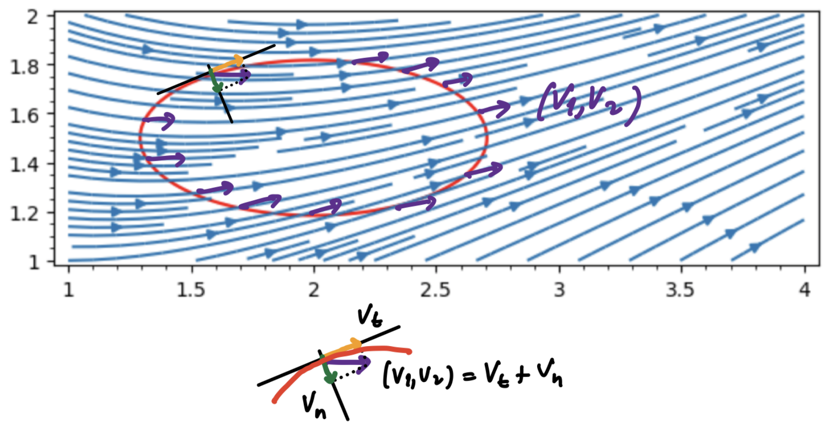


Figura 8.2: Component tangent V_t i normal V_n del flux respecte un circuit.

Sigui $\psi(x, y)$ una funció harmònica conjugada de la velocitat potencial $\varphi(x, y)$ definida al $\Omega \subset \mathbb{C}$ (és a dir que $\varphi_x = \psi_y$, $\varphi_y = -\psi_x$), a la funció analítica en Ω donada per

$$\Phi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

se l'anomena *potencial complex.*

Notació 8.1. Fixem la següent notació pel capítol:

- $\Phi(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$ s'anomena *potencial complex*
- φ és la *funció potencial* (o velocitat potencial) i ψ la *funció de corrent.*
- Les corbes $\varphi = c$ són les *línies equipotencials* i $\psi = c$ les *línies de corrent o de flux* (són ortogonals).
- El camp del flux, o *velocitat de corrent*, $\mathbf{V}$ satisfà

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{V}(z) &= Ve^{i\alpha} = V_1 + iV_2 = \overline{\Phi'(z)}, \\ V &= |\mathbf{V}| = |\Phi'|, \quad \alpha = -\arg(\overline{\Phi'}), \\ \mathbf{V} &= \text{grad}\varphi. \end{aligned}\right\}$$

- Els punts on $\Phi'(z) = 0$ s'anomenen punts *estacionaris* o *d'estancament* (en aquests punts la velocitat és zero). •

Observació 8.2 (Comandes amb `Sage`.)**.** Per dibuixar les línies de corrent i les línies equipotencials caldrà la comanda `contour_plot` i per dibuixar els camps (amb fletxes de direcció) `plot_vector_field` o `streamline_plot`. •

Exercici 8.1.1. *Proveu que $\Gamma = 0$ en un flux potencial (suposeu que la funció potencial és de classe C^2 com a mínim).* ◁

Exercici 8.1.2. *Proveu que per fluxos definits en un domini $\Omega \subset \mathbb{C}$ que satisfan les quatre hipòtesis anteriors, la velocitat potencial $\varphi(x, y)$ és una funció harmònica.* ◁

Exercici 8.1.3. *Proveu que* $\overline{\Phi'(z)} = \boldsymbol{V}(z) = V_1 + iV_2$. ◁

8.2 Fluxos bàsics.

Exemple 8.3 (Flux uniforme)**.** Ve donat pel potencial $\Phi(z) = V_0 e^{-\delta i} z$, amb $V_0, \delta \in \mathbb{R}$.

Trobem la seva expressió. Recordem que $\mathbf{V} = \overline{\Phi'(z)} = \overline{V_0 e^{-\delta i}} = V_0 e^{\delta i}$, $V = V_0$, per tant,

$$\varphi = \operatorname{Re}(\Phi(z)) = \operatorname{Re}(V_0 e^{-\delta i}(x + iy)) = V_0(\cos\delta \cdot x + \sin\delta \cdot y).$$

$$\psi = \operatorname{Im}(\Phi(z)) = \operatorname{Im}(V_0 e^{-\delta i}(x + iy)) = V_0(-\sin\delta \cdot x + \cos\delta \cdot y).$$

Les línies de flux $\psi = c$ són rectes amb pendent $\tan\delta$ i δ és l'angle que formen les línies de flux amb l'eix real. ♢

Exemple 8.4 (Font al punt $z = a$)**.** Aquí $\Phi(z) = k\log(z - a)$, $k \in \mathbb{R}$. Quan $k > 0$ s'anomena *font*, si $k < 0$ una *pica* (sumidero, sink).

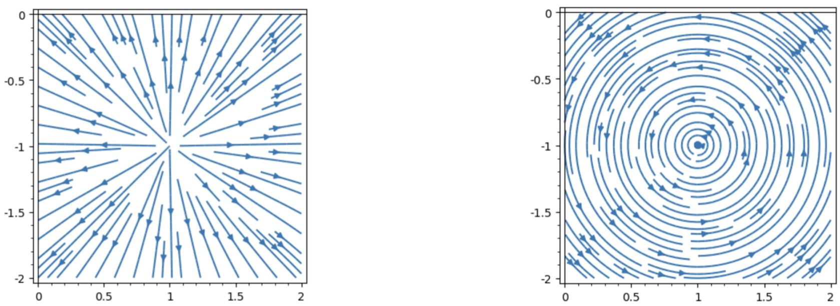


Figura 8.3: A esquerra font amb $k = 2$, a dreta remolí amb $k = 2$. $a = 1 - i$.

Trobem l'expressió de $\mathbf{V}$, V, φ i ψ. Tenim que $\overline{\Phi'(z)} = \dfrac{k}{\bar{z} - \bar{a}} = k\dfrac{z - a}{|z - a|^2} = \dfrac{k}{|z - a|^2}(x - a_1 + i(y - a_2))$. Llavors

$$\mathbf{V}(x, y) = \frac{k}{|z - a|^2}(x - a_1, y - a_2), \quad V(x, y) = \frac{k}{|z - a|}.$$

Les direccions de flux que dona $\mathbf{V}$ segueixen la direcció de $z - a$, si $k > 0$ surten, una font, i si $k < 0$ entren, una pica. Com que $\Phi = k\log(z - a) = k(\log|z - a| + i\arg(z - a))$ tenim que $\psi(x, y) = k\arg(z - a)$ i les corbes $\psi = c$ són línies que surten de a com es veu a l'esquerra de la figura 8.3. Observem que

$$\Gamma + iQ = \int_C \Phi'(z)dz = \int_C \frac{kdz}{z - a} = 2k\pi i.$$

Aleshores $\Gamma = 0$ i $Q = 2k\pi$. No té circul·lació i la potència és $2k\pi$. ♢

Exemple 8.5 (Flux amb circul·lació)**.** Estudiem el cas $\Phi(z) = -ik\log(z-a)$ $k \in \mathbb{R}$. Veurem que la velocitat del flux és inversament proporcional a la distància al punt a. Diem que en el punt a i ha un *remolí* de força k.

Procedim com en el cas anterior. Tenim que $\overline{\Phi'(z)} = \dfrac{ki}{\bar{z}-\bar{a}} = ki\dfrac{z-a}{|z-a|^2} = \dfrac{ki}{|z-a|^2}(x - a_1 + i(y-a_2)) = \dfrac{k}{|z-a|^2}(-(y-a_2)+i(x-a_1))$. Llavors

$$\mathbf{V}(x,y) = \frac{k}{|z-a|^2}(-(y-a_2), x-a_1), \quad V(x,y) = \frac{k}{|z-a|}.$$

Les direccions de flux que dona $\mathbf{V}$ segueixen direccions de circumferències amb centre a, si $k > 0$ en direcció antihorària i si $k < 0$ en direcció horària, en els dos cassos és un remolí.

Com que $\Phi = -ki\log(z-a) = -ki(\log|z-a| + i\arg(z-a)) = k(\arg(z-a) - i\log(|z-a|))$ tenim que $\psi(x,y) = -k\log|z-a|$ i les corbes $\psi = c$ són circumferències centrades a a tal i com es veu a la dreta de la figura 8.3. Observem que si C envolta a, aleshores

$$\Gamma + iQ = \int_C \Phi'(z)dz = \int_C \frac{-ikdz}{z-a} = 2k\pi.$$

Aleshores $\Gamma = 2k\pi$ i $Q = 0$. La circul·lació és $2k\pi$ i la potència és 0. $\diamondsuit$

Exercici 8.2.1. Superposició. *Sumant diferents potencials complexos es poden descriure fluxos més sofisticats. Un exemple important s'obté sumant una font al punt $-a$ amb una pica al punt a:*

$$\Phi(z) = k\log(z+a) - k\log(z-a) = k\log\left(\frac{z+a}{z-a}\right).$$

Trobeu l'expressió de $\mathbf{V}$, V, φ i ψ. Dibuixeu les línies de corrent ($\psi = c$). $\triangleleft$

Exercici 8.2.2. *En l'exercici anterior, fem $a \to 0$ i $k \to \infty$ de manera que $2ka = \mu$ sigui finit. Veure que al límit obtenim el potencial complex $\Phi(z) = \mu/z$ que s'anomena* doblet *o* dipol. *Ve a ser una font i una pica separades per una distància infinitesimal. La quantitat $2\pi\mu$ s'anomena* moment *del doblet. Trobeu l'expressió de $\mathbf{V}$, V, φ i ψ. Dibuixeu les línies de corrent ($\psi = c$).* $\triangleleft$

Exercici 8.2.3. Font-remolí. *Estudiar el flux amb funció potencial $\Phi(z) = \dfrac{\Gamma + iQ}{2\pi i}\log(z-a)$. Discutiu segons els valors de Γ (circul·lació o intensitat) i Q (potència). Feu dibuixos de les línies de camp segons els signes de Γ i Q.* $\triangleleft$

8.3 Obstacles

Un problema important en la teoria de fluids és determinar el model de corrent que es mou inicialment a velocitat uniforme V_0 i que ha d'evitar un obstacle. La idea general

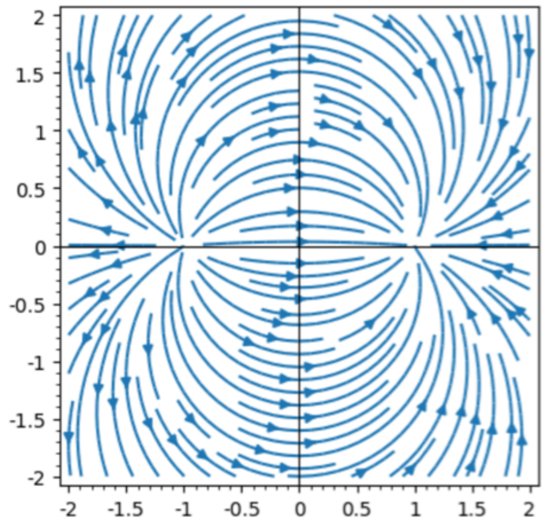


Figura 8.4: Superposició amb $a = 1$.

és considerar un potencial complex de la forma $\Phi(z) = V_0 z + G(z)$ on $G(z)$ compleix que $\lim_{z\to\infty} G'(z) = 0$. Això vol dir que lluny de l'obstacle el corrent ve donat per $V_0 z$. De vegades cal també que aquest nou potencial Φ tingui la frontera de l'obstacle com a trajectòria.

Exemple 8.6. Estudiem el corrent del fluid amb potencial complex donat per

$$\Phi(z) = V_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

amb $V_0, a \in \mathbb{R}$.

Ja veiem que és una superposició d'un flux lineal (quan z és gran) i un doblet (quan z prop de zero).

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= V_0 \left(x \left(1 + \frac{a^2}{|z|^2} \right) + iy \left(1 - \frac{a^2}{|z|^2} \right) \right) \\
\varphi &= V_0 x \left(1 + \frac{a^2}{|z|^2} \right) \\
\psi &= V_0 y \left(1 - \frac{a^2}{|z|^2} \right) \\
\mathbf{V} &= \overline{\Phi'(z)} = V_0 \left(1 - \frac{a^2 z^2}{|z|^4} \right) \\
V &= |V_0| \left| 1 - \frac{a^2 z^2}{|z|^4} \right|.
\end{aligned}$$

Comprovem ara que $|z| = a$ és una línia de corrent: observem que els punts de $C = \{z = x + iy : |z|^2 = a^2\}$ satisfan $\psi(x, y) = ct$. En efecte, si $z \in C$ llavors

$$\psi(z) = V_0 y(1 - a^2/a^2) = 0$$

i C és la corba de nivell zero, és una línia de flux. Al la figura 8.5 es pot veure el flux per $V_0 = a^2 = 3$.

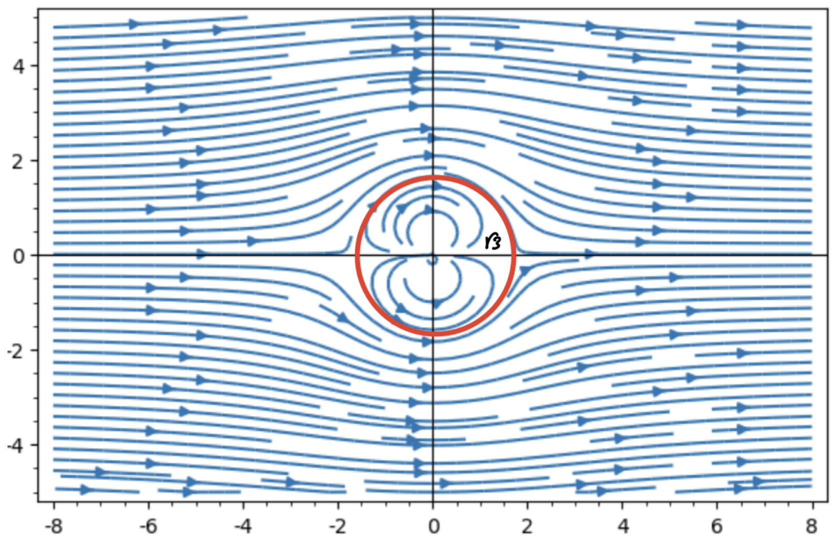


Figura 8.5: Flux per $\Phi(z) = 3(z + 3/z)$.

$\diamondsuit$

Teorema 8.7. *Si $f(z)$ és un potencial complex amb singularitats fora de $|z| > R$ llavors*

$$\Phi(z) = f(z) + \overline{f\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}$$

és un potencial complex tal que $|z| = R$ és una línia de flux (corrent) i que té les mateixes singularitats que $f(z)$ a la regió $|z| > R$.

Recordem que si $f(z)$ és analítica en una regió Ω tal que $\bar{\Omega} = \Omega$ llavors $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ és analítica i $g'(z) = \overline{f'(\bar{z})}$.

Demostració. Si $|z| = R$ llavors $\Phi(z) = f(z) + \overline{f(R^2 z/|z|^2)} = f(z) + \overline{f(z)} \in \mathbb{R}$. Llavors $\psi(z) = 0$ per tot z de la circumferència $|z| = R$, llavors aquesta circumferència és línia de flux. Sigui p punt singular de f, per hipòtesi $|p| > R$, llavors $|R^2/\bar{z}| < R$ i p no és punt singular de $\overline{f\,(R^2/\bar{z})}$. Les singularitats de Φ fora de la circumferència són les que provenen de f i no de la part afegida. $\square$

Exercici 8.3.1. *Modifiquem el flux amb potencial donat per $f(z) = \log(z+2)$ que és una font sortint des del punt $z = -2$ (vist en un exemple/exercici anterior). Per això considerem la modificació donada pel potencial*

$$\Phi(z) = f(z) + \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \log(z+2) + \overline{\log\left(\frac{1}{\bar{z}} + 2\right)}.$$

a) *Descomposeu Φ en fluxos coneguts.*

b) *Calculeu $\Phi'(z)$ i confirmeu el que es demostra a l'apartat anterior.*

c) *Vegeu que per z amb $|z|$ molt gran resulta $\Phi'(z) \approx \dfrac{1}{z+2}$ i que llavors lluny de $z=-2$ el flux associat a Φ és com una font sortint de $z=-2$.*

d) *Mostreu amb un gràfic com eviten el disc unitari les línies de flux (feu servir* `contour_plot` *i* `streamline_plot`*).* ◁

8.4 Expressió general (recapitulació).

Proposició 8.8. *Si $\Phi(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$ aleshores*

$$\Gamma = \oint_C V_t ds = \oint_C (V_1 dx + V_2 dy) = \oint_C d\varphi$$
$$Q = \oint_C V_n ds = \oint_C (-V_2 dx + V_1 dy) = \oint_C d\psi$$

i que llavors

$$\Gamma + iQ = \int_C \Phi'(z) dz.$$

Si $\Phi'(z)$ està definida a l'interior de C i té un nombre finit de punts singulars $\{p_k\}$, aleshores

$$\Gamma + iQ = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(\Phi'(z), p_k).$$

Demostració. Tenim que $\Phi'(z) = \varphi_x + i\psi_x = V_1 - iV_2 = \psi_y - i\varphi_y$. Aleshores

$$Q = \oint_C V_n ds = \oint_C (-V_2 dx + V_1 dy) = \oint_C \psi_x dx + \psi_y dy = \oint_C d\psi$$

i

$$\Gamma = \oint_C V_t ds = \oint_C (V_1 dx + V_2 dy) = \oint_C \varphi_x dx + \varphi_y dy = \oint_C d\varphi.$$

Ara bé

$$\begin{aligned}\Phi'(z)dz = (\varphi_x + i\psi_x)(dx + idy) &= \varphi_x dx - \psi_x dy + i(\psi_x dx + \varphi_x dy) = \\ &= \varphi_x dx + \varphi_y dy + i(\psi_x dx + \psi_y dy) = d\varphi + i d\psi.\end{aligned}$$

i podem concloure que

$$\Gamma + iQ = \int_C \Phi'(z) dz.$$

La darrera afirmació de l'exercici és conseqüència del teorema dels residus. □

Proposició 8.9. *Si a és un pol d'ordre finit de $\Phi'(z)$, per $\Phi(z)$ hi ha un entorn al voltant de a de manera que*

$$\Phi(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{p}{2\pi}\frac{1}{z-a} + \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i}\log(z-a) + c_0 + c_1(z-a) + \cdots .$$

Demostració. Per tenir $\Phi'(z)$ un pol d'ordre finit integrant obtenim el resultat. □

Llavors, segons el que hem vist al llarg del capítol, diem que

- $\Phi(z) = \dfrac{\Gamma + iQ}{2\pi i}\log(z-a)$ determina en a una *font-remolí* de potència Q i intensitat Γ, la denotem per $(a; Q, \Gamma)$. Quan $Q = 0$ és un remolí, i quan $\Gamma = 0$ és una font ($Q > 0$) o una pica ($Q < 0$).
- $\Phi(z) = \dfrac{p}{2\pi}\dfrac{1}{z-a}$ determina en a un *doblet* de moment p, el denotem per $(a; p)$ ($\overline{p}$ determina la direcció la direcció del doblet que passa per a).
- $\Phi(z) = \dfrac{c_{-k}}{(z-a)^k}$ determina un *multiplet* d'ordre $2k$ en el punt a.[2]

Exercici 8.4.1. *Pels z on $\boldsymbol{V}(z) = \overline{\Phi'(z)} = 0$ diem que hi ha un* punt estacionari *del corrent (per exemple és aquell punt d'un riu on una fulla petita s'ha quedat aturada però que al seu voltant circula l'aigua).*

a) Per $\Phi(z) = z^n$ el 0 és un punt estacionari d'ordre $n-1$. Feu un dibuix amb les línies de flux i les línies equipotencials superposades per $n = 2, 3, 4$.

b) Podeu deduir experimentalment quin angle formen les línies equipotencials i les línies de flux?

c) Proveu que si un punt estacionari a és un zero d'ordre $n-1$ llavors les línies equipotencials i de corrent ($\varphi = ct., \psi = ct.$) formen una angle $\pi/2n$ en el punt estacionari (feu-lo com a mínim pel cas $\Phi'(z) = Cz^{n-1}, C \in \mathbb{C}$). Quin angle formen una línia de corrent i una línia equipotencial quan es creuen en un punt no estacionari?

Exercici 8.4.2. *Discutir el moviment del fluid amb potencial complex igual a*

a) $\Phi(z) = \dfrac{\Gamma + iQ}{2\pi i}\log\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$ *on $a, b \in \mathbb{C}$ i $Q, \Gamma \in \mathbb{R}$..*

b) $\Phi(z) = az + \dfrac{\Gamma}{2\pi i}\log(z)$ *on $a, \Gamma > 0$.*

c) $\Phi(z) = az + \dfrac{Q}{2\pi}\log(z)$ *on $a, Q > 0$.*

[2] La notació i comportament a l'∞ és similar, si $\Phi(z) = c_n z^n + \cdots + \frac{p}{2\pi}z + \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i}\log(z) + c_0 + \frac{c_1}{z}\cdots$ direm que el terme en $\log(z)$ determina una *font-remolí* de potència $-Q$ i intensitat $-\Gamma$, el terme en z un *doblet* de moment p i els de z^k *multiplets* d'ordre $2k$.

d) $\Phi(z) = \dfrac{p}{2\pi z} + \dfrac{\Gamma}{2\pi i}\log(z)$ *on* $p, \Gamma > 0$. ◃

Exercici 8.4.3. *Discutir el moviment del fluid amb potencial complex*

$$\Phi(z) = V_0\left(z + \frac{R^2}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\log(z), \text{ amb } \Gamma, V_0, R > 0.$$

Particularment estudieu els casos $\Gamma < 4\pi R V_0$, $\Gamma > 4\pi R V_0$ *i* $\Gamma = 4\pi R V_0$. *Dibuixeu exemples de cadascun dels casos.* ◃

Exercici 8.4.4. *Donar un potencial complex que te fonts-remolins* $\{(a_k; Q_k, \Gamma_k) : k = 1, \ldots, n\}$ *i velocitat* $\boldsymbol{V}_\infty = V e^{i\alpha}$ *a l'infinit.* ◃